تمارين عن توطئة الضخ

أ.عمار فرحة

RBO Informatics; 10/05/2022
اللغات الصورية
فريق الكريّات الحمراء للمعلوماتية

تمارين عن توطئة الضخ

تذكرة :

تنص توطئة الضخ على أنه : إذا كانت L لغة منتظمة، و S سلسلة ما من L حيث $|S| \geq N$

بفرض N ثابت مرتبط بعدد الحالات "أي ممكن أن يكون نفسه عدد حالات الأتومات وممكن لا، المهم أن له علاقة بها"

عندها يوجد x, y, z أي : $S = x.y.z$ بحيث:

$$*_1 \ |x.y| < N \quad , \quad *_2 \ |y| > 0 \qquad : \ \forall \, i \geq 0 \ : xy^iz \in L$$

أي أنه إذا كان هناك سلسلة S أكبر من عدد الحالات، ف هذا يدل على وجود حلقة في مكان ما نعبر عنه ب y (لا يمكن تحديد مكان الحلقة) .

لإثبات أن اللغة L غير منتظمة باستخدام توطئة الضخ : نقوم باختيار سلسلة S تنتمي ل اللغة ثم نثبت أنه عند ضخها من أجل قيمة معينة ل i تصبح السلسلة غير منتمية لهذه اللغة بالتالي تصبح اللغة غير قابلة للضخ فهي غير منتظمة .

يتم اختيار S بحيث تحقق الشرطين $*_1$ و $*_2$ ثم نختار قيمة ل i ونثبت أن ضخ y عدة مرات $= i$ يجعل S غير منتمية ل اللغة (سيتم توضيح ذلك ضمن الأمثلة) .

1. لتكن لدينا L لغة معرفة وفق التالي : $L = \{a^i b^i \ ; \ i > j\}$ حدد فيما إذا كانت منتظمة أم غير منتظمة باستخدام توطئة الضخ .

الحل :

نفرض N ثابت توطئة الضخ (قيمته غير مهمة)، ونختار سلسلة S بناء عليه :

$$S = a^{N+1} b^N \qquad |S| = 2N + 1 > N$$

بالتالي يوجد x, y, z تحقق :

$$S = x.y.z \quad , \quad |x.y| < N$$
$$|y| > 0$$

- تذكرة : لغة منتظمة يمكن تمثيلها بأتومات أو تعبير منتظم

أي أن xy تسلسل من محارف a، أي $y = a^k$ حيث $k > 0$ ، مهما تكن i ولتكن تساوي 0 عندها :

تكرار y هو k مرة $\qquad x.y^i.z \to x.y^0.z = a^{N+1-k} b^N$

نريد تحديد فيما إذا كانت $a^{N+1-k}b^N$ تنتمي إلى L أم لا :

بأسوأ الأحوال يمكن أن تكون $k = 1$:

$$a^{N+1-1}b^N = a^N b^N \notin L$$

لا تحقق شرط اللغة، بالتالي مهما كانت قيمة k فلن تنتمي إلى اللغة " لأنه يصبح تكرار a أقل من b"

ومنه L لغة غير منتظمة حسب توطئة الضخ .

2. $L_2 = \{a^P : P\ is\ prime\}$

الحل :

نفرض L لغة منتظمة إذاً يوجد ثابت P هو ثابت الضخ، وليكن N أول عدد أولي أكبر أو يساوي P :

نختار سلسلة S بناء على N :

$$S = a^N \in L \quad , \quad |S| = N > P \;\rightarrow \exists\, x,y,z : S = x.y.z \rightarrow a^N = x.y.z$$

شرط $|y| > 0 \;\&\; |xy| < P$ أي $y = a^k \,; k > 0$

$$\forall\, i \geq 0 : xy^iz \overset{?}{\in} L$$

نريد اختبار السلسلة بحيث إذا قمنا بضخ y ، i مرة هل ستنتمي إلى L أم لا ؟

من أجل $i = 1$: $xyz = a^N$

من أجل $i = 2$: $xyyz = a^{N+k}$

من أجل $i = 3$: $xyyyz = a^{N+2k}$

$$xy^iz = a^{N+(i-1)k}$$

من أجل $i = N + 1$:

$$a^{N+Nk} = a^{N(1+k)} \notin L$$

إن $N(1+k)$ لا يمكن أن يكون أولي لأن أقل قيمة لـ k هي 1 بما أن $k > 0$ وضرب أي عدد أولي بعدد أكبر من 1 يصبح الناتج غير اولي.

أي أن L غير قابلة للضخ وبالتالي فهي غير منتظمة وذلك حسب توطئة الضخ .

3. $L = \{a^i : i = j^2 \,; j > 0\}$

الحل :

طريقة 1 : بما أنه يوجد علاقة بين القوى $i = j^2$، فاللغة غير منتظمة .

طريقة 2 : حسب توطئة الضخ : نفرض N ثابت التوطئة ولتكن S سلسلة من L بحيث :

$$S = a^{N^2} \quad , \; |\, S \,| = N^2 > N \rightarrow \exists\, x,y,z : S = x.y.z \;\; , |xy| < N, |y| > 0$$

$$y = a^k \,;\; 0 < k < N$$

$$\forall\, i \geq 0 \;:\; xy^iz = a^{N^2+ik} \overset{?}{\in} L$$

بفرض $i = 1$: $\rightarrow a^{N^2+k} \overset{?}{\in} L$

نريد معرفة فيما إذا كان $N^2 + k$ هو مربع لعدد أم لا :

نعلم أن : $N^2 < N^2 + k$ وبما أن $k < N$ فيمكن أن نكتب:

$$N^2 < N^2 + k < N^2 + N$$

$$N^2 < N^2 + k < N^2 + N < N^2 + 2N + 1$$

$$N^2 < \quad < (N+1)^2$$

بما أن تابع التربيع تابع متزايد بالتالي فإنه لا يوجد مربع لعدد ما بين مربعين لعددين متتاليين، بالتالي فإن $N^2 + k$ ليس مربع لعدد .

$$\rightarrow a^{N^2+k} \notin L$$

فاللغة غير منتظمة .

4. $L = \{\omega \in \{a,b\}^* \; ; \; |\omega|_a \neq |\omega|_b\}$

الحل :

بالإثبات وفق توطئة الضخ : يجب أن نضمن أنه عند ضخ y في السلسلة xy^iz يجب أن يبقى الشرط $|\omega|_a \neq |\omega|_b$ محقق ! وهذا غير ممكن ! .

لذلك نثبت عن طريق نقض الفرض، نفرض أن L منتظمة فيجب أن تكون $\bar{L}$ منتظمة ، سنختبر ذلك:

$$\bar{L} = \{\omega \in \{a,b\}^* \; ; \; |\omega|_a = |\omega|_b\}$$

نفرض N ثابت التوطئة ونختار سلسلة $S \in \bar{L}$

$$S = a^N b^N \quad , |S| = 2N > \; N \rightarrow \exists\, x, y, z \; : S = x.y.z \, ,$$
$$|x.y| < N \, , |y| > 0$$
$$\forall\, i \geq 0 \; , \; \; xy^iz \overset{?}{\in} \bar{L}$$

بما أن $|y| > 0$ إذاً y على الأقل تحوي a وبمجرد ضخها بقيمة أكبر من 1 سيصبح عدد محارف a أكبر من عدد محارف b ، وهذا مخالف لشرط اللغة $\bar{L}$، أي اللغة $\bar{L}$ غير قابلة للضخ فهي غير منتظمة ومنه L لغة غير منتظمة .

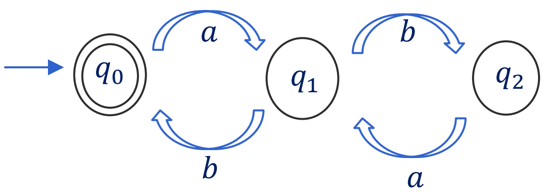
- ملاحظة :

عند أخذ المتمم يجب الانتباه إلى أن نأخذ جميع الحالات، مثلاً : متمم $L = \{a^i b^i \; ; \; i = j\}$ هو $\bar{L} = \{a^i b^i \; ; \; i \neq j\}$ بالإضافة إلى كل سلسلة تحوي a و b بشكل عشوائي شرط أن لا تكون مكونة من محارف a يتلوها محارف b بنفس العدد.

5. $L = \{(ab)^n (ab)^n\}$

يمكن التعبير عن اللغة بالشكل $(ab)^n (ab)^n = (ab)^{2n}$

بالتالي قيمة الأس زوجية مهما كانت n أي يمكن تمثيل اللغة بأتومات فاللغة منتظمة ، نعبر عنها بالأتومات :



تمارين للتدريب :

هل اللغات التالية منتظمة أم لا، ولماذا ؟

$$L = \{(ab)^n a^{\,n}\}$$
$$L = \{a^i b^i \; ; \; i \neq j\}$$

انتهت المحاضرة ^_^