<table>
<tr><th colspan="2">حول النهايات</th></tr>
<tr><td rowspan="2">حالة $\frac{\infty}{\infty}$</td><td>دائماً نأخذ المسيطر من البسط و المسيطر من المقام</td></tr>
<tr><td>

ترتيب المسيطر حسب القوة (عند $+\infty$):

$$e^x > x^n > lnx$$

المسيطر في الحد $\sqrt{x^2+3}$ هو $\sqrt{x^2}$ ثم $|x|$ ثم نفك القيمة المطلقة حسب السعي

</td></tr>
<tr><td>أمثلة</td><td>

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+3x+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x-3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2}x}{x} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx-1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^x+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}e^x = +\infty$$

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">حالة $\frac{0}{0}$</td><td>

1- يوجد جذر : نضرب البسط و المقام بالمرافق

2- لا يوجد جذر : تحليل البسط و المقام إلى جداء أقواس

</td></tr>
<tr><td>

أمثلة:

$$1)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x} = \lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x+1-1}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to0}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$2)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1}\frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

</td></tr>
<tr><td>نظرية أوبيتال</td><td>

في حالة $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$ و عدم وجود قيمة مطلقة . يمكن التخلص من هذه الحالات باستخدام طريقة أوبيتال . (اشتقاق البسط و اشتقاق المقام)

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{lnx-1}{e^x+1} = \lim_{x\to+}\frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x} = 0$$

$$2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = 0$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^x+1}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}-e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}-e^x}{2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{2} = +\infty$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{lnx-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}2x^2 = +\infty$$

</td></tr>
<tr><td>في حالة وجود قيمة مطلقة</td><td>من القيمة المطلقة حسب السعي</td></tr>
</table>

	أمثلة: 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\lvert x^2-1\rvert}{x+1}$ نلاحظ أنه عند $-\infty$ يكون المقدار x^2-1 موجباً و بالتالي قيمته المطلقة نفسه $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x+1}=-\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lvert x+1\rvert-\lvert 1-2x\rvert}{x+3}$ نلاحظ أنه عند $+\infty$ يكون المقدار $x+1$ موجباً فقيمته المطلقة نفسه $x+1$ أما المقدار $1-2x$ سالباً فقيمته المطلقة عكسه $2x-1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1-(2x-1)}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x+2}{x+3}=-1$ 3) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\lvert 4x-3\rvert-\lvert 2x-1\rvert}{x-1}$ نلاحظ أنه عند الواحد يكون $4x-3$ موجباً فقيمته المطلقة $4x-3$ أما $2x-1$ فيكون موجباً أيضاً فقيمته المطلقة نفسه $2x-1$ $\lim\limits_{x\to1} \frac{4x-3-(2x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1} \frac{2x-2}{x-1}=2$ 4) $\lim\limits_{x\to3} \frac{\lvert 2x+3\rvert-\lvert x^2-18\rvert}{x-3}$ نلاحظ أن $2x+3$ عند الـ3 موجب فقيمته المطلقة نفسه $2x+3$ و x^2-18 عند الـ3 سالب فقيمته المطلقة عكسه $18-x^2$ $\lim\limits_{x\to3} \frac{2x+3-(18-x^2)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim\limits_{x\to3} \frac{(x+5)(x-3)}{x-3}=8$
حالة $\infty-\infty$	$\sqrt{x^2+3}-x$ $\to$ نربع $(x^2+3\ ,x^2)$ 😀 $\sqrt{4x^2+4}+2x$ $\to$ نربع $(4x^2+4\ ,4x^2)$ 😀 $\sqrt{x^2+x+1}-3x$ $\to$ نربع $(x^2+x+1\ ,9x^2)$ 😔 $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2x^2+3}$ $\to$ نربع $(x^2+x, 2x^2+3)$ 😔 في حالة النهاية السعيدة: نضرب بالمرافق في حالة النهاية الحزينة: نخرج أقوى درجة عامل مشترك من كل حد و نراعي السعي
حالة $0.\infty$	**نهايات للحفظ:** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$

في كل مما يلي احسب نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1- $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\ ;a=+\infty$:

a	$-\infty$	b	$+\infty$	c	0	d	1

2- $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\ ;a=-\infty$:

a	3	b	-1	c	$-\infty$	d	0

3- $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\ ;a=0$:

a	$\frac{1}{2}$	b	$+\infty$	c	0	d	1

4- $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}\ ;a=+\infty$:

a	1	b	0	c	$\frac{9}{4}$	d	-1

5- $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}\ ;a=2$:

a	4	b	8	c	12	d	$+\infty$

6- $f(x)=\frac{x^2-3x}{x-3}\ ;a=3$:

a	$+\infty$	b	1	c	$-\infty$	d	3

7- $f(x)=\sqrt{9x^2+1}-3x\ ;a=+\infty$:

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

8- $f(x)=\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+2}\ ;a=+\infty$:

a	$+\infty$	b	0	c	$-\infty$	d	غير ذلك

9- $f(x)=\sqrt{5x+1}-x\ ;a=+\infty$:

a	$-\infty$	b	$+\infty$	c	1	d	$\sqrt{5}$

10- نهاية التابع $f(x)=\left[\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{5}{2}}-2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$ عند $+\infty$:

a	$\mathbf{4\sqrt{2}}$	b	$\mathbf{0}$	c	$\mathbf{2\sqrt{2}}$	d	$\mathbf{-2\sqrt{2}}$

11- عند دراسة نهاية التابع $f(x)=\frac{\sin|x|}{x}$ عند الصفر نجد أن نهايته :

a	$\mathbf{1}$	b	$\mathbf{-1}$	c	$\mathbf{0}$	d	غير موجودة

12- ليكن f المعرف على R^* وفق $f(x)=\frac{|2x-1|-|1-3x|}{x}$ عند دراسة نهاية f عند الصفر نجدها:

a	$+\infty$	b	$-\infty$	c	1	d	غير موجودة

13- إذا علمت أن $\frac{1}{4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+a^2}-a}{x}$ و $a>0$ فإن قيمة الثابت a هي :

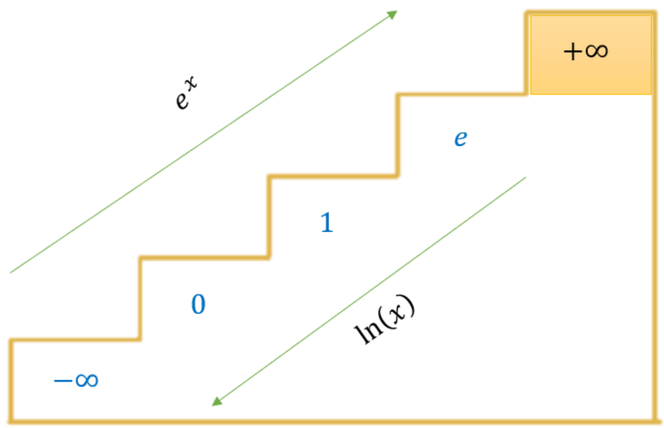
a	2	b	1	c	4	d	0

حول النهايات اللوغارتمية والأسية	
النهايات البسيطة	$\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ $\lim_{x\to0^+} lnx = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
نهايات حكم القوي على الضعيف	$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{lnx} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
عند الصفر	$\lim_{x\to0} xlnx = 0$ $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
عند الواحد	$\lim_{x\to1} \frac{lnx}{x-1} = 1$ $\lim_{x\to1} \frac{x-1}{lnx} = 1$
عند $-\infty$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

جميع النهايات الكسرية السابقة يمكن حسابها على أوبيتال

خواص التابع اللوغارتمي

1- درج السعادة



2- خواص اللوغارتم:

لوغارتم الجداء	$\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$
لوغارتم القسمة	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
لوغارتم القوة	$\ln(a^n) = n\ln(a)$
لوغارتم الجذر	$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
لوغارتم المقلوب	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
خواص تقابلية	$\ln(e^x) = x$ $e^{\ln(x)} = x$

1- بفرض a, b, c, d أعداد حقيقية موجبة تماماً عندئذ المقدار $\ln\left(\frac{a^2\times b^3}{c\times d^6}\right)$ يساوي

a	$2\ln a + 3\ln b - \ln c + 6\ln d$	b	$2\ln(a) + 3\ln(b) - \ln(c) - 6\ln d$
c	$2\ln a \times 3\ln b - \ln c - 6\ln d$	d	$6\ln(ab) - 6\ln(cd)$

2- إن قيمة المقدار $\ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{600}{599}\right)$

a	$3\ln(2) + 2\ln(5) + \ln 3$	b	$3\ln 2 - 2\ln 5 - \ln 3$
c	$2\ln 2 + 2\ln 5 + \ln 3$	d	$3\ln 2 + 2\ln 5 - \ln 3$

3- إن $\ln(x^2)$ يساوي:

a	$2\ln\lvert x\rvert$	b	$2\ln(x)$	c	$(\ln x)^2$	d	$2\ln(-x)$

4- إن مجموعة قيم العدد الطبيعي التي تحقق $2^n \leq 100$

a	$n \geq 4$	b	$n \leq 4$	c	$n \geq 5$	d	$n \geq 2$

5- إن مجموعة قيم العدد الطبيعي التي تحقق $\left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 10^{-2}$

a	$n \geq 4$	b	$n \geq 5$	c	$n \leq 4$	d	$n \geq 2$

6- إن مجموعة قيم العدد الطبيعي التي تحقق $0.2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

a	$n \leq 2$	b	$n \geq 2$	c	$n \leq 0$	d	$n \leq 1$

7- إن مجموعة النقاط $M(x, y)$ التي تحقق الشرط $\ln(x) = \ln(y+1)$ (دوّن ملاحظة حول هذا السؤال)

a	نصف مستقيم	b	دائرة	c	قطع زائد	d	مستقيم

8- إن مجموعة النقاط $M(x, y)$ التي تحقق الشرط $\ln(y) = 2\ln(x)$

a	جزء من دائرة	b	جزء من قطع مكافئ	c	جزء من قطع زائد	d	جزء من قطع ناقص

9- إن مجموعة النقاط $M(x, y)$ التي تحقق الشرط $\ln(y) + \ln(x) = 0$

a	جزء من دائرة	b	جزء من قطع مكافئ	c	جزء من قطع زائد	d	جزء من قطع ناقص

10- نرمز بالرمز log للتابع اللوغارتمي الذي أساسه 10 (أي $\log(10) = 1$) عندئذٍ المقدار $\log(0.6)$ يساوي

(دوّن ملاحظتك حول هذا السؤال)

$\log(2)+\log(3)+1$	d	$\log(6)$	c	$\log(2)\log(3)$	b	$\log(2)+\log(3)-1$	a

11- بفرض $a > 1$. نرمز بالرمز $\log_a$ للوغارتم الذي أساسها a ($\log_a(a) = 1$) عندئذ:

المقدار $y = \log_a(x)$ يساوي:

$y=\frac{\ln(a)}{\ln(x)}$	d	$y=\frac{\ln(x)}{a}$	c	$y=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$	b	$y=\frac{\ln(x)}{\log(a)}$	a

12- نهاية التابع $f(x) = x - lnx$ عند $+\infty$

غير ذلك	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	0	a

13- نهاية التابع $f(x) = \frac{1-lnx}{x}$ عند $+\infty$

غير ذلك	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	0	a

14- نهاية التابع $f(x) = \frac{x-lnx}{x+lnx}$ عند $+\infty$

1	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	0	a

15- نهاية التابع $f(x) = \frac{2lnx-3}{lnx+3}$ عند $+\infty$

2	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	0	a

16- نهاية التابع $f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$ عند $+\infty$

غير ذلك	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	0	a

17- نهاية التابع $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$ عند $+\infty$

غير ذلك	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	0	a

18- نهاية التابع $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x)$ عند $+\infty$

غير ذلك	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	0	a

19- نهاية التابع $f(x) = \frac{1}{x} - lnx$ عند 0^+ :

غير ذلك	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	0	a

20- نهاية التابع $f(x) = \frac{1}{x} + lnx$ عند 0^+ هي :

غير ذلك	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	0	a

21- نهاية التابع $f(x) = x(3 - lnx)$ عند 0^+ :

غير ذلك	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	0	a

22- نهاية التابع $f(x) = xln^2(x)$ عند الصفر هي :

غير ذلك	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	0	a

23- نهاية التابع $f(x)=\frac{1}{x(1-lnx)}$ عند الصفر من اليمين :

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

24- نهاية التابع $\mathrm{f(x)}=\ln(2\mathrm{x}+1)-\ln(x-1)$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$\ln(2)$

25- نهاية التابع $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+sinx)}{x}$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	1

26- قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(sinx)}{x-\frac{\pi}{2}}$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

27- قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to1}\frac{xln(\sqrt{x+1})-\ln(\sqrt{2})}{x-1}$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$ln\sqrt{2}+\frac{1}{4}$

28- قيمة العدد λ حتى يكون $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\lambda x+1)-\ln(2x+3)=1$

a	e	b	$2e$	c	$-e$	d	1

29- نهاية التابع $f(x)=e^x-lnx$ عند $+\infty$

a	$\frac{1}{2}$	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$-\frac{1}{2}$

30- نهاية التابع $f(x)=x^2-e^x$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$-\frac{1}{2}$

31- نهاية التابع $f(x)=x-\ln(e^x+1)$ عند $+\infty$

a	$\frac{1}{2}$	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	0

32- نهاية التابع $f(x)=\frac{1}{x}(e^x-1)$ عند 0

a	1	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$-\frac{1}{2}$

33- إذا علمت أن $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-\ln(e^{\lambda x}+1)=+\infty$ فإن الشرط

a	$0<\lambda<2$	b	$\lambda>2$	c	$0<\lambda\le2$	d	$\lambda\ge2$

34- إن نهاية التابع $f(x)=\frac{2e^x+1}{1+e^x}$ عند $+\infty$:

a	2	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

35- إن نهاية التابع $g(x)=\ln(x)-e^x$ عند $+\infty$:

a	1	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

36- إن نهاية التابع $h(x)=e^x-x^2$ عند $+\infty$:

a	2	b	-1	c	$+\infty$	d	$-\infty$

37- إن نهاية التابع $f(x) = x - e^x$ عند $+\infty$:

a	2	b	1	c	$+\infty$	d	$-\infty$

38- إن النهاية $\lim_{t\to 0} t\left(\frac{1}{e^t-1}\right)$ تساوي:

a	1	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

39- إن نهاية التابع $f(x) = \frac{3e^x}{4e^x-4}$ عند $+\infty$ هي:

a	$\frac{4}{3}$	b	$\frac{3}{4}$	c	1	d	-1

40- إن نهاية التابع $g(x) = (2-x)e^x$ عند $-\infty$:

a	1	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

41- إن نهاية التابع $k(x) = \frac{e^x-1}{x-1}$ عند $+\infty$:

a	1	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

42- إن نهاية التابع $\ln(e^x+2)$ عند $-\infty$:

a	$\ln(2)$	b	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	c	$+\infty$	d	$-\ln(2)$

43- إن نهاية التابع $f(x) = e^{-2x} + 2x - 2$ عند $-\infty$:

a	1	b	$+\infty$	c	2	d	$-\infty$

44- إن نهاية التابع المعرف وفق $f(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1)$ عند $+\infty$:

a	1	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

حول تغيير المتحول

عندما يكون الصفر ناتج عن $\ln(1)$:

1- نفرض المضمون $1+t$

2- نعزل x بدلالة t

3- نغير السعي $t \to 0$

4- نعوض لنصل إلى المبرهنة $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

1- بفرض $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{\lambda}{x}\right) = 2$ فإن قيمة λ تساوي:

a	0	b	$+\infty$	c	2	d	غير ذلك

2- نهاية التابع $f(x) = \frac{\ln(3-x)}{2x-4}$ عند $a = 2$

a	$\frac{1}{2}$	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$-\frac{1}{2}$

3- نهاية التابع $f(x) = x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ عند $+\infty$:

A	2	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	-2

4- إن نهاية التابع $f(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$ عند $+\infty$:

a	e^{-1}	b	$e^{-\frac{1}{2}}$	c	e	d	$\sqrt{e}$

5- نهاية التابع $f(x)=(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$ عند الواحد

a	e^{-1}	b	$e^{-\frac{1}{2}}$	c	e	d	$\sqrt{e}$

6- نهاية التابع $f(x)=(3-2x)^{\frac{1}{2x-1}}$ عند $a=\frac{1}{2}$

a	$+\infty$	b	0	c	e	d	$e^{\frac{1}{2}}$

7- نهاية المتتالية التي حدها العام $u_n=\frac{e^{2n}}{(1+n)^2}$:

a	$+\infty$	b	1	c	$-\infty$	d	2

8- نهاية المتتالية التي حدها العام $u_n=n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

a	1	b	0	c	$-\infty$	d	$+\infty$

9- نهاية المتتالية $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

a	e	b	e^2	c	e^{-2}	d	e^{-2}

حول النهايات المثلثية	
في حال مضمون المثلث ∞	إحاطة
في حال مضمون المثلث 0	نسعى لاستخدام واحدة من المبرهنات $\lim\limits_{t\to 0}\frac{sint}{t}=1$ $\lim\limits_{t\to 0}\frac{tant}{t}=1$
دساتير مفيدة لحالة $\frac{0}{0}$	$1-\cos^2\left(\text{زاوية}\right)=\sin^2(\text{الزاوية})$ $1-\cos\left(\text{الزاوية}\right)=2\sin^2\left(\text{نصفها}\right)$ $1-\cos\left(\text{الزاوية}\right)=\frac{\sin^2\left(\text{الزاوية}\right)}{1+\cos\left(\text{الزاوية}\right)}$ $\sin\left(\text{الزاوية}\right)=2\sin\left(\text{نصفها}\right)\cos\left(\text{نصفها}\right)$ $\cos\left(\text{الزاوية}\right)=\cos^2\left(\text{نصفها}\right)-\sin^2(\text{نصفها})$ $\cos(3x)=4\cos^3x-3cosx$ $\cos(a)-\cos(b)=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

في كل مما يلي احسب نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1- $f(x)=\frac{\sin x}{x}\ ;a=\pi$:

a	0	b	$+\infty$	c	0	d	1

-2 $f(x)=\frac{\sin(4x)}{x}\ ;a=0$:

a	2	b	4	c	0	d	$+\infty$

-3 $f(x)=\frac{\sin(6x)}{2x}\ ;a=0$:

a	-3	b	3	c	2	d	0

-4 $f(x)=\frac{x\sin x}{1-\cos(2x)}\ ;a=0$:

a	$\frac{1}{4}$	b	4	c	2	d	$\frac{1}{2}$

-5 $f(x)=\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}\ ;a=0$:

a	2	b	-1	c	0	d	1

-6 $f(x)=\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{x\sin x}\ ;a=0$:

a	-4	b	4	c	2	d	1

-7 $f(x)=\frac{\sin 3x+\sin x}{\sin 5x-\sin x}\ ;a=0$:

a	1	b	$\frac{1}{4}$	c	0	d	$\frac{1}{2}$

-8 $f(x)=\frac{\tan(7x)}{x}\ ;a=0$:

a	0	b	7	c	$-\infty$	d	0

-9 $f(x)=\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+1}-1}\ ;a=0$:

a	1	b	0	c	-1	d	4

-10 $f(x)=\sin x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ ;a=0^+$:

a	0	b	1	c	-1	d	غير ذلك

-11 $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\le f(x)\le\frac{1-\cos(2x)}{x}\ ;a=0$:

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	1

-12 $f(x)=\frac{\sin x}{x+1}\ ;a=+\infty$:

a	4	b	8	c	0	d	$+\infty$

-13 $f(x)=\frac{x-\sin(x)}{x+5}\ ;a=+\infty$:

a	$+\infty$	b	-1	c	$-\infty$	d	1

-14 $f(x)=\frac{3x-\sin x}{\sqrt{1+x^2}}\ ;a=+\infty$:

a	3	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

-15 $f(x)=x+\frac{2\sin^2 x}{5}\ ;a=+\infty$:

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

16- $a = 0$; $\frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)} \le f(x) \le \frac{\cos(x)-1}{x^2} + \frac{1}{2}$:

$\sqrt{5}$	d	1	c	$+\infty$	b	0	a

17- ليكن لدينا التابع المعرف وفق $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & ; x \neq 1 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$, إن نهاية التابع عند $a = 1$ هي:

$\sqrt{5}$	d	1	c	$+\infty$	b	0	a

18- نهاية التابع $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$ عند الصغر تساوي:

0	d	-1	c	1	b	a	a

19- نهاية التابع $f(x) = \frac{\sin(ax)}{bx}$ عند الصفر تساوي:

$\frac{a}{b}$	d	$\frac{b}{a}$	c	b	b	a	a

20- نهاية التابع $f(x) = \frac{\tan(ax)}{bx}$ عند الصفر تساوي:

$\frac{a}{b}$	d	$\frac{b}{a}$	c	b	b	a	a

21- نهاية التابع $f(x) = \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ عند الصغر تساوي:

$\frac{a}{b}$	d	$\frac{b}{a}$	c	b	b	a	a

22- نهاية التابع $f(x) = \frac{\tan(ax)}{\sin(bx)}$ عند الصفر تساوي:

$\frac{a}{b}$	d	$\frac{b}{a}$	c	b	b	a	a

23- التابع $f(x) = x + 2sinx$ خطه البياني محصور بين المستقيمين:

$d_1: y = x - 4$, $d_2: y = x + 4$	b	$d_1: y = x + 2$ & $d_2: y = x - 2$	a
$d_1: y = x - 1$, $d_2: y = x + 1$	d	$d_1: y = 2x$, $d_2: y = -2x$	c

24- إذا كان $|f(x) - 3| \le g(x)$ وكانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ عندئذٍ واحد من التوابع الآتية ممكن أن يكون $g(x)$:

$g(x) = x\sqrt{x}$	d	$g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	c	$g(x) = \frac{3x+1}{x+1}$	b	$g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$	a

25- ليكن f التابع المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

فأي من المتراجحات الآتية صحيحة:

$\frac{1}{\sqrt{x+1}} \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}}$	b	$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$	a
$\frac{1}{\sqrt{x}} \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x+1}}$	d	$\frac{1}{2\sqrt{x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$	c

- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \sin^2 x + 4sinx + 6$

26- f يكتب بالشكل :

$(sinx - 1)^2 + 2$	d	$(sinx - 2)^2 + 1$	c	$(\sin x + 2)^2 + 2$	b	$(sinx - 2)^2 + 2$	a

27- واحدة من المتراجحات الآتية صحيحة . اخترها

$2 \le f(x) \le 9$	d	$1 \le f(x) \le 9$	c	$1 \le f(x) \le 3$	b	$3 \le f(x) \le 11$	a

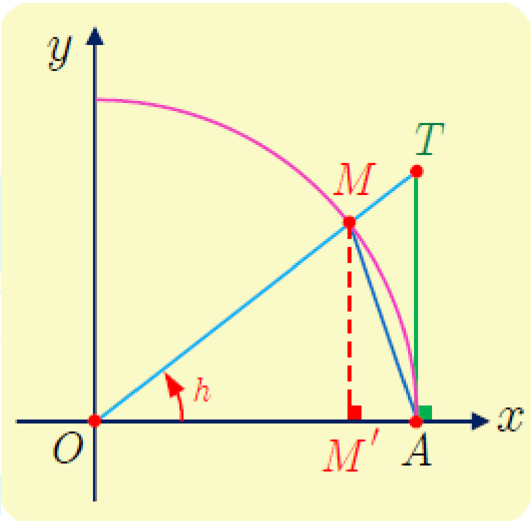
28- فإذا كان $g(x) = x^2 f(x)$ عندئذٍ نهاية التابع g(x) عند $+\infty$

11	d	0	c	$+\infty$	b	1	a

29- ليكن f و g التابعان المعرفان وفق $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \sin x$ عندئذٍ يكون التركيب $(gof)(x)$ يساوي

$\sin(x^2) - 1$	d	$(\sin x - 1)^2$	c	$\sin^2 x - 1$	b	$\sin(x^2 - 1)$	a

- C الدائرة المثلثية التي مركزها المبدأ و لتكن M النقطة من C بحيث يكون h التعيين الأساسي بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$



30- مساحة المثلث OAM تساوي :

$\frac{1}{2}\coth$	d	$\frac{1}{2}\tanh$	c	$\frac{1}{2}\cosh$	b	$\frac{1}{2}\sinh$	a

31- مساحة المثلث OAT تساوي :

$\frac{1}{2}\coth$	d	$\frac{1}{2}\tanh$	c	$\frac{1}{2}\cosh$	b	$\frac{1}{2}\sinh$	a

32- إذا علمت أن $\sinh \le h \le \tanh$ فيمكن استنتاج أن :

$\frac{\cosh}{h} \le \sinh \le 1$	d	$\frac{\sinh}{h} \le 1 \le \cosh$	c	$\cosh \le \frac{\sinh}{h} \le 1$	b	$\frac{\sinh}{h} \le \cosh \le 1$	a

33- واحدة من النهايات الآتية صحيحة

$\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x}{x} = 1$	d	$\lim\limits_{x\to0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$	c	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$	b	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{1}{4}$	a

حول المقارب المائل		
شرط وجوده		$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$
نتيجة		لا يجتمع مقارب أفقي ومائل في نفس الجوار
Hero's idea		نهاية تابع f عند $\pm\infty$ تساوي نهاية مقاربه المائل عند $\pm\infty$ ترجمة: أي يمكن استبدال التابع f بـ y_d
أمثلة		من الواضح أن التابع $f(x)=-\frac{x}{2}+\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}$ يقبل المقارب المائل: $y=-\frac{x}{2}$ وبالتالي إذا طلب نهاية f عند $\pm\infty$ نحسب نهاية y عند $\pm\infty$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)=\mp\infty$ (بالله مو هيك أسهل 😉)
أساليب إيجاده	**التابع من الشكل:** $y=ax+b+u(x)$	$y_d=ax+b+\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x)$ بشرط $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x)=\ell\neq\infty$
	التابع من الشكل: $\sqrt{ax^2+bx+c}$	1- نتمم المضمون إلى مربع كامل $f(x)=\sqrt{a(x-x_0)^2+y_0}$ 2- نهمل y_0 فنحصل على $y_d=\sqrt{a(x-x_0)^2}$ $y_d=\|a(x-x_0)\|=\begin{cases} a(x-x_0)\ ;\ x\to+\infty \\ -a(x-x_0)\ ;\ x\to-\infty \end{cases}$
	تابع كسري درجة بسطه أكبر من درجة مقامه بدرجة واحدة	نقسم البسط على المقام قسمة إقليدية فنحصل على: $f(x)=ax+b+u(x)$ نعود للحالة الأولى. ملاحظة: إذا كان المقام حد وحيد نستطيع الإستفادة من التفريق بدل القسمة
	تابع لوغارتمي يحوي e^x بالحشوة	نخرج الأسي (المسيطر) عامل مشترك مثلاً: $f(x)=\ln(e^x+a)=\ln\left(e^x\left(1+\frac{a}{e^x}\right)\right)$ $=\ln(e^x)+\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)=x+\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)$ ونعود للحالة الأولى.
	الحالة العامة	بفرض $y_d=ax+b$: $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\ ;\ b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax$
أساليب دراسة الوضع النسبي		1- نشكل الفرق $f(x)-y_d$ 2- نعدم 3- نشكل جدول ونحدد إشاراته من خلال تعويض قيم تجريبية في $f(x)-y_d$

Hero's Idea's	
إذا علمنا معادلة المقارب $y = ax + b$ فيمكن استخلاص المعلومات المجاورة	1- نهاية $\frac{f(x)}{x}$ تساوي a في جوار التقارب 2- نهاية $f(x) - ax$ تساوي b في جوار التقارب 3- استبدال التابع f بمقاربه عند حساب نهاية f في جوار التقارب 4- ميل المستقيم المقارب هو a
في التوابع الكسرية القيمة التي تعدم المقام والتي لا تعدم البسط تعطي مقارباً شاقولياً ونهاية التابع عند اللانهاية تعطي مقارب افقي	

1- معادلة المقارب المائل للخط C_f للتابع $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ عند $-\infty$ هي:

a	$x - 3$	b	$x - 1$	c	$2x - 1$	d	$x - 2$

2- قيمة العدد k ليكون المستقيم $y = 2x + 4$ مقارب مائل للتابع $f(x) = \sqrt{4x^2 + kx + 5}$:

a	16	b	5	c	0	d	1

3- قيمة العدد k ليكون المستقيم $y = 2x + 1$ مقارب مائل للتابع $f(x) = x + k + \frac{x^2+3}{x-1}$:

a	16	b	5	c	0	d	1

4- قيمة العدد k ليكون المستقيم $y = 2x + 1$ مقارب مائل للتابع $f(x) = x + \frac{x^2+kx}{x-1}$:

a	16	b	5	c	0	d	1

5- إذا علمت أن $y = 3x - 1$ مقارب مائل للتابع f عند $-\infty$ فإن نهاية f عند $-\infty$ تساوي:

a	$+\infty$	b	$-\infty$	c	0	d	1

6- إذا علمت أن $y = 4x - 5$ مقارب مائل للتابع f عند $+\infty$ فإن نهاية $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}(2x + 1)$ عند $+\infty$:

a	$+\infty$	b	8	c	0	d	1

7- إذا علمت أن f تابع فردي ويقبل المستقيم $y = x - 1$ مقارب مائل عند $+\infty$ فإن نهاية المقدار

$$\frac{f(x) + 1}{x + f(x) + f(-x)}$$

عند $+\infty$:

a	$+\infty$	b	$-\infty$	c	0	d	1

8- إذا علمت أن التابع f يقبل مقارباً مائلاً معادلته $y = 2x$ عند $+\infty$ وأن f تابع زوجي فإن معادلة المقارب المائل عند $-\infty$ هي:

a	$y = -2x$	b	$y = 2x$	c	$y = 2x + 1$	d	$y - 2x + 1 = 0$

9- إذا علمت أن التابع f يقبل مقارباً مائلاً معادلته $y = 2x + 1$ عند $+\infty$ وأن f تابع فردي فإن معادلة المقارب المائل عند $-\infty$ هي:

a	$y = 2x + 1$	b	$y = 2x - 1$	c	$y = -2x$	d	$y = 2x$

10- ليكن $y = 3x - 1$ مقارب مائل عند $-\infty$ لتابع f عندئذ واحدة من القضايا الآتية خاطئة. اخترها:

a	نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عند $-\infty$ تساوي 3	b	التابع f لا يملك مقاربات أفقية
c	التابع f لا يملك مقارب أفقي عند $-\infty$	d	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

11- ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ وفق $f(x) = -\frac{x}{3} + \ln\left(\left|\frac{x-1}{3x}\right|\right)$ فإن معادلة المقارب المائل:

a	$y = \frac{1}{3}x - \ln(3)$	b	$y = -\frac{1}{3}x - \ln(3)$	c	$y = \frac{1}{3}x + \ln(3)$	d	$y = -\frac{1}{3}x - \ln(3)$

12- قيمة العدد α ليكون المستقيم $y = 2x$ مقارب مائل للتابع $f(x) = \ln(e^{\alpha x} + e^x + 1)$ هي:

a	2	b	1	c	0	d	5

13- ليكن f التابع المعرف وفق $f(x) = |3x - 1| + \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$ فإن المقاربين المائلين للخط c_f يتقاطعان في نقطة إحداثيتاها هي:

a	$(0,0)$	b	$(1,1)$	c	$(2,0)$	d	$(1,0)$

14- ليكن f التابع المعرف وفق $f(x) = 5 - 4x + \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$ عندئذ يكون c_f فوق مقاربه المائل على المجال:

a	$]1, +\infty[$	b	$]-\infty, 4[$	c	$]4, +\infty[$	d	$]2, +\infty[$

15- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = -3x + \sqrt{4x^2 - 1}$ عندئذ نقاط تقاطع التابع f مع محور الفواصل:

a	$x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$	b	$x = \frac{1}{\sqrt{5}}$	c	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	d	$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

16- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = 2x - 1 + |x - 3|$ عندئذ نقاط تقاطع التابع f مع محور الفواصل:

a	$x = \frac{4}{3}, x = 2$	b	$x = -\frac{4}{3}, x = -2$	c	$x = -\frac{4}{3}, x = 2$	d	$x = \frac{4}{3}, x = -2$

17- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$ إن معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$ هي:

a	$y = -x$	b	$y = 3x$	c	$y = 3x - 1$	d	$y = 3x + 1$

18- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$ إن معادلة المقارب المائل في جوار $-\infty$ هي:

a	$y = -x$	b	$y = 3x$	c	$y = 3x - 1$	d	$y = 3x + 1$

19- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$ الذي يقبل المستقيم $y = 3x$ مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ عندئذ يكون c فوق مقاربه على المجال:

a	$\mathbb{R}$	b	$]-\infty, 4[$	c	$]4, +\infty[$	d	$]2, +\infty[$

20- إذا علمت أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x\right) = \frac{15}{8}$ فإن معادلة المقارب المائل للخط البياني للتابع في جوار $+\infty$:

a	$y = \sqrt{2}x + \frac{15}{8}$	b	$y = -\sqrt{2}x$	c	$y = \sqrt{2}x + \frac{4}{3}$	d	$y = x$

21- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}} + 2x$. الخط البياني لهذا التابع يقبل مقارباً مائلاً عند $-\infty$ معادلته

a	$\boldsymbol{y = 2x + 1}$	b	$\boldsymbol{y = 2x}$	c	$\boldsymbol{y = 2x - 1}$	d	$\boldsymbol{y = -2x}$

22- كن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$ فإذا علمت ان $y=-x-1$ معادلة المقارب المائل للخط C_f عند $-\infty$ عندئذٍ قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

a	1	b	-1	c	2	d	-2

23- ليكن f التابع المعرف على R و المستقيم ان $y=-x-1$ معادلة المقارب المائل للخط C_f عند $-\infty$ عندئذٍ قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ هي

a	1	b	-1	c	2	d	0

24- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$ فإذا علمت ان $y=-x+4$ معادلة المقارب المائل للخط C_f عند $-\infty$ عندئذٍ قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}\left\{\left(\frac{3x^2+1}{x^3+x}\right)f(x)\right\}$

a	3	b	-3	c	0	d	المعطيات غير كافية

25- ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=\frac{5-ax}{x-b}$. إذا علمت أن $x=2$, $y=3$ مستقيمين مقاربين للخط البياني للتابع f عندئذٍ الثنائية (a,b) هي :

a	$(2,-3)$	b	$(2,3)$	c	$(-2-3)$	d	$(2,5)$

26- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{2x^2-5x+4}{1-x}$ عندئذٍ أي من القضايا الآتية صحيحة

a	للخط C مقارب أفقي	b	$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$	c	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	d	$y=3-2x$ مقارب مائل لـ C

27- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2-2mx+4}$ خطه البياني C عندئذٍ قيمة m ليكون المستقيم $d: y=x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

a	2	b	1	c	0	d	-1

28- ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-1}$ عندئذٍ معادلة المقارب المائل لخطه البياني:

a	$y=x$	b	$y=x-1$	c	$y=x+1$	d	$y=2x$

29- ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^2-3mx+1}{x-1}$ عندئذٍ قيمة m التي تجعل المستقيم $y=x-\frac{1}{2}$ مقارباً مائلاً لخطه البياني :

a	$\frac{1}{2}$	b	2	c	1	d	$\sqrt{2}$

30- ليكن f التابع المعرف وفق : $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9x+1}{4x+5}}$ عندئذٍ معادلة المقارب المائل لخطه البياني :

a	$y=\frac{x}{2}+1$	b	$y=\frac{x}{2}$	c	$y=\frac{x}{2}+\frac{2}{3}$	d	$y=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}$

31- ليكن f التابع المعرف على $[0,+\infty[$ وفق : $f(x)=2x-1+\sqrt{x^2+4x}$ عندئذٍ معادلة المقارب المائل لخطه البياني :

a	$y=2x-1$	b	$y=3x+1$	c	$y=3x$	d	$2x$

32- ليكن f التابع المعرف على R^* وفق $f(x)=5+\frac{1}{x(x^2+2)}$. خطه البياني يقبل مستقيماً مقارباً معادلته

a	$y=0$	b	$x=0$	c	$y=5x$	d	$x=-1$

33- ليكن C الخط البياني لتابع f معرف على R و يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ معادلته $y=3x-5$

عندئذٍ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+f(x)}{x}$ تساوي

a	-3	b	-2	c	2	d	3

34- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=\frac{x+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$. و C يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=2$ عند $+\infty,-\infty$ و مقارب شاقولي $x=-1$ و أخيراً $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ عندئذٍ

$b+c+d$ يساوي

a	3	b	$\frac{5}{2}$	c	$\frac{3}{2}$	d	1

35- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $]0,+\infty[$ وفق العلاقة

$f(x)=x+1+\lambda x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. عندئذٍ قيمة العدد λ التي تجعل للخط C مستقيماً مقارباً مائلاً معادله $y=x-3$

a	4	b	-4	c	-3	d	3

36- ليكن f تابعاً خطه البياني يقبل المستقيم $y=-2x+4$ مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$ عندئذٍ أي من القضايا الآتية صحيحة

a	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$	b	$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=-4$	c	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$	d	يمكن التأكيد على عدم وجود مقارب أفقي عند $+\infty$

حول الاستمرار وقابلية الاشتقاق	
شرط الاستمرار عند نقطة a	$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ النهاية تساوي الصورة
قانون قابلية الاشتقاق عند نقطة a	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ **ملاحظة:** نسمي المقدار $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ معدل التغير
Hero's ideas	• إذا علمت $f'(a)$ فإنه يمكن حساب النهاية من الشكل: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ • يوجد صيغة أخرى لقانون معدل التغير: $t(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ولكن حصراً جهة السعي تكون $t\to 0$.
ملاحظة (1)	كل تابع اشتقاقي عند a مستمراً عندها

ملاحظة (2)	إذا علمنا أن تابعاً ذو فرعين اشتقاقي عند a عندئذ لا داعي لتعريف العدد المشتق وإنما نكتفي بأن: $f'(a^+) = f'(a^-)$
التفسيرات الهندسية لقابلية الاشتقاق	عندما تكون نهاية معدل التغير عدد حقيقي m فيكون: f قابل للاشتقاق عند a و m يمثل ميل المماس في النقطة التي فاصلتها a ونكتب $f'(a) = m$ معادلتها: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
	عندما تكون نهاية معدل التغير ∞ فيكون: f غير قابل للاشتقاق عند a و يقبل مماساً شاقولياً معادلته $x = a$
	عندما تكون نهاية معدل التغير من اليمين لا تساوي نهاية معدل التغير من اليسار فيكون: f غير قابل للاشتقاق عند a ويقبل نصفي مماس قانون معادلتيهما: $y_{d_1} = f'(a^+)(x-a) + f(a)$ $y_{d_2} = f'(a^-)(x-a) + f(a)$

1- ليكن f التابع المعرف على $I = [0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{kx} & : 0 \le x \le 2 \\ x & : x > 2 \end{cases}$$

قيمة k التي تجعل التابع f مستمراً على I هي :

a	$\frac{1}{2}$	b	2	c	1	d	$\sqrt{2}$

2- ليكن f التابع المعرف على المجال $]-\pi, \pi[$ وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{sinx} & : x > 0 \\ 2x - m & : x \le 0 \end{cases}$$

إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الصفر هي :

a	1	b	-1	c	2	d	-2

3- ليكن f التابع المعرف على مجال مناسب I فق :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(ax)}{xtan(ax)} & : x < 0 \\ \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{b+x} - \sqrt{b}\right) & : x > 0 \\ \dfrac{1}{6} & : x = 0 \end{cases}$$

عندئذٍ إذا علمت أن f مستمر عند الصفر فإن :

a	$a=b$	b	$a=\frac{1}{b^2}$	c	$b=a^2$	d	$a=2b$

4- ليكن f التابع المعرف وفق على R وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{cosx-1}{\sqrt{x^2+1}-1} & : x\neq 0\\ m & : x=0\end{cases}$$

فإن قيمة m التي تجعل f مستمراً

a	$\frac{1}{2}$	b	-1	c	1	d	0

5- إذا علمت أن $f'(1)=2\sqrt{3}$ فإن قيمة النهاية $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{\sqrt{x}-1}$ تساوي :

a	$4\sqrt{3}$	b	$\sqrt{3}$	c	$2\sqrt{3}$	d	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

6- نهاية التابع $\frac{tanx-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ عند $x=\frac{\pi}{4}$

a	2	b	1	c	-1	d	0

7- ليكن f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(0)=m$, $f(x)=\frac{x}{x-lnx}$ عندئذٍ قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الصفر

a	$m=e$	b	$m=1$	c	$m=0$	d	$m=e^{-1}$

8- لنعرف التوابع $f\,,h\,,g$ وفق: $g(x)=x\sqrt{x}$, $h(x)=x\|x\|$, $f(x)=\frac{x^2+\|x\|}{x^2+1}$ عندئذ

a	f اشتقاقي عند الصفر	b	h,g اشتقاقيان عند الصفر	c	g غير اشتقاقي عند الصفر	d	f,g,h اشتقاقية عند الصفر

9- النهاية $\lim_{x\to0}\frac{cosx-1}{x}$ تساوي:

a	$-\infty$	b	-1	c	1	d	0

10- بفرض f تابعاً اشتقاقياً على I فإن:

a	f غير مستمر على I	b	f يملك مماساً شاقولياً
c	f يملك نصفي مماس	d	f يقبل مماس عند كل نقطة من نقاطه

11- ليكن التابع المعرف وفق $f(x)=\begin{cases}\frac{2x+1}{x-1} & ; x\neq 1\\ 2 & ; x=1\end{cases}$ إن $f(2)$ تساوي:

a	2	b	5	c	1	d	غير ذلك

12- لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x+4}-6x & ; x\neq 0\\ 2\sqrt{3} & ; x=0\end{cases}$ إن $f(0)$ يساوي:

a	$2\sqrt{3}$	b	$-2\sqrt{3}$	c	2	d	$\sqrt{5}$

13- إن التابع f المعرف وفق $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} & ; x\neq 2\\ 4 & ; x=2\end{cases}$ هل التابع f مستمر عند $a=2$؟

a	نعم	b	لا

14- إن التابع f المعرف وفق $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x+2}{x-1} & ;x\neq 1\\ 5 & ;x=1\end{cases}$, هل التابع f مستمر عند $a=1$؟

a	نعم	b	لا

15- ليكن التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x} & ;x\neq 0\\ m-1 & ;x=0\end{cases}$, إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند 0 هي:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{4}$	c	1	d	2

16- ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} & ;x\neq 0\\ m+1 & ;x=0\end{cases}$, إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند 0 هي:

a	$\frac{9}{8}$	b	$-\frac{1}{8}$	c	$-\frac{9}{8}$	d	غير ذلك

17- ليكن التابع المعطى بالعلاقة $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2+2\cos x}-\sqrt{3+\cos x}}{x^2} & ;x\neq 0\\ 2m-1 & ;x=0\end{cases}$, إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند 0

هي:

a	$-\frac{7}{16}$	b	$\frac{7}{16}$	c	$\frac{1}{2}$	d	غير ذلك

18- ليكن f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(0)=m$, $f(x)=\frac{x}{x-lnx}$ عندئذٍ قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الصفر

a	$m=e$	b	$m=1$	c	$m=0$	d	$m=e^{-1}$

19- ليكن f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(0)=0$, $f(x)=\frac{x}{x-lnx}$ عندئذٍ $f'(0)$ تساوي

a	0	b	1	c	e	d	e^{-1}

20- ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2\sqrt{x-1} & : x>1\\ (1-x)\sqrt{1-x} & : x\leq 1\end{cases}$$

عندئذٍ التابع f اشتقاقي على :

a	$R\backslash\{1\}$	b	$R\backslash\{-1\}$	c	$R\backslash\{0\}$	d	R

حول تعريف النهايات بلغة المجالات	
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$	$y = \ell$ مقارب افقي في جوار $+\infty$ الصفة المميزة للتعريف: عين عدداً حقيقياً $x > A$ ليكون f ينتمي لمجال الخطوات: 1- نحدد المركز $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{b+a}{2}$ 2- نحدد نصف القطر $\varepsilon = b - \ell$ 3- نعوض في القانون: $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$ 4- نصلح ثم ندخل القيمة المطلقة إلى البسط والمقام ثم نتخلص منها حسب السعي.
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$	لا يملك مقارباً أفقياً مع احتمال وجود مقارب مائل الصفة المميزة للتعريف: عين عدداً $x > A$ بحيث يكون $f(x) \in [M, +\infty[$ أو $f(x) > M$ الخطوات: 1- نضع $f(x) > M$ 2- نعزل x لنصل إلى $x > A$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$	الصفة المميزة: عين مجالاً I (أو عين عدداً α بحيث $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ ليكون $f(x) \in J$ الخطوات: 1- نضع $f(x) \in J$ أي أن $A < f(x) < B$ حيث $J =]A, B[$ 2- نعزل x لنصل لـ $a < x < b$ ويكون $x \in]a, b[$ 3- إذا كان المطلوب العدد α عندئذ $\alpha = \frac{b-a}{2}$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$x = x_0$ مقارب شاقولي نحو ∞ الصفة المميزة: عين مجالاً I (أو عين عدداً α بحيث $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ ليكون $f(x) > M$ الخطوات: 1- ننطلق من $f(x) > M$ 2- نستبدل البسط بـ A ((حيث A يساوي تقريباً نهاية البسط)) 3- نعزل المقام ونجذر للوصول إلى $\|x - x_0\| < \alpha$ 4- في حال كان المطلوب α فـ مبرووك عليك! 5- في حال كان المطلوب مجال فنضع: $x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$

1- فرض أن C الخط البياني لتابع f معرف على المجال $]1,+\infty[$ وأن A عدد حقيقي مثبت وأنه من أجل كل $x > A$ يحقق أن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1,99,2.01[$ عندئذٍ

a	$x = 2$ مقارب شاولي للخط C نحو $+\infty$	b	$x = 2$ مقارب شاقولي للخط C نحو $-\infty$
c	$y = 2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$	d	**$y = 2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$**

2- إذا كان f تابعاً يحقق أنه من أجل أي عدد حقيقي M يوجد عدد حقيقي A بحيث مهما يكن $x > A$ فإن $f(x) > M$ عندئذٍ:

a	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	b	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
c	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	d	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3- إذا كان $f(x) = \frac{2lnx-1}{lnx+1}$ فإن أصغر حقيقي A يحقق أنّ $f(x) \in]1.99,2.01[$ عندما $x > A$

a	2	b	7	c	5	d	$\ln(2)$

4- ليكن $f(x) = \frac{e^{x+1}-2}{e^{x}+e}$ فإن أصغر عدد حقيقي A يحقق أن $|f(x) - e| < 10^{-3}$ عندما $x > A$

a	2	b	7	c	5	d	$\ln(2)$

5- إذا كان $f(x) = \ln\left(e^{2x} + 3\right)$ فإن أصغر عدد حقيقي A يحقق أن $f(x) > 10\ln(10)$ عندما $x > A$

a	2	b	7	c	5	d	$\ln(2)$

6- ليكن f التابع المعرف على $]-\infty,1[$ وفق $f(x) = \frac{2x-3}{1-x}$. إن أكبر عدد حقيقي A يحقق الشرط: إذا كان $x < A$ كان $f(x) \in]-2.05,-1.95[$

a	$\mathbf{-21}$	b	$\mathbf{-20}$	c	$\mathbf{-19}$	d	**21**

7- ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ عندئذٍ أصغر قيمة للعدد الحقيقي A الذي يحقق أن $f(x) \in]0.9,1.1[$ أياً تكن $x > A$ هي:

a	**100**	b	**81**	c	**29**	d	**9**

8- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = \sqrt{5x^2 - 1} - x$ عندئذٍ C يتقاطع مع محور الفواصل في:

a	نقطة فاصلتها $\frac{1}{4}$	b	نقطة فاصلتها $\frac{1}{2}$	c	نقطة فاصلتها $-\frac{1}{2}$	d	نقطتين فاصلتيهما $\mathbf{\frac{1}{2}}, \mathbf{-\frac{1}{2}}$

Hero's ideas	
الملاحظة الأولى	إذا كانت $a \in D_f$ فنقول عن النهاية عند a إنها موجودة إذا كان $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ (يمينها ويسارها وعندها)
مثال	$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(5x)}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$ نلاحظ أن النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار تساوي 5 لكن لا تساوي الصورة: $f(0) = 1 \neq 5$ فالنهاية غير موجودة عند الصفر أما في حالة: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$ تصبح النهاية موجودة
الملاحظة الثانية	في حالة $a \notin D_f$ يكفي أن تكون النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لتكون النهاية موجودة
مثال	$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & ; x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & ; x > 0 \end{cases}$ نلاحظ أن: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ إذن النهاية موجودة.

حول الجزء الصحيح	
صورة ونهاية تابع الجزء الصحيح عند عدد	يرمز لتابع الجزء الصحيح $E(x)$ ومهمته هي تقريب الحشوة إلى **أصغر** عدد صحيح مثل: $E(2.1)=2$ $E(3.7)=3$ $E(\pi)=E(3.14)=3$ $E(\sqrt{2})=E(1.4)=1$ ملاحظة: لحساب نهاية الجزء الصحيح عند عدد نعوض في الفرع ذو المجال المفتوح (الفرع ستتعلمه بعد قليل)
نهاية تابع الجزء الصحيح عند ∞	1- ننطلق من: $x-1\leq E(x)<x$ 2- نستعمل خطوات ومبرهنات الإحاطة
كتابة الجزء الصحيح بصيغة مستقلة	1- نجزء مجال الدراسة إلى عدة مجالات طولها 1. مثال: $I=[0,2[$ $I=\begin{cases}[0,1[\\ [1,2[\end{cases}$ 2- نعوض قيمة تابع الجزء الصحيح في المجال المرافق (دوماً ستكون القيمة التي المجال مغلق عندها) 3- مبرووك عليك! • ملاحظة: إذا كان المجال من الشكل $[a,b]$ فبعد تجزيئه لمجالات طولها واحد نضيف فرع في النهاية $x=b$.
استمرار الجزء الصحيح	ندرس استمرار التابع عند كل نقطة مكررة ونميز حالتين: 1- إذا كانت جميع النقاط المكررة محققة لشرط الاستمرار ⇐ التابع مستمر على مجاله 2- إذا كانت واحدة فقط من النقاط المكررة غير محققة لشرط الاستمرار ⇐ التابع غير مستمر على مجاله
رسم الجزء الصحيح	نرسم كل فرع على مجاله (اما سيكون مستقيم أو قطع مكافئ)

1- ليكن التابع f المعرف على $[1,3[$ وفق $f(x) = 2x - 3E(x)$, إن عبارة f بصيغة مستقلة عن $E(x)$ نعطى بالشكل:

a	$\begin{cases} 2x-3\,; x \in [1,2[\\ 2x-6\,; x \in [2,3[\end{cases}$	B	$\begin{cases} 1\,; x \in [1,2[\\ 2\,; x \in [2,3[\end{cases}$	c	$\begin{cases} 2x+3\,; x \in [1,2[\\ 2x-6\,; x \in [2,3[\end{cases}$	d	$\begin{cases} 2x-3\,; x \in [1,2[\\ 2x+6\,; x \in [2,3[\end{cases}$

2- نهاية المقدار $\frac{x+E(x^2)}{x^2+1}$ عند $+\infty$ تساوي:

a	2	b	1	c	0	d	3

3- نهاية المقدار $\frac{1+E(\ln(x))}{x}$ عند $+\infty$ تساوي:

a	2	b	1	c	0	d	3

4- ليكن $f(x) = 2x + E(x) - 3$ فإن المجال الذي يحصر القيمة $f(500)$ هو:

a	$\{1497\}$	b	$[1497,1500]$	c	$[1496.1499]$	d	غير ذلك

5- التابع $f(x) = \frac{x}{4} + \sqrt{2}E(\sqrt{x})$ معرف على R عندئذٍ يمكن القول إن $f(16)$:

a	تساوي 4 بمقدار خطأ يساوي $3\sqrt{2}$ أو $4\sqrt{2}$ زيادة	b	تساوي 4 بمقدار خطأ يساوي $3\sqrt{2}$ أو $4\sqrt{2}$ نقصان
c	تساوي 4 بمقدار خطأ يساوي $\sqrt{2}$ نقصان	c	تساوي 4 بمقدار خطأ يساوي $\sqrt{2}$ زيادة

6- ليكن f التابع المعرف على $I]-2,0[$ وفق $f(x) = \left(x + mE(x)\right)^2$ حيث $m \in R^*$, فإن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند (-1) هي :

a	$-\frac{2}{3}$	b	$\frac{2}{3}$	c	$\frac{3}{2}$	d	$-\frac{3}{2}$

7- التابع $E(x)$:

a	متزايد	b	متزايد تماماً	c	متناقص	d	متناقص تماما

8- التابع f المعرف وفق $f(x) = E(x) - x$ محصور بين المستقيمين

a	$y = -1\,, y = 0$	b	$y = -1\,, y = x$	c	$y = 2\,, y = 0$	d	$y = -1\,, y = 1$

9- مجموعة تعريف التابع $f(x) = \frac{1}{1-E(x)}$

a	$\boldsymbol{R}\backslash\{\mathbf{1}\}$	b	$[\mathbf{1},\mathbf{2}[$	c	$\boldsymbol{R}\backslash[\mathbf{1},\mathbf{2}[$	d	$\boldsymbol{R}\backslash]\mathbf{1},\mathbf{2}[$

حول الصفات التناظرية للتوابع		
الزوجي	**الفردي**	**مركز التناظر**
الشرط الأول: $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ الشرط الثاني: $f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow f(-x) - f(x) = 0$	الشرط الأول: $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ الشرط الثاني: $f(-x) = -f(x)$ $\Rightarrow f(-x) + f(x) = 0$	الشرط الأول: $x \in D_f \Rightarrow 2a - x \in D_f$ الشرط الثاني: $f(x) + f(2a - x) = 2b$
الخطوات: 1- إثبات الشرط الأول: - ننطلق من $x \in D_f$ - نضرب الطرفين بـناقص 2- إثبات الشرط الثاني: نأخذ $f(-x)$ ونصلح لنصل إلى $f(x)$	الخطوات: 1- إثبات الشرط الأول: - ننطلق من $x \in D_f$ - نضرب الطرفين بـناقص 2- إثبات الشرط الثاني: نأخذ $f(-x)$ ونصلح لنصل إلى $-f(x)$	الخطوات: 1- إثبات الشرط الأول: - ننطلق من $x \in D_f$ - نضرب بـناقص - نضيف $2a$ 2- إثبات الشرط الثاني: - ننطلق من طرف للوصول للآخر
Hero's idea	التابع x^2 زوجي على $\mathbb{R}$ ولكنه ليس زوجي وليس فردي على $[0, +\infty[$	

حول إيجاد مركز التناظر	
التابع يملك مقارب شاقولي $x = x_0$ ومقارب أفقي $y = y_0$ فقط	$I(x_0, y_0)$
التابع يملك مقارب شاقولي $x = x_0$ ومقارب مائل $y = ax + b$	فاصلة مركز التناظر هي x_0 تراتيب مركز التناظر هي y_0 الناتجة عن تعويض x_0 في معادلة المقارب المائل
التابع يقبل مقاربين شاقوليين $x = x_1 , x = x_2$	فاصلة مركز التناظر تساوي $\frac{x_1+x_2}{2}$ تراتيب مركز التناظر تساوي $f(x_0)$
التابع يقبل مقاربين أفقيين $y = y_1 , y = y_2$ ومقارب شاقولي $x = x_0$	فاصلة مركز التناظر x_0 تراتيب مركز التناظر $\frac{y_1+y_2}{2}$
التابع يقبل مقاربين شاقوليين $x = x_1 , x = x_2$ ومقارب مائل معادلته $y = ax + b$	فاصلة مركز التناظر تساوي $\frac{x_1+x_2}{2}$ تراتيب مركز التناظر هي y_0 الناتجة عن تعويض x_0 في معادلة المقارب المائل

1- ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ وفق $f(x) = x + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع f هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	d	$(1,1)$

2- ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	d	$(1,1)$

3- f تابع معرف على $\mathbb{R}^*$ ووفق $f(x)=\frac{e^x+3}{e^x-1}$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع f هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	d	$(1,1)$

4- ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ وفق $f(x)=\frac{\ln\lvert x-1\rvert}{x-1}$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	d	$(1,1)$

5- ليكن f تابعاً معرفاً على $]1,3[$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$(2,0)$	d	$(1,2)$

6- ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على R ويقبل المستقيم $y=2x-3$ مقارباً مائلاً عند $+\infty$ و يقبل النقطة $A(1,-1)$ مركز تناظر له عندئذٍ تكون $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-2x}{f(2-x)+f(x)}$ تساوي :

a	-2	b	$-\frac{3}{2}$	c	2	d	$\frac{3}{2}$

7- ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-1}$ إن مركز تناظر خطه البياني هو النقطة :

a	$(1,1)$	b	$(1,0)$	c	$(0,0)$	d	$(0,1)$

8- تابع يحقق عند كل x من R المساواة $\frac{f(1-x)+f(x)}{3}=1$. الخط البياني له :

a	متناظر بالنسبة للمبدأ	b	متناظر بالنسبة للنقطة $(1,3)$	c	متناظر بالنسبة للنقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$	d	ليس متناظر

9- إذا كان $x\in R\backslash\{1,-1\}$ فالمقدار $3-2x$ ينتمي إلى :

a	$R\backslash\{5,1\}$	b	$R\backslash\{1,-1\}$	c	$R\backslash\{-5,-1\}$	d	$R\backslash\{5,-1\}$

10- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x)=\frac{2x^2+3x+9}{x+1}$ فإن $f(-2-x)+f(x)$ تساوي :

a	3	b	-2	c	$3(x+1)$	d	$3x$

11- إذا علمت أن النقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر للتابع f المعرف وفق $f(x)=\frac{2x^2x+7}{x+1}$ فإن قيمة المقدار $f(-2-x)+f(x)$ هي

a	3	b	-3	c	6	d	-6

حول التابع الدوري	
تعريفه	$f(x+T)=f(x)$ أي أن دور التابع f هو المقدار الذي إضافته إلى x لا تغير الصورة (يمكن إهماله)
توابع دورية شهيرة	$\sin(x)$ أصغر دور له 2π $\cos(x)$ أصغر دور له 2π $\tan(x)$ أصغر دور له π $\sin(wx)$ أصغر دور له $\frac{2\pi}{w}$ $\cos(wx)$ أصغر دور له $\frac{2\pi}{w}$ $\tan(wx)$ أصغر دور له $\frac{\pi}{w}$
Hero's ideas	• إذا كان T دور التابع f فإنه ضربه بأي عدد صحيح يعطي دوراً جديداً لـ f وبالتالي يجب الانتباه في حال كان السؤال عن **أصغر** دور للتابع f • إذا طلب أصغر مجال يكفي دراسة التابع عليه عندئذ: 1- إذا كان دورياً ودوره T نأخذ المجال $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ أو $]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}[$. 2- إذا كان زوجياً أو فردياً ننصف المجال

1- واحدة من القضايا خاطئة بخصوص التابع $f(x)=\sqrt{3+\cos(2x)}$ المعرف على المجال $[0,\frac{\pi}{2}[$:

a	التابع f دوري دوره الأصغر π	b	التابع f زوجي	c	التابع f متناقص	d	$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{\pi x+1}{x+3}\right)=2$

2- أصغر مجال يكفي لدراسة التابع $f(x)=x^2-\tan(x)$ هو:

a	$]0,\frac{\pi}{2}[$	b	$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$	c	$]-\pi,\pi[$	d	$]0,\pi[$

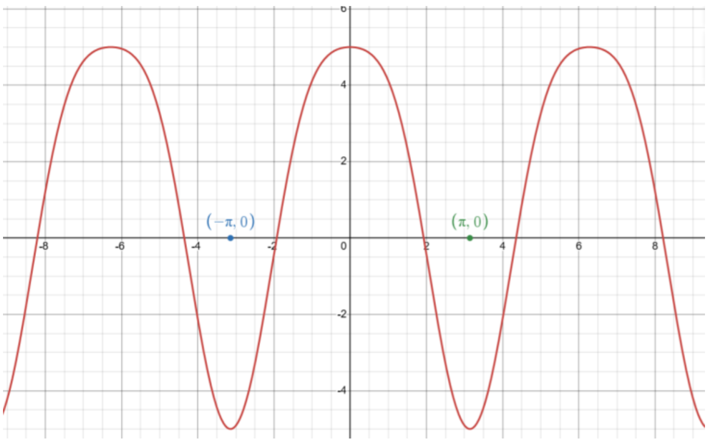
3- أصغر مجال يكفي لدراسة التابع $f(x)=4\cos^2(2x)+\sin^3(2x)$ هو:

a	$[0,\frac{\pi}{2}]$	b	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	c	$[-\pi,\pi]$	d	$[0,\pi]$

4- أصغر مجال يكفي لدراسة التابع $f(x)=5\cos^3(4x)+3\sin^2(2x)$ هو:

a	$[0,\frac{\pi}{4}]$	b	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	c	$[-\pi,\pi]$	d	$[0,\frac{\pi}{8}]$

5- في الشكل جانباً الخط البياني لتابع دوري f ونرمز لأصغر دور له T عندئذ قيمة T تساوي:



a	2π	b	$\frac{\pi}{2}$	c	4π	d	π

حول تعيين الثوابت	
صيغ متكافئة	1- نعطى صيغتين إحداهما معلومة و الأخرى تشتمل على ثوابت يُطلب تعيينها 2- نصلح إحدى الصيغ (بنشرٍ أو قسمة اقليدية أو توحيد مقامات) و نطابق الصيغتين
الاستفادة من معلومات	معطيات عددها يساوي عدد المجاهيل و يوضح الجدول الآتي كيف نترجم كلاً من المعطيات إلى عبارة رياضية سيتم طرحها فيما يلي
المعطى	**العلاقة المكافئة**
الخط البياني للتابع يمر من نقطة $A(x_0, y_0)$ أو النقطة $A(x_0, y_0)$ تنتمي للخط البياني	بما ان النقطة تنتمي للخط البياني فإن : $f(x_0) = y_0$
الخط البياني يقبل مماساً ميله m في النقطة التي فاصلتها x_0	من عبارة الميل : $f'(x_0) = m$
الخط البياني للتابع يقبل مماساً ميله m في نقطة منه $A(x_0, y_0)$	هنا لدينا معلومتين : 1- النقطة A تنتمي للتابع إذن : $f(x_0) = y_0$ 2- الميل عند A هو m $f'(x_0) = m$ تذكر إذا ذكر أن المماس أفقي فإن $m = 0$
للتابع قيمة حدية عند x_0	بما أنها قيمة حدية فهي تعدم المشتق : $f'(x) = 0$
للتابع قيمة حدية عند x_0 مساوية لـ y_0	هنا لدينا معلومتين : $f'(x_0) = 0$ $f(x_0) = y_0$

للتابع مماساً معادلته $y = mx + p$ عند x_0	هنا نملك معلومتين: $f'(x_0) = m$ ويمكننا حساب تراتيب نقطة التماس من خلال تعويض x_0 في معادلة المماس فنحصل على y_0 ليكون: $f(x_0) = y_0$

1- ليكن f التابع المعرف على $[0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{a\sqrt{x}}{x+b}$ حيث a, b عددين حقيقين مغايريين للصفر فإذا علمت أن الخط البياني لهذا التابع يقبل مماساً أفقياً معادلته $y = -1$ في النقطة التي فاصلتها $x = 1$ فإن :

a	$a = 1\ ,b = -2$	b	$a = -2\ ,b = 1$	c	$a = 0\ ,b = -1$	d	صحيحتان B,C

2- قيمة a التي تجعل التابع f المعرف وفق $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 3x$ يقبل قيمة حدية عند $x = 1$

a	-1	b	2	c	3	d	لا يمكن تعيينها

3- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = \frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$ فإن قيمتي a, b لكي يقبل التابع مماساً في النقطة $x = 0$ معادلته $y = 4x + 3$ هي :

a	$a = 3, b = 4$	b	$a = 4, b = 3$	c	$a = -4\ , b = 3$	d	$a = -3, b = 4$

4- ليكن f التابع المعرف وفق $f(x) = sinx + ax$ عندئذٍ قيمة الثابت a التي تجعل له قيمة حدية عند $x = \frac{\pi}{3}$

a	$-\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{2}$	c	2	d	-2

5- ليكن f التابع المعرف على المجال$[0, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{2x^2+ax+b}{x+1}$ (a وb عددان حقيقان) عندئذٍ الثنائية المناسبة (a, b) لكي تكون $f(1) = 5$ قيمة حدية محلياً

a	$(1, -7)$	b	$(7,1)$	c	$(1,7)$	d	$(-1, -7)$

6- ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{-1,2\}$ وفق $f(x) = \frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$ عندئذٍ الثلاثية (a, b, c) التي تحقق أن : $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$ هي :

a	$(3, -1,8)$	b	$(3,1, -8)$	c	$(-3,1,8)$	d	$(3,1,8)$

7- ليكن f التابع المعرف على $[0, +\infty[$ وفق $f(x) = ax + bx\sqrt{x}$ عندئذٍ قيمة a, b ليكون للتابع قيمة حدية عند الواحد مساويةً لـ $g(-1)$

a	$a = -3, b = 2$	b	$a = -3, b = -2$	c	$a = 3, b = 2$	d	$a = 3, b = -2$

8- ليكن f التابع المعرف و الاشتقاقي على R وفق $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b}$ حيث $a, b \in R$ عندئذٍ قيمة كلٍ من العددين a, b $f(-2) = 2$ قيمة حدية محلياً :

a	$a = 4\ , b = 1$	b	$a = -4\ , b = 8$	c	$a = 1\ , b = 8$	d	$a = 4\ , b = 8$

9- C_f الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عندئذ C_f يقبل مماساً أفقياً وحيداً إذا كان:

a	$b^2 - 5ac = 0$	b	$b^2 - 3ac = 0$	c	$b^2 - 4ac = 0$	d	$ac = b^2$

حول استنتاج الخطوط البيانية انطلاقاً من خط بياني معلوم	
الحالة	**النتيجة**
إذا كان $g(x) = f(-x)$	c_g ينتج عن c_f بتناظر بالنسبة لمحور التراتيب
إذا كان $g(x) = -f(x)$	c_g ينتج عن c_f بتناظر بالنسبة لمحور الفواصل
إذا كان $g(x) = -f(-x)$	c_g ينتج عن c_f بتناظر بالنسبة للمبدأ
إذا كان $g(x) = f(x + a)$	c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $-a\vec{i}$ (افقياً)
إذا كان $g(x) - f(x) = b$	c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $b\vec{j}$ (شاقولياً)
إذا كان $g(x) = \|f(x)\|$	c_g ينتج عن c_f باستبدال كل نقطة بنظيرتها بالنسبة لمحور الفواصل
إذا كان $g(x) = f(x)$ ولكن D_g محتواه في D_f (يعني مجموعة تعريف g شقفة من مجموعة تعريف f)	g مقصور التابع f على المجال D_g
إذا كان $g(x)$ تقابل عكسي لـ $f(x)$	c_g نظير c_f بالنسبة للمستقيم $y = x$
Hero's Lesson	

حول دراسة تغيرات تابع	
1	إيجاد مجموعة التعريف
2	حساب النهايات عند الأطراف المفتوحة والصور عند الأطراف المغلقة مع ذكر المقاربات إن وجدت
3	ذكر مجال اشتقاق التابع ثم حساب التابع المشتق
4	نعدم التابع المشتق
5	نصور القيم التي عدمت التابع المشتق
6	جدول التغيرات من الشكل: x : مجموعة التعريف + القيم التي عدمت المشتق f' : إشارات + أصفار + شلمونات f : أسهم + شلمونات
ملاحظة	في حال أردت دراسة اطراد التابع فقط ستطبق نفس الخطوات السابقة ولكن بدون الرقم (2)

اطراد بعض التوابع المألوفة

التابع	اطراده
$ax+b$	1- إذا كان $a<0$ فيكون متناقص على $\mathbb{R}$ 2- إذا كان $a>0$ فيكون متزايد على $\mathbb{R}$
x^2	- متناقص تماماً على المجال $]-\infty,0[$ - متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	- متناقص تماماً على $\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	- متزايد تماماً على المجال $[0,+\infty[$
$\ln(x)$	- متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$
e^x	- متزايد تماماً على $\mathbb{R}$

ولكن ستسأل نفسك... متى استخدم اطراد التوابع المألوفة؟

حول مبرهنات اطراد التوابع المألوفة

المبرهنة (1)	- مجموع تابعين متزايدين على I هو تابع متزايد على I - مجموع تابعين متناقصين على I هو تابع متناقص على I
المبرهنة (2)	- في حال ضُرب التابع f بعدد k: 1- إذا كان $k>0$ تبقى جهة اطراد f على حالها 2- إذا كان $k<0$ تُعكس جهة اطراد f
المبرهنة (3)	- تركيب تابعين متفقين بالاطراد هو تابع متزايد - تركيب تابعين مختلفين بالاطراد هو تابع متناقص

حول مبرهنة القيمة الوسطى

مبرهنة الوجود ومبرهنة الوحدانية	شرط وجود حل على المجال $[a,b]$: 1- الاستمرار على المجال 2- $k\in f([a,b])$ شرط وجود حل وحيد على المجال $[a,b]$: 1- الاستمرار على المجال 2- الاطراد على المجال 3- $k\in f([a,b])$ **ملاحظة:** لتصوير مجال في تابع نميز الحالات: a- إذا كان التابع متزايد: $f([a,b])=[f(a),f(b)]$ b- إذا كان التابع متناقص: $f([a,b])=[f(b),f(a)]$ c- إذا كان التابع غير مطرد: من حقل f في جدول التغيرات
ما عدد حلول المعادلة $f(x)=k$	1- ندرس تغيرات التابع 2- نقوم بِعدّ مرات مرور السهم من k
التأكد من وجود حل للمعادلة $f(x)=k$ على مجال	1- نوجد صورة المجال

	-2 نختبر إذا كانت k تنتمي لصورة المجال
التأكد من وجود حل للمعادلة $f(x) = 0$ على مجال	$f(a).f(b) < 0$
حصر حل المعادلة $f(x) = k$ ضمن مجال طوله 1	-1 نحدد من الرسم أو من جدول التغيرات مجالاً من النمط $[a, +\infty[$ أو من $]-\infty, a]$ بحيث ينتمي الحل له -2 نوجد $f(a), f(a+1), f(a+2), \dots$ حتى نحصل على صورتين تحصران k
حصر حل المعادلة $f(x) = 0$ ضمن مجال طوله 1	-1 نحدد من الرسم أو من جدول التغيرات مجالاً من النمط $[a, +\infty[$ أو من $]-\infty, a]$ بحيث ينتمي الحل له -2 نوجد $f(a), f(a+1), f(a+2), \dots$ حتى نحصل على تغير في الإشارة

-1 بفرض f تابع معرف على R^* و يحقق أنّ :

- $f(x) = f(-x)$
- عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ على المجال $]0, +\infty[$ ثلاثة حلول مختلفة

عندئذٍ عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ على R^*

a	3	b	4	c	5	d	6

-2 عدد حلول المعادلة $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0$

a	0	b	1	c	2	d	5

-3 عدد حلول المعادلة $x(2x+1)^2 = 5$

a	0	b	1	c	2	d	3

-4 ن f تابع متزايد تماماً على المجال $I = [a, b]$ و مستمراً عليه عندئذٍ الشرط اللازم و الكافي ليكون للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال I هو :

a	$f(a.b) < 0$	b	$f(a)f(b) < 0$	c	$f(a)f(b) > 0$	d	$f(a).f(b) = 0$

-5 ليكن التابع f المعرف على المجال $]1, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$ عندئذ عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

a	0	b	1	c	2	d	3

-6 عدد حلول المعادلة $3x + \cos(x) = 0$:

a	0	b	1	c	2	d	3

-7 عدد حلول المعادلة $x^3 - x - 1 = 0$:

a	0	b	1	c	2	d	3

-8 عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ علماً أنّ $I =]1, +\infty[$; $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$:

a	0	b	1	c	2	d	3

9- عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ حيث $f(x)=x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$:

a	0	b	1	c	2	d	3

10- ليكن $f(x)=\ln(x+1)$ و $g(x)=\frac{x}{x+1}$ فإنّ عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$:

a	0	b	1	c	2	d	3

11- ليكن $f(x)=5-2x+3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$ المعرّف على المجال $]4,+\infty[$ فإذا علمت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلّاً وحيداً α فإنّ هذا الحل ينتمي إلى المجال:

a	$]7,8[$	b	$]6,7[$	c	$]5,6[$	d	$]4,5[$

12- إذا علمت أنّ $f(x)=\frac{2e^x-3}{e^x+1}$ يقبل مماساً عند الصفر معادلته $y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$ عندئذٍ:

a	C فوق T على $\mathbb{R}$	b	C تحت T على $\mathbb{R}$	c	C فوق T على $]0,+\infty[$	d	C تحت T على $]0,+\infty[$

13- أوسع مجال تكون عليه المتراجحة $\ln(x)\le\frac{x}{x+1}$ هو:

a	$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	b	$]-\infty,-1[$	c	$]-1,+\infty[$	d	$\mathbb{R}$

14- أوسع مجال تكون عليه المتراجحة $\ln(x+1)<\sqrt{x+1}$ هو:

a	$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	b	$]-\infty,-1[$	c	$]-1,+\infty[$	d	$\mathbb{R}$

15- أوسع مجال يكون عليه $e^x>x$ هو:

a	$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	b	$]-\infty,-1[$	c	$]-1,+\infty[$	d	$\mathbb{R}$

16- أوسع مجال يكون عليه $\ln(x)\le2\sqrt{x}$ هو:

a	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	b	$]-\infty,0[$	c	$]0,+\infty[$	d	$\mathbb{R}$

17- ليكن $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ عندئذٍ واحدة من القضايا الآتية خاطئة:

a	$A(1,2)$ مركز تناظر.	b	C فوق مقاربه الأفقي على $]1,+\infty[$
c	C تحت مقاربه الأفقي على $]1,+\infty[$	d	f متناقص تماماً.

18- إذا كان $f(x)=(x+1)\ln(x)$ فإنّ إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة:

a	$g(x)=x\ln(x)+x+1$	b	$g(x)=\ln(x)+x+1$	c	$g(x)=x\ln(x)+x$	d	$g(x)=x^2\ln(x)+x+1$

19- إذا كان $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln(x)$ فإنّ إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة:

a	$g(x)=x^2\ln(x)+x^2-1$	b	$g(x)=x^2\ln(x)-1$	c	$g(x)=x^2\ln(x)$	d	$g(x)=x^2\ln(x)+x^2-2$

20- التابع $f(x)=(x+1)\ln(x)$:

a	يقبل قيمة حديّة عند $a=e^{-3}$	b	يقبل قيمة حديّة عند $a=e^{-\frac{3}{2}}$
c	يقبل قيمتان حديّتان.	d	مطّرد تماماً .

21- التابع $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln(x)$:

a	يقبل قيمة حديّة عند $a=1$	b	يقبل قيمة حديّة عند $a=0$
c	يقبل قيمتان حديّتان.	d	لا يقبل قيم حديّة.

حول استنتاج إشارة تابع		
1	↘ عدد سالب ↗	$f(x)$
$f(x) \leq$ عدد سالب < 0		
2	↘ 0 ↗	$f(x)$
$f(x) \leq 0$		
3	↗ عدد موجب ↘	$f(x)$
$f(x) \geq$ عدد موجب > 0		
4	↗ 0 ↘	$f(x)$
$f(x) \geq 0$		
5	سالب ↗↗↗↗↗ سالب	$f(x)$
$f(x) \leq 0$		
6	موجب ↘↘↘↘↘ موجب	$f(x)$
$f(x) \geq 0$		
7	↗↗ 0 ↗↗	$f(x)$
سالب على المجال اليساري وموجب على المجال اليميني		

متى نستخدم ما سبق؟	1- عندما يكون السؤال عن دراسة إشارة تابع 2- متراجحات مختلطة (تابع مساعد) 3- دراسة إشارة مشتق مختلط (تابع مساعد) 4- الوضع النسبي عندما يكون الفرق تابع مختلط (تابع مساعد)

حول الأوضاع النسبية		
الفرق تابع أولي (نوع واحد فقط)	الفرق تابع مختلط	الفرق من الشكل $f(x) - \ell$
1- ندرس إشارة الفرق (إما واضح أو نعدم ونشكل جدول)	1- نسمي الفرق تابعاً مساعداً 2- ندرس اطراده 3- نستنتج إشارته	1- ندرس تغيرات f 2- نضيف سطر $f(x) - \ell$ إلى جدول التغيرات **ملاحظة:** عند طرح عدد من $f(x)$ يطرح من صوره ونهاياته

حول التقابل والتقابل العكسي	
شرط أن يكون f تقابل	1- f مستمر على I 2- f مطرد على I
معنى أن يكون f تقابل	أي يوجد له تابع عكسي g ندعوه "التقابل العكسي" ونرمز له $f^{-1}(x)$ ويحقق: 1- $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ 2- c_f و c_g متناظران بالنسبة لمنصف الربع الأول والثالث $y = x$
إثبات أن f و g يمثلان تقابلاً وتقابله العكسي	1- نثبت أن كل من f و g يحقق شرط التقابل 2- نثبت أن $f(g(x)) = g(f(x)) = x$

إيجاد التابع العكسي "التقابل العكسي"	1- $D_g = f(I)$ 2- نضع $y = f(x)$ 3- نبدل كل x بـ y وكل y بـ x أي $x = f(y)$ 4- نعزل y فنحصل على $y = g(x)$
حول مشتقات من مراتب عليا	
تمهيد	1- ترميز: $f''(x) = f^{(2)}(x)$ $f'''(x) = f^{(3)}(x)$ وهكذا يكون رمز المشتق من المرتبة n هو: $f^{(n)}(x)$ 2- إن: $f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]'$ 3- أنصحك بحفظ أن المتتالية: $1,1,2,6,24 \dots = 0!, 1!, 2!, 3!, 4! \dots$ 4- إن التناوب بالإشارة يعبّر عنه بصيغتين: a- إذا كان أول حد موجباً $(-1)^{n+1}$ حيث $n \geq 1$ b- إذا كان أول حد سالباً $(-1)^{n}$ حيث $n \geq 1$ 5- في المشتقات من مراتب عليا نقبل أن: $[\sin(wx)]' = w\sin\left(wx + \frac{\pi}{2}\right)$ $[\cos(wx)]' = w\cos\left(wx + \frac{\pi}{2}\right)$ وعليه يكون: $[\sin(wx)]^{(n)} = w^n \sin\left(wx + n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ $[\cos(wx)]^{(n)} = w^n \cos\left(wx + n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 6- إن: $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$ $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$
Hero's idea	**الطريقة الغشاشة:** 1- نوجد المشتقين من المرتبة 3 و 4 2- نعوض $n = 3$ و $n = 4$ في الخيارات ونقارن

1- المشتق من المرتبة الثالثة للتابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ يساوي :

a	$-\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$	b	$-\frac{3\sqrt{x}}{8x^4}$	c	$\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$	d	$\frac{3\sqrt{x}}{8x^4}$

2- مشتق التابع f المعرف على R وفق $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ يساوي :

a	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	b	$-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	c	$\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	d	0

3- ليكن $f(x) = 1 + x + 3x^2 + 4x^5 + 5x^6$ عندئذٍ المشتق من المرتبة السابع للتابع f :

a	0	b	720	c	$120x^5$	d	1

<table>
<tr><th colspan="2">حول المماس المشترك</th></tr>
<tr><td>شرطه</td><td>نقول عن f و g انهما يقبلا مماساً مشتركاً عند a إذا تحقق شرطان:
1- $f(a) = g(a)$
2- $f'(a) = g'(a)$</td></tr>
<tr><td>حساب فاصلة المماس المشترك</td><td>1- نضع الشرطين فنحصل على جملة معادلتين بمجهول واحد
2- نحسبه من إحداهما ونتحقق في المعادلة الأخرى فإذا كانت محققة قبل التابعين مماساً مشتركاً.</td></tr>
<tr><td>مثال</td><td>معادلة المماس المشترك للتابعين $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$ هي:
نضع:
$f(a) = g(a)$
$\ln(a+1) = \frac{a}{a+1}$
و أيضاً:
$f'(a) = g'(a)$
$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{(a+1)^2}$
من المعادلة الثانية:
$a+1 = 1 \Rightarrow a = 0$
نتحقق في المعادلة الأولى:
$\ln(0+1) = \frac{0}{0+1} \Rightarrow 0 = 0$
إذن يملكان مماساً مشتركاً عند $a = 0$:
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$
$y = x$</td></tr>
<tr><th colspan="2">حول مقصور تابع</th></tr>
<tr><td colspan="2">نقول عن التابع :
$g: D_g \to R$
إنه مقصور للتابع :
$f: D_f \to R$
إذا تحقق شرطان :
$D_g \subseteq D_f$
$f(x) = g(x) \ ; \forall x \in D_g$
و عليه يكون منحني التابع g هو الجزء من منحني التابع f على المجموعة D_g</td></tr>
</table>

مسائل عامة

ضماناً لشمولية أفكار جميع المسائل سيتم في كل مسألة مما يلي تعريف التابع وبناء طلبات عليه بحيث يكون كل طلب مستقل عن الآخر فيأتي في الامتحان واحد من هذه الطلبات فقط على هذا التابع وليس المسألة كاملةً

1- ليكن f التابع المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق: $f(x) = \sqrt{x+1}$ عندئذٍ القيمة التقريبية للعدد f(3.1) هي

$\frac{40}{81}$	d	$\frac{4}{81}$	c	$\frac{81}{40}$	b	$\frac{81}{4}$	a

2- لنعرف التوابع f, h, g وفق: $g(x) = x\sqrt{x}$, $h(x) = x\|x\|$, $f(x) = \frac{x^2+\|x\|}{x^2+1}$ عندئذ

f, g, h اشتقاقية عند الصفر	d	g غير اشتقاقي عند الصفر	c	h, g اشتقاقيان عند الصفر	b	f اشتقاقي عند الصفر	a

3- **ليكن f التابع المعرف على $[0,1]$ وفق $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$ عندئذ الخط البياني للتابع f**

له مماس عند الواحد ميله 1	d	ليس له مماس عند الواحد	c	له مماس شاقولي عند الواحد	b	له مماس أفقي عند الواحد	a

4- التابع f معرف على $I =]1,2[$ ومعطى بالعلاقة $f(x) = -2x^2 + 4x + \sqrt{-2x^2+4x} - \frac{1}{-2x^2+4x}$ هو تابع:

فردي	d	غير مطرد	c	متزايد تماماً	b	متناقص تماماً	a

5- ليكن f التابع المعرف على R^* الذي يحقق أن $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ فإذا علمت أن الشعاعين $\vec{u}(k, f'(x))$ و $\vec{v}(x, f(x))$ مرتبطان خطياً فإن قيمة العدد الحقيقي k

3	d	$\frac{1}{2}$	c	-1	b	-2	a

6- إذا كان التابع f المعرف على R وفق $f(x) = \sqrt{1 + \sin x + 3\cos^2 x} - 2$ كان $f'(x)$ يساوي:

$\frac{sinx + 6cosx}{2\sqrt{1 + sinx + 3\cos^2 x}}$	d	$\frac{1}{4}$	c	1	b	0	a

7- التابع f عرف وفق $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 2 : x < 1 \\ 8x + b \quad : x \geq 1 \end{cases}$ ويقبل الاشتقاق على R عندئذ:

$a = -3, b = -1$	d	$a = 1, b = 3$	c	$a = -3, b = 1$	b	$a = 3, b = -1$	a

8- نهاية $\lim_{x \to 0} \frac{cosx - 1}{x}$ تساوي:

0	d	1	c	-1	b	$-\infty$	a

9- إن مشتق التابع $f(x) = 4\sin^3(x) + 3cosx$:

$f'(x) = 3sinx(4cosx - 1)$	b	$f'(x) = 3sinx(2sin2x - 1)$	a
$f'(x) = 4\cos^3 x - 3sinx$	d	$f'(x) = 3sinx(4sinx - 1)$	c

10- إن نهاية التابع $f(x) = \tan x$ عندما $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ تساوي :

1	d	0	c	$-\infty$	b	$+\infty$	a

11- التابع sin (3x) دوري و اصغر دور له :

a	2π	b	$\frac{2\pi}{3}$	c	$\frac{3\pi}{2}$	d	3π

12- التابع $x \longmapsto tanx$ المعرف على $]0, \frac{\pi}{2}[$:

a	زوجي	b	متزايد تماماً	c	متناقص تماماً	d	دوري دوره $\frac{\pi}{2}$

المسألة الأولى

ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $]0, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{\ln(x)+x^2+x}{2x} + 3x$. أجب عن كل مما يلي:

1- واحدة من القضايا الآتية خاطئة. اخترها:

a	للتابع مقارب مائل عند $+\infty$ معادلته $y = \frac{5}{2}x + 1$	b	c_f يقع فوق مقاربه المائل على المجال $]1, +\infty[$
c	للتابع مقارب شاقولي وحيد	d	للتابع مقارب مائل عند $+\infty$ معادلته $y = \frac{7}{2}x + 1$

2- مشتق التابع f يعطى بالعلاقة:

a	$\frac{7x^2+1}{2x^2}$	b	$\frac{7x^2+1-\ln(x)}{2x^2}$	c	$\frac{7x^2+1+\ln(x)}{2x^2}$	d	$\frac{7x^2+1-\ln(x)}{x^2}$

المسألة الثانية

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$. أجب عن كل مما يلي:

1- اختر القضية الصحيحة بخصوص f:

a	للتابع f مقارب أفقي عند $+\infty$	b	للتابع f مقارب مائل عند $+\infty$ معادلته $y = x - 2$
c	للتابع f مقارب مائل عند $-\infty$ معادلته $y = x - 1$	d	مشتق التابع f يعطى بالشكل $f'(x) = \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$

2- عدد القيم الحدية للتابع f:

a	1	b	2	c	3	d	لا يوجد

3- إذا علمت أن $y = 1$ هي معادلة المماس الأفقي للخط البياني للتابع f عندئذ يكون c_f فوق مقاربه على المجال:

a	$]0, +\infty[$	b	$]1, +\infty[$	c	$]-\infty, 1[$	d	$]-\infty, 0[$

المسألة الثالثة

ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{x}{e^x}$. أجب عن كل مما يلي:

1- نهاية f عند $+\infty$ تساوي:

a	0	b	1	c	$+\infty$	d	$-\infty$

2- نهاية f عند $-\infty$ تساوي:

$-\infty$	d	$+\infty$	c	1	b	0	a

3- عبارة المشتق النوني للتابع f هي:

$\frac{(-1)^n(x-n)}{e^{nx}}$	d	$\frac{(-1)^n(n-x)}{e^x}$	c	$\frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}$	b	$\frac{(-1)^{n+1}(x-n)}{e^x}$	a

4- مساحة السطح المحصور بين c_f ومحور الفواصل والمستقيمان $x=\ln(2)$, $x=-\ln(2)$ هي:

$\ln(4)+2$	d	$\ln(2)-1$	c	$2\ln(2)-1$	b	$2\ln(2)$	a

5- لنفرض وجود عددين a و b يحققان $ae^b = be^a$ عندئذ واحدة من العبارات الآتية صحيحة:

$\frac{a}{b}=e^{b-a}$	b	للمعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان عندما $m\in]1,\frac{1}{e}[$	a
$e^{b-a}=a.b$	d	المعادلة $f(x)=m$ مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$	c

المسألة الرابعة

ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{1}{x}+xln(x)$ المعرف على $]0,+\infty[$.

1- إشارة المشتق f' هي من إشارة التابع:

$x^2\ln(x)+x^2$	d	$x^2\ln(x)+x^2-1$	c	$\ln(x)+x^2-1$	b	$x^2\ln(x)-1$	a

2- قيمة $f'(1)$:

$\ln(2)$	d	2	c	1	b	0	a

3- مساحة السطح المحصور بين المستقيمين $x=e$, $x=\frac{1}{e}$ ومحور الفواصل تساوي:

$\ln(2)$	d	2	c	1	b	0	a

4- معادلة المماس للخط البياني للتابع في النقطة التي فاصلتها $a=1$ هي:

$y=1$	d	$y=-x+1$	c	$y=0$	b	$y=x+1$	a

حول التوابع المركبة	
إذا كان $f(x)=g\big(u(x)\big)$ فلحساب نهاية $f(x)$ عند a نتبع الخطوات: 1- نحسب نهاية المضمون $u(x)$ عند a (ونفرض الجواب ℓ) 2- نحسب نهاية $g(x)$ عند ℓ 3- مبروك عليك!!!!	نهاية تابع مركب
إذا كان التابع من النمط $\frac{\sin(f(x)-2)}{f(x)-2}$ أو مثلًا $\left(\sqrt{2+\frac{1}{f(x)}}-\sqrt{2}\right)f(x)$ وعلمنا نهاية $f(x)$ فإننا: 1- نستبدل $f(x)$ بـ t	

	2- نجعل t تسعى لنهاية $f(x)$ (للجواب تبع النهاية)
مشتق تابع مركب	القانون العام: $[f(u(x))]' = f'(u(x)).u'(x)$
Hero's ideas	• إذا كان $g'(x) = 0$ فإن $g(x)$ تابع ثابت • إذا كان $g(x)$ تابع ثابت فإن $g(x) = g$ (أي عدد) • نهاية التابع الثابت تساويه • إذا كان $g(x)$ تابع ثابت فإنه خطه البياني مستقيم أفقي معادلته الثابت $= y$

1- ليكن f التابع المعرف على $]3,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$ عندئذٍ نهاية $f(f(x))$ عند 3 هي

a	b	c	d
$-\infty$	$+\infty$	3	غير موجودة

2- إذا كان $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ تساوي:

a	b	c	d
$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	2

3- إذا كان $f(x) = \frac{x+2}{x}$ و $g(x) = \frac{2}{x-1}$ عندئذٍ $f(g(x))$ يساوي:

a	b	c	d
x	$\frac{1}{x}$	$-x$	$\frac{x+1}{x-1}$

4- ليكن f و g التابعان المعرفان وفق $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \sin x$ عندئذٍ يكون التركيب $(gof)(x)$ يساوي

a	b	c	d
$\sin(x^2 - 1)$	$\sin^2 x - 1$	$(\sin x - 1)^2$	$\sin(x^2) - 1$

5- بفرض I مجالاً يحقق أن $0 \notin I$ و $g(x) \neq 0$ مهما كانت $x \in I$ و g اشتقاقي على I . فأذا علمت أن :

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad (fog)(x) = x$$

فإن $g'(x)$ يساوي :

a	b	c	d
1	x	$f(x)$	$g(x)$

6- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ عندئذٍ $\sqrt{1+x^2}f'(x)$ يساوي

a	b	c	d
0	1	$f(x)$	$-f(x)$

7- ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$ و ليكن $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ عندئذٍ

a	b	c	d
$g(x) = f(x)$	$g(x) = f(-x)$	$g(x) = -f(x)$	$g(x) = -f(-x)$

8- ليكن f تابعاً معرفاً على R يحقق أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ولنضع $g(x) = f(x) + f(-x)$ عندئذٍ واحدة من القضايا الآتية خاطئة

a	b	c	d
C_g متناظر لمحور التراتيب	التابع g ثابت	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2f(0)$	التابع g غير محدود

9- ليكن f تابعاً معرفاً على R يحقق أن $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ولنضع $g(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})$ عندئذٍ واحدة من القضايا الآتية خاطئة

a	التابع g متزايد	b	التابع g ثابت
c	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2f(1)$	d	مساحة السطح المحصور بين C_g و محوري الإحداثيات و المستقيم $x=\frac{1}{2}$ تساوي $f(1)$

10- ليكن f تابعاً معرفاً على R يحقق أن $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ولنضع $g(x)=f(tanx)-x$ عندئذٍ $g'(x)$ يساوي :

a	0	b	$\frac{1}{1+\tan^2 x}$	c	$\tan^2 x$	d	$\frac{1}{1+\tan^2 x}-1$

11- ليكن f التابع المعرف على $]-5,\infty[$ وفق $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$ عندئذٍ $f(f(x))$ يُعطى بالقاعدة

a	$\frac{-x+6}{3x+11}$	b	$\frac{-x+9}{3x+11}$	c	$-\frac{x+9}{3x+11}$	d	$\frac{x+9}{3x+11}$

12- ليكن f تابع ليس زوجي و ليس فردي و معرف على R و g تابع معرف على R وفق $g(x)=f(x)+f(-x)$ عندئذٍ يكون التابع g :

a	فردياً	b	دورياً	c	ليس ثابتاً	d	زوجياً

13- بفرض f تابع معرف على R ويحقق أن $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ وليكن g معرف على R وفق:
$g(x)=f(x)+f(-x)$

عندئذٍ مشتق التابع g يساوي:

a	$g'(x)=\frac{2}{1+x^2}$	b	$g'(x)=0$	c	$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	d	$g'(x)=1$

14- بفرض f تابع معرف على R ويحقق أن $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ وليكن g معرف على R وفق:
$g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

عندئذٍ مشتق التابع g يساوي:

a	$g'(x)=\frac{2}{1+x^2}$	b	$g'(x)=0$	c	$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	d	$g'(x)=1$

15- بفرض f تابع معرف على R ويحقق أن $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ وليكن g معرف على R وفق:
$g(x)=f(tanx)-x$

عندئذٍ مشتق التابع g يساوي:

a	$g'(x)=\frac{2}{1+x^2}$	b	$g'(x)=0$	c	$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	d	$g'(x)=1$

16- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-1,1\}$ وفق $f(x)=|x-1|+\frac{1}{x^2-1}$ إن معادلة المماس للخط C في النقطة منه التي فاصلتها صفر هي :

a	$y=x$	b	$y=-x$	c	$y=x-1$	d	$y=-x+1$

17- بفرض $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$ عندئذٍ عدد المماسات للخط C_f المارة من المبدأ (وليس بالضرورة في المبدأ)

a	0	b	1	c	2	d	3

حول معادلة المماس	
ملاحظة	يجب التفريق دوماً بين معلومتين: 1- نقطة التماس: هي النقطة التي وقع فيها تماس بين مستقيم (المماس) والخط البياني للتابع 2- نقطة يمر منها المماس: هي عبارة عن نقطة تنتمي لمعادلة المماس فقط وليس من الضروري أن تكون تنتمي للخط البياني للتابع
قانون معادلة المماس	$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ حيث أن: a الفاصلة $f(a)$ الترتيب $f'(a)$ الميل
الحالة (1)	معادلة مماس عُلم فاصلة نقطة التماس a: 1- نحسب $f(a)$ و$f'(a)$ 2- نعوض في قانون معادلة المماس
الحالة (2)	معادلة مماس عُلم ترتيب نقطة التماس $f(a)$: 1- نضع $f(x) = f(a)$ 2- نعزل لنصل لـ $x = a$ 3- نحسب $f'(a)$ 4- نعوض في قانون معادلة المماس
الحالة (3)	معادلة مماس عُلم ميله $f'(a)$: 1- نضع $f'(x) = f'(a)$ 2- نعزل لنصل لـ $x = a$ 3- نحسب $f(a)$ 4- نعوض في قانون معادلة المماس
الحالة (4)	معادلة مماس عُلمت معادلة مستقيم موازي له $y = mx + p$: 1- نسرق الميل m 2- نضع $f'(x) = m$ 3- نعود للحالة (3)
الحالة (5)	معادلة مماس عُلمت معادلة مستقيم معامداً له $y = m'x + p$: 1- نحسب ميل المماس المطلوب من القانون $m = -\frac{1}{m'}$. 2- نضع $f'(x) = m$. 3- نعود للحالة (3)

الحالة (6)	معادلة مماس في النقطة التي فاصلتها تعدم المشتق الثاني: 1- نشتق مرتين لنصل لـ $f''(x)$ 2- نضع $f''(x) = 0$ 3- نعزل لنصل لـ $x = a$ 4- نحسب $f'(a)$ و $f(a)$ 5- نعوض في قانون معادلة المماس
الحالة (7)	معادلة المماس في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب: 1- نضع $x = 0$ 2- نعود للحالة (1)
الحالة (8)	معادلة المماس في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل: 1- نضع $f(x) = 0$ 2- نعزل لنصل لـ $x = a$ 3- نعود للحالة (2)
الحالة (9)	معادلة المماس الأفقي للتابع: 1- نضع $f'(x) = 0$ 2- نعود للحالة (3)
الحالة (10)	معادلة المماس الشاقولي للتابع: تكون فقط عندما تكون نهاية معدل التغير لانهائية: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$ وتكون معادلة المماس الشاقولي هي x = a
الحالة (11)	معادلة نصف المماس اليميني واليساري: $y_1 = f'(a^+)(x-a) + f(a)$ $y_2 = f'(a^-)(x-a) + f(a)$ ويكونان فقط عندما يكون المشتق من اليمين عند a لا يساوي المشتق من اليسار عند a

حول قابلية الاشتقاق عند نقطة
إذا كان التابع جذري أو قيمة مطلقة ينعدم مضمونه عند x_1 و x_2 فإن المضمون يكتب بالشكل: $(x-x_1)(x-x_2)$ فإذا كان أحد هذه الأقواس مضروب بالجذر أو القيمة المطلقة يكون التابع اشتقاقياً عند القيمة التي تعدمه (قد يكون كليهما أو ولا نقطة منهما)

التكامل

إثبات أن F تابع أصلي	إثبات أن F و G تابعان أصليان
1- F اشتقاقي على I. 2- $F'(x) = f(x)$	نثبت أن: $F(x) - G(x) = \underbrace{k}_{\text{ثابت}}$

إيجاد التوابع الأصلية لتوابع بسيطة

$f(x)$		$f(ax+b)$	
$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x^n\ ; n \neq -1$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	$(ax+b)^n\ ; n \neq -1$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\pm e^{\pm x}$	$e^{\pm x}$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	e^{ax+b}
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{a}\ln\|ax+b\|$	$\frac{1}{ax+b}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$	$1+\tan^2 ax+b$
$-\cot(x)$	$1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{a}\cot(ax+b)$	$1+\cot^2 ax+b$
إضافات من نوطة			

ملاحظات هامة:

1- التكامل يحترم الجمع والطرح والأمثال لا تكامل.

2- بعد كل تكامل نضع $+k$.

3- تذكر أن: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ وأن $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

أي قوة أو جذر في المقام يرفع إلى البسط مع تغيير إشارة الأس.

إيجاد تابع أصلي لتابع جداء

تغيير المتحول	بسيط × بسيط (اختلاف بالنوع)
1- نفرض مضمون المركب H. 2- نوجد H'. 3- نظهر H' في عبارة $f(x)$. 4- نحذف المشتق ونكامل. 5- نعوض قيمة H. حالة خاصة: $\frac{1}{x} \times \underbrace{(\text{لوغارتمي})^n}_{H^n}$	1- أسي × صحيح 2- مثلثي × صحيح 3- لوغارتمي × صحيح 4- لوغارتمي × $\frac{1}{x^n}$ و $n \neq 1$. 5- اسي × مثلثي التكامل بالتجزئة: $\int_a^t u.v'dx = [u.v]_a^t - \int_a^t u'.v\ dx$
لتوضيح أكثر:	
$u(x).e^H$ $u(x)\cos(H)$ $u(x)\sin(H)$ $u(x)H^n$ $u(x)f(H)$	

التكاملات الكسرية

البسط مشتق المقام	درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام	درجة البسط أصغر تماماً من درجة المقام (تحليل المقام)	
$\ln\lvert \text{المقام} \rvert + k$ **ملاحظة:** للتخلص من القيمة المطلقة: 1- المضمون مثلثي (دائرة) 2- المضمون ليس مثلثي (قيمة تجريبية)	1- قسمة البسط على المقام قسمة إقليدية 2- نكتب التابع بالشكل: $f(x) = \text{الناتج} + \dfrac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$	المقام مطابقة: نرفع المقام للبسط ونغير إشارة الأس	المقام قوسين مختلفين: تفريق كسور

التكاملات المشابهة للصيغة $\frac{1}{e^x+1}$ نضرب البسط والمقام بـ e^{-x} والعكس بالعكس

أمثلة

$$f(x) = \frac{3}{5x-4}$$

....

....

....

$$f(x) = \tan(x)$$

....

....

....

$$f(x) = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$$

....

....

....

$$f(x) = \frac{1}{\sin(2x)}$$

....

....

....

....

....

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

....

....

....

....

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

....

....

....

....

....

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 7}{x+1}$$

....

....

....

....

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x + 1}{6x}$$

....

....

....

....

....

....

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x + x^2}$$

....

....

....

....

....

$$f(x) = \frac{x+3}{(x-1)^3(x^2+2x-3)}$$

....

....

....

....

....

التكاملات المثلثية		
جميع الأسس زوجية	يوجد أس فردي	جداء تابعين مثلثين
$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$ $\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$	$\cos^{2k+1}x =$ $\cos^{2k}(x).\cos(x) =$ $(\cos^2 x)^k.\cos(x) =$ $(1-\sin^2 x)^k \cos(x)$ ثم ننشر المطابقة ونفرض $\sin(x) =$ H فيكون $H' = \cos(x)$ انتبه!! تكامل H' لحالو هو H	$\cos(a).\cos(b) =$ $\frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ $\sin(a).\sin(b) =$ $-\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$ $\sin(a).\cos(b) =$ $\frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

كيف نكامل القيمة المطلقة؟!

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

1- نعدم $f(x)$ أي نضع $f(x) = 0$

2- نحل المعادلة فنجد أن $x = c$

3- نجزء التكامل:

$$\int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|\, dx$$

4- على المجال الذي يكون عليه $f(x)$ سالباً نضع $|f(x)| = -f(x)$

وعلى المجال الذي يكون عليه $f(x)$ موجباً نضع $|f(x)| = f(x)$

ثم نكامل.

كيف نكامل $min - max$؟!

لإيجاد $\min(f(x), g(x))$:

1- نضع $f(x) = g(x)$.

2- نحل المعادلة.

3- ننظم الجدول:

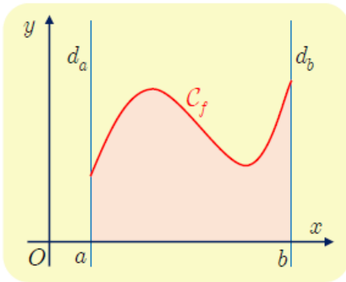
x	a	x_0	b
$\min(f(x), g(x))$	نجرب قيمة في التابعين ونختار التابع الذي يعطي القيمة الأصغر	|	نجرب قيمة في التابعين ونختار التابع الذي يعطي القيمة الأصغر

مساحة لخط بياني وحيد

التابع فوق الأرض

المساحة المحصورة بين الخط البياني ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a_1$, $x = a_2$:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx$$

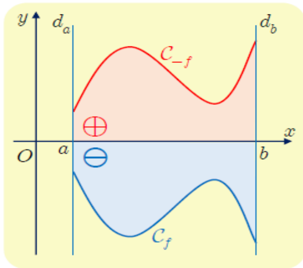


التابع تحت الأرض

المساحة المحصورة بين الخط البياني ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a_1$, $x = a_2$:

$$-\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx$$

$$= \int_{a_2}^{a_1} f(x)\,dx$$



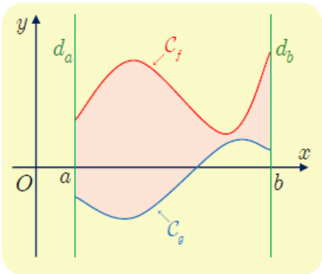
مساحة بين خطين

دائماً سيكون الشرط:

$$\int_{a_1}^{a_2} \text{الأعلى} - \text{الأدنى}\ dx$$

ملاحظة:

من الممكن أن يكون المساحة المطلوبة بين خطين بيانيين **أو** خط بياني ومستقيم مائل.



الحجوم

حجم كرة انطلاقاً من مساحة مقطع

1- نحسب مساحة مقطع من هذا المجسم بدلالة متحول واحد ونرمز لها $\left(\text{متحول}\right)A$.

2- نكامل تابع المساحة A على الحدود المناسبة.

حجم مجسم ناتج عن دوران منحني لتابع

نستعمل القانون:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

أتمتة أسئلة الوحدة في التكامل

حساب تكاملين معاً

نعطى تكاملين محددين لهما نفس الحدود I و J ولكن!! أحدهما لسنا قادرين على حسابه عندئذ بحساب أحدهما و $I \pm J$ أو بحساب $I + J$ و $I - J$ يمكن استنتاج قيمة كل منهما

إيجاد تابع أصلي بالاستفادة من معادلة تفاضلية

إذا استطعنا الوصول إلى معادلة تفاضلية خطية من الشكل $f(x) = af'(x) + bf''(x)$ عندئذ بمكاملة الطرفين نصل إلى $F(x) = af(x) + bf'(x)$

حيث $\int f(x) = F(x)$, $\int f'(x) = f(x)$, $\int f''(x) = f'(x)$

المتراجحات والتأطير

مبرهنة: إذا كان F و G تابعان أصليان للتابعين f و g على الترتيب على I ويتحقق أن:

$$\forall x \in I\,; f(x) \le g(x) \Rightarrow F(x) \le G(x)$$

1- ليكن لدينا التابعان $F(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+1}$ و $G(x) = \frac{2x^2+\lambda x+5}{2x+2}$ قيمة λ ليكون التابعين تابعين أصليين للتابع ذاته هي:

a	9	b	2	c	3	d	

2- ليكن لدينا التابعان $F(x) = \lambda - 2\cos^2(x)$ و $G(x) = -2\cos^2(x)$ قيمة λ ليكون التابعين تابعين أصليين للتابع ذاته هي:

a	2	b	1	c	5	d	$\lambda \in \mathbb{R}$

3- قيمة التكامل $\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right) e^{x^2+x}\, dx$ تساوي:

$\frac{1}{2}$	d	$\frac{3}{2}$	c	$-\frac{10}{24}$	b	$\frac{e-1}{2}$	a

4- التابع الأصلي للتابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ تساوي:

$2\sqrt{x^2+3}$	d	$2\sqrt{x^2-9}$	c	$\sqrt{x^2-9}$	b	$\sqrt{x^2+3}$	a

5- قيمة التكامل $\int_1^0 x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\, dx$ تساوي:

$\frac{1}{2}$	d	$\frac{3}{2}$	c	$-\frac{10}{24}$	b	$\frac{e-1}{2}$	a

6- قيمة التكامل $\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}\, dx$ تساوي:

$\frac{1}{2}$	d	$\frac{3}{2}$	c	$-\frac{10}{24}$	b	$\frac{e-1}{2}$	a

7- قيمة التكامل $\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right) dx$ تساوي:

$\frac{1}{2}$	d	$\frac{3}{2}$	c	$-\frac{10}{24}$	b	$\frac{e-1}{2}$	a

8- قيمة التكامل $\int_1^e \left(\frac{\ln^2 x + 2\ln(x) + 2}{x}\right) dx$ تساوي:

4	d	$\frac{4-\pi}{4}$	c	2	b	$\frac{10}{3}$	a

9- قيمة التكامل $\int_{e^2}^{e^3} \left(\frac{1}{x\sqrt{\ln(x)-1}}\right) dx$ تساوي:

4	d	$\frac{4-\pi}{4}$	c	2	b	$\frac{10}{3}$	a

10- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x)\, dx$ تساوي:

4	d	$\frac{4-\pi}{4}$	c	2	b	$\frac{10}{3}$	a

11- قيمة العدد k التي تحقق $\int_0^k (x^2+x)dx = \frac{5}{6}$ هي:

$k=4$	d	$k=2$	c	$k=1$	b	$k=\frac{1}{2}$	a

12- إذا علمت أن $x \in [0, a]$ فواحدة من المتراجحات الآتية صحيحة:

$\frac{1}{a+1} \le \frac{\ln(a+1)}{a} \le 0$	b	$\frac{1}{a+2} \le \frac{\ln(a+1)}{a} \le 1$	a
$\frac{1}{a+1} > \frac{\ln(a+1)}{a} > 1$	d	$\frac{1}{a+1} \le \frac{\ln(a+1)}{a} \le 1$	c

13- قيمة التكامل $\int_1^0 \frac{x}{e^x} dx$ تساوي:

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi - \frac{1}{2}$	b	$\frac{2-e}{e}$	a

14- قيمة التكامل $\int_0^{\pi} (2x+1)\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$ تساوي:

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi - \frac{1}{2}$	b	$\frac{2-e}{e}$	a

-15 قيمة التكامل $\int_1^e \left(\frac{1+\ln(x)}{x^2}\right) dx$ تساوي:

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi-\frac{1}{2}$	b	$\frac{2-e}{e}$	a

-16 قيمة التكامل $\int_1^e \left(\frac{1}{x^2}-\frac{3\ln(x)}{x^2}\right) dx$ تساوي:

e	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\frac{2-e}{e}$	b	$\frac{1}{e}$	a

-17 قيمة التكامل $\int_0^1 (x^2e^x)\, dx$ تساوي:

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi-\frac{1}{2}$	b	$\frac{2-e}{e}$	a

-18 قيمة التكامل $\int_0^1 (x^2+x+1)e^{2x}\, dx$

الطريقة اليمانية في تكامل: مثلثي ضرب صحيح أو أسي ضرب صحيح: نأخذ التابع الصحيح ونشتقه إلى أن ينعدم , ونأخذ التابع الآخر (الأسي أو المثلثي) ونكامله إلى أن نصل لنفس مستوى التابع الصحيح ثم **نقاطع بتناوب:**

$$\begin{array}{ccc}
x^2+x+1 & & e^{2x} \\
 & \searrow & \\
2x+1 & & \frac{1}{2}e^{2x} \\
 & \searrow & \\
2 & & \frac{1}{4}e^{2x} \\
 & \searrow & \\
0 & & \frac{1}{8}e^{2x}
\end{array}$$

والآن نأخذ تقاطع بتناوب وهو عبارة عن أخذهم بشكل قطري مع تناوب الإشارات:

$$\left[+(x^2+x+1)\frac{1}{2}e^{2x}-(2x+1)\frac{1}{4}e^{2x}+2\left(\frac{1}{8}e^{2x}\right)\right]_0^1$$

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi-\frac{1}{2}$	b	$e-\frac{1}{2}$	a

-19 قيمة التكامل $\int_1^{e^2} \left(\frac{1}{x(\ln(x)-1)}\right) dx$ تساوي:

2	d	-1	c	1	b	0	a

-20 قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\,.\sin(2x)\, dx$ تساوي:

1	d	$\frac{-2\sqrt{2}-8}{12}$	c	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	b	$\frac{4}{3}$	a

-21 قيمة التكامل $\int_0^{\pi} \sin^3(x)\, dx$ تساوي:

1	d	$\frac{-2\sqrt{2}-8}{12}$	c	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	b	$\frac{4}{3}$	a

-22 قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\, dx$ تساوي:

4	d	1	c	2	b	$\frac{1}{3}$	a

23- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\cos^2(x)}\ dx$ تساوي:

4	d	1	c	2	b	-2	a

24- قيمة التكامل $\int_0^{\pi} \sqrt{2-2\cos(x)}\ dx$ تساوي:

4	d	1	c	2	b	$\frac{8}{15}$	a

25- قيمة التكامل $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin(2x)}\ dx$ تساوي:

1	d	$\frac{-2\sqrt{2}-8}{12}$	c	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	b	$\frac{4}{3}$	a

26- قيمة التكامل $\int_0^{1} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ dx$ تساوي:

5	d	3	c	$\ln\left(2e+\frac{2}{e}\right)$	b	$\ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$	a

27- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\ dx$ تساوي:

5	d	3	c	$\ln\left(2e+\frac{2}{e}\right)$	b	0	a

28- قيمة الثنائية (a,b) حتى يكون التابع $F(x)=(ax+b)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)=\frac{5x-4}{e^x}$ هي:

$(-5,1)$	d	$(5,-1)$	c	$(5,1)$	B	$(-5,-1)$	a

29- إذا علمت أن التابع $F(x)=P(x)e^{2x}$ تابع أصلي للتابع $f(x)=x^3e^{2x}$ علماً أن $P(x)$ كثير حدود فإن $Deg(P)$ تساوي:

1	d	2	c	4	b	3	a

30- قيمة التكامل $\int_1^{3} |2x-4| dx$ تساوي

0	d	1	c	-2	b	2	a

31- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max(\cos(x), \sin(x))\ dx$ تساوي:

$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	d	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	c	$2\sqrt{2}$	b	$\sqrt{2}$	a

32- قيمة التكامل $\int_0^{1} \min(x^2, x)\ dx$ تساوي:

$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	d	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	c	$\frac{13}{3}$	b	$\frac{1}{3}$	a

33- ليكن $f(x)=e^x.\cos(x)$ فإن قيمة الزوج (a,b) التي تحقق $f(x)=af'+bf''$ هي:

$\left(\frac{1}{2},1\right)$	d	$\left(-\frac{1}{2},2\right)$	c	$\left(1,-\frac{1}{2}\right)$	b	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	a

34- ليكن $f(x)=e^x.\sin(2x)$ فإذا علمت أنه يوجد عددين a و b يحققان أن $f''(x)=af'+bf$ فإن التابع الأصلي للتابع f هو:

$f(x)-2f'(x)$	d	$\frac{1}{5}f(x)+2f'(x)$	c	$f'(x)-f(x)$	b	$-\frac{1}{5}f'(x)+\frac{2}{5}f(x)$	a

35- بفرض $g(x) = \frac{3tanx-1}{tanx+1}$ المعرف على $[0, \frac{\pi}{2}[$ فإن المشتق $g'(x)$ يساوي :

$\frac{4\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)^2}$	d	$\frac{4+4\tan^2 x}{(1+tanx)^2}$	c	$\frac{4}{(1+\tan^2 x)^2}$	b	$\frac{tanx}{1+\tan^2 x}$	a

36- بفرض $g(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ عندئذٍ $g'(x)$ يساوي :

$2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$	d	$2\left(x+\frac{1}{x}\right)$	c	$\frac{2(x^2-1)}{x^3}$	b	$\frac{2(x^4-1)}{x^3}$	a

37- اذا علمت $1-\frac{x^2}{2} \le cosx \le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ فأي من المتراجحات الآتية صحيحة :

غير ذلك	d	$x-x^3 \le sinx \le x$	c	$x-\frac{x^3}{3} \le sinx \le x$	b	$x-\frac{x^3}{6} \le sinx \le x$	a

متتاليات

أشكال التعبير عن المتتالية		
المجاميع	المتتالية التدريجية	الحد العام
$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$	u_{n+1} بدلالة u_n أو $u_{n+1} = f(u_n)$	u_n بدلالة n أو $u_n = f(n)$
أولاً: متتاليات الحد الصريح:		
أنواع المتتاليات		
unknown	هندسية	حسابية
مافي شي ثابت	كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد q يسمى أساس المتتالية	كل حد ينتج عن سابقه بجمع بعدد r يسمى أساس المتتالية

قوانين للمتتالية الحسابية والهندسية		
الهندسية	الحسابية	نوع المتتالية
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$	$u_{n+1} - u_n = r$	معيار الكشف عنها
$u_n = u_m . q^{n-m}$	$u_n = u_m + r(n-m)$	قانون الحدين
إذا كانت $u_{n+1} = au_n + b\,; a \neq 1$ فإن المتتالية المعرفة وفق: $v_n = u_n + \frac{b}{a-1}$ هندسية أساسها a ثم نقارن		العدد α الذي يجعل المتتالية $v_n = u_n + \alpha$ هندسية
إذا كانت $u_{n+1} = au_n + b\,; a \neq 1$ فإن المتتالية المعرفة وفق: $u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right).a^n - \frac{b}{a-1}$		تخمين الحد العام
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} +\infty\,; q > 1 \\ u_0\,; q = 1 \\ 0\,; -1 < q < 1 \\ \text{غير موجودة}\,; q < -1 \end{cases}$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ دوماً متباعدة.	نهاية المتتالية

1- نهاية المتتالية $u_n = \frac{10^{n+1}+1}{10^n+1}$:

10^{-1}	d	1	c	0	b	10	a

2- نهاية المتتالية $u_n = 10^{-2n} - 2^{-2n} + ne^n$:

$-\infty$	d	1	c	0	b	$+\infty$	a

3- بفرض v_n المتتالية المعرفة بالشكل $v_n = \frac{\pi^{n+1}}{3\pi^n+3}$ ولتكن $u_n = \cos(n)$ عندئذ نهاية المتتالية $w_n = u_{v_n}$ هي:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	c	0	d	1

ثلاث حدود متعاقبة	
حسابية	**هندسية**
إذا ذكر الأساس: الثاني يساوي الأول + الأساس الثالث يساوي الثاني + الأساس الثالث يساوي الأول + 2 (الأساس)	إذا ذكر الأساس: الثاني يساوي الأول ضرب الأساس الثالث يساوي الثاني ضرب الأساس الثالث يساوي الأول ضرب الأساس مربع
إذا لم يذكر الأساس: ضعفي الثاني يساوي الأول + الثالث مجموع الحدود الثلاثة يساوي ثلاث أضعاف الثاني	إذا لم يذكر الأساس: مربع الثاني يساوي الأول ضرب الثالث جداء الحدود الثلاثة يساوي مكعب الثاني

1- بفرض a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية تحقق أن:

$$a + b + 2c = 27$$

فإن المقدار $3b + c$ يساوي:

a	10	b	20	c	27	d	24

2- بفرض $2a$ و b و $3c$ ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية متزايدة أساسها 2 تحقق:

$$2a + b + 3c = 14$$

فإن a و b و c تساوي:

a	$a = 2 , b = 4 , c = 8$	b	$a = 1 , b = 4 , c = \frac{8}{3}$
c	$a = 3 , b = 4 , c = \frac{8}{3}$	d	$a = 1 , b = 4 , c = 9$

3- الأعداد $1 , k , k - \frac{2}{9}$ تمثل ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية . فإن قيمة k هي:

a	$\frac{1}{3}$	b	$-\frac{1}{3}$	c	$\frac{1}{9}$	d	3

4- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية تحقق أن $u_3 + u_{11} = 60$ عندئذٍ قيمة المجموع:

$$u_2 + u_3 + u_4 + u_{10} + u_{11} + u_{12}$$

a	180	b	120	c	183	d	المعطيات غير كافية

5- إذا كان a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية و كان $abc = 216$ فإن قيمة b

a	8	b	6	c	4	d	3

6- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r فإذا علمت أن $u_0 + u_3 = 18$ و $u_2 + u_5 = 34$ فالحد العام لها

a	$3n + 4$	b	$4n - 3$	c	$4n + 3$	d	$-4n + 3$

-7 لدينا a, b, c ثلاثة حدود متوالية غير معدومة من متتالية هندسية أساسها q كما لدينا $12a$ و$5b$ و$2c$ ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية فان q تساوي:

a	$\begin{cases} q=-2 \\ q=3 \end{cases}$	b	$\begin{cases} q=-3 \\ q=2 \end{cases}$	c	$\begin{cases} q=-3 \\ q=-2 \end{cases}$	d	$\begin{cases} q=2 \\ q=3 \end{cases}$

-8 a , b , c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية، حيث: $a < b < c$ و $a+b+c=21$ و $abc=216$ عندئذ قيمة $a+c$ هو:

a	27	b	21	c	6	d	15

-9 لدينا a , b , c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها r موجب تماماً وتحقق $b^2 = 1 + ac$ عندئذٍ r:

A	-1	B	8	C	2	D	1

-10 ليكن a عدداً حقيقياً ونفترض أن a^2-4 و $2a+1$ و $a+2$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية متناقصة عندئذ قيمة a هي:

a	$a=3$	b	$a=-1$	c	$a=2$	d	$a=4$

-11 $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_1+u_2+u_3=9$ و $u_{10}+u_{11}=40$ عندئذ قيمة الأساس r هي:

a	$r=2$	b	$r=3$	c	$r=1$	d	$r=4$

-12 ليكن λ عدداً حقيقياً و لنفترض أن λ^2-4 , $2\lambda+1$, $\lambda+2$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية متناقصة .

عندئذٍ قيمة λ هي :

a	1	b	-1	c	4	d	-4

-13 a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a \neq 0$ نعلم أن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية غير ثابتة نرمز إلى أساسها q كما نعلم أن $4a$ و $3b$ و $2c$ هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية فإن قيمة الأساس q:

a	$q=1$	b	$q=2$	c	$q=-1$	d	$q=3$

-14 لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية فيها:

$$u_3 - 3u_5 = -42 \quad \text{و} \quad u_2 = 5$$

عندئذٍ قيمة r هي:

a	2	b	4	c	6	d	8

اطراد متتالية صريحة	
حالة وجود a^n أو $n!$	معيار النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ثم نقارن مع الواحد شرط التطبيق: $u_n > 0$

<table>
<tr><td></td><td>حالة خاصة:
المتتالية التي تحوي $(-1)^n$ لا يصح تطبيق معيار النسبة عليها وهي مباشرة غير مطردة (متناوبة في الاطراد)</td></tr>
<tr><td>باقي الحالات</td><td>معيار الاشتقاق:
1- نعرف تابعاً f على المجال المعطى
2- نشتق التابع
3- نقارن مع الصفر</td></tr>
<tr><td colspan="2">محدودية متتالية صريحة</td></tr>
<tr><td colspan="2">1- نعرف تابعاً f على المجال المعطى
2- ندرس تغيرات التابع
3- نستنتج من جدول التغيرات المطلوب (من حقل f)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hero’s ideas</td></tr>
<tr><td>ملاحظة (1)</td><td>إذا كانت المتتالية متزايدة ونهايتها $+\infty$ فهي محدودة من الأدنى بحدها الأول وغير محدودة من الأعلى</td></tr>
<tr><td>ملاحظة (2)</td><td>إذا كانت المتتالية متناقصة ونهايتها $-\infty$ فهي محدودة من الأعلى بحدها الأول وغير محدودة من الأدنى</td></tr>
<tr><td>الملاحظة (3)</td><td>يوجد بعض المتتاليات التي يمكن الحكم على محدوديتها مباشرة مثل:
$\sin(n)$
$\cos(n)$
$(-1)^n$
$\frac{n}{n+1}$
$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">تقارب المتتالية الصريحة وحساب نهاياتها</td></tr>
<tr><td>نحسب النهاية بشكل مباشر بالاستفادة من حالات عدم التعيين الموجودة سابقاً</td><td>1- تكون المتتالية متقاربة إذا كانت نهايتها عدد ℓ ونقول أنها متقاربة من ℓ
2- تكون المتتالية متباعدة إذا كانت نهايتها لا نهائية (جوابها ∞) ونقول أنها متباعدة</td></tr>
<tr><td colspan="2">$n! \geq a^n \geq n \geq \ln(n)$
"حكم القوي عالضعيف" تذكرتوها مو؟</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hero’s idea</td></tr>
<tr><td colspan="2">يمكن تطبيق ما تعلمناه حول مفهوم النهاية بلغة المجالات في بحث النهايات على المتتاليات الصريحة</td></tr>
<tr><td colspan="2">المتتاليات المعرفة بالتدريج</td></tr>
<tr><td colspan="2">اطرادها</td></tr>
<tr><td colspan="2">غالباً ما يكون من السهل دراسة اطرادها من حساب بعض الحدود الأولى.</td></tr>
</table>

المتتالية $u_{n+1} = u_n^2 - au_n + b$ المزودة بمتراجحة مساعدة $m \le u_n \le M$ يمكن دراسة اطرادها من خلال معيار الفرق $u_{n+1} - u_n$ ثم التحليل المباشر والاستفادة من المتراجحة لتحديد إشارات الأقواس.. مثال: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق: $u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 6$ $u_0 = \frac{5}{2}$ المحققة للمتراجحة $2 \le u_n \le 3$ عندئذ المتتالية u_n: أ- ثابتة ب- غير مطردة ت- متزايدة ث- متناقصة
محدوديتها
من خلال إثبات متراجحة مطلوبة بالتدريج
بعض المنسيات:

شرط تزايد متتالية	$u_{n+1} \ge u_n$
شرط تناقص متتالية	$u_{n+1} \le u_n$
شرط ثبات متتالية	$u_{n+1} = u_n$
تقاربها	
مبرهنات التقارب:	
كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة	كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة
نهايتها	
حل المعادلة $f(x) = x$ ثم نقبل ونرفض حسب اطراد المتتالية	

1- المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية وفق:

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2}\ ; u_0 = 1$$

بفرض $E(n): 0 < u_n < 2$ إذا علمت أن $E(n_0)$ محققة وبفرض $E(n)$ صحيحة من أجل عدد معين n_0 فإن:

a	$E(n)$ صحيحة من أجل بعض قيم n	b	$E(n+1)$ غير صحيحة
c	$E(n)$ صحيحة من أجل n	d	$E(n+1)$ صحيحة فقط

2- نعرف المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ بالشكل $v_n = u_n^2 - 4$, فإن المتتالية v_n هندسية أساسها:

a	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{1}{2}$	c	1	d	2

3- الحد الأول للمتتالية v_n يساوي:

a	-3	b	-2	c	4	d	21

4- عبارة v_n بدلالة n هي:

a	$-2\left(\frac{1}{4}\right)^n$	b	$4(1)^n$	c	$-3\left(\frac{1}{2}\right)^n$	d	$21(2)^n$

5- عبارة u_n بدلالة n هي:

a	$\sqrt{4-2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$	b	0	c	$\sqrt{4-3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$	d	$\sqrt{4+21(2)^n}$

لتكن المتتاليتان u_n و v_n المعرفتان وفق:

$$v_{n+1} = 3av_n + (1-3a)u_n \,;\, v_0 = 3$$

$$u_{n+1} = 3au_n + (1-3a)v_n \,;\, u_0 = -1$$

حيث أن a عدد حقيقي.

6- تأمل المتتالية $w_n = v_n - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$, إن قيمة w_0 تساوي:

a	4	b	2	c	3	d	0

7- المتتالية w_n:

a	هندسية أساسها $2a-1$	b	هندسية أساسها $1-6a$	c	هندسية أساسها $6a-2$	d	هندسية أساسها $3a-1$

8- w_n بدلالة n و a تعطى بالشكل:

a	$4(1-6a)^n$	b	$2(2a-1)^n$	c	$3(1-3a)^n$	d	$2(3a-1)^n$

9- بفرض u_n متتالية معرفة بالتدريج وفق:

$$u_{n+1} = 2u_n - 4 \,;\, u_0 = 1$$

ونعرف المتتالية $x_n = u_n - 4$ فإن المتتالية x_n:

a	حسابية أساسها 2.	b	هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.	c	هندسية أساسها 2.	d	حسابية أساسها $\frac{1}{2}$.

10- الحد العام لـ x_n يعطى بالشكل:

a	$x_n = -3\,.\,2^n$	b	$x_n = -3\,.\,2^{n+1}$	c	$x_n = -2^n$	d	$x_n = 2^n$

11- الحد العام لـ u_n يعطى بالشكل:

a	$u_n = 2 - 3.2^n$	b	$u_n = 4 + 3.2^n$	c	$u_n = 4 - 3.2^{n+1}$	d	$u_n = 4 + 2^n$

12- بفرض u_n متتالية معرفة وفق:

$$u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n \,;\, u_0 = 2\,,\, u_1 = 5$$

نعرف المتتالية $v_n = u_{n+1} - 4u_n$ فإن v_n:

a	هندسية أساسها 3	b	هندسية أساسها 5	c	هندسية أساسها $\sqrt{3}$	d	ليست هندسية

13- نعرف المتتالية $y_n = u_{n+1} - 3u_n$ فإن y_n:

a	هندسية أساسها 4	b	هندسية أساسها 2	c	هندسية أساسها $\sqrt{2}$	d	ليست هندسية

14- الحد العام للمتتالية u_n يساوي:

a	$4^n + 3^{n+1}$	b	$-4^n + 3^{n+1}$	c	$-4^n - 3^{n+1}$	d	$4^n - 3^{n+1}$

15- قيمة المجموع $S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 1024 + 2000 + 1024 + 512 + \cdots + 4 + 2 + 1$ تساوي:

a	6094	b	3047	c	2048	d	1024

16- بفرض $(y_n)_{n\geq 0}$ ، $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad , x_0 = 1 , y_0 = 3$$

و لنضع $t_n = x_n y_n$ من أجل كل $n \geq 0$ عندئذٍ المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$

a	متزايدة	b	متناقصة	c	ثابتة	d	غيرمطردة

17- بفرض $(y_n)_{n\geq 0}$ ، $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad , x_0 = 1 , y_0 = 3$$

فإذا علمت أن $x_n > y_n > 0$ مهما تكن n فالمتتالية

a	(x_n) متزايدة (y_n) متناقصة	b	(x_n) متناقصة (y_n) متزايدة	c	$(x_n), (y_n)$ متناقصتان معاً	d	$(x_n), (y_n)$ متزايدتان معاً

18- الحد العام للمتتالية المعرفة بالتدريج وفق $u_0 = 7$ ، $u_{n+1} = 10u_n - 18$ هو :

a	$u_n = 10^n + 2$	b	$u_n = 5 \times 10^n - 2$	c	$u_n = 5 \times 10^{n-2}$	d	$u_n = 5 \times 10^n + 2$

19- الحد العام للمتتالية المعرفة بالتدريج وفق : $u_{n+1} = 3u_n - 4 , u_0 = 0$

a	$u_n = 2(1 - 3^n)$	b	$u_n = 2 + 2 \times 3^n$	c	$u_n = -3^n$	d	$u_n = -3^n + 2$

20- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتدريج وفق $u_{n+1} = 2u_n + 3 , u_0 = 1$ فإن قيمة α التي تجعل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق

$v_n = u_n + \alpha$ هي :

a	3	b	-3	c	2	d	$\frac{3}{2}$

21- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتدريج وفق $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 1 , u_0 = 1$ فإن قيمة α التي تجعل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق

$v_n = u_n - \alpha$ هي :

a	$\frac{9}{4}$	b	$-\frac{9}{4}$	c	$\frac{4}{9}$	d	$-\frac{4}{9}$

22- بفرض $(u_n)_{n\geq0}$ المتتالية المعرفة وفق $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{nu_n+4}{n+1}$ و لنضع $v_n = nu_n$ عندئذٍ المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$

a	هندسية أساسها 4	b	حسابية أساسها 4	c	هندسية أساسها 2	d	حسابية أساسها 2

23- بفرض $(y_n)_{n\geq0}$, $(x_n)_{n\geq0}$ وفق :

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(y_n + 2x_n) \quad , x_0 = 1$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n + 5y_n) \quad , y_0 = 2$$

عندئذ المتتالية المعرفة بالشكل $w_n = x_n + 2y_n$

a	متزايدة تماماً	b	متناقصة تماماً	c	ثابتة	d	غير مطردة

24- بفرض $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة بالشكل $u_{n+1} = (\alpha - 2)u_n + 5$ فإن قيمة α التي تجعلها حسابية أساسها غير معدوم

a	3	b	2	c	0	d	1

25- بفرض $u_{n+1} = \frac{3}{2}au_n + \frac{a+1}{3}$ و $u_0 = 2$ فإن قيمة a التي تجعل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ ثابتة

a	$\frac{1}{2}$	b	2	c	$\frac{2}{3}$	d	1

26- كن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $\left(u_0 = 1 \quad , \quad u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+1}\right)$. من أجل كل $n \in N$ نضع $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ عندئذٍ المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$:

a	هندسية أساسها $\frac{1}{2}$	b	هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	c	حسابية أساسها $\frac{1}{3}$	d	حسابية أساسها $\frac{1}{2}$

27- $(u_n)_{n\geq0}$ و $(t_n)_{n\geq0}$ متتاليتان معرفتان وفق:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 3} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = 3u_n + 5t_n} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \boldsymbol{t_0 = 2} \\ \boldsymbol{t_{n+1} = u_n + 7t_n} \end{cases}$$

عندئذٍ المتتالية $(u_n + 5t_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها:

a	4	b	8	c	16	d	32

28- متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{3}{6}u_n + 3 \quad , \quad u_0 = 6$$

a	متزايدة تماماً	b	متناقصة تماماً	c	ثابتة	d	ليست مطردة

29- $(u_n)_{n\geq0}$ و $(t_n)_{n\geq0}$ متتاليتان معرفتان وفق:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 1} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = \frac{2u_n + t_n}{3}} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \boldsymbol{t_0 = 4} \\ \boldsymbol{t_{n+1} = \frac{u_n + 2t_n}{3}} \end{cases}$$

عندئذٍ المتتالية $(t_n - u_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها:

A	$\frac{1}{3}$	B	$-\frac{1}{3}$	C	3	D	1

30- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالتدريج وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \end{cases}$$

عندئذٍ المتتالية $v_n = u_{n+1} - 2u_n$:

A	هندسية أساسها 3	B	هندسية أساسها 2	C	حسابية أساسها 3	D	حسابية أساسها 2

31- بفرض $\theta \in]\pi/2 , \pi]$ و لنعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ عندئذٍ u_1 يساوي :

a	$2\cos\theta$	b	$-2\cos\theta$	c	$2\sin\theta$	d	$-2\sin\theta$

32- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$ و $u_0 = 1 , u_1 = 3$ و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ عندئذٍ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$

a	هندسية و $v_n = 2(3^n)$	b	هندسية و $v_n = 2(1^n)$	c	هندسية و $v_n = (1)^n$	d	حسابية و $v_n = 1+n$

33- المتتالية $u_n = \ln((n+1)^{n+1})$. أي من القضايا الآتية صحيحة:

a	محدودة من الأعلى	b	محدودة من الأدنى	c	محدودة	d	غير محدودة

<table>
<tr><th colspan="2">المجاميع</th></tr>
<tr><th>البسيطة</th><th>المعقدة</th></tr>
<tr><td>
المجموع الحسابي:
$S = \frac{a+\ell}{2}(n)$
المجموع الحسابي مع قفزات:
$\text{عدد الحدود الجديد} = \frac{\text{أول متغير} - \text{آخر متغير}}{\text{طول القفزة}} + 1$
$r' = \text{طول القفزة} \times r$
ونعود للقانون السابق.
المجموع الهندسي:
$S = a\frac{1-q^n}{1-q}$
المجموع الهندسي مع قفزات:
$\text{عدد الحدود الجديد} = \frac{\text{أول متغير} - \text{آخر متغير}}{\text{طول القفزة}} + 1$
$q' = q^{\text{طول القفزة}}$
ونعود للقانون السابق.
</td><td>
$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Hero's idea
$(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$
إذا كان:
$S_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$
فإن:
$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$
</td></tr>
<tr><th colspan="2">اطرادها</th></tr>
<tr><td>معيار الفرق</td><td>$u_{n+1} - u_n$
ثم نقارن مع الصفر</td></tr>
</table>

Hero's idea	
انتبه! في حال كان المجموع حده الأول يحوي n فإن تشكيل الفرق يحتاج إلى تفصيل	
محدوديتها	
الحالة (1)	مجموع متتالية حسابية محدود من الأدنى بـ S_0 وغير محدود من الأعلى
الحالة (2)	مجموع متتالية هندسية: 1- حالة $\|q\| > 1$ غير محدودة 2- حالة $0 < q < 1$ محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{a}{1-a}$ ومن الأدنى بـ S_0 3- حالة $-1 < q < 0$ محدودة من الأعلى بـ S_0 ومن الأدنى بـ $\frac{a}{1-a}$ 4- حالة $q = 1$ متتالية ثابتة مجموعها يساوي $n.u_0$ غير محدودة من الأعلى ومحدودة من الأدنى بـ u_0
الحالة (3)	- شكلها: غالباً يكون $u_n = \sum\left(\frac{n}{a^n}\right)$ or $\sum\left(\frac{1}{n!}\right)$ - نستفيد من إحدى المتراجحات المساعدة الآتية: $n \leq 2^n \quad , \quad n! \geq 2^{n-1}$ - نجد أن $S_n \leq q^1 + q^2 + \cdots + q^n$ ثم نعود لمحدودية الهندسية.
الحالة (4)	المجموع المباشر: أي مجموع حدوده موجبة في كوكب الأرض يمكن حصره بين أصغرهم مضروباً بعدد الحدود وأكبرهم مضروباً بعدد الحدود مثل: $3\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 3(1)$
الحالة (5)	التشطيب: 1- المتتالية كسرية مقامها جداء قوسين من الدرجة الأولى. أ- نفرق الكسر إلى كسور جزئية كما تعلمنا في التكامل ب- نشكل المجموع ونقوم بالتشطيب بعد كتابة حدود المجموع بشكل عمودي. 2- صيغتين متكافئتين إحداهما تحوي طرحاً أ- نشكل المجموع باستخدام الصيغة التي تحوي طرح ثم نحصل على تشطيب.

1- قيمة المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ هي :

a	$\frac{n(n+1)}{4}$	b	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	c	$\frac{n(n+1)}{2}$	d	n^2

2- قيمة النهاية $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2+1}$

a	0	b	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{2}$	d	1

3- قيمة المجموع $2+4+6+\cdots+2n$ هي :

a	$\frac{n(n+1)}{2}$	b	n^2+n	c	n^2	d	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

4- قيمة المجموع $1+2+3+\cdots+100$

a	550	b	5050	c	5005	d	5000

5- قيمة المجموع $2+3+4+\cdots+15$

a	119	b	120	c	121	d	111

6- قيمة المجموع $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ هي :

a	$\frac{n(n+1)}{4}$	b	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	c	$\frac{n(n+1)}{2}$	d	n^2

7- قيمة النهاية $\lim_{n\to+\infty} \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{2n^3+1}$

a	$+\infty$	b	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{2}$	d	$\frac{1}{8}$

8- قيمة المجموع $1+8+27+..+125$

a	14400	b	14040	c	1440	d	10044

9- إذا علمت أن $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} = (1\times2)+(2\times3)+(3\times4)+\cdots+n(n+1)$

فإن قيمة المجموع $(1\times2)+(2\times3)+(3\times4)+\cdots+(10\times11)$

a	572	b	440	c	540	d	404

10- واحدة من المتتاليات الآتية متناقصة تماماً :

a	$u_n = \frac{4n+1}{n+2}$	b	$u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n$	c	$u_{n+1} = 2u_n$ $u_0 = 2$	d	$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ $u_0 = -1$

11- بفرض $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية فيها $u_{11} = 3k$, $u_2 = 6$ فإن قيمة k التي تجعل :

$u_2+u_3+u_4+\cdots+u_{11} = 255$

a	36	b	39	c	13	d	26

12- قيمة المجموع $S = -3-\frac{3}{4}-\frac{3}{16}-\frac{3}{64}-\cdots-\frac{3}{4^n}$

a	$-\frac{1}{2^{2n}}-4$	b	$\frac{1}{2^n}+4$	c	$\frac{1}{2^{2n}}+4$	d	$\frac{1}{2^{2n}}-4$

13- قيمة المجموع $S = 1-\frac{1}{9}-\frac{1}{9^2}-\frac{1}{9^3}-\cdots-\frac{1}{9^n}$

a	$S = \frac{7}{8}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n$	b	$S = \frac{7}{8}+\frac{1}{8.9^n}$	c	$S = \frac{7}{8}+\left(\frac{1}{9}\right)^n$	d	$S = -\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n$

14- قيمة المجموع $S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}$

A	$3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$	b	$u_n\frac{1}{3}(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$	c	$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$	d	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

15- العدد 4^n+2 مضاعف للعدد :

a	3	b	4	c	5	d	7

16- إحدى الصيغ الآتية تعطي مُضاعفاً للعدد 7 مهما يكن العدد الطبيعي n

a	$3^{2n}-2^n$	b	3^n-2^n	c	7^n-2^n	d	9^n-2^{2n}

17- العدد $5^{22}-2^{55}$ مضاعف للعدد

a	3	b	4	c	5	d	7

18- العدد $2\times 5^{33}-2^{23}$

a	فردي و مضاعف للعدد 11	b	زوجي و مضاعف للعدد 11	c	مضاعف للعدد 120	d	مضاعف للعدد 7

19- قيمة المجموع $S=1-2+3-4+5-\cdots+99-100$

a	-50	b	50	c	52	d	-52

20- نرمز بالرمز E(x) للجزء الصحيح للعدد x عندئذٍ:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{E(x)+E(2x)+E(3x)+\cdots+E(nx)}{n^2}$$

a	1	b	0	c	x	d	$+\infty$

21- إن أصغر عدد طبيعي غير معدوم يحقق المتراجحة $3^n\geq\frac{1}{3}(2^{n+1})+\frac{5}{3}(n+1)^2$

a	5	b	4	c	3	d	6

22- عند إثبات صحة متراجحة برنولي بالتدريج $(1+x)^n\geq 1+nx$ من أجل $x>-1$ نجد أن

$(1+x)(1+nx)=1+(n+1)x+nx^2$ العلاقة الصحيحة للوصول الى المطلوب هي:

a	$(1+x)^{n+1}$ $\geq 1+(n+1)x$	b	$(1+x)^n$ $\geq 1+(n+1)x$	c	$(1+nx)$ $\geq 1+(n+1)x$	d	$(1+x)^{n+1}$ $\leq 1+nx$

23- نعرّف القضية $E(n)$ التي تدّعي أن العدد 9 يقسِمُ العدد 10^n+1 . فإذا افترضنا أن القضية صحيحة من أجل عددٍ طبيعي مثبت n عندئذٍ

a	$E(n+1)$ غير صحيحة	b	$E(n+1)$صحيحة	c	$E(n)$ صحيحة أياً كان $n\in N$	d	$E(n)$صحيحة من أجل القيم الفردية لـ n

24- نرمز إلى القضية $n+1>n$ بالرمز $E(n)$ أياً كانت $n\in N$ إذا كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد n كانت:

a	$E(n+1)$ غير صحيحة	b	$E(n+1)$صحيحة	c	$E(n)$ صحيحة أياً كان $n\in N$	d	$E(n)$صحيحة من أجل القيم الفردية لـ n

25- في المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ لدينا $u_{30}=20$, $u_{15}=-10$ إن قيمة المجموع:

$S=u_8+u_9+u_{10}+u_{20}+u_{21}+u_{22}$ يساوي:

a	-60	b	-40	c	-30	d	60

26- ليكن f التابع الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي P النقطة $M'(9x+10y, 3x+5y)$ أي, $f(M)=M'$. لتكن S_0 النقطة التي إحداثياتها $(0,1)$ عندئذ: $f(S_0)$ هي:

a	$(9,3)$	b	$(10,5)$	c	$(5,10)$	d	$(19,8)$

27- قيمة المجموع $S=1+10+10^2+\cdots+10^5$ هي:

a	999999	b	11111	c	11110	d	111111

28- لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة $u_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$ عندئذٍ

a	$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n+1}$ و المتتالية متزايدة تماماً	b	$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2n}$ و المتتالية متناقصة تماماً	c	$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2n(2n+1)}$ و المتتالية متناقصة تماماً	d	$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n(2n+1)}$ و المتتالية متزايدة تماماً

29- بفرض $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $v_{n+1}=4v_n+3$ و $v_0=14$ و لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية <u>هندسية</u> أساسها $q=4$ و تحقق أن $u_n-v_n=1$ ليكن $S_n=u_0^2+u_1^2+u_2^2+\cdots.+u_n^2$ عندئذٍ S_n بدلالة n

a	$4^{n+1}-1$	b	$15(16^{n+1}-1)$	c	$15(16^{2n+1}-1)$	d	$15(4^n-1)$

30- قيمة المجموع: $S=1+3+9+\cdots+243$

A	360	B	362	C	363	D	364

31- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها وحدها الأول $u_0=1$, $q=2$

إذا علمت أن: $u_3+u_4+\cdots+u_n=248$ فإن قيمة n تساوي:

A	5	B	6	C	7	D	8

32- نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ عندئذٍ قيمة المقدار $u_{2n}-u_n$:

a	$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$	b	$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$
c	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$	d	$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$

33- إذا كانت $u_{n+1}=10u_n-18$ و $u_0=7$, عندئذٍ بحساب u_1,u_2,u_3 يمكن ملاحظة أن عدد الأصفار في u_k هو :

a	$k+1$	b	k	c	$k-1$	d	$2k$

34- المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق $u_n=\left(-\frac{1}{n}\right)^n$ هي متتالية:

a	ثابتة	b	متناوبة	c	متناقصة	d	متزايدة

35- المتتالية $(u_n)_{\geq 0}$ المعرفة وفق $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$ و $u_0 = 8$

a	ثابتة	b	متناوبة	c	متناقصة	d	متزايدة

36- إذا كانت a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية عندئذٍ المقدار $(a+b+c)(a-b+c)$ يساوي :

a	$a^2+b^2+c^2$	b	$a^2-b^2+c^2$	c	a^2+b^2+2ac	d	$3b^2$

37- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $\left(u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \,;\, u_1 = 2 \,, u_0 = 1\right)$ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$v_n = u_{n+1} - u_n$:

a	هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	b	هندسية أساسها 3	c	حسابية أساسها $\frac{1}{3}$	d	حسابية أساسها $\frac{4}{3}$

38- قيمة المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \cdots + \frac{19}{2} + 20 + \frac{19}{2} + 9 + \cdots + 1 + \frac{1}{2}$ تساوي:

a	210	b	420	c	820	d	105

39- فرض $u_{n+1} = 2u_n + n - 1$ و $u_0 = 3$ و $t_{n+1} = 2t_n + n - 1$ و $t_0 = 1$ ولنضع $v_n = u_n - t_n$

عندئذٍ v_n بدلالة n

a	2^n	b	2^{n+1}	c	$2n+1$	d	$2n-1$

40- نرمز بالرمز i للوحدة التخيلية التي تحقق أن $i^2 = -1$ عندئذٍ قيمة المجموع :

$s = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \cdots + i^{600}$

a	0	b	1	c	-1	d	i

41- قيمة المجموع $S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \cdots + 40 + \frac{39}{4} + \frac{17}{2} + + \frac{37}{4} + \cdots + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

a	819	b	409.5	c	1638	d	409

42- قيمة المجموع $S = 1 + 8 + 27 + 64 + \cdots + 1000$ هي :

a	3025	b	500500	c	2002	d	1512

المتتاليتان المتجاورتان	
الشرط الأول	واحدة متناقصة وواحدة متزايدة
الشرط الثاني	نهاية الفرق تساوي الصفر

Hero's ideas
المتتاليتان المتجاورتان متقاربتان معاً من نفس العدد (أي لهم نهاية مشتركة)
إذا تم الربط بين المتجاورتين بمتتالية ثابتة أمكن حساب النهاية المشتركة وذلك بملاحظة أن المتتالية الثابتة تساوي حدها الأول

التمثيل البياني لحدود متتالية

ليكن c الخط البياني للتابع f المستمر ونفترض المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

عندئذ يمكن تمثيل حدود المتتالية u_n على محور الفواصل من خلال الخطوات الآتية:

1- إيجاد نقطة التقاطع c و منصف الربع الأول والثالث $y = x$ من خلال حل المعادلة $f(x) = x$ (وهذا يعطي تأويلاً هندسياً لنهاية المتتالية)

2- نرسم المستقيم $y = x$ منصف الربع الأول والثالث ونرسم c موضحين نقطة التقاطع

3- نحدد u_0 على محور الفواصل

4- خطة Smash Hit

....

....

....

....

....

....

تفيد الخطة السابقة في استنتاج معلومات حول اطراد ومحدودية وتقارب ونهاية المتتالية

1- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \quad , u_0 = \frac{3}{2}$$

فإذا علمت أن $1 \leq u_n \leq 2$ مهما يكن $n \geq 0$ عندئذ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

a	متناقصة	b	متزايدة
c	ثابتة	d	غير مطردة

2- نفترض أن $(l_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق : $l_0 = 10$, $l_{n+1} = \sqrt{1 + (l_n - 1)^2}$ و أن $1 \leq l_{n+1} \leq l_n$ عندئذٍ واحدة من القضايا الآتية خاطئة :

a	المتتالية متناقصة	b	المتتالية محدودة من الأدنى
c	المتتالية متقاربة من الصفر	d	المتتالية متقاربة من الواحد

3- بفرض $u_n = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{3}{\pi^3} + \frac{4}{\pi^4} + \cdots + \frac{n}{\pi^n}$ عندئذ أي من الأعداد الآتية لا يمثل حداً راجحاً على $(u_n)_{n\geq 1}$:

a	$M = \frac{2}{\pi - 2}$	b	$M = \frac{2}{\pi}$
c	$M = \pi$	d	$M = \frac{2}{\pi - 3}$

4- نتأمل المتتاليتين :

$$x_{n+1} = x_n + 2 \quad , x_0 = 3$$
$$y_{n+1} = x_n + y_n \quad , y_0 = 0$$

عندئذٍ قيمة المجموع :

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots x_n$$

a	y_{n-1}	b	y_{2n}
c	y_{n+1}	d	y_n

5- بفرض $\mathrm{x_n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ و يفرض $x_n \leq y_n$ عندئذٍ أي من الصيغ الآتية تصلح أن تكون y_n:

a	$\mathrm{y_n} = \frac{3}{n^2}$	b	$y_n = 3 + \frac{3}{n^2}$
c	$y_n = 3$	d	$y_n = \frac{3}{n}$

6- نهاية المتتالية $\mathrm{v_n} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$:

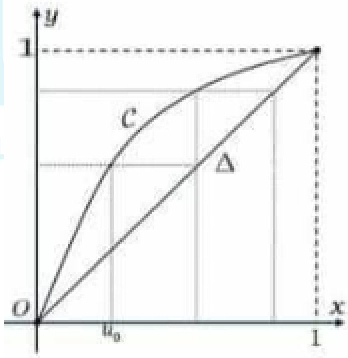
a	0	b	1
c	$+\infty$	d	$-\infty$

7- لتكن $\mathrm{u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ و لنضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ عندئذٍ أبسط عبارة لـ $\mathrm{s_n}$:

a	$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	b	$\sqrt{n-1}$
c	$\sqrt{n+1}$	d	$\sqrt{n}$

- تأمل الشكل المجاور C الخط البياني لتابع f و Δ منصف الربعين الأول و الثالث

ولتكن $(\mathrm{u}_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $0 < u_0 < 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$



8- عدد حلول المعادلة $\mathrm{f(x) = x}$:

a	0	b	1
c	2	d	3

9- جهة اطراد المتتالية $(\mathrm{u_n})$:

a	متزايدة	b	متناقصة
c	ثابتة	d	غير مطردة

10- واحد من القضايا الآتية خاطئة :

a	المتتالية محدودة من الأدنى فقط	b	المتتالية محدودة
c	المتتالية محدودة من الأعلى فقط	d	النهاية المحتملة للمتتالية 1

- بفرض $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

11- أي من القضايا الآتية صحيحة:

a	$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n}$ و المتتالية متزايدة	b	$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1}$ و المتتالية متناقصة
c	$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$ و المتتالية متناقصة	d	$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n}$ و المتتالية متناقصة

12- نضع $x_n = u_{2n} - u_n$ عندئذٍ:

a	$x_n \geq \frac{n+1}{2}$	b	$x_n \geq \frac{n}{2}$
c	$x_n \leq \frac{n}{2}$	d	$x_n \geq \frac{1}{2}$

13- واحدة من المتراجحات الآتية صحيحة:

a	$x_n \geq \frac{n+1}{2}$	b	$x_n \leq \frac{n}{2}$
c	$x_n \geq \frac{n}{2}$	d	$x_n \geq \frac{1}{2}$

14- واحدة من المتراجحات الآتية صحيحة:

a	$u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$	b	$u_{2^n} \geq \frac{1}{2}$
c	$u_{2^n} \leq \frac{n}{2}$	d	$u_{2^n} \geq \frac{n+1}{2}$