السؤال الأول

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \text{ (2 درجة)}$$

$y = 2$ مقارب افقي في جوار $+\infty$ أو عند $+\infty$ (3 درجة)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \text{(2 درجة)}$$

$y = 2$ مقارب افقي في جوار $-\infty$ أو عند $-\infty$(3 درجة)

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty \text{(2 درجة)}$$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$.(3 درجة)

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty \text{(2 درجة)}$$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$.(3 درجة)

الطلب الثاني:

$$\ell = \frac{b+a}{2} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \text{ (5 درجة)}$$

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2} = b - \ell = 0.01 = 10^{-2} = \frac{1}{100} \text{ (5 درجة)}$$

نعوض في القانون:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ (5 درجة)}$$

$$\left|\frac{2x+3}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{2x+3-2x-2}{x-1}\right| < \frac{1}{100} \text{ (3 درجة)}$$

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{100}$$

نقلب:

$$x - 1 > 100$$

$$x > 99 \text{ (2 درجة)}$$

نختار $A = 99$.

السؤال الثاني

نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n) = 5^n - 3^n = 2k \text{ (5 درجة)}$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$5^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0 \text{ (5 درجة)}$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$5^n - 3^n = 2k \text{ ...... الفرض (5 درجة)}$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$5^{n+1} - 3^{n+1} = 2k' \text{ ...... الطلب (5 درجة)}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$5^n - 3^n = 2k \text{ (5 درجة)}$$

نضرب بـ 5:

$$5^{n+1} - 5.3^n = 10k \text{ (5 درجة)}$$

نطرح 3^{n+1} من الطرفين:

$$5^{n+1} - 3^{n+1} = 10k - 3^{n+1} + 5.3^n \text{ (5 درجة)}$$

$$= 10k - 2.3^n = 2(5k - 3^n) = 2k' \text{ (5 درجة)}$$

فالقضية صحيحة.

السؤال الثالث

شرط الاستمرار:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$ (10 درجة)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$$ ح ع ت (درجة 5 في حال الحل الصحيح ضمناً)

$$f(x) = \frac{x^3 - 4(1-\cos x)}{x^2} = \frac{x^3 - 4\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2} = x - 8\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2 = x - 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$ (5 درجة)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -2(1)^2 = -2$$ (5 درجة)

ولدينا:

$$f(0) = m - 602$$ (5 درجة)

نعوض في شرط الاستمرار:(5 درجة)

$$m - 602 = -2$$

$$m = 600$$ (5 درجة)

التمرين الأول

1- نوجد x_{n+1}:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= u_{n+1} + 4 \\ &= 2u_n + 4 + 4 \\ &= 2u_n + 8 \end{aligned}$$ (5 درجة)

(5 درجة) $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2u_n + 8}{u_n + 4} = \frac{2(u_n+4)}{u_n+4}$$ (5 درجة)

$$= 2 = q$$

هندسية أساسها $q = 2$ (5 درجة)

2- $x_n = x_0 . q^n$ (5 درجة)

$$x_0 = u_0 + 4 = 0 + 4 = 4$$ (3 درجة)

نعوض في القانون:

$$x_n = 4 \times 2^n = 2^2 \times 2^n = 2^{n+2}$$ (2 درجة)

$$x_n = u_n + 4 \Rightarrow u_n = x_n - 4$$ (5 درجة)

$$u_n = 2^{n+2} - 4$$ (5 درجة)

3- لحساب المجموع:

$$a = x_1 = 4 \times 2^1 = 8$$ (5 درجة)

$$n = n + 1 - 1 = n$$ (5 درجة)

نعوض في قانون المجموع:

(5 درجة) $$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{8(1-2^n)}{1-2}$$

$$= -8(1-2^n) = 8(2^n - 1)$$ (5 درجة)

التمرين الثاني

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$ (درجة 5 + 5)

إذن لا يقبل أي مقارب افقي.(درجة 5)

الطلب الثاني:

$$f(x) - x = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$ (درجة 10) $$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$ (درجة 5)

بفرض $y = x$:(درجة 10)

$$f(x) - y = f(x) - x$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$$ (درجة 5)

الطلب الثالث:

$$f(x) - x > 0$$ (درجة 10)

C فوق Δ.(درجة 5)

<u>أو دراسة وضع النسبي عن طريق الجدول ويجب أن يكون C فوق Δ.</u>

المسألة الأولى

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}}$$

1- نوجد مجموعة التعريف:

$$D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$$ (درجة 5)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$ (درجة 5)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$ (درجة 5)

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$ (درجة 3)

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.(درجة 2)

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$ (درجة 3)

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه.(درجة 2)

2- بقسمة التابع قسمة إقليدية:(درجة 5)

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$$ (درجة 5)

نشكل الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{4}{x+1}$$ (درجة 3)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$ (درجة 2)

3- لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = 0$$ (درجة 4)

$$4 \neq 0$$

مستحيلة.

<u>كل سطر 2 درجات.</u>

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{4}{x+1}$	$-$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	تحت	$\|$	فوق

4- لدراسة التغيرات:

التابع $\boldsymbol{f}$ معرف واشتقاق على $\mathbb{R}\backslash\{-\mathbf{1}\}$ (5 درجة)

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2-3}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$ (3 درجة)

$f'(x)=0$ (3 درجة)

$$x^2+2x-3=0$$
$$(x+3)(x-1)=0$$

$x_1=1\ ,x_2=-3$ (2 + 2 درجة)

$f(1)=\frac{4}{2}=2$ (2 درجة)

$f(-3)=\frac{12}{-2}=-6$ (2 درجة)

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f(x)$			0		‖		0		
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↗	2	↘	$+\infty$

كل سطر 2 درجات.

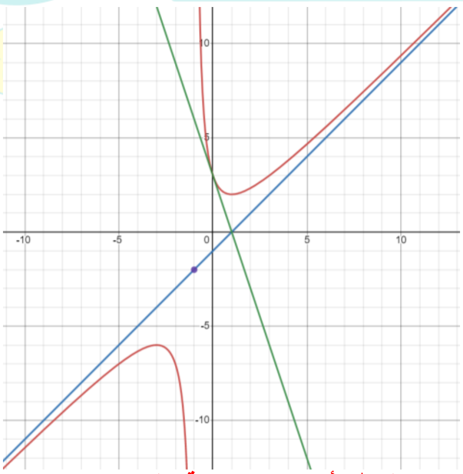
5- التقاطع مع محور التراتيب:

$x=0f'(x)=0$ (3 درجة)

$y_T=f'(0)(x-0)+f(0)$ (2 درجة)

$=-3(x-0)+3=-3x+3$ (2 درجة)

6- الرسم:



الخط الأخضر: 4 درجة (المماس T)
الخط الأزرق والخط العامودي الأسود: 2+2 درجة (المقاربات)
الخط الأحمر: 10 درجات (الخط البياني)