

السؤال الأول

الطلب الأول:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ (درجة 2)}$$

$y = 2$ مقارب افقي في جوار $+\infty$ أو عند $+\infty$ (درجة 3)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \text{ (درجة 2)}$$

$y = 2$ مقارب افقي في جوار $-\infty$ أو عند $-\infty$ (درجة 3)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty \text{ (درجة 2)}$$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$. (درجة 3)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty \text{ (درجة 2)}$$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$. (درجة 3)

الطلب الثاني:

$$\ell = \frac{b+a}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ (درجة 5)}$$

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2} = b - \ell = 0.01 = 10^{-2} = \frac{1}{100} \text{ (درجة 5)}$$

نعوض في القانون:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ (درجة 5)}$$

$$\left| \frac{2x+3}{x-1} - 2 \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{2x+3-2x+2}{x-1} \right| < \frac{1}{100} \text{ (درجة 3)}$$

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{500}$$

$$x-1 > 500$$

$$x > 501 \text{ (درجة 2)}$$

نقلب:

نختار $A = 501$

السؤال الثاني

نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n) = 5^n - 3^n = 2k \text{ (درجة 5)}$$

نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$5^1 - 3^1 = 5 + 3 = 8 \text{ (درجة 5)}$$

محقة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$5^n - 3^n = 2k \dots \dots \text{الفرض (درجة 5)}$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$5^{n+1} - 3^{n+1} = 2k' \dots \dots \text{الطلب (درجة 5)}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$5^n - 3^n = 2k \text{ (درجة 5)}$$

$$5^{n+1} - 5 \cdot 3^n = 10k \text{ (درجة 5)}$$

نضرب بـ 5:

نطرح 3^{n+1} من الطرفين:

$$5^{n+1} - 3^{n+1} = 10k - 3^{n+1} + 5 \cdot 3^n \text{ (درجة 5)}$$

$$= 10k - 2 \cdot 3^n = 2(5k - 3^n) = 2k' \text{ (درجة 5)}$$

فالقضية صحيحة.

السؤال الثالث

شروط الاستمرار:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ (درجة 10)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0} \text{ (درجة 5 في حال الحل الصحيح ضمناً) ح ع ت}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 4(1 - \cos x)}{x^2} = \frac{x^3 - 4\left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^2} = x - 8 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \frac{x}{2}}\right)^2 = x - 2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \text{ (درجة 5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2(1)^2 = -2 \text{ (درجة 5)}$$

ولدينا:

$$f(0) = m - 602 \text{ (درجة 5)}$$

نعوض في شرط الاستمرار: (درجة 5)

$$m - 602 = -2$$

$$m = 600 \text{ (درجة 5)}$$

التمرين الأول

1- نوجد x_{n+1} :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= u_{n+1} + 4 \\ &= 2u_n + 4 + 4 \\ &= 2u_n + 8 \text{ (درجة 5)} \\ \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{2u_n + 8}{u_n + 4} = \frac{2(u_n + 4)}{u_n + 4} \text{ (درجة 5)} \\ &= 2 = q \end{aligned}$$

هندسية أساسها $q = 2$ (درجة 5)

$$x_n = x_0 \cdot q^n \text{ (درجة 5)}$$

$$x_0 = u_0 + 4 = 0 + 4 = 4 \text{ (درجة 3)}$$

نعوض في القانون:

$$x_n = 4 \times 2^n = 2^2 \times 2^n = 2^{n+2} \text{ (درجة 2)}$$

$$x_n = u_n + 4 \Rightarrow u_n = x_n - 4 \text{ (درجة 5)}$$

$$u_n = 2^{n+2} - 4 \text{ (درجة 5)}$$

3- لحساب المجموع:

$$a = x_1 = 4 \times 2^1 = 8 \text{ (درجة 5)}$$

$$n = n + 1 - 1 = n \text{ (درجة 5)}$$

نعوض في قانون المجموع:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{8(1 - 2^n)}{1 - 2} \\ &= -8(1 - 2^n) = 8(2^n - 1) \text{ (درجة 5)} \end{aligned}$$

التمرين الثاني

الطلب الأول:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ (درجة 5 + 5)}$$

إذن لا يقبل أي مقارب أفقي. (درجة 5)
الطلب الثاني:

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \text{ (درجة 10)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \text{ (درجة 5)}$$

بفرض $y = x$ (درجة 10)

$$f(x) - y = f(x) - x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0 \text{ (درجة 5)}$$

الطلب الثالث:

$$f(x) - x > 0 \text{ (درجة 10)}$$

C فوق Δ. (درجة 5)

أو دراسة وضع النسبي عن طريق الجدول ويجب أن يكون C فوق Δ.

المسألة الأولى

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

1- نوجد مجموعة التعريف:

$$D_f =] - \infty, -1[\cup] -1, +\infty[\text{ (درجة 5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ (درجة 5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ (درجة 5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \text{ (درجة 3)}$$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه. (درجة 2)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \text{ (درجة 3)}$$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه. (درجة 2)

2- بقسمة التابع قسمة إقليدية: (درجة 5)

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x + 1} \text{ (درجة 5)}$$

نشكل الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{4}{x + 1} \text{ (درجة 3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - y_\Delta = 0 \text{ (درجة 2)}$$

3- لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = 0 \text{ (درجة 4)}$$

$$4 \neq 0$$

مستحيلة.

كل سطر 2 درجات.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{4}{x+1}$	-		+
الوضع النسبي	تحت		فوق

4- لدراسة التغيرات:

التابع f معرف واشتقاق على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (درجة 5)

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 - 3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} \text{ (درجة 3)}$$

$$f'(x) = 0 \text{ (درجة 3)}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = -3 \text{ (درجة 2 + 2)}$$

$$f(1) = \frac{4}{2} = 2 \text{ (درجة 2)}$$

$$f(-3) = \frac{12}{-2} = -6 \text{ (درجة 2)}$$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	++++	0	----	----	0	++++
$f(x)$	$-\infty$	-6	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

كل سطر 2 درجات.

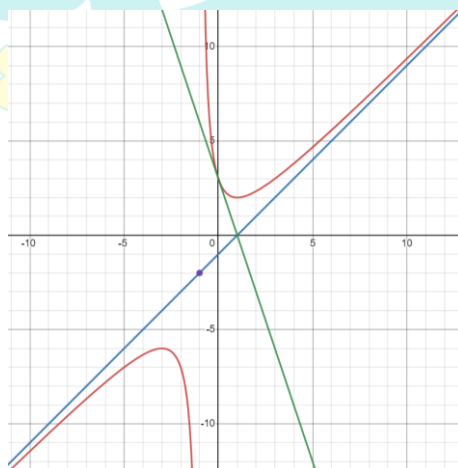
5- التقاطع مع محور الترتيب:

$$x = 0, f'(x) = 0 \text{ (درجة 3)}$$

$$y_T = f'(0)(x-0) + f(0) \text{ (درجة 2)}$$

$$= -3(x-0) + 3 = -3x + 3 \text{ (درجة 2)}$$

6- الرسم:



الخط الأخضر: 4 درجة (المماس T)

الخط الأزرق والخط العامودي الأسود: 2+2 درجة (المقاربات)

الخط الأحمر: 10 درجات (الخط البياني)