سلم تصحيح نموذج A

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية (40 درجة لكل سؤال):

السؤال الأول: ليكن f التابع المعرف على المجال $]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

1. احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسياً
2. جد عدداً حقيقياً A يحقق أنه إذا كانت $x>A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال $]1.99\,,2.01[$

الخطوة المطلوبة	الدرجة
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$	5
$l=2$	2
$r=b-l=2.01-2=0.01=\frac{1}{100}$	3
$\lvert f(x)-l\rvert<r$	5
$\left\lvert\frac{2x-1}{x-1}-2\right\rvert<\frac{1}{100}$	5
$\left\lvert\frac{1}{x-1}\right\rvert<\frac{1}{100}$	2
بما أن $x\to+\infty$ $\frac{1}{x-1}<\frac{1}{100}$	4 4
$x>101$	5
نختار $A=101$ أو أي عدد أكبر منها	5

السؤال الثاني: حل في $(\mathbb{C})$ المعادلة إذا علمت أنّها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

$$z^3-(3+4i)z^2-6(3-2i)z+72i=0$$

الخطوة المطلوبة	الدرجة
$z=ai\to z-ai=0$ $(z-ai)(z^2+bz+c)=0$	2 5
$z^3+(b-ai)z^2+(c-aib)z-aic=0$	5
$b-ai=-3-4i$ $c-aib=-18+12i$ وإيجاد قيم: $a=4\,,b=-3\,,c=-18$	10
$(z-4i)(z^2-3z-18)=0$	3
إيجاد قيم z والتي هي: $Z_1=6$ $Z_2=-3$ $Z_3=4i$	5 5 5

سلم تصحيح نموذج A

السؤال الثالث: ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+sin2x}-\sqrt{1-sin2x}}{x} & ;x\neq 0\\ \dfrac{m}{2\sqrt{2}} & ;x=0\end{cases}$$

جد قيمة الثابت m ليكون التابع f مستمراً عند $a=0$

الدرجة	الخطوة
10	شرط الاستمرار: $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$
5	الضرب بالمرافق والوصول إلى $f(x)=\dfrac{2sin2x}{x\left(\sqrt{1+sin2x}+\sqrt{1-sin2x}\right)}$
5	$f(x)=\dfrac{4\,sin2x}{2x}\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+sin2x}+\sqrt{1-sin2x}\right)}$
5 5	$\lim_{x\to 0} f(x)=\dfrac{4}{2}=2$ لأن $\lim_{t\to 0}\dfrac{sint}{t}=1$
5	$f(0)=\dfrac{m}{2\sqrt{2}}$
5	$\dfrac{m}{2\sqrt{2}}=2$ $m=4\sqrt{2}$

السؤال الرابع: نتأمل العدد العقدي $k=\frac{z-w}{1+zw}$ حيث z و w عددين عقديين يحققان $|z|=1$ و $|w|=1$ و $zw\neq -1$, أثبت أن العدد العقدي k تخيلي بحت.

الدرجة	الخطوة
5	حتى يكون k تخيلي بحت يجب تحقق أنّ: $\bar{k}=-k$
10	$\bar{z}=\dfrac{1}{z}\ ,\bar{w}=\dfrac{1}{w}$
15	$\bar{k}=\dfrac{\bar{z}-\bar{w}}{1+\overline{zw}}=\dfrac{\frac{1}{z}-\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{zw}}=\dfrac{\frac{w-z}{zw}}{\frac{zw+1}{zw}}=\dfrac{w-z}{1+zw}$
5	$=-\left(\dfrac{z-w}{1+zw}\right)$
3	$=-k$
2	إذاً k تخيلي بحت

سلم تصحيح نموذج A

ثانياً: حل كلاً من التمارين الآتية (60 درجة لكل تمرين) :

التمرين الأول: ليكن f التابع المعرف على R وفق:

$$f(x)=\frac{x-\sin^2 x}{2+sinx}$$

١. جد عددين m, M يحققان أنّ: $m \le 2+sinx \le M$, ثم استنتج إشارة المقدار $2+sinx$

٢. استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

٣. بفرض $|g(x)-600| \le \frac{1-\cos 2x}{x}$, احسب $\lim_{x\to 0} g(x)$

العلامة	الخطوة
5 3 2	$-1 \le sinx \le 1$ $1 \le 2+sinx \le 3$ $m=1\ ,M=3$
2 2	$2+sinx \ge 1 > 0$ $2+sinx > 0$
5 2 2 2 5	$0 \le sin^2x \le 1$ $0 \ge -\sin^2 x \ge -1$ $x \ge x-sin^2x \ge x-1$ نقسم على $2+sinx > 0$ $\frac{x}{2+sinx} \ge f(x) \ge \frac{x-1}{2+sinx} \ge \frac{x-1}{3}$
5 3 2	$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{3}=+\infty$ فحسب المقارنة3 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
... 5 5 5	$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos2x}{x}$ $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$ $\lim_{x\to 0} 2\frac{sinx}{x}sinx=0$ حسب مبرهنة المقارنة: $\lim_{x\to 0} g(x)=600$

سلم تصحيح نموذج A

التمرين الثاني:

$ABCD$ رباعي وجوه فيه I و J هما بالترتيب منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ والنقطتين P و K تحققان العلاقتين $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BK}$ وأخيراً H منتصف $[PK]$ والمطلوب: أثبت أن النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة.

الخطوة	العلامة
ترجمة المعطيات: * النقطة P تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AP} \leftarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ ومنه النقطة P مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,2)\,,(D,1)$ * النقطة K تحقق العلاقة: $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BK} \leftarrow \overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ومنه النقطة K مركز أبعاد متناسبة لـ $(B,2)\,,(C,1)$ * النقطة I منتصف $[AB]$ إذاً النقطة I مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,2)$ * النقطة J منتصف $[CD]$ إذاً النقطة J مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$ * النقطة H منتصف $[PK]$ إذاً النقطة H مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(P,3)$ و $(K,3)$	10 10 10 10 10
استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون H مركز أبعاد متناسبة لـ: $(A,2)\,,(B,2)\,,(C,1)\,,(D,1)$	4
استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون H مركز أبعاد متناسبة لـ: $(J,2)\,,(I,4)$	2
ومنه النقاط I و J و K على استقامة واحدة	4

التمرين الثالث:

ليكن C_f الخط البياني للتابع المعرف $]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

١- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

٢- أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = \frac{x}{2} - 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

٣- ادرس الوضع النسبي للخط C_f مع مقاربه

سلم تصحيح نموذج A

الخطوة	العلامة
$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\lvert x\rvert\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}$	5
بما أن $x\to+\infty$ $f(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$	5 5
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	5
$f(x)-y_\Delta=-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1=1-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ $f(x)-y_\Delta=1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=0$ فهو مقارب مائل في جوار $+\infty$	5 2 2 1
$f(x)-y_\Delta=\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{x}$ المقام موجب حسب مجموعة التعريف ندرس إشارة البسط: $x^2-1\le x^2$ نجذر: $\sqrt{x^2-1}\le x$ $\sqrt{x^2-1}-x\le 0$ إذن C تحت مقاربه	10 10 10

التمرين الرابع:

لتكن الأعداد العقدية

$z_1=1-i$ و $z_2=2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ و $z_3=-3e^{i\frac{\pi}{3}}$

1. اكتب z_1 و z_2 و z_3 بالشكل الأسي.
2. مستفيداً من الطلب السابق أثبت أنّ $\left[\frac{z_1^4\,.\,z_2}{z_3^2}\right]$ حقيقي.
3. أوجد $(z_1\,.\,z_2)$ بالشكل الجبري والمثلثي واستنتج $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

سلم تصحيح نموذج A

العلامة	الخطوة
8 4 8	$z_1 = 1 - i \to r = \sqrt{2}, \theta = -\frac{\pi}{4} \to z_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ $z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \to z_2 = 2e^{\frac{2\pi}{3}}$ $z_3 = -3e^{i\frac{\pi}{3}} \to z_3 = e^{i\pi}.3e^{\frac{\pi}{3}} \to z_3 = 3e^{\frac{4\pi}{3}}$
2 8 10	$\left[\frac{z_1^4 \;.\; z_2}{z_3^2}\right] = \left[\frac{4e^{-i\pi}.2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{9e^{i\frac{8\pi}{3}}}\right]$ إصلاح الزاوية $\theta = \frac{8\pi}{3}$ بواسطة القياس الأساسي للزاوية وفق $\theta = \frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi + 2\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$ $\to = \frac{8}{9} . \frac{e^{-\pi}.e^{\frac{2\pi}{3}}}{e^{\frac{2\pi}{3}}} = \frac{8}{9}.e^{-\pi} = \frac{8}{9}(-1) = -\frac{8}{9} \to$ حقيقي
5 5	كتابة $z_1.z_2$ بالشكل المثلثي $z_1.z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$ كتابة $z_1.z_2$ بالشكل الجبري $z_1.z_2 = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$
10	$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

ثالثاً : حل المسألة الآتية (100 درجة) :

المسألة الأولى:

لتكن المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \\ x_0 = 5 \end{cases}$$

1) احسب الحدود x_1 و x_2 ثم ادرس اطراد المتتالية
2) نعرف $y_n = x_n + 4$ أثبت أنها هندسية
3) اكتب الحد العام لها
4) احسب المجموع $y_0 + y_1 + \cdots + y_{10}$ بدلالة قوّة للعدد $\frac{6}{5}$
5) استنتج المجموع $x_0 + x_1 + \cdots + x_{10}$

سلم تصحيح نموذج A

العلامة	الخطوة
5 5	$x_1 = \frac{6}{5}x_0 + \frac{4}{5} = 6 + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$ $x_2 = \frac{6}{5}x_1 + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}\frac{34}{5} + \frac{4}{5} = \frac{224}{25}$
10	$y_{n+1} = x_{n+1} + 4$ $y_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4$ $y_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{24}{5}$
$15 + 5 + 5$	$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{6}{5}x_n + \frac{24}{5}}{x_n + 4} = \frac{\frac{6}{5}(x_n + 4)}{x_n + 4} = \frac{6}{5} = q$
5	هندسية وأساسها $q = \frac{6}{5}$
10 10	$y_n = y_0 q^n$ $y_n = 9 \times \left(\frac{6}{5}\right)^n$
10	$S = a\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$
5 5 5	$a = y_0 = 9$ عدد الحدود 11 $S = 9\frac{1 - \left(\frac{6}{5}\right)^{11}}{1 - \frac{6}{5}} = 45\left(\left(\frac{6}{5}\right)^{11} - 1\right)$
5 5	المجموع: $x_0 + x_1 + \cdots + x_{10}$ $= (y_0 - 4) + (y_1 - 4) + \cdots + (y_{10} - 4)$ $= S - 4(11)$ $= 45\left(\left(\frac{6}{5}\right)^{11} - 1\right) - 44$

المسألة الثانية:

$ABCDEFGH$ مكعب حيث K من CD تحقق: $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة $J \in BC$ بحيث: $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

١. جد إحداثيات النقاط H, E, J, K, G في المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$

٢. أثبت أنّ الشعاعين $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطيّاً

٣. أثبت أنّ الأشعة $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً

سلم تصحيح نموذج A

٤. أثبت أنّ المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ)

الخطوة	العلامة
$E(0,1,0)\,,H(0,1,1)\,,G(1,1,1)$ $K\left(\frac{1}{4},0,1\right)\,,J\left(1,0,\frac{3}{4}\right)$	$4+4+4$ $10+10$
$\overrightarrow{EJ}\left(1,-1,\frac{3}{4}\right)$ $\overrightarrow{EG}(1,0,1)$ نلاحظ أن الشعاعين غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد	5 5 8
لدينا $\overrightarrow{EJ}\left(1,-1,\frac{3}{4}\right)$ و $\overrightarrow{EG}(1,0,1)$ و $\overrightarrow{HK}\left(\frac{1}{4},-1,0\right)$ والشعاعين $\overrightarrow{EJ}$ و $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي نبحث عن عددين a و b يحققان العلاقة: $\overrightarrow{HK}=a\overrightarrow{EG}+b\overrightarrow{EJ}$ $\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-1\\0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\\a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\-b\\\frac{3}{4}b\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\-b\\a+\frac{3}{4}b\end{pmatrix}$ تكافئ: $\frac{1}{4}=a+b\,...(1)$ $4=-b\,...(2)$ $0=a+\frac{3}{4}b\,...(3)$ من (2) نجد أنّ $b=1$ نعوض في (1) : $a=-\frac{3}{4}$ نتحقق في (3) : $0=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\leftarrow 0=0$ ومنه يوجد عددين $a=-\frac{3}{4}$ و $b=1$ يحققان: $\overrightarrow{HK}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EJ}$ ومنه الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{HK}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً	5 10 6 3 3 3 2 2 2 4
بما أن الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{EJ}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً فإن المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ)	10

انتهى حل الأسئلة