السؤال الأول

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$ (2 درجة)

$y = 2$ مقارب افقي في جوار $+\infty$ أو عند $+\infty$ (3 درجة)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$ (2 درجة)

$y = 2$ مقارب افقي في جوار $-\infty$ أو عند $-\infty$ (3 درجة)

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$$ (2 درجة)

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$.(3 درجة)

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty$$ (2 درجة)

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$.(3 درجة)

الطلب الثاني:

$$\ell = \frac{b+a}{2} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$ (5 درجة)

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2} = b - \ell = 0.01 = 10^{-2} = \frac{1}{100}$$ (5 درجة)

نعوض في القانون:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$ (5 درجة)

$$\left|\frac{2x+3}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{2x+3-2x+2}{x-1}\right| < \frac{1}{100}$$ (3 درجة)

$$\frac{5}{x-1} < \frac{1}{100}$$

نقلب:

$$x - 1 > 500$$

$$x > 501$$ (2 درجة)

نختار $A = 501$.

السؤال الثاني

نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n) = 5^n - 3^n = 2k$$ (5 درجة)

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$5^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$$ (5 درجة)

محققة. (الصفر مضاعف لكل الأعداد)

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$5^n - 3^n = 2k$ ... ... الفرض (5 درجة)

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$5^{n+1} - 3^{n+1} = 2k'$ ... ... الطلب (5 درجة)

البرهان: لدينا من الفرض:

$$5^n - 3^n = 2k$$ (5 درجة)

نضرب بـ 5:

$$5^{n+1} - 5.3^n = 10k$$ (5 درجة)

نطرح 3^{n+1} من الطرفين:

$$5^{n+1} - 3^{n+1} = 10k - 3^{n+1} + 5.3^n$$ (5 درجة)

$$= 10k - 2.3^n = 2(5k - 3^n) = 2k'$$ (5 درجة)

فالقضية صحيحة.

السؤال الثالث

شرط الاستمرار:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$ (10 درجة)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{0}$$ ح ع ت (درجة 5 في حال الحل الصحيح ضمناً)

$$f(x) = \frac{x^3 - 4(1 - \cos x)}{x^2} = \frac{x^3 - 4\left(2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^2} = x - 8\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2 = x - 2\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$ (5 درجة)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -2(1)^2 = -2$$ (5 درجة)

ولدينا:

$$f(0) = m - 602 \text{(5 درجة)}$$

نعوض في شرط الاستمرار:(5 درجة)

$$m - 602 = -2$$

$$m = 600 \text{(5 درجة)}$$

التمرين الأول

1- نوجد x_{n+1}:

$$x_{n+1} = u_{n+1} + 4$$
$$= 2u_n + 4 + 4$$
$$= 2u_n + 8 \text{(5 درجة)}$$

$$\text{(5 درجة)}\ \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2u_n + 8}{u_n + 4} = \frac{2(u_n + 4)}{u_n + 4}\ \text{(5 درجة)}$$

$$= 2 = q$$

هندسية أساسها $q = 2$ (5 درجة)

2- $x_n = x_0 . q^n$(5 درجة)

$$x_0 = u_0 + 4 = 0 + 4 = 4 \text{(3 درجة)}$$

نعوض في القانون:

$$x_n = 4 \times 2^n = 2^2 \times 2^n = 2^{n+2}\ \text{(2 درجة)}$$

$$x_n = u_n + 4 \ \Rightarrow u_n = x_n - 4\ \text{(5 درجة)}$$
$$u_n = 2^{n+2} - 4 \text{(5 درجة)}$$

3- لحساب المجموع:

$$a = x_1 = 4 \times 2^1 = 8\ \text{(5 درجة)}$$
$$n = n + 1 - 1 = n \text{(5 درجة)}$$

نعوض في قانون المجموع:

$$\text{(5 درجة)} S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{8(1 - 2^n)}{1 - 2}$$
$$= -8(1 - 2^n) = 8(2^n - 1) \text{(5 درجة)}$$

التمرين الثاني

الطلب الأول:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \,,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{(5 + 5 درجة)}$$

إذن لا يقبل أي مقارب افقي.(5 درجة)

الطلب الثاني:

$$f(x) - x = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x} \text{(10 درجة)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \text{(5 درجة)}$$

بفرض $y = x$:(10 درجة)

$$f(x) - y = f(x) - x$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0 \text{(5 درجة)}$$

الطلب الثالث:

$$f(x) - x > 0 \text{(10 درجة)}$$

C فوق Δ.(5 درجة)

<u>أو دراسة وضع النسبي عن طريق الجدول ويجب أن يكون C فوق Δ.</u>

المسألة الأولى

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}}$$

1- نوجد مجموعة التعريف:

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[\text{ (5 درجة)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{(5 درجة)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{(5 درجة)}$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \text{(3 درجة)}$$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و $\boldsymbol{C}$ يقع على يمين مقاربه.(2 درجة)

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \text{(3 درجة)}$$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و $\boldsymbol{C}$ يقع على يسار مقاربه.(2 درجة)

2- بقسمة التابع قسمة إقليدية:(5 درجة)

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1} \text{(5 درجة)}$$

نشكل الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{4}{x+1} \text{(3 درجة)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - y_\Delta = 0 \text{(2 درجة)}$$

3- لدراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = 0 \text{(4 درجة)}$$

$$4 \neq 0$$

مستحيلة.

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ $+\infty$
$\frac{4}{x+1}$	$-$ ‖ $+$
الوضع النسبي	تحت | فوق

كل سطر 2 درجات.

4- لما كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (((5 درجة)))))

كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ((((5 درجة)))))

حسب مبرهنات المقارنة (الإحاطة) ((((5 درجة))))

5- المتراجحة المعطاة تكافئ:

$|3h(x) - 6| \leq f(x) - x + 1$ (5 درجة)

$|3h(x) - 6| \leq f(x) - (x+1)$ (15 درجة)

$|3h(x) - 6| \leq f(x) - y_\Delta$ (5 درجة)

و لكون $\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = 0$ ((((5 درجة)))))

نتج أن $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 2$ (((((5 درجة)))))))