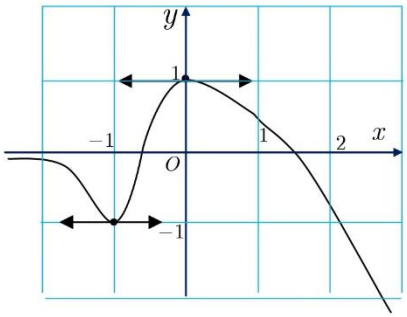
أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: نتأمل جانباً C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:



1- جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2- اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C_f.
3- اكتب مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$.
4- عين القيم الحدية للتابع f مبيناً نوع كل منها.

السؤال الثاني: في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-1,1)$، والمطلوب:
اعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة : $MA = MB$ وما طبيعة المجموعة S.

السؤال الثالث: ليكن لدينا التابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x) = \ln(2 + sinx)$ والمطلوب:
1. احسب $g'(x)$و $g'(0)$.
2. استنتج قيمة النهاية $\lim_{x\to0} \frac{\ln(2+sinx)-\ln(2)}{x}$.

السؤال الرابع: جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:
$$\begin{cases} \ln(x) + \ln(y) = \ln(6) \\ \ln(x+y) = \ln(5) \end{cases}$$

السؤال الخامس: ليكن $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}dx$ و $J = \int_0^1 \frac{x^7}{1+x^4}dx$ ، والمطلوب:
احسب $I + J$ ثم I واستنتج J.

السؤال السادس: لتكن C دائرة مركزها o، رسمنا فيها ستة أقطار مختلفة، لتكن $S = \{A_1, A_2, \dots, A_{12}\}$ مجموعة أطراف هذه الأقطار/ المطلوب:
1- ما عدد المثلثات التي رؤوسها من عناصر S ؟
2- ما عدد المضلعات الرباعية التي رؤوسها من عناصر S؟
3- كم مستطيل رؤوسه من عناصر S؟

ثانياً: حل كلاً من التمارين الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$و $(v_n)_{n\geq1}$:
$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n} \text{ و } v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$$
والمطلوب:
1- أثبت أن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية متزايدة و $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية متناقصة.
2- استنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان.
3- أثبت أن $u_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$ ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ واستنتج $\lim_{n\to+\infty} v_n$

التمرين الثاني: أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية:
1- جد كل عدد عقدي j يحقق $j^3 = 1$، واكتبه بالشكل الجبري.
2- إذا كان β عدداً حقيقياً وكان العدد العقدي $w = \frac{\beta+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\beta}$
a) أثبت أن $|w| = 1$.
b) من أجل $\beta = 1$، أثبت أن: $w^{12} = 1$.
3- عين مجموعة نقاط المستوي $M(z)$ التي تحقق أن $|z - 2 + i| = 5$

التمرين الثالث: لدينا صندوق يحتوي على ثلاث بطاقات ملونة، واحدة زرقاء تحمل رقم (2) وبطاقتان حمراوان تحملان الرقمين (0) و(1) ، نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة، ونعرّف المتحولين العشوائيين X و Y كالآتي:

X يدل على عدد البطاقات الحمراء المسحوبة. Y يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين، المطلوب:

1- اكتب مجموعة قيم X وقانونه الاحتمالي.

2- اكتب مجموعة قيم Y وقانونه الاحتمالي.

3- اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)/ أيكون المتحولان X و Y مستقلين احتمالياً ؟ لماذا؟

ثالثاً: حل المسألة الآتية: (100 درجة)

المسألة الأولى:

في المعلم المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط: $A(2,-2,2)$ و $B(1,1,0)$ و $C(1,0,1)$ و $D(0,0,1)$ والمطلوب:

1. تحقق أن النقاط BوCوD لا تقع على استقامة واحدة.
2. أثبت أن: $y+z-1=0$ هي معادلة للمستوي (BCD).
3. اعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من النقطة A ويعامد المستوي (BCD).
4. عين إحداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD).
5. اكتب معادلة للكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً لها.

المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,1[$ وفق: $f(x)=e^x+\ln(1-x)$وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $g(x)=(1-x)e^x-1$. والمطلوب:

1. ادرس اطراد التابع g واستنتج أن $g(x)\leq 0$ مهما تكن $x\in\mathbb{R}$.
2. تحقق أن $f'(x)=\frac{g(x)}{1-x}$ على المجال $]-\infty,1[$، ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
3. اكتب معادلة للمستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x=0$.
4. في معلم متجانس ارسم المستقيم T، ثم ارسم C الخط البياني للتابع f.

... انتهت الأسئلة ...