أولاً :

في معلم متجانس $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن لدينا النقاط $A(2,3,0)$ و $B(2,3,6)$ و $C(2,\alpha,3)$ والمطلوب:

1. أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين أياً تكن α من $\mathbb{R}$
2. عين قيم α حتى يكون المثلث (ABC) قائم في C .

الحل:

1. إثبات أن (ABC) متساوي الساقين:

نوجد كلاً من:

- $\overrightarrow{AB}(0,0,6)$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(0)^2+(0)^2+(6)^2} = \sqrt{36} = 6$$

- $\overrightarrow{AC}(0,\alpha-3,3)$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(0)^2+(\alpha-3)^2+(3)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2+9}$$

- $\overrightarrow{BC}(0,\alpha-3,-3)$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{(0)^2+(\alpha-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2+9}$$

ومنه:

المثلث (ABC) متساوي الساقين أيّاً تكن α من $\mathbb{R}$

2. تعيين α:

المثلث (ABC) قائم في C فإنه يتحقق:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$(6)^2 = \left(\sqrt{(\alpha-3)^2+9}\right)^2 + \left(\sqrt{(\alpha-3)^2+9}\right)^2$$

$$36 = (\alpha-3)^2+9+(\alpha-3)^2+9$$

$$36 = 2(\alpha-3)^2+18$$

$$2(\alpha-3)^2 = 18$$

$$(\alpha-3)^2 = 9$$

إما : $\alpha-3 = 3 \Rightarrow \alpha = 6$

أو: $\alpha-3 = -3 \Rightarrow \alpha = 0$

ثانياً:

في معلم متجانس $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $A(-1,2,3)$ و $B(3,0,1)$ و $C(2,5,3)$

والمطلوب:

1. جد على محور التراتيب نقطة D متساوية البعد عن النقطتين A و B
2. عيّن E ليكون الرباعي $ABCE$ متوازي أضلاع ثم أوجد K مركز متوازي أضلاع.

الحل:

1. إيجاد النقطة D :

بما أن D نقطة تقع على محور التراتيب فإن إحداثياتها تكون: $D(0,y,0)$

وبما أن D متساوية البعد عن A و B فإنه يتحقق:

$$DA = DB$$

$$\sqrt{(-1)^2+(2-y)^2+(3)^2} = \sqrt{(3)^2+(-y)^2+(1)^2}$$

$$\sqrt{10+(2-y)^2} = \sqrt{10+y^2}$$

نربع الطرفين:

$$10+(2-y)^2 = 10+(y)^2$$

$$(2)^2 - 2(2)(y) + (y)^2 = y^2$$

$$4-4y+y^2 = y^2$$

$$4y = 4$$

$$y = 1$$

ومنه: $D(0,1,0)$

2. تعيين E :

بفرض: $E(x,y,z)$

و بما أن $ABCE$ متوازي أضلاع فإنه يتحقق:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$$

$$\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-x\\5-y\\3-z\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

- $4 = 2 - x \Rightarrow x = -2$
- $-2 = 5 - y \Rightarrow y = 7$
- $-2 = 3 - z \Rightarrow z = 5$

ومنه: $E(-2,7,5)$

تعيين K :

مركز متوازي الأضلاع $ABCE$ يمثل إحداثيات النقطة K منتصف القطعة $[AC]$ أيّ:

$$K\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}, \frac{z_A + Z_C}{2}\right)$$

3

$$\Rightarrow K\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 3\right)$$

ثالثاً:

بفرض لدينا النقاط:

$A(2,-1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(-1,a,b)$

والمطلوب:

1. جد العددين الحقيقين a و b حتى تكون النقاط A و B و C واقعة على استقامة واحدة.
2. جد إحداثيات النقطة D التي تحقق العلاقة الشعاعية :

$$\overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

الحل:

1. تعين a و b :

حتى تكون النقاط A و B و C على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً ويتحقق ذلك إذا وجِدَ عدد حقيقي λ يحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\,\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-3\\a+1\\b-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\lambda\\a\lambda+\lambda\\b\lambda-3\lambda\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\begin{cases}-1 = -3\lambda \;\dots (1)\\ 1 = a\lambda + \lambda \;\dots (2)\\ -4 = b\lambda - 3\lambda \;\dots (3)\end{cases}$$

من (1) نجد:

$$-1 = -3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

نعوض في (2) :

$$1 = a\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \Rightarrow a = 2$$

نعوض في (3) :

$$-4 = b\left(\frac{1}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow b = -9$$

ومنه: $C(-1,2,-9)$

2. لتكن: $D(x,y,z)$

ولدينا:

$$\overrightarrow{DA} = 3\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\begin{pmatrix}2-x\\-1-y\\3-z\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\2\\-8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2-x\\-1-y\\3-z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\-12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2-x\\-1-y\\3-z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-8\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$2 - x = -2 \Rightarrow x = 4$$
$$-1 - y = 2 \Rightarrow y = -3$$
$$3 - z = -8 \Rightarrow z = 11$$

ومنه: $D(4,-3,11)$

رابعاً:

في معلم متجانس $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ليكن لدينا النقاط : $A(-1,3,0)$ و $B(1,-2,3)$ والمطلوب:

1. جد كل نقطة من محور الفواصل تبعد عن A مسافة قدرها $\sqrt{18}$
2. عيّن C نظير A بالنسبة إلى B .

الحل:

1. بفرض N نقطة من محور الفواصل فإن إحداثياتها تكون: $N(x,0,0)$ وبما أن N تبعد عن A مسافة قدرها $\sqrt{18}$ فإنه يتحقق:

$$AN = \sqrt{18}$$
$$\sqrt{(x+1)^2 + (-3)^2 + (0)^2} = \sqrt{18}$$
$$\sqrt{(x+1)^2 + 9} = \sqrt{18}$$

نربع الطرفين:

$$(x+1)^2 + 9 = 18$$
$$(x+1)^2 = 9$$

إما: $x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

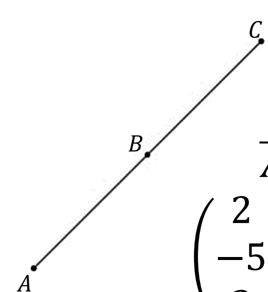
أو: $x + 1 = -3 \Rightarrow x = -4$

ومنه النقاط :

$$N_1(2,0,0)$$
$$N_2(-4,0,0)$$

من محور الفواصل تبعد عن A مسافة قدرها $\sqrt{18}$

2. تعيين C:



- بفرض $C(x,y,z)$
- وليكن لدينا:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-3 \end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

- $2 = x - 1 \Rightarrow x = 3$
- $-5 = y + 2 \Rightarrow y = -7$
- $3 = z - 3 \Rightarrow z = 6$

ومنه: $C(3,-7,6)$

خامساً:

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ليكن d مستقيماً يمر بالنقطة $A(1,-1,1)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(1,2,0)$ وليكن d' مستقيماً يمر بالنقطة $B(7,-1,-3)$ وشعاع توجيهه $\vec{v}(1,-1,-1)$ والمطلوب:

1. بيّن أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً ، ثم أثبت أن الأشعة $\vec{v}$ و $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً.
2. استنتج أن المستقيمين d و d' متقاطعان، ثم أوجد نقطة تقاطعهما J .

الحل:

.1

- إثبات أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً :

نلاحظ أنه لا ينتج إحداهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي ، إذاً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً .

- إثبات أن $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطة خطياً:

لدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً ، نبحث عن عددين a و b يحققان العلاقة:

$$\overrightarrow{AB} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$$
$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ -b \\ -b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2a-b \\ -b \end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\begin{cases} 6 = a + b \ldots (1) \\ 0 = 2a - b \ldots (2) \\ -4 = -b \ldots (3) \end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases} 0 = 2a - b \ldots (2) \\ -4 = -b \ldots (3) \end{cases}$$

من (3) نجد : $b = 4$

نعوض في (2) فنجد أن:

$$0 = 2a - 4$$
$$2a = 4$$
$$a = 2$$

نتحقق في (1) وفق:

$$6 = 2 + 4$$
$$6 = 6$$

محققة

ومنه للجملة حل وحيد و يوجد عددين $a = 2$ و $b = 4$ يحققان العلاقة :

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$$

وبالتالي الأشعة $\vec{v}$ و $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً

2. استنتاج أن المستقيمين d' و d متقاطعان

- بما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً فإن المستقيمين d و d' غير متوازيان
- وبما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً فإن المستقيمين d' و d يقعان في مستوٍ واحد

⇐ومنه نستنتج أن d' و d متقاطعين

إيجاد نقطة التقاطع J:

- لتكن $J(x, y, z)$

وبما أن J نقطة تقاطع المستقيمين d و d' فإن:

- $J \in d$ وبالتالي $\overrightarrow{AJ}$ و $\vec{u}$ مرتبطين خطياً
- $J \in d'$ وبالتالي $\overrightarrow{BJ}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً
- ولدينا : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$

حسب شال:

$$\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JB} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$$
$$\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{BJ} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$$

بالمطابقة نجد :

$$\overrightarrow{AJ} = 2\,\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

- $x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$
- $y + 1 = 4 \Rightarrow y = 3$
- $z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$
- ومنه:

$$J(3,3,1)$$

سادساً:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ليكن لدينا النقاط:

$A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$

والمطلوب:

1. عيّن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبيّن أنهما يشكلان مستوٍ p.
2. عيّن a فاصلة النقطة $M(a,1,3)$ لتكون الأشعة $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً.
3. أوجد العلاقة بين الفاصلة وترتيب النقطة $D(x, y, 3)$ لتقع النقاط A و B و C و D في مستوٍ P .

الحل:

1. لدينا :

$$\overrightarrow{AB}(-2,0,-1)$$
$$\overrightarrow{AC}(0,-1,-3)$$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً، لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد

ومنه :

النقاط C و B و A تعين مستوٍ شعاعي توجيهه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

2. تعيين a:

لدينا $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين غير مرتبطين خطياً، نبحث عن α و β يحققان العلاقة:

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} a-3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \\ -3\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ -\beta \\ -\alpha-3\beta \end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\begin{cases} a-3 = -2\alpha \;...\;(1) \\ -1 = -\beta \;...\;(2) \\ 2 = -\alpha-3\beta \;...\;(3) \end{cases}$$

من (2) نجد :

$$\beta = 1$$

نعوض في(3)فنجد أن :

$$2 = -\alpha - 3 \Rightarrow \alpha = -5$$

نعوض في(1) فنجد أن :

$$a-3 = 10 \Rightarrow a = 13$$

إذاً: $M(13,1,3)$

3. حتى تكون النقاط A و B و C و D في المستوي p، يجب أن تكون الأشعة الثلاثة :

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً.

أيّ: لدينا $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً نبحث عن عددين λ و μ يحققان العلاقة:

$$\overrightarrow{AD} = \mu\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ 2 \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ 0 \\ -\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \\ -3\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ -\lambda \\ -\mu-3\lambda \end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\begin{cases} x-3 = -2\mu \;...\;(1) \\ y-2 = -\lambda \;...\;(2) \\ 2 = -\mu-3\lambda \;...\;(3) \end{cases}$$

من (1) نجد:

$$x-3 = -2\mu$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{x-3}{-2}$$

من (2)نجد :

$$\lambda = 2-y$$

نعوض قيمة λ و μ في (3) فنجد:

$$2 = -\left(\frac{x-3}{-2}\right) - 3(2-y)$$

$$2 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - 6 + 3y$$

$$4 = x - 3 - 12 + 6y$$

$$x + 6y - 19 = 0$$

سابعاً:

$ABCD-$ هرم

قاعدته $ABCD$

مربع طول ضلعه يساوي 3 ، (EA) عمودي على $(ABCD)$

حيث $EA = 6$ ولتكن O نقطة تلاقي قطري المربع

باختيار معلم متجانس $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$:

1. عين إحداثيات النقاط B و C و D و E في المعلم المعطى

2. ليكن G مركز ثقل المثلث ECD :

a) عين إحداثيات النقطة G ثم أحسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AO}$ ، $\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{BE}$

b) أثبت أن المستقيم (BE) يوازي (AGO)

الحل:

1. تعيين إحداثيات رؤوس الهرم:

$B(3,0,0)$	$A(0,0,0)$
$E(0,0,3)$	$D(0,3,0)$
$C(3,3,0)$	

- تعيين إحداثيات O:

بما أن O نقطة تلاقي قطري المربع $ABCD$ ، فإن النقطة o منتصف القطعة المستقيمة $[BD]$، أي :

$$O\left(\frac{x_B+x_D}{2},\frac{y_B+y_D}{2},\frac{z_B+z_D}{2}\right)$$

$$O\left(\frac{3+0}{2},\frac{0+3}{2},\frac{0+0}{2}\right)$$

$$O\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$$

.2

a) تعيين إحداثيات G :

$$G\left(\frac{x_E+x_C+x_D}{3},\frac{y_E+y_C+y_D}{3},\frac{z_E+z_C+z_D}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{0+3+0}{3},\frac{0+3+3}{3},\frac{3+0+0}{3}\right)$$

$$G(1,2,1)$$

مركبات الأشعة:

- $\overrightarrow{AO}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$
- $\overrightarrow{AG}(1,2,1)$
- $\overrightarrow{BE}(-3,0,3)$

b) إثبات توازي المستقيم (BE) والمستوي (AGO)

فكرة:

يكون المستقيم (BE) يوازي المستوي (AGO) إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{BE}$ مرتبطة خطياً.

الحل:

لدينا $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AO}$ شعاعين غير مرتبطين خطياً لأن المركبات غير متناسبة نبحث عن عددين β و α يحققان العلاقة:

$$\overrightarrow{BE}=\alpha\,\overrightarrow{AO}+\beta\,\overrightarrow{AG}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\alpha\\\frac{3}{2}\alpha\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\2\beta\\\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\alpha+\beta\\\frac{3}{2}\alpha+2\beta\\\beta\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\begin{cases}-3=\frac{3}{2}\alpha+\beta\ ...(1)\\0=\frac{3}{2}\alpha+2\beta\ ...(2)\\3=\beta\ ...(3)\end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases}0=\frac{3}{2}\alpha+2\beta\ ...(2)\\3=\beta\ ...(3)\end{cases}$$

من (3) نجد: $\beta=3$

نعوض في (2) فنجد أن :

$$0=\frac{3}{2}\alpha+6$$

$$\frac{3}{2}\alpha=-6$$

$$\alpha = -4$$

نتحقق في (1) وفق:

$$-3 = \frac{3}{2}(-4) + 3$$
$$-3 = -6 + 3$$
$$-3 = -3$$

ومنه للجملة حل وحيد

$$\beta = 3 \quad \text{و} \quad \alpha = -4$$

يحققان العلاقة:

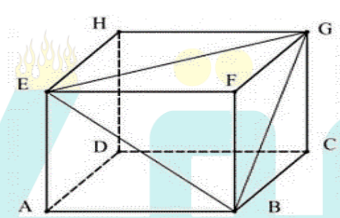
$$\overrightarrow{BE} = -4\,\overrightarrow{AO} + 3\,\overrightarrow{AG}$$

وبالتالي الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{BE}$ مرتبطة خطياً.

ومنه المستقيم (BE) يوازي المستوي (AGO)

ثامناً:

✌ $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه I مركز ثقل المثلث EBG ، J منتصف $[BG]$



1. عين موقع النقطة M المعرفة بالمساواة $3\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BC}$

✌ بفرض $AB = 4$ و $AD = AE = 1$ وباختيار المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$:

1. جد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات والنقطة I و J
2. أثبت أن النقاط F و I و D واقعة على استقامة واحدة
3. جد إحداثيات النقطة K من المستقيم (AD) والمتساوية البعد عن النقطتين H و B
4. جد إحداثيات النقطة N المحققة للمساواة :
$$2\overrightarrow{GN} = 5\overrightarrow{BE}$$

الحل:

✌ موقع النقطة M :

لدينا: $3\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BC}$

$$3\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$$
$$3\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EG}$$
$$3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EJ}$$
$$\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EJ}$$

ومنه M تنطبق على I.

✌

1. إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات :

$A(0,0,0)$	$B(4,0,0)$
$F(4,0,1)$	$D(0,1,0)$
$E(0,0,1)$	$H(0,1,1)$
$C(4,1,0)$	$G(4,1,1)$

▪ إحداثيات I و J :

$$I\left(\frac{x_E + x_B + x_G}{3}, \frac{y_E + y_B + y_G}{3}, \frac{z_E + z_B + z_G}{3}\right)$$
$$I\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$J\left(\frac{x_B + x_G}{2}, \frac{y_B + y_G}{2}, \frac{z_B + z_G}{2}\right)$$
$$J\left(4, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

2. لدينا:

$$\overrightarrow{DI}\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{DF}(4, -1, 1)$$

نلاحظ أن أحد الشعاعين نتج عن الاخر بضربه بعدد

إذاً الشعاعين مرتبطين خطياً ومنه النقاط F و I و D تقع على استقامة واحدة.

3. إحداثيات k من المستقيم (AD) وإن k تقع على محور التراتيب أيّ: $k(0, y, 0)$

وبما أنها متساوية البعد عن B و H فإنه يتحقق:

$$KH = KB$$
$$\sqrt{(1-y)^2 + 1} = \sqrt{16 + y^2}$$

نربع الطرفين :

$$1+2y+y^2+1=16+y^2$$
$$2y=-14$$
$$y=-7$$

ومنه: $K(0,-7,0)$

4. لتكن $N(x,y,z)$

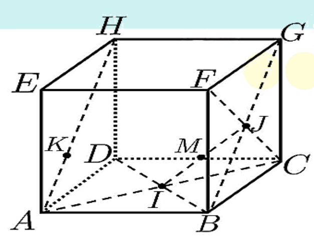
لدينا:

$$2\overrightarrow{GN}=5\overrightarrow{BE}$$
$$2\begin{pmatrix}x-4\\y-1\\z-1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}2x-B\\2y-2\\2z-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\0\\5\end{pmatrix}$$

تكافئ:

- $2x-8=-20 \Rightarrow x=-6$
- $2y-2=0 \Rightarrow y=1$
- $2z-2=5 \Rightarrow z=\frac{7}{2}$

ومنه: $N(-6,1,\frac{7}{2})$



تاسعاً:

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 2،
فيه النقطتان I و J مركزي الوجهين $ABCD$ و $BCGF$ على الترتيب والنقطة M منتصف $[IJ]$ والنقطة K تحقق $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$ ولنختر المعلم $(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$:

1. جد إحداثيات كل من رؤوس المكعب وإحداثيات النقاط I و J و M و K
2. أثبت أن النقاط B و C و M و H تقع في مستوٍ واحد.
3. أثبت أن النقاط C و M و E لا تقع على استقامة واحدة وتحقق أنّ المستوي (EMC) هو المستوي المحوي للقطعة المستقيمة $[IJ]$
4. أثبت أن المستقيم (DJ) يوازي المستوي (AFK)

الحل:

1. إحداثيات رؤوس المكعب:

$B(2,0,0)$	$A(0,0,0)$
$D(0,2,0)$	$F(2,0,2)$
$H(0,2,2)$	$E(0,0,2)$
$G(2,2,2)$	$C(2,2,0)$

- إحداثيات I مركز الوجه $ABCD$:

I تمثل منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$ أيّ:

$$I\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2},\frac{z_A+z_C}{2}\right)$$
$$I(1,1,0)$$

- إحداثيات J مركز الوجه $BCGF$:

J تمثل منتصف القطعة المستقيمة $[BG]$ أيّ:

$$J\left(\frac{x_B+x_G}{2},\frac{y_B+y_G}{2},\frac{z_B+z_G}{2}\right)$$
$$J(2,1,1)$$

- إحداثيات M منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$:

$$M\left(\frac{x_I+x_J}{2},\frac{y_I+y_J}{2},\frac{z_I+z_J}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)$$

- إحداثيات K:

بفرض $K(x,y,z)$

لدينا:

$$\overrightarrow{Ak}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

تكافئ:

- $x = 0$
- $y = \frac{2}{3}$
- $z = \frac{2}{3}$

⇐ومنه: $K\left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

2. حتى تكون النقاط:

B و C و H و M تقع في مستوٍ واحد ، يجب أن تكون الأشعة $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطة خطياً.

لدينا:

- $\overrightarrow{BC}\,(0,2,0)$
- $\overrightarrow{BH}(-2,2,2)$
- $\overrightarrow{BM}\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$

⇐نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه

لنبحث عن عددين β و α يحققان :

$$\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BH}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\beta \\ 2\beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\beta \\ 2\alpha + 2\beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = -2\beta \;\dots(1) \\ 1 = 2\alpha + 2\beta \;\dots(2) \\ \frac{1}{2} = 2\beta \;\dots(3) \end{cases}$$

نأخذ الجملة :

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha + 2\beta \;\dots(2) \\ \frac{1}{2} = 2\beta \;\dots(3) \end{cases}$$

من (3) نجد:

$$\beta = \frac{1}{4}$$

نعوض في (2) فنجد:

$$1 = 2\alpha + \frac{1}{2}$$

$$2\alpha = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{4}$$

نتحقق في (1) وفق:

$$-\frac{1}{2} = -2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

محققة

ومنه للجملة حل وحيد $\beta = \frac{1}{4}$ و $\alpha = \frac{1}{4}$

يحققان :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BH}$$

ومنه الأشعة $\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطة خطياً

وبالتالي النقاط B و C و H و M تقع في مستوٍ واحد

.3

- إثبات أن النقاط C و M و E تقع على استقامة واحدة

لدينا الشعاعين:

$$\overrightarrow{CE}(-2,-2,2) \text{ و } \overrightarrow{CM}\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$$

المركبات متناسبة ومنه الشعاعين مرتبطين خطياً

وبالتالي النقاط C و M و E تقع على استقامة واحدة

- التحقق من أن المستوي (EMC) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$

فكرة:

يجب التحقق من أن النقاط C و M و E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$

- اختبار E :

$$\overrightarrow{EI}(1,1,-2)$$

$$\Rightarrow EI = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{EJ}(2,1,-1)$$

$$\Rightarrow EJ = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

بما أن $EI = EJ$ فإن E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$

- اختبار M :

$$\overrightarrow{MI}\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow EI = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{MJ}\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow MI = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بما أن $MI = MJ$ فإن M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$.

- اختبار C :

$$\overrightarrow{CI}(-1,-1,0)$$

$$\Rightarrow CI = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{CJ}(0,-1,1\ )$$

$$\Rightarrow CJ = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

بما أن $CI = CJ$ فإن C تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$.

وبالتالي المستوي (EMC) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$

4. إثبات أن (DI) يوازي (AFK):

لدينا :

$$\overrightarrow{AF}(2,0,2)$$

$$\overrightarrow{AK}\left(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{DI}(1,-1,0)$$

نلاحظ أن $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AF}$ غير مرتبطان خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد

لنبحث عن عددين a و b يحققان العلاقة :

$$\overrightarrow{DI} = a\overrightarrow{AF} + b\overrightarrow{AK}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\0\\2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}b\\\frac{2}{3}b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\\frac{2}{3}b\\2a+\frac{2}{3}b\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\begin{cases}1=2a\ \dots(1)\\ -1=\frac{2}{3}b\ \dots(2)\\ 0=2a+\frac{2}{3}b\ \dots(3)\end{cases}$$

من (1) نجد: $a=\frac{1}{2}$

من (2) نجد: $b=-\frac{3}{2}$

نتحقق في (3):

$$0=1+\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$0=1-1$$
$$0=0$$

محققة

ومنه للجملة حل وحيد : $a=\frac{1}{2}$ و $b=-\frac{3}{2}$

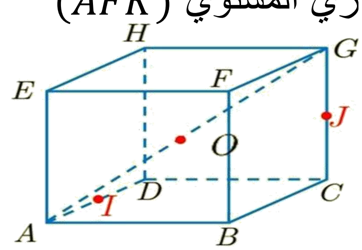
- تحقق أن:

$$\overrightarrow{DI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AK}$$

وبالتالي الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{AK}$و $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{DI}$ مرتبطة خطياً ،

وبالتالي المستقيم (DI) يوازي المستوي (AFK)

عاشراً :



$ABCDEFGH$ مكعب،

I منتصف $[AD]$ ، J منتصف $[CG]$

1. عين موقع النقطة M التي تحقق : $\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{CA}$
2. أثبت صحة العلاقة $\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{GO}$ حيث O منتصف $[GA]$
3. أثبت أن $\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$

الحل:

1. موقع M:

$$\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{CA}$$
$$\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GE}$$
$$\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IE}$$

تكافئ:

$$M=E$$

وبالتالي M تنطبق E.

2. إثبات صحة العلاقة:

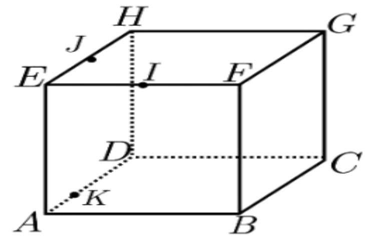
$$\underbrace{\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{BA}}_{l_1}=\underbrace{2\overrightarrow{GO}}_{l_2}$$
$$L_1=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{BA}$$
$$=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}$$
$$=\overrightarrow{GA}$$
$$=2\,\overrightarrow{GO}$$
$$=l_2$$

3.

$$\underbrace{\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FA}}_{l_1}=\underbrace{\vec{0}}_{l_2}$$
$$l_1=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FA}$$
$$=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{FB}$$
$$\vec{0}=l_2$$

محققة

الحادي عشر:



$ABCDEFGH$ مكعب I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[EH]$ K نقطة تحقق $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

لنختر معلماً $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

1. جد إحداثيات جميع رؤوس المكعب وإحداثيات النقاط I و J و K
2. تحقق أن $\overrightarrow{HF}$ و $\overrightarrow{HK}$ هما شعاعا توجيه المستوي
3. تحقق أن المستقيم (AE) لا يوازي المستوي (FHK)
4. لتكن النقطة $M(0,0,m)$ من المستقيم (AE) عين m حتى تنتمي النقطة M إلى المستوي (FHK)
5. بما أن المستقيم (AE) لا يوازي المستوي (FHK) استنتج نقطة تقاطعهما معلاً إجابتك

الحل:

1. إحداثيات رؤوس المكعب:

$B(1,0,0)$	$A(0,0,0)$
$D(0,1,0)$	$F(1,0,1)$
$H(0,1,1)$	$E(0,0,1)$
$G(1,1,1)$	$C(1,1,0)$

- إحداثيات I:

$$I\left(\frac{x_E + x_F}{2}, \frac{y_E + y_F}{2}, \frac{z_E + z_F}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

- إحداثيات J:

$$J\left(\frac{x_E + x_H}{2}, \frac{y_E + y_H}{2}, \frac{z_E + z_H}{2}\right)$$

$$J\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$$

- إحداثيات K:

بفرض $K(x, y, z)$

لدينا:

$$\overrightarrow{Ak} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

تكافئ:

- $x = 0$
- $y = \frac{1}{4}$
- $z = 0$

ومنه: $K\left(0, \frac{1}{4}, 0\right)$

2. لدينا :

$$\overrightarrow{HF}(1, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{HK}\left(0, -\frac{3}{4}, -1\right)$$

الشعاعين $\overrightarrow{HK}$ و $\overrightarrow{HF}$ غير مرتبطين خطياً ،لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه $\overrightarrow{HK}$ و $\overrightarrow{HF}$ هما شعاعا توجيه المستوي.

3. لنبحث عن عدد عددين a و b يحققان:

$$\overrightarrow{AE} = a\,\overrightarrow{HF} + b\,\overrightarrow{HK}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{4}\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\-a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{4}b\\-b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\-a-\frac{3}{4}b\\-b\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\begin{cases}0 = a \ldots (1)\\ 0 = -a - \frac{3}{4}b \ \ldots (2)\\ 1 = -b \ \ldots (3)\end{cases}$$

من (1) نجد: $a = 0$

من (2) نجد: $b = -1$

نتحقق في (2) وفق:

$$0 = \frac{3}{4}$$

غير محققة

ومنه ليس للجملة حل والأشعة الثلاثة $\overrightarrow{HK}$ و $\overrightarrow{HF}$ و $\overrightarrow{AE}$ غير مرتبطة خطياً وبالتالي المستقيم (AE) لا يوازي المستوي (FHK)

4. حتى تنتمي النقطة M إلى المستوي (FHK) يجب أن تكون الأشعة $\overrightarrow{HK}$ و $\overrightarrow{HF}$ و $\overrightarrow{AE}$ مرتبطة خطياً

نبحث عن عددين α و β يحققان:

$$\overrightarrow{HM} = \alpha\,\overrightarrow{HF} + \beta\,\overrightarrow{HK}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\m-1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{4}\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\m-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-\alpha\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{4}\beta\\-\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\m-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-\alpha-\frac{3}{4}\beta\\-\beta\end{pmatrix}$$

يكافئ

من (1) نجد : $\alpha = 0$

نعوض في (2) نجد :

$$-1 = -\frac{3}{4}\beta \Rightarrow \beta = \frac{4}{3}$$

ونعوض في (3) نجد:

$$m - 1 = -\frac{4}{3}$$

$$m = -\frac{1}{3}$$

5. بما أن النقطة M من المستقيم (AE) وبما أن النقطة M تنتمي إلى المستوي (HFK) فإن النقطة M هي نقطة تقاطعهما.

ستدرك يوماً أنك كنتَ تبذلُ لأجلِ حصادٍ كبير، و أن جهدك وتعبك و انحناءات ظهرك، سهرك لوقتٍ متأخرٍ من اللّيل، شحوب وجهك، أو حتى نهوضك باكراً سعياً لطلب العلم، لم يذهب سدىً، و أنك كنت تقلق أكثر من اللازم، سيولد منك نجمٌ يسطع في السّماء، ستضيء كسراجٍ في منتصف العتمة، وتشرق كشمسٍ بعد ليلة غطشاء، أنت محارب عظيم، وسلاحُك في معركتك هو يقينك بالله و إيمانك أن كلّ مثقال ذرّة من كدح تقابلها مثقال ذرّة من نجاح، ابذلْ ولا تخف من النتيجة، أنت مُكلّف بالسعي أما التوفيق فهو رزق الله لك.🥺♡