الارتباط الخطي لثلاث اشعة:

نقول عن الاشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ إنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان α,β بحيث:

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

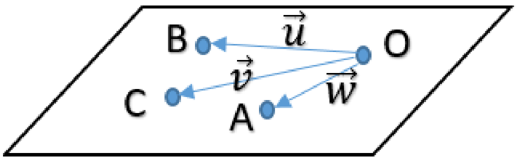
و $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً

معنى الارتباط الخطي لثلاث أشعة: (مطالعة):

أنه يمكن استبدال هذه الاشعة بثلاث أشعة أخرى تشترك في نفس البداية وتقع في مستوٍ واحد. ((لايعني توازي بالضرورة))

أي يوجد نقطة o تجعل الاشعة $\overrightarrow{oc},\overrightarrow{oB},\overrightarrow{oA}$ تقع في مستو واحد حيث

$$\vec{w}=\overrightarrow{oA},\ \vec{u}=\overrightarrow{oB},\vec{v}=\overrightarrow{oC}$$



فوئد الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

1- إثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد.

2- إيجاد معادلة مستوٍ يمر من ثلاث نقاط.

3- إثبات انتماء M الى مستوٍ مار بثلاث نقاط.

انتبه: أي جملة معادلات مكونة من ثلاث معادلات ومجهولين فقط، فإننا نحل معادلتين منهما حلاً مشتركاً، ثم نعوض في الثالثة للتحقق ونميز حالتين:

1) إذا كانت المعادلة الثالثة محققة ← للجملة حل مشترك هو الحل الذي أوجدناه من اول معادلتين.

2) اذا كانت المعادلة الثالثة غير محققة فتكون الجملة مستحيلة الحل.

التمرين (1)

نتأمل في معلم $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط الاتية:

$$A(0,1,-1)\ ,\ B(1,0,0)\ ,C(-1,2,1)\ ,\ D(0,1,2)$$

أثبت انتماء النقاط A,B,C,D الى مستوٍ واحد P

الحل

نشكل ثلاثة أشعة لها نفس البداية:

$$\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-1,1,2)$$

$$\overrightarrow{AD}=(0,0,3)$$

نثبت ان الاشعة السابقة مرتبطة خطياً أي لنثبت أولاً : أن $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين (و هذا واضح لعدم تناسب مركباتهما حيث $\frac{3}{2}\neq\frac{0}{1}$) ثم لنثبت وجود عددين α,β يحققان ان:

$$\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\3\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\2\alpha+3\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}1&=-\alpha &&(1)\\-1&=\alpha &&(2)\\1&=2\alpha+3\beta &&(3)\end{aligned}$$

من 1 نجد أن $\Rightarrow \alpha = -1$

نعوض في 3 :

$$1 = -2 + 3\beta$$

$$3 = 3\beta \Rightarrow \beta = 1$$

نعوض في 2 للتحقق:

$-1 = -1$ محققة

التمرين (2) دورة 2021 الأولى

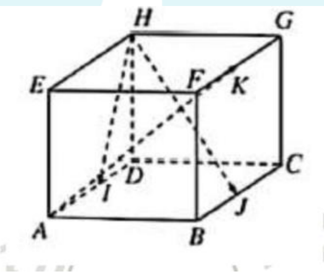
نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ النقاط التالية: $D(6,2,5), C(5,0,5), B(1,-2,1), A(2,0,1)$ ، المطلوب:

1) أثبت أن $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً.

2) عين العددين الحقيقيين α , β بحيث: $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ ، واستنتج أن النقاط A , B , C , D تقع في مستوٍ واحد .

التمرين (3)

في الشكل المجاور نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$ و طول حرفه 2 . و لتكن النقاط



I و J و K منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$ بالترتيب . نختار معلماً متجانساً $(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$. و المطلوب:

1- جد إحداثيات الرؤوس و I,J,K

2- جد مركبات كلٍ من الأشعة $\overrightarrow{HI},\overrightarrow{HJ},\overrightarrow{AK}$

3- أثبت أن المستوي (HIJ) ∗ يوازي المستقيم (AK)

التمرين (4)

نتأمل في معلم متجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

$$A(2,0,1), B(1,-2,1), C(5,5,0),$$
$$D(-3,-5,6), E(3,1,2)$$

أثبت انتماء النقاط A,B,C,D إلى مستوٍ واحد P و تبيّن إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P

التمرين (5)

في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط :

$$A(3,2,1), B(1,2,0), C(3,1,-2)$$

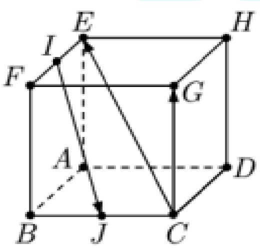
1- أثبت أن النقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة

2- عند أي قيمة للوسيط λ تنتمي النقطة $M(\lambda,1,3)$ إلى المستوي (ABC)

3- ما العلاقة بين x, y لتقع النقاط $A,B,D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد .

التمرين (6)

في الشكل المجاور مكعب، $\boldsymbol{I}$ و $\boldsymbol{J}$ منتصفات $[\boldsymbol{EF}]$ و $[\boldsymbol{BC}]$ على الترتيب:



1- أثبت أن $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG} = 2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE})$

2- أثبت أن المستقيم (IJ) يوازي المستوي (CEG).

مركز الأبعاد المتناسبة

نقول إن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) و (B,β) إذا تحقق أن:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

حيث $\alpha+\beta\neq 0$

ويعمم الكلام السابق لأكثر من نقطتين أي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A.\alpha)$ و (B,β) و (C,γ) إذا تحقق أن:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

وحيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

بل أكثر من ذلك:

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ)و (D,δ) إذا كان الشرط محقق:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

وتسمى العلاقة السابقة:

- **علاقة الوجود (العلاقة الأم)** لأنه عندما يكون $\alpha+\beta=0$ عندئذ لا يوجد م أ م للنقاط (B,β) و (A,α).

- **نستخدم علاقة الوجود لتحديد أو تعيين α و β و γ ...**

1) نصلح شكل العلاقة لجعل الطرف الثاني $\vec{0}$ ونجعل البدايات كلها م أ م.
2) نقارن مع القانون
3) نختبر الشرط $(\alpha+\beta+\cdots\neq 0)$

ملاحظة: م أ م = مركز الأبعاد المتناسبة ولا تكتب بهاد الشكل بالامتحاااان^_^

نميز الحالات الآتية في م أ م:

الحالة الأولى: الانطلاق من علاقة شعاعية:

1) جد العددين α و β ليكون G م أ م للنقاط (A,α) و (B,β) انطلاقاً من العلاقة:

$$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}$$

الحل

$$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$-2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

ونلاحظ أنها من الشكل:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

إذن $\alpha=-2$ و $\beta=1$ حيث $\alpha+\beta\neq 0$

2) عين الاعداد α و β و γ لتكون M م أ م للنقاط المحققة للعلاقة:

$$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

الحل

سنضرب بالعدد 4:

$$4\overrightarrow{AM}=8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$
$$8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$8\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)+3\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right)+4\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$-8\overrightarrow{MA}+8\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$-7\overrightarrow{MA}+8\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

وهذه العلاقة من الشكل:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

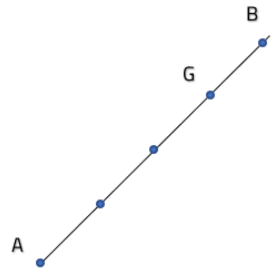
وبالتالي $\alpha=-7$ و $\beta=8$ و $\gamma=3$ حيث

$$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

الحالة الثانية: الانطلاق من شكل:

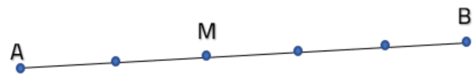
(مسائل 40 درجة):

1) عين α و β ليكون G م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):



$$\frac{AG}{AB}=\frac{3}{4}$$
$$4\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$$
$$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AG}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$\alpha=1\,,\beta=3\qquad;\alpha+\beta\neq 0$$

2) عين α و β ليكون M م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):



لدينا طريقتان في الحل:

الطريقة الأولى:

من الشكل نلاحظ أن M م أ م للنقاط $(A,3)$ و $(B.2)$.

الطريقة الثانية:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{2}{5}$$
$$5\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$$
$$-2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$

$$-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\alpha=-3\,,\beta=-2\,;\alpha+\beta\neq 0$$

3)

$$\frac{MA}{MB}=\frac{1}{3}$$
$$3\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$$
$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$\alpha=3\,,\beta=-1\,;\alpha+\beta\neq 0$$

ملاحظات:

1- G م أ م لنقطتين من تثقيلتين مختلفتين بالإشارة فإن G تقع خارج القطعة وبالعكس

2- خاصة التجانس (هامة جداً)

G م أ م لـ (A,α) و (B,β):

$$\boldsymbol{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

نضرب بـ $k\neq 0$:

$$\boldsymbol{(k\alpha)\overrightarrow{GA}+(k\beta)\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

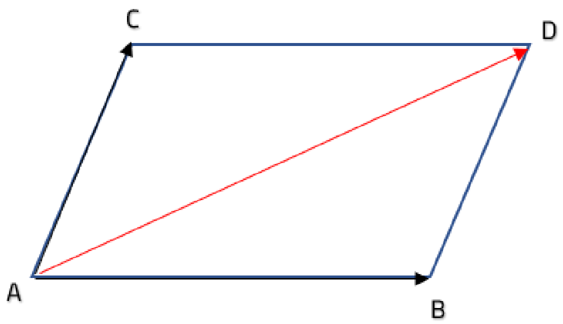
G م أ م لـ $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$.

(مسائل 100 درجة):

تذكرة:

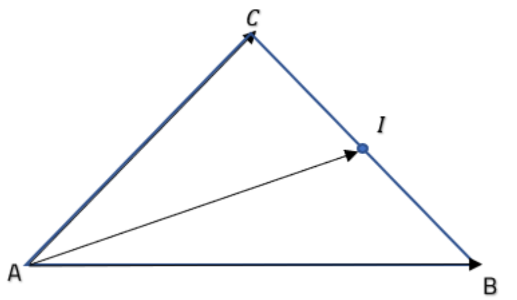
1) علاقة متوازي الأضلاع:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$



2) علاقة المتوسط في المثلث:

$$\vec{AB}+\vec{AC}=2\vec{AI}$$

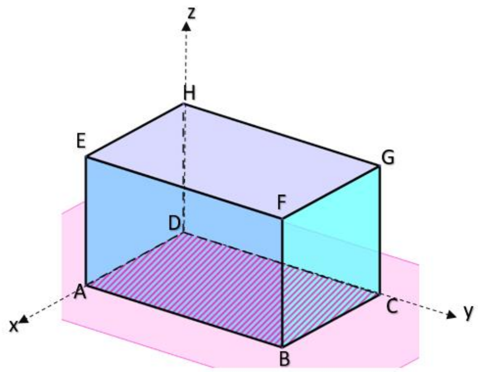


3) علاقة الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

أمثلة:

1) تأمل في الشكل المجاور متوازي مستطيلات $ABCDEFGH$



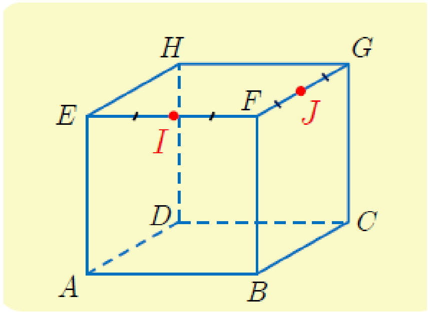
عين α و β و γ ليكون D م أ م للنقاط $(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)$.

الحل

من الشكل نلاحظ أن:

$$\vec{DA}+\vec{DC}=\vec{DB}$$
$$\vec{DA}-\vec{DB}+\vec{DC}=\vec{0}$$
$$\alpha=1\,,\beta=-1\,,\gamma=1\,;\alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

2) تأمل في الشكل المجاور مكعباً



عين α و β و γ ليكون I م أ م للنقاط $(A,\alpha),(F,\beta),(E,\gamma)$.

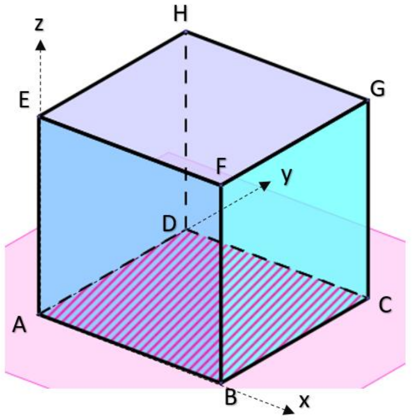
الحل

من علاقة المتوسط نجد:

$$\vec{AF}+\vec{AE}=2\vec{AI}$$
$$\vec{AI}+\vec{IF}+\vec{AI}+\vec{IE}-2\vec{AI}=\vec{0}$$
$$0\vec{IA}+\vec{IF}+\vec{IE}=\vec{0}$$
$$\alpha=0\,,\beta=1\,,\gamma=1\,;\alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

عند اختفاء أحد النقاط المطلوب تثقيلها نكتبها في العلاقة بأمثال صفرية.

3) نتأمل جانباً مكعباً طول حرفه 3



نعرف معلماً متجانساً:

$$\left(A,\frac{1}{3}\vec{AB},\frac{1}{3}\vec{AD},\frac{1}{3}\vec{AE}\right)$$

-1 جد معادلة المستوي (EBD).

$A(0,0,0)$	$E(0,0,3)$
$B(3,0,0)$	$F(3,0,3)$
$C(3,3,0)$	$G(3,3,3)$
$D(0,3,0)$	$H(0,3,3)$

نشكل الشعاعين:

$$\overrightarrow{EB}(3,0,-3)$$
$$\overrightarrow{ED}(0,3,-3)$$
$$\frac{0}{3} \neq \frac{-3}{-3}$$

غير مرتبطين خطياً, نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{EB} = 0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{ED} = 0$$
$$\begin{cases} 3a - 3C = 0 \\ 3B - 3C = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 3a = 3c$$
$$a = c$$

نفرض $c = 1 \Leftarrow a = 1$, نعوض في أحد

المعادلات فنجد:

$$3b - 3 = 0] \Rightarrow b = 1$$
$$\Rightarrow \vec{n}(1,1,1)$$

وتكون معادلة المستوي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$1(x - 0) + 1(y - 0) + 1(z - 3) = 0$$
$$x + y + z - 3 = 0$$

-2 برهن أن النقطة $K(5,2,-4)$ تنتمي للمستوي (EBD).

نعوض إحداثيات النقطة في المعادلة فنجد:

$$5 + 2 - 4 - 3 = 0 \Rightarrow 7 - 7 = 0$$
$$K \in (EBD)$$

-3 عين α و β و γ ليكون K م أ م للنقاط $(E,\alpha),(B,\beta),(D,\gamma)$.

لدينا $K \in (EBD)$ فإن K و E و B و D في مستو واحد فإن الأشعة $\overrightarrow{KE},\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KD}$:

$$\overrightarrow{KE} = a\overrightarrow{KB} + b\overrightarrow{KD}$$
$$\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} -2a - 5b = -5 \\ -2a + b = -2 \\ 4a + 4b = 7 \text{ للتحقق} \end{cases}$$

بطرح 1 و 2 نجد:

$$-6b = -3 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

نعوض في 2:

$$-2a + \frac{1}{2} = -2$$
$$-2a = -\frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

نعوض في 3 للتحقق:

$$5 + 2 = 7 \Rightarrow \text{محققة}$$
$$\overrightarrow{KE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KD}$$
$$\frac{5}{4}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KE} = \vec{0}$$

K م أ م للنقاط:

$$\left(B,\frac{5}{4}\right),\left(D,\frac{1}{2}\right),(E,-1)$$

حسب التجانس مضرب بـ 4:

$$(B,5),(D,2),E(-4)$$

حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

انشاء مركز الأبعاد المتناسبة:

أي تحديد موضع م أ م.

- G م أ م لنقطتين لهما نفس الثقل عندئذ G في منتصف القطعة المستقيمة.
- G م أ م لثلاثة نقاط لهما نفس الثقل عندئذ G مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات).

مثال1: عين G م أ م للنقاط $(A,2)$ $(B,2)(C,2)$.

الحل

G هي مركز ثقل المثلث ABC.

ارسم معنا :

- G م أ م لنقطتين أحدهما تثقيلتها معدومة عندئذ G تنطبق على الأخرى.

مثال2: عين G م أ م للنقاط $(A,0)$ $(B,3)$.

الحل

G تنطبق على B.

- G م أ م للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ عندها نستخدم علاقة الانشاء وهي:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

مثال3: عين G م أ م للنقطتين $(A,1),(B,3)$:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

ارسم معنا :

أو بطريقة أخرى:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$$

ارسم معنا :

مثال4: عين M م أ م للنقاط $(A,5),(B,-2)$:

$$\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

ارسم معنا :

مثال5: عين M م أ م للنقاط $(A,10),(B,10)$:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{10}{20}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

الرسم:

نلاحظ أن النتيجة تطابق نتيجة الحالة الأولى.

الخاصة التجميعية:

إذا كان G م أ م للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$:

- نفرض I م أ م لـ A و B ويكون:
  1- موضع I: حسب ما تعلمنا سابقاً
  2- ثقل I: هو $\alpha+\beta$
- حسب الخاصة التجميعية G م أ م لـ $(I,\alpha+\beta)$ و (C,γ).

مثال1: جد G م أ م للنقاط $(A,1),(B,2),(C,1),(D,3)$:

ارسم معنا :

نفرض I م أ م للنقاط $(A,1),(C,1)$ عندئذ I منتصف $[AC]$ وأن $(I,2)$.

نفرض J م أ م للنقاط $(B,2),(D,3)$ عندئذ:

$$\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BD}$$

وأن $(J,5)$، وبالتالي حسب الخاصة التجميعية فإن G م أ م لـ $(I,2),(J,5)$:

$$\overrightarrow{IG}=\frac{5}{7}\overrightarrow{IJ}$$

مثال2: عين G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$.

ارسم معنا :

الحل

المطلوب هنا هو إيجاد مركز الابعاد المتناسبة للنقاط:

$(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$

- نفرض I م أ م للنقطتان A و B عندها I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ وبالتالي $(I,2)$.
- نفرض أيضاً J م أ م للنقاط $(C,1),(D,1)$ وعندها J منتصف القطعة المستقيمة $[CD]$ وبالتالي $(J,2)$، فحسب الخاصة التجميعية إن G م أ م للنقاط $(I,2),(J,2)$.

وبطريقة أخرى:

k م أ م لـ $(A,1),(B,1),(C,1)$ وبالتالي k مركز ثقل المثلث ABC.

حسب الخاصة التجميعية فإن G م أ م $(K,3),(D,1)$:

$$\overrightarrow{KG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{KD}$$

ملاحظة هامة:

وجدنا أنه إذا كان G م أ م للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

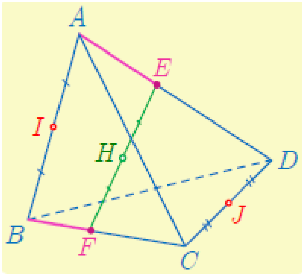
حيث $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ عدد حقيقي أي يمكننا اعتباره k:

$$\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AB}$$

وهذا يعني أن A و B G على استقامة واحدة.

وهذا يعني انه يمكن اثبات أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة بإثبات أن إحداهما م أ م للنقطتين الباقيتين.

التمرين (1)



I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ ولدينا النقطتان E و F تحققان:

$$\overrightarrow{AE} = a.\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BF} = a.\overrightarrow{BC}$$

و H منتصف $[EF]$ والمطلوب إثبات أن H و I و J على استقامة واحدة.

الحل

- لدينا $\overrightarrow{AE} = a.\overrightarrow{AD}$ إذن E م أ م للنقاط: $(D,a),(A,1-a)$ وأن $(E,1)$.
- لدينا $\overrightarrow{BF} = a.\overrightarrow{BC}$ إذن F م أ م للنقاط: $(C,a),(B,1-a)$ وأن $(F,1)$.

وبما أن H منتصف $[EF]$ فهي م أ م للنقاط $(E,1),(F,1)$ وحسب الخاصة التجميعية H م أ م للنقاط:

$(A,1-a),(B,1-a),(C,a),(D,a)$

- بما أن I منتصف $[AB]$ إذن I م أ م للنقاط: $(A,1-a),(B,1-a)$ وأن $(I,2-2a)$.
- بما أن J منتصف $[CD]$ إذن J م أ م للنقاط: $(C,a),(D,a)$ وأن $(J,2a)$.

فحسب الخاصة التجميعية إن H م أ م للنقاط $(I,2-2a),(J,2a)$ وبالتالي H و I و J على استقامة واحدة.

التمرين (2)

$ABCD$ رباعي وجوه ويوجد:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

أثبت أن G م أ م للنقاط $(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$ يقع على $[EF]$ ثم عين G.

الحل

- F م أ م للنقاط $(A,1),(D,2)$ وأن $(F,3)$.
- E م أ م للنقاط $(B,3),(C,1)$ وأن $(E,4)$.

فحسب الخاصة التجميعية G م أ م $(E,4),(F,3)$ وبالتالي إن G و E و F على استقامة واحدة:

$$\overrightarrow{FG} = \frac{4}{7}\overrightarrow{FE}$$

إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة :

إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط : $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

فإن إحداثيات مركز الثقل :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$
$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$
$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

مثال: في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط : $A(1,1,-2),B(2,3,-2),C(4,0,-1)$ و ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط : $(A,2),(B,2),(C,-1)$

1- جد إحداثيات G

2- اكتب معادلة الكرة التي مركزها G و نصف قطرها $\sqrt{2}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

■ خاصة الإختزال:

إذا كان G م أ م للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ فإن:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

وشرط تطبيق الإختزال: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

- أما إذا كانت $\alpha+\beta+\gamma=0$ عندئذ يمكن إخفاء M بإصلاح للعلاقة الشعاعية:

مثال$_1$: اختزل العلاقات الآتية:

1) $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

$$3+1-2\neq 0$$

حسب علاقة الاختزال:

$$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=(3+1-2)\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MG}$$

حيث G م أ م للنقاط $(A,3),(B,1),(C,-2)$.

2) $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$$2-1-1=0$$

نخفي M.

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$$
$$=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}$$
$$=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}$$
$$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{IA}$$

حيث I منتصف $[BC]$.

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$$

نضرب ب -1:

$$-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AI}$$
$$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{IA}$$

حيث I منتصف $[BC]$، الرسم للتوضيح:

3) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

$$1+1+1=3\neq 0$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

G م أ م للنقاط:

$$(A,1),(B,1),(C,1)$$

فإن G مركز ثقل المثلث ABC، الرسم للتوضيح:

تذكرة: خاصة التجانس:

إذا كان G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(A,\alpha),(B,\beta)$$

عندها:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

نضرب بـ $k\neq 0$:

$$k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

G مركز أبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,k\alpha)\,,(B,k\beta)$$

تمرينات ومسائل:

$\frac{21}{43}$: نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ و E و F تحققان:

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

أثبت أن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$$

يقع على $[EF]$ ثم عين G.

الحل

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BE}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$$

$$\gamma = 1$$
$$\beta + 1 = 4 \Rightarrow \beta = 3$$

E مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(B,3)\,,(C,1),(E,4)$$
$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AF} = \frac{\delta}{\alpha+\delta}\overrightarrow{AD}$$
$$\delta = 2\,,\alpha = 1$$
$$(F,3)$$

وبالتالي فإن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(E,4),(F,3)$$

حسب الخاصة التجميعية فإن G و E و F تقع على استقامة واحدة.

$$\overrightarrow{EG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$$

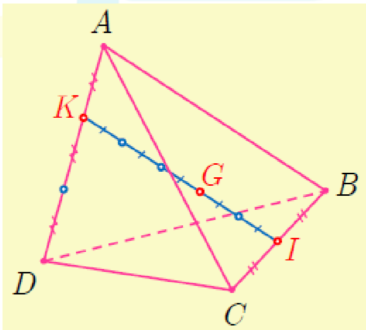
وظائف:

$\frac{1}{94}$ ، $\frac{2}{94}$ ، $\frac{7}{96}$ ، $\frac{1}{35}$ ، $\frac{2}{35}$ ، $\frac{10}{31}$ ، $\frac{25}{44}$

مع تدرب صفحة 81 و82.

مسائل عامة في مركز الأبعاد المتناسبة

$\frac{1}{31}$: بالإستفادة من المعلومات في الشكل عين الأعداد a و b و c و d ليتحقق ما يلي:



1) K م أ م للنقطتين $(D,d),(A,a)$.

2) I م أ م للنقطتين $(C,c)\,,(B,b)$.

3) G م أ م للنقاط:

$$(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)$$

الحل

1) من الشكل نلاحظ أن K م أ م للنقاط $(A,2),(D,1)$ و $(K,3)$.

2) من الشكل نلاحظ أن I م أ م للنقاط $(B,1)\,,(C,1)$ و $(I,2)$.

3) من الشكل نلاحظ أن G م أ م للنقاط $(K,3),(I,2)$:

لما كان K م أ م للنقطتين $(A,2),(D,1)$ فحسب التجانس نضرب بـ $\frac{2}{3}$:

$$\left(A,\frac{4}{3}\right)\,,\left(D,\frac{2}{3}\right)\,,(K,2)$$

لما كان I م أ م للنقطتين $(B,1),(C,1)$ فحسب خاصة التجانس نضرب بـ $\frac{3}{2}$:

$$\left(B,\frac{3}{2}\right)\,,\left(C,\frac{3}{2}\right)\,,(I,3)$$

حسب الخاصة التجميعية إن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$\left(A,\frac{4}{3}\right)\,,\left(B,\frac{3}{2}\right)\,,\left(C,\frac{3}{2}\right)\,,\left(D,\frac{2}{3}\right)$$

إذن:

$$a = \frac{4}{3}\,,b = \frac{3}{2}\,,c = \frac{3}{2}\,,d = \frac{2}{3}$$

$\frac{4}{31}$: ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. و k عدد حقيقي غير معدوم ولا يساوي 1، ولتكن I و J و K و L النقاط المعرفة وفق:

$$\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AJ} = k\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{CK} = k\overrightarrow{CD}\,,\overrightarrow{CL} = k\overrightarrow{CB}$$

1) أثبت أن:

$$\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{LK}$$

واستنتج أن النقاط I و J و K و L تقع في مستوي واحد.

2) ما طبيعة الرباعي $IJKL$؟

الحل

1) لدينا:

- $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$
$= -k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD} = k\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)$
$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{CL} + \overrightarrow{CK}$
$= -k\overrightarrow{CB} + k\overrightarrow{CD} = k\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$
$\Rightarrow \overrightarrow{LK} = k\overrightarrow{BD}$

بما أن $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ بالتالي المستقيمان (IJ) و (LK) متوازيان وهما يقعان في مستوي واحد.

الرسم للتوضيح:

2) بما أن $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ وبالتالي $IJKL$ متوازي أضلاع.

$\frac{10}{41}$: A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة و E و D تحققان:

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}\ ,3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$$

1) أثبت أن A و B و C تقع في مستو واحد.
2) بفرض I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$ أثبت أن A و J و I تقع على استقامة واحدة.

الحل

الرسم:

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE} \Rightarrow \overrightarrow{EC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$$
$$3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

نلاحظ أن A و E و C على استقامة واحدة وأن B و D و A على استقامة واحدة وبالتالي المستقيمان (BD) و (EC) متقاطعان في A وبالتالي A و B و C و D و E في مستو واحد.

- حسب المتوسط:

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}\right)$$
$$2\left(\overrightarrow{AI}\right) = \frac{2}{3}\left(2\left(\overrightarrow{AJ}\right)\right)$$
$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

فالنقاط J, I, A على استقامة واحدة.

$\frac{25}{44}$: $ABCDEFGH$ مكعب I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ و M م أ م لـ $(B,1),(A,1),(G,1)$ والمطلوب:

1) أثبت أن M تنتمي إلى $[IJ]$ وعين موضعها.
2) أثبت أن M تنتمي إلى $[KL]$ وعين موضعها.
3) استنتج أن I و J و K و L تقع في مستو واحد، وماهي طبيعة $ILJK$؟

الحل

- I منتصف $[AE]$ وبالتالي I م أ م للنقاط $(A,1),(E,1)$ و $(I,2)$.
- J منتصف $[BG]$ وبالتالي J م أ م للنقاط $(B,1),(G,1)$ وأن $(J,2)$.

حسب الخاصة التجميعية M م أ م للنقاط $(I,2),(J,2)$ إذن M تقع في منتصف $[IJ]$.

- بشكل مماثل M تقع في منتصف $[KL]$.

إذن المستقيمان (KL) و (IJ) متقاطعان في M

وبالتالي I و J و K و L تقع في مستو واحد.

بما أن قطرا الرباعي $ILJK$ متناصفان فإن الرباعي هو متوازي أضلاع.

$\frac{2}{94}$: $ABCD$ رباعي وجوه, أثبت أن النقاط M و B و C و D تقع في مستو واحد ثم وضع النقطة M:

1) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

M مركز أبعاد متناسبة للنقاط وبالتالي النقاط تقع في مستو واحد, وM مركز ثقل المثلث BDC.

2) $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

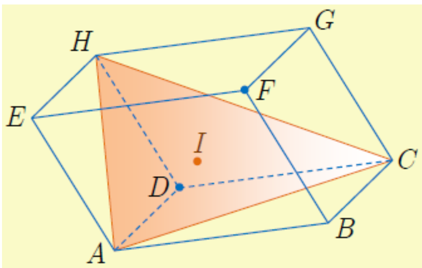
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

فإن M م أ م للنقاط $(B,1),(C,1),(D,2)$

ولتوضيع M:

نفرض I م أ م لـ $(B,1),(C,1)$ إذن I منتصف $[BC]$ و $(I,2)$ فحسب الخاصة التجميعية M م أ م $(I,2),(D,2)$ وبالتالي M منتصف $[DI]$.

$\frac{5}{95}$:



I مركز ثقل المثلث AHC, أثبت أن I و D و F على استقامة واحدة وعين موقع I على $[DF]$:

الحل

لدينا:

- $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}$
- $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CI}$
- $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HI}$

بالجمع نجد:

$$3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}+\underbrace{\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{HI}\right)}_{=\vec{0}}$$

لأن I مركز ثقل AHC

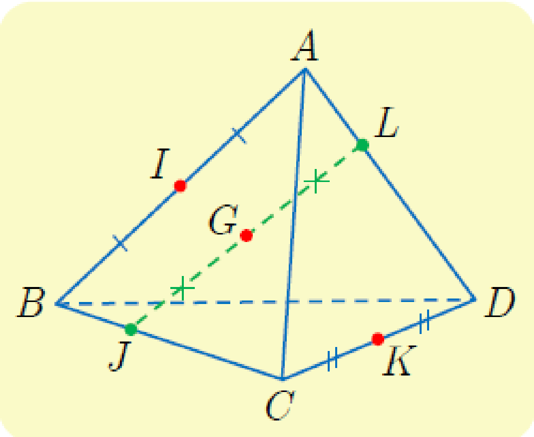
$$3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}$$
$$=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DH}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DF}$$
$$\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$$

I و D و F على استقامة واحدة.

مثال: $ABCD$ رباعي وجوه و K و I منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[CD]$ على الترتيب و النقطتان J و L معرفتان بالعلاقتين:

$$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ و أخيراً G منتصف $[JL]$ أثبت أن النقاط G و I و K على استقامة واحدة



مسألة مستقيمات متقاطعة :

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ما . و لنعرف النقاط P,Q,S,R بالشكل :

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\ ,\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}\ ,\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

نهدف إلى إثبات تلاقي المستقيمين (PQ) و (RS)

1- أثبت أن P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,\beta)\,,(C,\gamma)$ و أن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(D,\delta)$ حيث $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ثوابت يُطلب تعيينها

2- ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,4),(C,1),(D,3)$ أثبت أن G تقع على المستقيم (PQ)

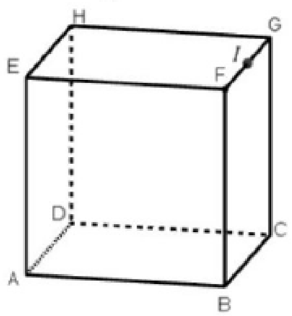
3- أثبت بأسلوب مماث أن G تقع على المستقيم (RS)

4- استنتج تقاطع المستقيمين $(PQ),(RS)$

اختبار

السؤال (1)

في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب و I منتصف $[FG]$ والمطلوب:

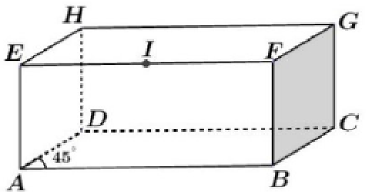


عين النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}$$

السؤال (2)

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$ وقياس الزاوي $\widehat{DAB}$ يساوي $45°$ والنقطة I منتصف $[EF]$:



1- احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

2- عين موضع النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

السؤال (3)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$A(2,0,1)\,,B(1,-2,1)\,,C(5,0,5)\,,D(6,2,5)$

1- أثبت أن $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

2- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث:

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

واستنتج أن النقاط D,C,B,A تقع في مستو واحد.

السؤال (4)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي $P: 2x+y-2z-4=0$.

1- احسب بعد النقطة A عن المستوي P.

2- اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

السؤال (5)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطة

$A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ والمطلوب:

1- احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ ثم استنتج $\cos(\widehat{BAC})$.

2- إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC، عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

السؤال (6)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطتان

$A(0,1,-1)$ و $B(1,-2,1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكون من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة:

$$MA=MB$$

وما طبيعة المجموعة S.

التمرين (1)

نتأمل الهرم $S-ABCD$ قاعدته مربع طول ضلعه 4 ورأسه S.

وطول كل حرف من حروفه الجانبية 4 والنقطة O مرتسم S القائم على القاعدة:

1- احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$.

2- احسب طول القطر CA ثم احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS}$.

3- عين G مركو الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$(S,1),(B,3),(A,2)$$

التمرين (2)

المستقيمين d و d' معرفان وسيطياً وفق:

$$d:\begin{cases}x=t+2\\ y=2t+1\ ;\ t\in\mathbb{R}\\ z=-t\end{cases}$$

$$d':\begin{cases}x=2s-1\\ y=s-2\ \ ;s\in\mathbb{R}\\ z=3s-2\end{cases}$$

المطلوب:

1- أثبت أن d و d' متقاطعان ثم عين احداثيات I نقطة التقاطع.

2- جد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين d و d'.

التمرين (3)

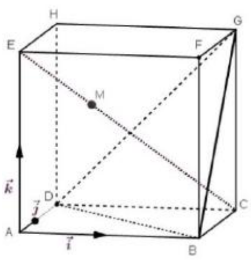
في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2,2,4)\,,B(2,0,-2)$:

1- اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

2- اعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ، ما طبيعة المجموعة S؟

المسألة (1)

$ABCDEFG$ مكعب طول حرفه يساوي 2, نتأمل المعلم المتجانس



في المعلم $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

$\overrightarrow{AB}=2\vec{\imath}$ و $\overrightarrow{AD}=2\vec{\jmath}$

و $\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$:

1- اكتب معادلة المستوي (GBD).

2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (EC).

3- جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD).

4- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$$

5- أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC).

المسألة (2)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(1,1,0)\ ,B(1,2,1)\ ,C(4,0,0)$

1- أثبت أن النقاط A ,B ,C ليست على استقامة واحدة.

2- أثبت ان معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$

3- ليكن المستويان:

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$

$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC).

5- احسب بعد A عن المستقيم d.

المسألة (3)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$E(1,-1,1)\ ,D(0,4,0)\ ,C(4,0,0)$

$B(1,0,-1), A(2,1,3)$

1- جد $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CE}$,$\overrightarrow{CD}$.

2- أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

3- أثبت أن (AB) يعامد للمستوي (CDE).

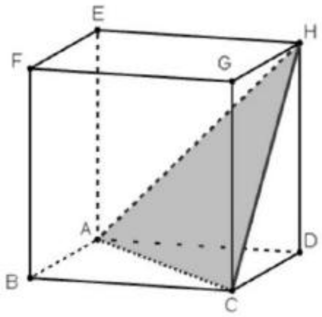
4- اكتب معادلة المستوي (CDE).

5- احسب بعد B عن المستوي (CDE).

6- اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE).

المسألة (4)

نتأمل في معلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$.



1- اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط:

$A\ ,C\ ,H\ ,F, D$

2- اكتب معادلة المستوي (ACH).

3- أثبت أن المستوي P الذي معادلته:

$$P: -2x + 2y - 2z + 1 = 0$$

يوازي المستوي (ACH).

4- بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن D و I و F على استقامة واحدة.

5- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S.

المسألة (5)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$

$$Q: x + y + z - 1 = 0$$

$$R: x - z - 1 = 0$$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان مشترك Δ, اكتب تمثيله الوسيطي.

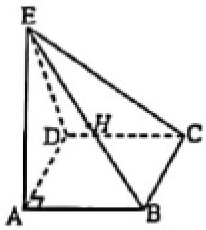
2- تحقق أن المستوي يعامد Δ ويمر بالنقطة A.

3- أثبت أن المستويات P , Q , R تتقاطع بالنقطة I يطلب تعيين احداثياتها.

4- استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

المسألة (6)

$EABCD$ هرم رباعي رأسه E وقاعدته مربع طول ضلعه 3, $[AE]$ عمودي على $(ABCD)$ و $EA = 3$.



نختار المعلم المتجانس:

$$\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$$

1- عين إحداثيات A , B , C , D , E.

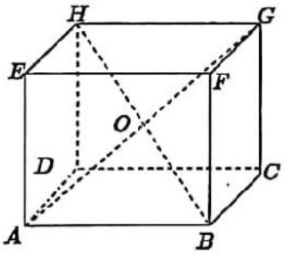
2- جد معادلة المستوي (EBC).

3- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).

4- استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC).

5- احسب حجم رباعي الوجوه $AEBC$.

المسألة (7)



مكعب طول حرفه 2, O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$.

نختار معلم متجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.

والمطلوب:

1- جد إحداثيات النقاط A و B و G و H و O.

2- أعط معادلة المستوي (GOB).

3- احسب $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$.

4- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).

5- أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).

6- جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).

المسألة (8)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$A(-1,2,3)$, $B(2,1,1)$, $C(-3,4,-1)$, $D(3,1,1)$

1- جد $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان.

2- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).

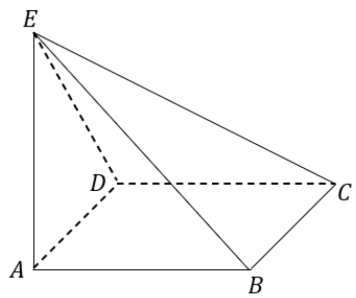
3- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC).

4- احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D - ABC$.

5- بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين (CG) و (AB) متوازيان.

المسألة (9)

$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته مربع, المستقيم $[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$, $AB = 4$ و $AE = 3$. نتأمل المعلم المتجانس والمطلوب: $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$



1- جد إحداثيات النقاط الرؤوس.

2- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق:

$$4\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CE}$$

3- احسب $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BC}$ واستنتج نوع المثلث EBC ثم احسب مساحته.

4- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC).

5- اكتب معادلة المستوي (EBC) واحسب بعد النقطة A عن المستوي (EBC) ثم استنتج حجم الهرم $AEBC$.

المسألة (VIE 1)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(1,1,1)$

1- جد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC, وأثبت أن (OG) عمودي على المستوي (ABC).

2- جد معادلة المستوي (ABC).

3- نعرف النقاط $A'(2,0,0)$, $B'(0,2,0)$, $C'(0,0,4)$ للمستوي $A'B'C'$. أثبت أن $2x + 2y + z - 4 = 0$ معادلة المستوي $(A'B'C')$.

4- أثبت أن Δ الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$ يقبل التمثيل الوسيطي:

$$\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t ; t \in \mathbb{R} \\ z = -2 \end{cases}$$

5- احسب بعد النقطة $D(1,1,1)$ عن المستقيم Δ.

6- احسب حجم رباعي الوجوه $A' - OB'C'$

7- احسب بعد النقطة O عن المستوي $(A'B'C')$ ثم استنتج مساحة المثلث $A'B'C'$.

المسألة (VIE 2)

لتكن S الكرة التي مركزها $A(1,1,1)$ ونصف قطرها $r = 3$ والمستوي:

$$P: x - z = 1$$

أثبت أن المستوي P يقطع الكرة S في دائرة C, عين مركزها ونصف قطرها.