

السؤال الأول:

$$f(x) = \frac{\ln(x) + 2}{\ln(x) + 1} ;]e^{-2}, +\infty[$$

1- لحساب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) \left(1 + \frac{2}{\ln(x)}\right)}{\ln(x) \left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)} = 1$$

2- لإيجاد العدد A:

$$\begin{aligned} |f(x) - l| &< \varepsilon \\ l &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \\ \varepsilon &= b - l = 0.1 = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

نعوض:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\ln(x) + 2}{\ln(x) + 1} - 1 \right| &< \frac{1}{10} \\ \left| \frac{\ln(x) + 2 - \ln(x) - 1}{\ln(x) + 1} \right| &= \frac{1}{10} \\ \frac{1}{\ln(x) + 1} &< \frac{1}{10} \end{aligned}$$

نقلب:

$$\begin{aligned} \ln(x) + 1 &> 10 \\ \ln(x) &> 9 \\ x &> e^9 \\ A &= e^9 \text{ نختار} \end{aligned}$$

3- لاستنتاج النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{X \rightarrow 1} f(X) = 2$$

السؤال الثاني:

المعادلة الأولى:

$$\begin{aligned} \ln(x^2 + 1) &= \ln(7x) \\ E_1 &=] - \infty, +\infty[, E_2 =] - \infty, +\infty[\\ \Rightarrow E &= E_1 \cap E_2 =] - \infty, +\infty[\\ x^2 + 1 &= 7x \\ x^2 - 7x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

حل ورقة عمل التحليل - منصة طريقي التعليمية

$$\Delta = 49 - 4(1)(1) = 45 > 0$$

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{45}}{2} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{7 - \sqrt{45}}{2} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$$

والحلان مقبولان حسب شرط الحل.

المعادلة الثانية:

$$\ln(x^2 - 4) = \ln(2x - 4)$$

$$E_1 =] - \infty, -2[\cup] 2, +\infty[$$

$$E_2 = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E = E_1 \cap E_2 =] - \infty, -2[\cup] 2, +\infty[$$

$$x^2 - 4 = 2x - 4$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

إما:

$$x = 0 \text{ مقبول}$$

أو:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ مرفوض}$$



السؤال الثالث:

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x)}{x} ; D_f =]0, +\infty[$$

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln(x) ; D_g =]0, +\infty[$$

أولاً:

1- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2x + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= +\infty(+\infty + 0 - 0) = +\infty$$

g اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ مقبول}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ مرفوض}$$

الجدول:

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		----- 0 +++++	
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2} + \ln(2)$	$+\infty$

2- نلاحظ أن:

$$g(x) \geq \frac{3}{2} + \ln(2) > 0$$

$$g(x) > 0$$

ثانياً:

(1) لحساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(2) f اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 2 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$$

الجدول:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+++++
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ثالثاً:

(1) نوجد النهايات:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x \left(2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x \cdot x} \right)}{x}$$

$$= 2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 = a$$

$$f(x) - 2x = 2x - 2 + \frac{\ln(x)}{x} - 2x$$

$$= -2 + \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = -2 = b$$

(2) المعادلة:

$$y_{\Delta} = 2x - 2$$

$$f(x) - y_{\Delta} = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_{\Delta} = 0$$

إذن هو مقارب مائل.

$$f(x) - y_{\Delta} = 0$$

$$\ln(x) = 0$$

$$x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$\frac{\ln(x)}{x}$		----- 0	+++++
وضع		تحت	فوق

(3) لكتابة معادلة المماس:

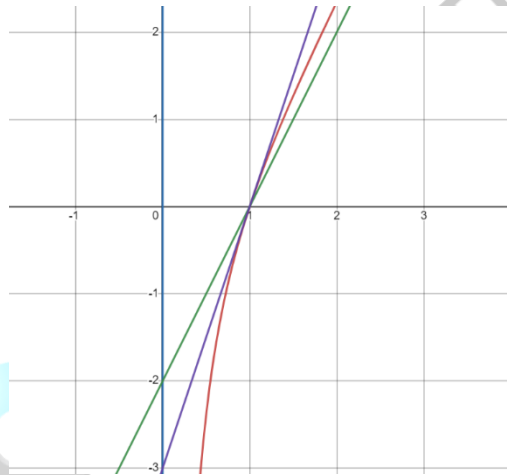
$$y_d = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$f'(1) = 3$$

$$f(1) = 0$$

$$\Rightarrow y_d = 3(x - 1) + 0 = 3x - 3$$

رابعاً: الرسم:



السؤال الرابع:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n}; u_0 = 0$$

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

1- لإثبات أن المتتالية هندسية:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n} = v_n$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n \cdot 2}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2^n \cdot 2}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} = q$$

المتتالية هندسية وأساسها $q = \frac{1}{2}$, وحدها العام $v_n = \frac{1}{2^n}$.

2- لدينا:

$$w_n = \ln(v_n)$$

أ- نوجد w_{n+1} :

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$$

نوجد الفرق:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \\ &= \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) = r \end{aligned}$$

فالمتتالية حسابية وأساسها $r = -\ln(2)$.

ب- لإيجاد الحد العام نعوض في:

$$w_n = w_0 + n \cdot r = \ln(1) - n \cdot \ln(2) = n \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

ت- لحساب قيمة المجموع:

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{w_1}{\ln(2)} - \frac{w_2}{\ln(2)} - \dots - \frac{w_5}{\ln(2)} \\ &= 1 - \left(\frac{w_1}{\ln(2)} + \frac{w_2}{\ln(2)} + \dots + \frac{w_5}{\ln(2)} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\ln(2)} (w_1 + w_2 + \dots + w_5) \end{aligned}$$

ونلاحظ أن لدينا مجموع متتالية حسابية وهو:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$

$$S = n \cdot \frac{a + l}{2}$$

$$n = 5 - 1 + 1 = 5$$

$$a = w_1 = 0$$

$$l = w_5 = 5 \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow w_1 + w_2 + \dots + w_5 = 5 \cdot \frac{0 + 5 \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{\ln(2)}{2}$$

نعوض في S:

$$S = 1 - \frac{1}{\ln(2)} \left(-\frac{\ln(2)}{2} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

السؤال الخامس:

$$g(x) = \sqrt{x} - \ln(x) ; D_g =]0, +\infty[$$

g اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{x} = 0$$

$$x = \sqrt{x}$$

نربع الطرفين بشرط $x > 0$ وهي كذلك على مجموعة التعريف:

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

إما:

$$x = 0 \text{ مرفوض}$$

أو:

$$x = 1 \text{ مقبول}$$

الجدول:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	---	0	+++
$g(x)$		0	

نلاحظ أن:

$$\sqrt{x} \geq \ln(x)$$

$$\sqrt{x} - \ln(x) \geq 0$$

$$g(x) \geq 0$$

من الجدول نلاحظ أن حلها:

$$s = [1, +\infty[$$