السؤال الأول

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$ (2 درجة)

$y = 2$ مقارب افقي في جوار $+\infty$ أو عند $+\infty$ (3 درجة)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$ (2 درجة)

$y = 2$ مقارب افقي في جوار $-\infty$ أو عند $-\infty$ (3 درجة)

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$$ (2 درجة)

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$. (3 درجة)

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty$$ (2 درجة)

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$. (3 درجة)

الطلب الثاني:

$$\ell = \frac{b+a}{2} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$ (5 درجة)

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2} = b - \ell = 0.01 = 10^{-2} = \frac{1}{100}$$ (5 درجة)

نعوض في القانون:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$ (5 درجة)

$$\left|\frac{2x+3}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{2x+3-2x+2}{x-1}\right| < \frac{1}{100}$$ (3 درجة)

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{500}$$

نقلب:

$$x - 1 > 500$$

$$x > 501$$ (2 درجة)

نختار $A = 501$.

السؤال الثاني

نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n) = 5^n - 3^n = 2k$$ (5 درجة)

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$5^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$$ (5 درجة)

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$5^n - 3^n = 2k$ …… الفرض (5 درجة)

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$5^{n+1} - 3^{n+1} = 2k'$ …… الطلب (5 درجة)

البرهان: لدينا من الفرض:

$$5^n - 3^n = 2k$$ (5 درجة)

نضرب بـ 5:

$$5^{n+1} - 5.3^n = 10k$$ (5 درجة)

نطرح 3^{n+1} من الطرفين:

$$5^{n+1} - 3^{n+1} = 10k - 3^{n+1} + 5.3^n$$ (5 درجة)

$$= 10k - 2.3^n = 2(5k - 3^n) = 2k'$$ (5 درجة)

فالقضية صحيحة.

السؤال الثالث

شرط الاستمرار:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$ (10 درجة)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0}$$ ح ع ت (درجة 5 في حال الحل الصحيح ضمناً)

$$f(x) = \frac{x^3 - 4(1-\cos x)}{x^2} = \frac{x^3 - 4\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2} = x - 8\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2 = x - 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$ (5 درجة)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -2(1)^2 = -2$$ (5 درجة)

ولدينا:

$$f(0) = m - 602$$ (5 درجة)

نعوض في شرط الاستمرار:(5 درجة)

$$m - 602 = -2$$
$$m = 600$$ (5 درجة)

التمرين الأول

1- نوجد x_{n+1}:

$$x_{n+1} = u_{n+1} + 4$$
$$= 2u_n + 4 + 4$$
$$= 2u_n + 8$$ (5 درجة)

(5 درجة) $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2u_n + 8}{u_n + 4} = \frac{2(u_n + 4)}{u_n + 4}$$ (5 درجة)

$$= 2 = q$$

هندسية أساسها $q = 2$ (5 درجة)

2- $x_n = x_0 . q^n$ (5 درجة)

$$x_0 = u_0 + 4 = 0 + 4 = 4$$ (3 درجة)

نعوض في القانون:

$$x_n = 4 \times 2^n = 2^2 \times 2^n = 2^{n+2}$$ (2 درجة)

$$x_n = u_n + 4 \Rightarrow u_n = x_n - 4$$ (5 درجة)
$$u_n = 2^{n+2} - 4$$ (5 درجة)

3- لحساب المجموع:

$$a = x_1 = 4 \times 2^1 = 8$$ (5 درجة)
$$n = n + 1 - 1 = n$$ (5 درجة)

نعوض في قانون المجموع:

(5 درجة) $$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{8(1-2^n)}{1-2}$$
$$= -8(1-2^n) = 8(2^n - 1)$$ (5 درجة)

التمرين الثاني

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{(درجة } 5+5\text{)}$$

إذن لا يقبل أي مقارب افقي.(درجة 5)

الطلب الثاني:

$$f(x) - x = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} \text{(درجة 10)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \text{(درجة 5)}$$

بفرض $y = x$:(درجة 10)

$$f(x) - y = f(x) - x$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0 \text{(درجة 5)}$$

الطلب الثالث:

$$f(x) - x > 0 \text{(درجة 10)}$$

C فوق Δ.(درجة 5)

أو دراسة وضع النسبي عن طريق الجدول ويجب أن يكون C فوق Δ.

المسألة الأولى

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

1- نوجد مجموعة التعريف:

$$D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[\text{ (درجة 5)}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{(درجة 5)}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{(درجة 5)}$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \text{(درجة 3)}$$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.(درجة 2)

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \text{(درجة 3)}$$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه.(درجة 2)

2- بقسمة التابع قسمة إقليدية:(درجة 5)

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1} \text{(درجة 5)}$$

نشكل الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{4}{x+1} \text{(درجة 3)}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - y_\Delta = 0 \text{(درجة 2)}$$

3- لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = 0 \text{(درجة 4)}$$
$$4 \neq 0$$

مستحيلة.

كل سطر 2 درجات.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{4}{x+1}$	$-$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	تحت	$\|$	فوق

4- لدراسة التغيرات:

التابع $\boldsymbol{f}$ معرف واشتقاق على $\mathbb{R}\backslash\{-\mathbf{1}\}$ (5 درجة)

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 - 3}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} \text{(3 درجة)}$$
$$f'(x) = 0 \text{(3 درجة)}$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x+3)(x-1) = 0$$
$$x_1 = 1 \ , x_2 = -3 \text{(2 + 2 درجة)}$$
$$f(1) = \frac{4}{2} = 2 \text{(2 درجة)}$$
$$f(-3) = \frac{12}{-2} = -6 \text{(2 درجة)}$$

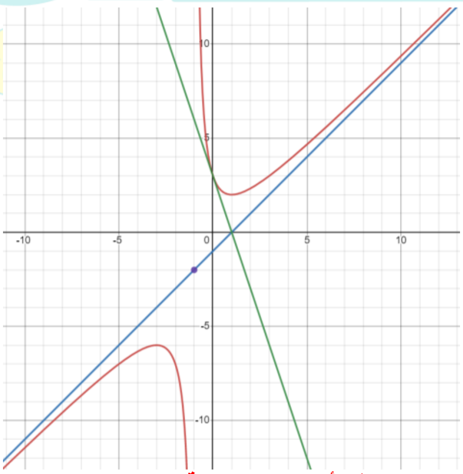
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f(x)$			0		‖		0		
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↗	2	↘	$+\infty$

كل سطر 2 درجات.

5- التقاطع مع محور التراتيب:

$$x = 0 f'(x) = 0 \text{(3 درجة)}$$
$$y_T = f'(0)(x-0) + f(0) \text{(2 درجة)}$$
$$= -3(x-0) + 3 = -3x + 3 \text{(2 درجة)}$$

6- الرسم:



الخط الأخضر: 4 درجة (المماس T)
الخط الأزرق والخط العامودي الأسود: 2+2 درجة (المقاربات)
الخط الأحمر: 10 درجات (الخط البياني)