أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية فيها الحدود الثلاثة المتعاقبة الآتية:

$$u_1 = \lambda \; ; \; u_2 = 1+\lambda \; ; \; u_3 = 3+\lambda$$

١. احسب قيمة λ ثم استنتج قيمة الأساس q
٢. بفرض $\lambda = 1$. أوجد u_n بدلالة n
٣. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الخطوة	الدرجة
$b^2 = a \times c$ $u_2^2 = u_1 \times u_3$	5
$(1+\lambda)^2 = \lambda(3+\lambda)$	5
$1+2\lambda+\lambda^2 = 3\lambda+\lambda^2 \to \lambda = 1$	5
$u_1 = 1 \; ; \; u_2 = 2 \; , u_3 = 4 \to q = 2$	5
$u_n = u_1 q^{n-1}$ $= 2^{n-1}$	5 5
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	5
لأنّ $q = 2 > 1$	5

السؤال الثاني: حل في $(\mathbb{C})$ المعادلة $Z^2 - 3\sqrt{3}Z + 9 = 0$ وأوجد الحلول بالشكل الأسي.

الخطوة	الدرجة
$a = 1 \; ; b = -3\sqrt{3} \; ; c = 9$ $\Delta = b^2 - 4ac \to \Delta = 27 - 4(9)$ $= -9 < 0$	5
للمعادلة حلان عقديان مترافقان	5
$Z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{3\sqrt{3}+3i}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$ $Z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{3\sqrt{3}-3i}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$	5 5
كتابة Z_1 بالشكل الأسي: $Z_1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$	

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{27+9}{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}=3$ $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ ومنه $\theta=\frac{\pi}{6}$ $Z_1=3e^{i\frac{\pi}{6}}$	2 2 2 2 2
كتابة Z_2 بالشكل الأسي: طريقة أولى: $Z_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{27+9}{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}=3$ $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-\frac{3}{2}}{3}=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}$ ومنه $\theta=-\frac{\pi}{6}$ $Z_1=3e^{-i\frac{\pi}{6}}$ طريقة ثانية:' $Z_2=\overline{Z_1}=\overline{\left(3e^{i\frac{\pi}{6}}\right)}=3e^{-i\frac{\pi}{6}}$	2 2 2 2 2 وفي حال تطبيق الطريقة الثانية تؤخذ العلامة كاملةً

السؤال الثالث: ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \cos 2x$ والمطلوب:

1. احسب $f\left(\frac{\pi}{4}\right), f'\left(\frac{\pi}{4}\right), f'(x)$
2. استنتج قيمة النهاية $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{cos2x}{x-\frac{\pi}{4}}$

الخطوة	الدرجة
$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	5
$f'(x) = -2\sin(2x)$	10 إذا لم يضرب بمشتق الزاوية ينال فقط (5)
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2(1) = -2$	5
حسب تعريف العدد المشتق	5
$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$	10
$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{cos2x}{x-\frac{\pi}{4}} = -2$	5

السؤال الرابع: ليكن العدد العقدي $w = \frac{Z+2}{Z}$ و $Z \neq 0$ والمطلوب:

أثبت أنّ مجموعة النقاط $M(Z)$ التي يكون عندها (w) تخيلي بحت هي دائرة محذوف منها نقطة.

الخطوة	الدرجة
بما أنّ w تخيلي بحت فإنّ $\overline{w} = -w$	5
$\overline{\left(\frac{Z+2}{Z}\right)} = -\left(\frac{Z+2}{Z}\right) \to \frac{\bar{Z}+2}{\bar{Z}} = \frac{-Z-2}{Z}$ $(\bar{Z}+2)(Z) = (\bar{Z})(-Z-2)$ $Z\bar{Z} + 2Z = -Z\bar{Z} - 2\bar{Z} \to 2Z\bar{Z} + 2(Z+\bar{Z}) = 0$ $2(x^2+y^2) + 2(2x) = 0$ $2\big((x^2+y^2) + (2x)\big) = 0$ $x^2+y^2+2x = 0$	5 5 5 5
$x^2+2x+y^2 = 0$ إتمام إلى مربع كامل وفق: $x^2+2x+1-1+y^2 = 0$ $(x+1)^2 + (y)^2 = 1$	5 5
M مجموعة النقاط تمثل دائرة مركزها $(-1,0)$ ونصف قطرها $R = 1$	5

$(0,0)$ما عدا النقطة	وفي حال النقص تحذف درجتان
ملاحظة: يمكن حل السؤال السابق بتعويض قيمة $Z = x + iy$ ويكون تخيلي بحت عندما القسم الحقيقي معدوم.	تؤخذ الدرجة كاملةً

ثانياً: حل كلاً من التمارين الآتية (٦٠ درجة لكل تمرين):

التمرين الأول: بفرض $u_0 = \frac{5}{2}$ و $u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$ والمطلوب:

1. أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_n \leq 3$ أياً يكن العدد الطبيعي n
2. أثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 3)$ ثم استنتج أنها متناقصة
3. استنتج تقارب المتتالية u_n ثم عين نهايتها

الخطوة	الدرجة
نرمز للقضية بالرمز $E(n)$	5
نثبت صحة الخاصة $E(0)$	3
$2 \leq u_0 \leq 3 \rightarrow 2 \leq \frac{5}{2} \leq 3$	3
نفرض صحة الخاصة $E(n)$	2
$2 \leq u_n \leq 3$	3
نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$	2
$2 \leq u_{n+1} \leq 3$	3
البرهان: لدينا من الفرض: $2 \leq u_n \leq 3$	3
نطرح (2): $0 \leq u_n - 2 \leq 1$	3
نربع: $0 \leq (u_n - 2)^2 \leq 1$	3
نضيف (2): $2 \leq u_{n+1} \leq 3$	3
فالقضية صحيحة أياً يكن العدد الطبيعي n	وينال الطالب الدرجة الكاملة عند القول أنّ القضية صحيحة 3 فقط
$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)^2 + 2 - u_n$ $= u_n^2 - 4u_n + 4 + 2 - u_n$ $= u_n^2 - 5u_n + 6$ $= (u_n - 2)(u_n - 3)$	8

5	ينتج: بما أن $2 \leq u_n \leq 3$ $u_n - 3 \leq 0$ $u_n - 2 \geq 0$
5	وبالتالي: $(u_n - 2)(u_n - 3) \leq 0$ $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فهي متناقصة
2	ووجدنا أنّ $u_n \geq 2$ فهي محدودة من الأدنى بالعدد 2
3	بما أنها متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة
1	إذن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

التمرين الثاني:

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيم $[AB]$ حيث: $A(2,-1,3)$ و $B(4,3,-1)$

الدرجة	الخطوة
15	تحديد الناظم: إن المستوي المحوري يقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً له: $\vec{n} = \overrightarrow{AB}(2,4,-4)$
15	تحديد النقطة: لتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ وإحداثياتها تعطى بالعلاقة: $I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{Z_A + Z_B}{2}\right)$ $I(3,1,1)$
5	كتابة معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$: $2(x-3) + 4(y-1) - 4(z-1) = 0$
3	$2x - 6 + 4y - 4 - 4z + 4 = 0$
2	$2x + 4y - 4z - 6 = 0$
20	

التمرين الثالث: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{x+2}{|x|+1}$

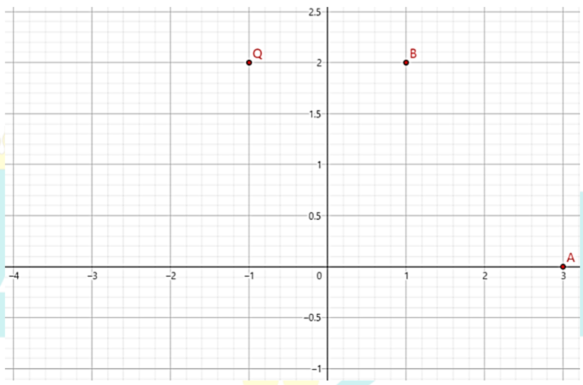
1. ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر
2. اكتب معادلة نصف المماس للخط البياني للتابع f من اليسار في النقطة منه التي فاصلتها $x=0$

الخطوة	الدرجة
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x+2}{\|x\|+1}-2}{x}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-2\|x\|}{x(\|x\|+1)}$	5 5 5
نميز حالتين:	5
$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-2x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x}{x(x+1)}$ $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{x+1}=-1$	3 2
f اشتقاقي عند الصفر من اليمين و $f'(0^+)=-1$	5
$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ $=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+2x}{x(-x+1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3x}{x(-x+1)}$ $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3}{-x+1}=3$	3 2
f قابل للاشتقاق عند الصفر من اليسار و $f'(0^-)=3$	5
بما أن $f'(0^+)\neq f'(0^-)$ فالتابع غير اشتقاقي عند الصفر	10
معادلة نصف المماس من اليسار: $T: y=m(x-0)+f(0)$ $\to T: y=f'(0^-)(x-0)+f(0)$ $y=3(x-0)+2\to y=3x+2$	5 5

التمرين الرابع: في معلم عقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن الأعداد العقدية الممثلة بالنقاط:

$Q: Z_Q = -1+2i$	$B: Z_B = 1+2i$	$A: Z_A = 3$

1. مثل النقاط السابقة في معلم
2. جد N صورة A وفق دوران مركزه (O) وزاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$
3. جد Z_R ليكون الرباعي $(OQNR)$ متوازي أضلاع
4. أوجد $\left[\frac{Z_{\overrightarrow{OR}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right]$ واستنتج أنّ $(AB \perp OR)$ و $\left(OR = \frac{1}{2}AB\right)$

الخطوة	الدرجة
$A(3,0)\,;B(1,2)\,;Q(-1,2)$  	6درجات لكل نقطة درجتان 2درجة الرسم وتعيين النقاط على الرسم
$Z_N - Z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_A - Z_O)$ $Z_N = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_A) \to Z_N = i(3) \to Z_N = 3i$	5 7
بما أنّ الرباعي $(OQNR)$ متوازي أضلاع فإنّ: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QN}$ تكافئ: $Z_{\overrightarrow{OR}} = Z_{\overrightarrow{QN}} \to Z_R - Z_O = Z_N - Z_Q$ $\to Z_R = Z_N - Z_Q$ $Z_R = 3i + 1 - 2i$ $Z_R = 1 + i$	2 2 1 2 2 6
$\left[\frac{Z_{\overrightarrow{OR}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right] = \frac{Z_R - Z_O}{Z_B - Z_A} = \frac{Z_R}{Z_B - Z_A}$ $= \frac{1+i}{1+2i-3} = \frac{1+i}{-2+2i} = \frac{(1+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)}$	3

2	$= \frac{-2-2i-2i+2}{4+4} = -\frac{4i}{8} = -\frac{1}{2}i$
4 6	$\left[\frac{Z_{\overrightarrow{OR}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right] = -\frac{1}{2}i$ $\arg(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = \frac{3\pi}{2}$ ومنه المستقيمان (AB) و (OR) متعامدان
2 2 6	$\left\lvert\frac{Z_{\overrightarrow{OR}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right\rvert = \left\lvert -\frac{1}{2}i\right\rvert$ $\frac{OR}{AB} = \frac{1}{2}$ ومنه $AB = 2OR$ $\rightarrow OR = \frac{1}{2}AB$

ثالثاً: حل المسألة الآتية (100 درجة):

المسألة الأولى: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالشكل:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$$

1. احسب نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$ واستنتج أن الخط c_f يقبل مقارباً أفقياً d يُطلب تعيينه
2. احسب $f'(x)$ ثم ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها
3. بين أنه مهما تكن $x \in \mathbb{R}$ فإن $f(x) + f(-x) = 2$ ثم استنتج أن C_f يقبل النقطة $I(0,1)$ مركز تناظر له
4. أوجد معادلة المماس T للخط C_f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب
5. في معلمٍ متجانس أنشئ I وارسم d و T ثم ارسم المنحني c_f
6. ناقش بيانياً تبعاً لقيم m حلول المعادلة $(1-m)x^2 - x + 1 - m = 0$

الدرجة	الخطوة
$2+2$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$
2	$y = 1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty, -\infty$
2 2	$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+1) - 2x(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}$ $\rightarrow f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

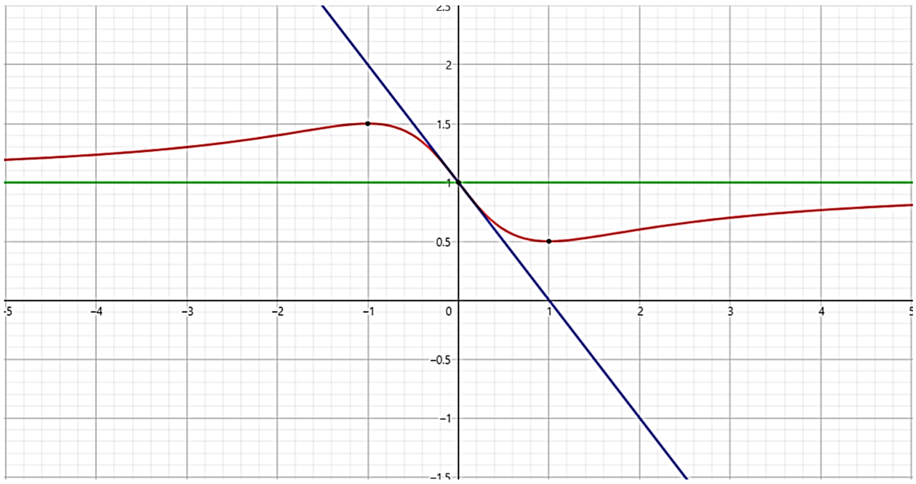
<table>
<tr><td>دراسة تغيرات التابع f :
نعدم المشتق:
$$f'(x)=0 \to \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}=0 \to x^2-1=0$$
$$\to x^2=1 \to x=\pm 1$$</td><td>5

5 + 5</td></tr>
<tr><td>$$f(1)=\frac{1}{2}$$
$$f(-1)=\frac{3}{2}$$</td><td>1

1</td></tr>
<tr><td>الجدول
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>1</td><td>$\nearrow$</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\searrow$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\nearrow$</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>5
5
5</td></tr>
<tr><td>$$f(x)+f(-x)$$
$$=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{2(x^2+1)}{x^2+1}=2$$
وهو المطلوب</td><td>5

5</td></tr>
<tr><td>$$f(x)+f(-x)=2$$
$$f(x)+f(2a-x)=2b$$
بالمقارنة نجد:
$$2a=0 \quad \to a=0$$
$$2b=2 \to b=1$$
فيكون مركز التناظر $I(0,1)$</td><td>2
2

2
2
وأيّ نقص يُحذف للطالب درجتان.</td></tr>
<tr><td>نقطة التقاطع مع التراتيب موافقة لـ $x=0$
$$f(0)=1$$
$$f'(0)=-1$$</td><td>2
2
2</td></tr>
<tr><td>$$T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$y=-x+1$$</td><td>2
2</td></tr>
</table>

الرسم: 	للمنحني (المقارب الأفقي 10 والقيم الحدية ومركز التناظر) وأيّ نقص بالمذكور تحذف خمس درجات. للمماس5 وفي حال كانت الرسمة مُختلفة تحذف العلامة كاملةً
$m \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ لا يوجد حلول $m \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ حل وحيد $m \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$ لا يوجد حلول	5 5 5

المسألة الثانية:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$ والمطلوب:

1. جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$
2. أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة
3. اكتب معادلة المستوي CDE
4. احسب بعد B عن المستوي CDE
5. اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي CDE

الخطوة	الدرجة
$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$ $\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$ $\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$	3 3 3
$\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$	

$\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$ غير $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CD}$ نلاحظ أنّ المركبات غير متناسبة فالأشعة لا تقع على استقامة واحدة E و D و C مرتبطة خطياً فالنقاط تشكل مستوي. E و D و C والنقاط	6
ليكن $\vec{n}(a,b,c)$، فإنه يتحقق: (CDE) بما أنّ الناظم عمودي على المستوي $\vec{n}.\overrightarrow{CD}=0$ $-4a+4b=0\ldots(1)$ $\vec{n}.\overrightarrow{CE}=0$ $-3a-b+c=0\ldots(2)$ $-4a+4b=0\ldots(1)$ $-3a-b+c=0\ldots(2)$ وهذه جملة معادلتين بمجهولين ونحلها وفق: بفرض $C=1$: $-4a+4b=0\ldots(1)$ $-3a-b=-1\ldots(2)$ نضرب المعادلة الثانية بـ 4: $-4a+4b=0\ldots(1)$ $-12a-4b=-4\ldots(2)'$ بجمع (1) و $(2)'$ نجد أنّ: $-16a=-4$ $a=\frac{-4}{-16}=\frac{1}{4}$ نعوض في 1: $-4\left(\frac{1}{4}\right)+4b=0$ $-1+4b=0$ $4b=1$ $b=\frac{1}{4}$	2 3 5 5 5 3 2 5 5

وفق:4 نضرب الناظم بـ $\vec{n}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},1\right)$ ومنه $\vec{n}(1,1,4)$ ومن أجل كتابة معادلة المستوي نأخذ النقطة $C(4,0,0)$ $1(x-4)+1(y-0)+4(z-0)=0$ $x-4+y+4z=0$ $x+y+4z-4=0$	2 3 5
$dist(B\ ,CDE)=\frac{7}{\sqrt{18}}$	تعويض + نتيجة+قانون $5+5+5$
مركز الكرة: $B(1,0,-1)$ فإنّ: نصف قطر الكرة "بما أنّ الكرة تمس المستوي (CDE)": $R=dist(B,CDE)=\frac{7}{\sqrt{18}}$ ومنه معادلة الكرة: $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=\frac{49}{18}$	5 10 5 5

انتهى حل الأسئلة