الجلسة الأولى

النهايات

حالات عدم التعيين

❖**حالة $\frac{\infty}{\infty}$:**

1-نخرج عامل مناسب من البسط و من المقام

2-نختصر

3-نعوض

❖**حالة $\infty - \infty$:**

نميز حالتين :

أ- نهاية سعيدة : ضرب بالمرافق
(في حال وجود جذر في البسط و جذر في المقام قد تحتاج للضرب بمرافق البسط و مرافق المقام)

ب- نهاية حزينة : إخراج عامل مشترك

❖**حالة $\frac{0}{0}$:**

نميز الحالات الآتية :

أ- في حال وجود جذر : ضرب بالمرافق

ب- في حال وجود توابع مثلثية :
دساتير + مبرهنات

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ت- في حال السعي إلى الصفر : x^n عامل مشترك

ث- في حال السعي إلى عدد : تحليل البسط و المقام أو قسمة اقليدية

ج- تعريف العدد المشتق

❖**حالة $0.\infty$:**

أولاً : تغيير المتحول :

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

....
....
....
....
....

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

....
....
....
....
....

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

....
....
....
....
....

$$\lim_{x\to0} x\ln^2 x$$

....
....
....
....
....

ثانياً: مهارات و تغيير صياغة

تدرب 1	
1	$f(x)=x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)\ ,a=+\infty$
2	$f(x)=\sin x\,.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ ,a=0^+$
3	$f(x)=x(\ln x-1)\ ,a=0^+$

❖حالة 1^{∞} :

إذا كان التابع المدروس $f(x)$:

1- نأخذ $\ln(f(x))$

2- نحسب نهايته غالباً

(بإظهار $\frac{\ln(1+t)}{t}$)

3- فتكون النهاية المطلوبة هي :

$e^{\text{الجواب}}$

تدرب2	
1	$f(x) = \frac{6x^2 + 2 - 2\cos 2x}{2x^2}$ $a = 0$
2	$f(x) = \frac{2\cos x - 2}{\sqrt{4x^2 + 2} - \sqrt{2}}$ $a = 0$
3	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ $a = +\infty$
4	$f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$ $a = 0$
5	$f(x) = (2-x)^{\frac{1}{x-1}}$ $a = 1$
6	$f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ $a = +\infty$
7	$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1}$ $a = 0$
8	$f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ $a = +\infty$
9	$f(x) = \frac{x^2 + 2 - 2\cos(\sqrt{x})}{x}$ $a = 0$
10	$f(x) = (3+x)^{\frac{1}{x+2}}$ $a = -2$
11	$\mathrm{f(x)} = \frac{7x - 7}{\sqrt{3x+1} - 2}$ $a = 1$
12	$\mathrm{f(x)} = \frac{\sqrt{4x+5} - 3}{2 - \sqrt{3x+1}}$ $: a = 1$

الجلسة الثانية

النهايات اللوغارتمية :

نهايات بسيطة	
1	$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
2	$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

نهايات عند $+\infty$	
1	$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
2	$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

و تعمم المبرهنات السابقة إلى :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$$

نهايات عند الصفر و الواحد	
1	$\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0^-$
2	$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
3	$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$
4	$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
5	$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

تدرب3	
1	$f(x) = \frac{\ln x}{x}$
2	$f(x) = x - \ln x$
3	$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$
4	$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$
5	$f(x) = \frac{x}{\ln x}$

6	$f(x)=\dfrac{lnx}{x^2}$
7	$f(x)=x(1-lnx)$
8	$f(x)=\dfrac{1}{x}(lnx-1)$
9	$f(x)=\dfrac{x-lnx}{x}$
10	$f(x)=\dfrac{x+1}{lnx}$
11	$f(x)=\dfrac{xlnx}{x+1}$
12	$f(x)=\dfrac{xlnx}{x-1}$
13	$f(x)=\ln(2x+1)-\ln(x)$
14	$f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$
15	$f(x)=\dfrac{\ln(1+sinx)}{x}\ ,a=0$
16	$f(x)=\dfrac{\ln(\sqrt{x}+1)-ln\sqrt{2}}{x-1}$ $a=1$
17	$f(x)=\dfrac{ln\sqrt{x}}{x}\ ,a=+\infty$
18	$f(x)=\dfrac{lnx}{\sqrt{x}}$

النهايات الأسية :

نهايات بسيطة	
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$	1
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$	2

نهايات عند $+\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$	1
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$	2

نهايات عند $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0^-$	1

نهايات عند الصفر	
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	1
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x-1}=1$	2

تدرب 4	
1	$f(x)=e^x-x^2$
2	$f(x)=\dfrac{2e^x+1}{1+e^x}$
3	$f(x)=\ln(x)-e^x$
4	$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$
5	$f(x)=(3-x)e^x$
6	$f(x)=\dfrac{e^x-1}{x-1}$
7	$f(x)=\dfrac{e^x-1}{2x}$
8	$f(x)=\ln(e^x+2)$
9	$f(x)=2xe^{-x}$
10	$f(x)=2x-1+e^{-x}$
11	$f(x)=e^{2x}-x-2$
12	$f(x)=x-\ln(e^x+1)$ $a=+\infty$

حول النهايات	
حالة $\frac{\infty}{\infty}$	دائماً نأخذ المسيطر من البسط و المسيطر من المقام
	ترتيب المسيطر حسب القوة (عند $+\infty$): $e^x > x^n > lnx$ المسيطر في الحد $\sqrt{x^2+3}$ هو $\sqrt{x^2}$ ثم $\lvert x\rvert$ ثم نفك القيمة المطلقة حسب السعي
أمثلة	$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+3x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-2x}=-\frac{1}{2}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{e^x}=0$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2}x}{x}=\sqrt{2}$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx-1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$
حالة $\frac{0}{0}$	1- يوجد جذر : نضرب البسط و المقام بالمرافق 2- لا يوجد جذر : تحليل البسط و المقام إلى جداء أقواس
	أمثلة: 1) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}$ $=\lim_{x\to0}\frac{x+1-1}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}$ $=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{2}$ 2) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}$
نظرية أوبيتال	في حالة $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$ و عدم وجود قيمة مطلقة . يمكن التخلص من هذه الحالات باستخدام طريقة أوبيتال . (اشتقاق البسط و اشتقاق المقام) 1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx-1}{e^x+1}=\lim_{x\to+}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=0$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=0$ 3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^x+1}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}-e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}-e^x}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{2}=+\infty$ 4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{lnx-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$
في حالة وجود قيمة مطلقة	من القيمة المطلقة حسب السعي

أمثلة: 1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\lvert x^2-1\rvert}{x+1}$ نلاحظ أنه عند $-\infty$ يكون المقدار x^2-1 موجباً و بالتالي قيمته المطلقة نفسه $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x+1}=-\infty$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\lvert x+1\rvert-\lvert 1-2x\rvert}{x+3}$ نلاحظ أنه عند $+\infty$ يكون المقدار $x+1$ موجباً فقيمته المطلقة نفسه $x+1$ أما المقدار $1-2x$ سالباً فقيمته المطلقة عكسه $2x-1$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-(2x-1)}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+2}{x+3}=-1$ 3) $\lim_{x\to1}\frac{\lvert 4x-3\rvert-\lvert 2x-1\rvert}{x-1}$ نلاحظ أنه عند الواحد يكون $4x-3$ موجباً فقيمته المطلقة $4x-3$ أما $2x-1$ فيكون موجباً أيضاً فقيمته المطلقة نفسه $2x-1$ $\lim_{x\to1}\frac{4x-3-(2x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{x-1}=2$ 4) $\lim_{x\to3}\frac{\lvert 2x+3\rvert-\lvert x^2-18\rvert}{x-3}$ نلاحظ أن $2x+3$ عند الـ3 موجب فقيمته المطلقة نفسه $2x+3$ و x^2-18 عند الـ3 سالب فقيمته المطلقة عكسه $18-x^2$ $\lim_{x\to3}\frac{2x+3-(18-x^2)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+5)(x-3)}{x-3}=8$	
$\sqrt{x^2+3}-x$ نربع $(x^2+3\ ,x^2)$ 😀 $\sqrt{4x^2+4}+2x$ نربع $(4x^2+4\ ,4x^2)$ 😀 $\sqrt{x^2+x+1}-3x$ نربع $(x^2+x+1\ ,9x^2)$ 😔 $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2x^2+3}$ نربع $(x^2+x, 2x^2+3)$ 😔 في حالة النهاية السعيدة: نضرب بالمرافق في حالة النهاية الحزينة: نخرج أقوى درجة عامل مشترك من كل حد و نراعي السعي	حالة $\infty-\infty$
نهايات للحفظ: $\lim_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$ $\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$	حالة $0.\infty$

في كل مما يلي احسب نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

1- $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\ ;\ a = +\infty$:

1	d	0	c	$+\infty$	b	$-\infty$	a

2- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\ ;\ a = -\infty$:

0	d	$-\infty$	c	-1	b	3	a

3- $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\ ;\ a = 0$:

1	d	0	c	$+\infty$	b	$\frac{1}{2}$	a

4- $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}\ ;\ a = +\infty$:

-1	d	$\frac{9}{4}$	c	0	b	1	a

5- $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}\ ;\ a = 2$:

$+\infty$	d	12	c	8	b	4	a

6- $f(x) = \frac{x^2-3x}{x-3}\ ;\ a = 3$:

3	d	$-\infty$	c	1	b	$+\infty$	a

7- $f(x) = \sqrt{9x^2+1} - 3x\ ;\ a = +\infty$:

غير ذلك	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	0	a

8- $f(x) = \sqrt{3x^2+1} - \sqrt{3x^2+2}\ ;\ a = +\infty$:

غير ذلك	d	$-\infty$	c	0	b	$+\infty$	a

9- $f(x) = \sqrt{5x+1} - x\ ;\ a = +\infty$:

$\sqrt{5}$	d	1	c	$+\infty$	b	$-\infty$	a

10- نهاية التابع $f(x) = \left[\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{5}{2}} - 2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$ عند $+\infty$:

$\mathbf{-2\sqrt{2}}$	d	$\mathbf{2\sqrt{2}}$	c	$\mathbf{0}$	b	$\mathbf{4\sqrt{2}}$	a

11- عند دراسة نهاية التابع $f(x) = \frac{\sin|x|}{x}$ عند الصفر نجد أن نهايته :

غير موجودة	d	$\mathbf{0}$	c	$\mathbf{-1}$	b	$\mathbf{1}$	a

12- ليكن f المعرف على R^* وفق $f(x) = \frac{|2x-1|-|1-3x|}{x}$ عند دراسة نهاية f عند الصفر نجدها:

غير موجودة	d	1	c	$-\infty$	b	$+\infty$	a

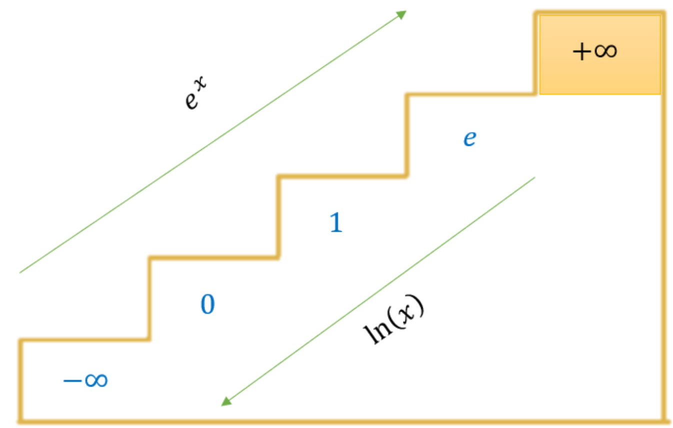
13- إذا علمت أن $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+a^2}-a}{x} = \frac{1}{4}$ و $a > 0$ فإن قيمة الثابت a هي :

0	d	4	c	1	b	2	a

حول النهايات اللوغارتمية والأسية	
النهايات البسيطة	$\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ $\lim_{x\to0^+} lnx = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
نهايات حكم القوي على الضعيف	$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{lnx} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
عند الصفر	$\lim_{x\to0} xlnx = 0$ $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
عند الواحد	$\lim_{x\to1} \frac{lnx}{x-1} = 1$ $\lim_{x\to1} \frac{x-1}{lnx} = 1$
عند $-\infty$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
جميع النهايات الكسرية السابقة يمكن حسابها على أوبيتال	

خواص التابع اللوغارتمي

1- درج السعادة



2- خواص اللوغارتم:

لوغارتم الجداء	$\ln(a.b)=\ln(a)+\ln(b)$
لوغارتم القسمة	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
لوغارتم القوة	$\ln(a^n)=n\ln(a)$
لوغارتم الجذر	$\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$
لوغارتم المقلوب	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=-\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
خواص تقابلية	$\ln(e^x)=x$ $e^{\ln(x)}=x$

1- بفرض a, b, c, d أعداد حقيقية موجبة تماماً عندئذ المقدار $\ln\left(\frac{a^2\times b^3}{c\times d^6}\right)$ يساوي

a	$2\ln a+3\ln b-\ln c+6\ln d$	b	$2\ln(a)+3\ln(b)-\ln(c)-6\ln d$
c	$2\ln a\times 3\ln b-\ln c-6\ln d$	d	$6\ln(ab)-6\ln(cd)$

2- إن قيمة المقدار $\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\ln\left(\frac{5}{4}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{600}{599}\right)$

a	$3\ln(2)+2\ln(5)+\ln 3$	b	$3\ln 2-2\ln 5-\ln 3$
c	$2\ln 2+2\ln 5+\ln 3$	d	$3\ln 2+2\ln 5-\ln 3$

3- إن $\ln(x^2)$ يساوي:

a	$2\ln\lvert x\rvert$	b	$2\ln(x)$	c	$(\ln x)^2$	d	$2\ln(-x)$

4- إن مجموعة قيم العدد الطبيعي التي تحقق $2^n\le 100$

a	$n\ge 4$	b	$n\le 4$	c	$n\ge 5$	d	$n\ge 2$

5- إن مجموعة قيم العدد الطبيعي التي تحقق $\left(\frac{1}{3}\right)^n\ge 10^{-2}$

a	$n\ge 4$	b	$n\ge 5$	c	$n\le 4$	d	$n\ge 2$

6- إن مجموعة قيم العدد الطبيعي التي تحقق $0.2\ge\left(\frac{2}{5}\right)^n$

a	$n\le 2$	b	$n\ge 2$	c	$n\le 0$	d	$n\le 1$

7- إن مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق الشرط $\ln(x)=\ln(y+1)$ (دوّن ملاحظة حول هذا السؤال)

a	نصف مستقيم	b	دائرة	c	قطع زائد	d	مستقيم

8- إن مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق الشرط $\ln(y)=2\ln(x)$

a	جزء من دائرة	b	جزء من قطع مكافئ	c	جزء من قطع زائد	d	جزء من قطع ناقص

9- إن مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق الشرط $\ln(y)+\ln(x)=0$

a	جزء من دائرة	b	جزء من قطع مكافئ	c	جزء من قطع زائد	d	جزء من قطع ناقص

10- نرمز بالرمز log للتابع اللوغارتمي الذي أساسه 10 (أي $\log(10) = 1$) عندئذٍ المقدار $\log(0.6)$ يساوي

(دوّن ملاحظتك حول هذا السؤال)

a	$\log(2) + \log(3) - 1$	b	$\log(2)\log(3)$	c	$\log(6)$	d	$\log(2) + \log(3) + 1$

11- بفرض $a > 1$. نرمز بالرمز $\log_a$ للوغارتم الذي أساسها a ($\log_a(a) = 1$) عندئذ:

المقدار $y = \log_a(x)$ يساوي:

a	$y = \dfrac{\ln(x)}{\log(a)}$	b	$y = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$	c	$y = \dfrac{\ln(x)}{a}$	d	$y = \dfrac{\ln(a)}{\ln(x)}$

12- نهاية التابع $f(x) = x - lnx$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

13- نهاية التابع $f(x) = \frac{1-lnx}{x}$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

14- نهاية التابع $f(x) = \frac{x-lnx}{x+lnx}$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	1

15- نهاية التابع $f(x) = \frac{2lnx-3}{lnx+3}$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	2

16- نهاية التابع $f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

17- نهاية التابع $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

18- نهاية التابع $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x)$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

19- نهاية التابع $f(x) = \frac{1}{x} - lnx$ عند 0^+ :

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

20- نهاية التابع $f(x) = \frac{1}{x} + lnx$ عند 0^+ هي :

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

21- نهاية التابع $f(x) = x(3 - lnx)$ عند 0^+ :

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

22- نهاية التابع $f(x) = xln^2(x)$ عند الصفر هي :

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

23- نهاية التابع $f(x)=\frac{1}{x(1-lnx)}$ عند الصفر من اليمين :

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

24- نهاية التابع $\mathrm{f(x)}=\ln(2\mathrm{x}+1)-\ln(x-1)$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$\ln(2)$

25- نهاية التابع $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+sinx)}{x}$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	1

26- قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(sinx)}{x-\frac{\pi}{2}}$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

27- قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to1}\frac{xln(\sqrt{x+1})-\ln(\sqrt{2})}{x-1}$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$ln\sqrt{2}+\frac{1}{4}$

28- قيمة العدد λ حتى يكون $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\lambda x+1)-\ln(2x+3)=1$

a	e	b	$2e$	c	$-e$	d	1

29- نهاية التابع $f(x)=e^{x}-lnx$ عند $+\infty$

a	$\frac{1}{2}$	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$-\frac{1}{2}$

30- نهاية التابع $f(x)=x^{2}-e^{x}$ عند $+\infty$

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$-\frac{1}{2}$

31- نهاية التابع $f(x)=x-\ln(e^{x}+1)$ عند $+\infty$

a	$\frac{1}{2}$	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	0

32- نهاية التابع $f(x)=\frac{1}{x}(e^{x}-1)$ عند 0

a	1	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$-\frac{1}{2}$

33- إذا علمت أن λ عدد حقيقي موجب تماماً يحقق $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-\ln(e^{\lambda x}+1)=+\infty$ فإن الشرط على λ يكون:

a	$0<\lambda<2$	b	$\lambda>2$	c	$0<\lambda\leq2$	d	$\lambda\geq2$

34- إن نهاية التابع $f(x)=\frac{2e^{x}+1}{1+e^{x}}$ عند $+\infty$:

a	2	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

35- إن نهاية التابع $g(x)=\ln(x)-e^{x}$ عند $+\infty$:

a	1	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

36- إن نهاية التابع $h(x) = e^x - x^2$ عند $+\infty$:

a	2	b	-1	c	$+\infty$	d	$-\infty$

37- إن نهاية التابع $f(x) = x - e^x$ عند $+\infty$:

a	2	b	1	c	$+\infty$	d	$-\infty$

38- إن النهاية $\lim\limits_{t \to 0} t\left(\frac{1}{e^t - 1}\right)$ تساوي:

a	1	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

39- إن نهاية التابع $f(x) = \frac{3e^x}{4e^x - 4}$ عند $+\infty$ هي:

a	$\frac{4}{3}$	b	$\frac{3}{4}$	c	1	d	-1

40- إن نهاية التابع $g(x) = (2 - x)e^x$ عند $-\infty$:

a	1	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

41- إن نهاية التابع $k(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}$ عند $+\infty$:

a	1	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

42- إن نهاية التابع $\ln(e^x + 2)$ عند $-\infty$:

a	$\ln(2)$	b	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	c	$+\infty$	d	$-\ln(2)$

43- إن نهاية التابع $f(x) = e^{-2x} + 2x - 2$ عند $-\infty$:

a	1	b	$+\infty$	c	2	d	$-\infty$

44- إن نهاية التابع المعرف وفق $f(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1)$ عند $+\infty$:

a	1	b	0	c	$+\infty$	d	$-\infty$

حول تغيير المتحول

عندما يكون الصفر ناتج عن $\ln(1)$:

1- نفرض المضمون $1 + t$

2- نعزل x بدلالة t

3- نغير السعي $t \to 0$

4- نعوض لنصل إلى المبرهنة $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

1- بفرض $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln\left(1 + \frac{\lambda}{x}\right) = 2$ فإن قيمة λ تساوي:

a	0	b	$+\infty$	c	2	d	غير ذلك

2- نهاية التابع $f(x) = \frac{\ln(3 - x)}{2x - 4}$ عند $a = 2$

a	$\frac{1}{2}$	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	$-\frac{1}{2}$

3- نهاية التابع $f(x) = xln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ عند $+\infty$:

-2	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	2	A

4- إن نهاية التابع $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$ عند $+\infty$:

$\sqrt{e}$	d	e	c	$e^{-\frac{1}{2}}$	b	e^{-1}	a

5- نهاية التابع $f(x) = (2-x)^{\frac{1}{x-1}}$ عند الواحد

$\sqrt{e}$	d	e	c	$e^{-\frac{1}{2}}$	b	e^{-1}	a

6- نهاية التابع $f(x) = (3-2x)^{\frac{1}{2x-1}}$ عند $a = \frac{1}{2}$

$e^{\frac{1}{2}}$	d	e	c	0	b	$+\infty$	a

7- نهاية المتتالية التي حدها العام $u_n = \frac{e^{2n}}{(1+n)^2}$:

2	d	$-\infty$	c	1	b	$+\infty$	a

8- نهاية المتتالية التي حدها العام $u_n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

$+\infty$	d	$-\infty$	c	0	b	1	a

9- نهاية المتتالية $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

e^{-2}	d	e^{-2}	c	e^{2}	b	e	a

حول النهايات المثلثية	
إحاطة	في حال مضمون المثلثي ∞
نسعى لاستخدام واحدة من المبرهنات $\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t} = 1$ $\lim_{t\to 0}\frac{tant}{t} = 1$	في حال مضمون المثلثي 0
$1-\cos^2(\text{زاوية}) = \sin^2(\text{الزاوية})$ $1-\cos(\text{الزاوية}) = 2\sin^2(\text{نصفها})$ $1-\cos(\text{الزاوية}) = \frac{\sin^2(\text{الزاوية})}{1+\cos(\text{الزاوية})}$ $\sin(\text{الزاوية}) = 2\sin(\text{نصفها})\cos(\text{نصفها})$ $\cos(\text{الزاوية}) = \cos^2(\text{نصفها}) - \sin^2(\text{نصفها})$ $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3cosx$ $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$	دساتير مفيدة لحالة $\frac{0}{0}$

في كل مما يلي احسب نهاية التابع f عند قيمة a الموافقة:

-1 $f(x) = \frac{\sin x}{x}\ ;\ a = \pi$:

1	d	0	c	$+\infty$	b	0	a

-2 $f(x) = \frac{\sin(4x)}{x}\ ;\ a = 0$:

$+\infty$	d	0	c	4	b	2	a

-3 $f(x) = \frac{\sin(6x)}{2x}\ ;\ a = 0$:

0	d	2	c	3	b	-3	a

-4 $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos(2x)}\ ;\ a = 0$:

$\frac{1}{2}$	d	2	c	4	b	$\frac{1}{4}$	a

-5 $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}\ ;\ a = 0$:

1	d	0	c	-1	b	2	a

-6 $f(x) = \frac{\cos(3x)-\cos(x)}{x\sin x}\ ;\ a = 0$:

1	d	2	c	4	b	-4	a

-7 $f(x) = \frac{\sin 3x+\sin x}{\sin 5x-\sin x}\ ;\ a = 0$:

$\frac{1}{2}$	d	0	c	$\frac{1}{4}$	b	1	a

-8 $f(x) = \frac{\tan(7x)}{x}\ ;\ a = 0$:

0	d	$-\infty$	c	7	b	0	a

-9 $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+1}-1}\ ;\ a = 0$:

4	d	-1	c	0	b	1	a

-10 $f(x) = \sin x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ ;\ a = 0^+$:

غير ذلك	d	-1	c	1	b	0	a

-11 $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \le f(x) \le \frac{1-\cos(2x)}{x}\ ;\ a = 0$:

1	d	$-\infty$	c	$+\infty$	b	0	a

-12 $f(x) = \frac{\sin x}{x+1}\ ;\ a = +\infty$:

$+\infty$	d	0	c	8	b	4	a

-13 $f(x) = \frac{x-\sin(x)}{x+5}\ ;\ a = +\infty$:

1	d	$-\infty$	c	-1	b	$+\infty$	a

-14 $a=+\infty$; $f(x)=\frac{3x-sinx}{\sqrt{1+x^2}}$:

a	3	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

-15 $a=+\infty$; $f(x)=x+\frac{2\sin^2 x}{5}$:

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

-16 $a=0$; $\frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)} \le f(x) \le \frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}$:

a	0	b	$+\infty$	c	1	d	$\sqrt{5}$

-17 ليكن لدينا التابع المعرف وفق $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & ;x\neq 1\\ 0 & ;x=1\end{cases}$, إن نهاية التابع عند $a=1$ هي:

a	0	b	$+\infty$	c	1	d	$\sqrt{5}$

-18 نهاية التابع $f(x)=\frac{\sin(ax)}{x}$ عند الصفر تساوي:

a	a	b	1	c	-1	d	0

-19 نهاية التابع $f(x)=\frac{\sin(ax)}{bx}$ عند الصفر تساوي:

a	a	b	b	c	$\frac{b}{a}$	d	$\frac{a}{b}$

-20 نهاية التابع $f(x)=\frac{\tan(ax)}{bx}$ عند الصفر تساوي:

a	a	b	b	c	$\frac{b}{a}$	d	$\frac{a}{b}$

-21 نهاية التابع $f(x)=\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ عند الصغر تساوي:

a	a	b	b	c	$\frac{b}{a}$	d	$\frac{a}{b}$

-22 نهاية التابع $f(x)=\frac{\tan(ax)}{\sin(bx)}$ عند الصفر تساوي:

a	a	b	b	c	$\frac{b}{a}$	d	$\frac{a}{b}$

-23 التابع $f(x)=x+2sinx$ خطه البياني محصور بين المستقيمين:

a	$d_1: y=x+2$ & $d_2: y=x-2$	b	$d_1: y=x-4$, $d_2: y=x+4$
c	$d_1: y=2x$, $d_2: y=-2x$	d	$d_1: y=x-1$, $d_2: y=x+1$

-24 إذا كان $|f(x)-3|\le g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ عندئذٍ واحد من التوابع الآتية ممكن أن يكون $g(x)$:

a	$g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$	b	$g(x)=\frac{3x+1}{x+1}$	c	$g(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	d	$g(x)=x\sqrt{x}$

-25 ليكن التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

فأي من المتراجحات الآتية صحيحة:

a	$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$	b	$\frac{1}{\sqrt{x+1}} \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}}$
c	$\frac{1}{2\sqrt{x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$	d	$\frac{1}{\sqrt{x}} \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = \sin^2 x + 4sinx + 6$

26- f يكتب بالشكل :

a	$(sinx-2)^2+2$	b	$(\text{sinx}+2)^2+2$	c	$(sinx-2)^2+1$	d	$(sinx-1)^2+2$

27- واحدة من المتراجحات الآتية صحيحة . اخترها

a	$3 \le f(x) \le 11$	b	$1 \le f(x) \le 3$	c	$1 \le f(x) \le 9$	d	$2 \le f(x) \le 9$

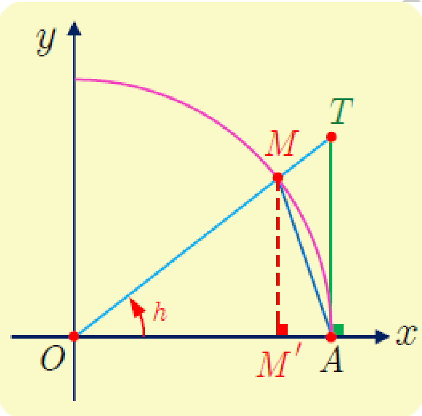
28- فإذا كان $g(x) = x^2 f(x)$ عندئذٍ نهاية التابع g(x) عند $+\infty$

a	1	b	$+\infty$	c	0	d	11

29- ليكن f و g التابعان المعرفان وفق $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \text{sinx}$ عندئذٍ يكون التركيب $(gof)(x)$ يساوي

a	$\sin(x^2-1)$	b	$\sin^2 x - 1$	c	$(sinx-1)^2$	d	$\sin(x^2)-1$

- C الدائرة المثلثية التي مركزها المبدأ و لتكن M النقطة من C بحيث يكون h التعيين الأساسي بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$



30- مساحة المثلث OAM تساوي :

a	$\frac{1}{2}sinh$	b	$\frac{1}{2}cosh$	c	$\frac{1}{2}tanh$	d	$\frac{1}{2}coth$

31- مساحة المثلث OAT تساوي :

a	$\frac{1}{2}sinh$	b	$\frac{1}{2}cosh$	c	$\frac{1}{2}tanh$	d	$\frac{1}{2}coth$

32- إذا علمت أن $sinh \le h \le tanh$ فيمكن استنتاج أن :

a	$\frac{sinh}{h} \le cosh \le 1$	b	$cosh \le \frac{sinh}{h} \le 1$	c	$\frac{sinh}{h} \le 1 \le cosh$	d	$\frac{cosh}{h} \le sinh \le 1$

33- واحدة من النهايات الآتية صحيحة

a	$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{1}{4}$	b	$\lim_{x\to+\infty} \frac{sinx}{x} = 1$	c	$\lim_{x\to 0} xsin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$	d	$\lim_{x\to 0} \frac{cosx}{x} = 1$

الجلسة الرابعة

المقاربات :

❖الإثبات :

1- نشكل الفرق $f(x)-y_{\Delta}$

2- نثبت أن $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-y_{\Delta})=0$

❖دراسة الوضع النسبي :

نميز حالتين :

الفرق واضح الإشارة	الفرق غير واضح الإشارة
نحدد فوراً : $f(x)>0$ يكون c فوق Δ $f(x)<0$ يكون c تحت Δ	ندرس الإشارة نشكل جدول

تدرب5	
$f(x)=4x+\frac{1+\sin^2 x}{x^4+1}$	$\Delta: y=4x$
$f(x)=2x-1+\frac{1}{x}$	$\Delta: y=2x-1$
$f(x)=x+1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$	$\Delta: y=x+1$
$f(x)=\frac{x^3+2x-2x\cos 2x}{2x^2}$	$\Delta: y=\frac{1}{2}x$

❖إيجاد معادلة المقارب المائل :

نميز الحالات الآتية :

1- إذا كان التابع من الشكل :
$f(x)=ax+b+u(x)$

- نضع $\Delta: y=ax+b$
- يكون $f(x)-y_{\Delta}=u(x)$
- نحسب النهاية

2- إذا كان التابع كسر درجة بسطه أكبر من درجة مقامه :

- نقسم قسمة اقليدية

3- التفريق : عندما يكون المقام : $\frac{\dots\dots\dots}{ax}$

4- الإتمام إلى مربع كامل:

$$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$$

- نتمم ما داخل الجذر إلى مربع كامل $a(x-x_0)^2$
- نضع:

$$h(x)=f(x)-\sqrt{a(x-x_0)^2}$$

$$h(x)=\sqrt{a(x-x_0)^2+k}-\sqrt{a(x-x_0)^2}$$

- نضرب بالمرافق:

$$h(x)=\frac{k}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}$$

- نحسب النهاية
- نستنتج :

$$d_{1,2}: y=\sqrt{a(x-x_0)^2}$$
$$y=|a(x-x_0)|$$

و نميز حالات القيمة المطلقة فنحصل على مقاربين

5- الطريقة العامة :

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax$$

تدرب6:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق : $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+1}$

1- جد عددين حقيقين a و b يحققان الشروط :

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$$

2- استنتج معادلة المقارب المائل Δ

3- ادرس الوضع النسبي له مع C

تدرب 7: (دورة 2021- تكميلي)

ليكن f المعرف على $]-\infty,0[$ وفق :

$$f(x)=\frac{2x^2+\cos^2 x}{x}$$

1- جد معادلة المقارب المائل للخط c_f

2- ادرس الوضع النسبي له مع c_f

تدرب 8: ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$\mathrm{f(x)}=\sqrt{4x^2+4x+5}$$

جد معادلة المقارب المائل للخط C_f ثم ادرس الوضع النسبي لهما

الجلسة الخامسة

حول المقارب المائل

شرط وجوده		$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$
نتيجة		لا يجتمع مقارب أفقي ومائل في نفس الجوار
Hero’s idea		نهاية تابع f عند $\pm\infty$ تساوي نهاية مقاربه المائل عند $\pm\infty$ ترجمة: أي يمكن استبدال التابع f بـ y_d
أمثلة		من الواضح أن التابع $f(x)=-\frac{x}{2}+\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}$ يقبل المقارب المائل: $y=-\frac{x}{2}$ وبالتالي إذا طلب نهاية f عند $\pm\infty$ نحسب نهاية y عند $\pm\infty$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)=\mp\infty$ (بالله مو هيك أسهل 😉)
أساليب إيجاده	**التابع من الشكل:** $y=ax+b+u(x)$	$y_d=ax+b+\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x)$ بشرط $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x)=\ell\neq\infty$
	التابع من الشكل: $\sqrt{ax^2+bx+c}$	1- نتمم المضمون إلى مربع كامل $f(x)=\sqrt{a(x-x_0)^2+y_0}$ 2- نهمل y_0 فنحصل على $y_d=\sqrt{a(x-x_0)^2}$ $y_d=\lvert a(x-x_0)\rvert=\begin{cases} a(x-x_0)\,; x\to+\infty \\ -a(x-x_0)\,; x\to-\infty\end{cases}$
	تابع كسري درجة بسطه أكبر من درجة مقامه بدرجة واحدة	نقسم البسط على المقام قسمة إقليدية فنحصل على: $f(x)=ax+b+u(x)$ نعود للحالة الأولى. ملاحظة: إذا كان المقام حد وحيد نستطيع الإستفادة من التفريق بدل القسمة
	تابع لوغارتمي يحوي e^x بالحشوة	نخرج الأسي (المسيطر) عامل مشترك مثلاً: $f(x)=\ln(e^x+a)=\ln\left(e^x\left(1+\frac{a}{e^x}\right)\right)$ $=\ln(e^x)+\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)=x+\ln\left(1+\frac{a}{e^x}\right)$ ونعود للحالة الأولى.
	الحالة العامة	بفرض $y_d=ax+b$: $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\,;b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax$

أساليب دراسة الوضع النسبي	1- نشكل الفرق $f(x) - y_d$ 2- نعدم 3- نشكل جدول ونحدد إشاراته من خلال تعويض قيم تجريبية في $f(x) - y_d$

Hero's Idea's

إذا علمنا معادلة المقارب $y = ax + b$ فيمكن استخلاص المعلومات المجاورة	1- نهاية $\frac{f(x)}{x}$ تساوي a في جوار التقارب 2- نهاية $f(x) - ax$ تساوي b في جوار التقارب 3- استبدال التابع f بمقاربه عند حساب نهاية f في جوار التقارب 4- ميل المستقيم المقارب هو a

في التوابع الكسرية القيمة التي تعدم المقام والتي لا تعدم البسط تعطي مقارباً شاقولياً ونهاية التابع عند اللانهاية تعطي مقارب افقي

1- معادلة المقارب المائل للخط C_f للتابع $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ عند $-\infty$ هي:

a	$x - 3$	b	$x - 1$	c	$2x - 1$	d	$x - 2$

2- قيمة العدد k ليكون المستقيم $y = 2x + 4$ مقارب مائل للتابع $f(x) = \sqrt{4x^2 + kx + 5}$:

a	16	b	5	c	0	d	1

3- قيمة العدد k ليكون المستقيم $y = 2x + 1$ مقارب مائل للتابع $f(x) = x + k + \frac{x^2+3}{x-1}$:

a	16	b	5	c	0	d	1

4- قيمة العدد k ليكون المستقيم $y = 2x + 1$ مقارب مائل للتابع $f(x) = x + \frac{x^2+kx}{x-1}$:

a	16	b	5	c	0	d	1

5- إذا علمت أن $y = 3x - 1$ مقارب مائل للتابع f عند $-\infty$ فإن نهاية f عند $-\infty$ تساوي:

a	$+\infty$	b	$-\infty$	c	0	d	1

6- إذا علمت أن $y = 4x - 5$ مقارب مائل للتابع f عند $+\infty$ فإن نهاية $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}(2x + 1)$ عند $+\infty$:

a	$+\infty$	b	8	c	0	d	1

7- إذا علمت أن f تابع فردي ويقبل المستقيم $y = x - 1$ مقارب مائل عند $+\infty$ فإن نهاية المقدار

$$\frac{f(x) + 1}{x + f(x) + f(-x)}$$

عند $+\infty$:

a	$+\infty$	b	$-\infty$	c	0	d	1

8- إذا علمت أن التابع f يقبل مقارباً مائلاً معادلته $y = 2x$ عند $+\infty$ وأن f تابع زوجي فإن معادلة المقارب المائل عند $-\infty$ هي:

a	$y = -2x$	b	$y = 2x$	c	$y = 2x + 1$	d	$y - 2x + 1 = 0$

9- إذا علمت أن التابع f يقبل مقارباً مائلاً معادلته $y = 2x + 1$ عند $+\infty$ وأن f تابع فردي فإن معادلة المقارب المائل عند $-\infty$ هي:

$y = 2x$	d	$y = -2x$	c	$y = 2x - 1$	b	$y = 2x + 1$	a

10- ليكن $y = 3x - 1$ مقارب مائل عند $-\infty$ لتابع f عندئذ واحدة من القضايا الآتية خاطئة، اخترها:

التابع f لا يملك مقاربات أفقية	b	نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عند $-\infty$ تساوي 3	a
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	d	التابع f لا يملك مقارب أفقي عند $-\infty$	c

11- ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ وفق $f(x) = -\frac{x}{3} + \ln\left(\left|\frac{x-1}{3x}\right|\right)$ فإن معادلة المقارب المائل:

$y = -\frac{1}{3}x - \ln(3)$	d	$y = \frac{1}{3}x + \ln(3)$	c	$y = -\frac{1}{3}x - \ln(3)$	b	$y = \frac{1}{3}x - \ln(3)$	a

12- قيمة العدد α ليكون المستقيم $y = 2x$ مقارب مائل للتابع $f(x) = \ln(e^{\alpha x} + e^{x} + 1)$ هي:

5	d	0	c	1	b	2	a

13- ليكن f التابع المعرف وفق $f(x) = |3x - 1| + \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$ فإن المقاربين المائلين للخط c_f يتقاطعان في نقطة إحداثيتاها هي:

$(1,0)$	d	$(2,0)$	c	$(1,1)$	b	$(0,0)$	a

14- ليكن f التابع المعرف وفق $f(x) = 5 - 4x + \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$ عندئذ يكون c_f فوق مقاربه المائل على المجال:

$]2, +\infty[$	d	$]4, +\infty[$	c	$]-\infty, 4[$	b	$]1, +\infty[$	a

15- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = -3x + \sqrt{4x^2 + 1}$ عندئذ نقاط تقاطع التابع f مع محور الفواصل:

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	d	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	c	$x = \frac{1}{\sqrt{5}}$	b	$x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$	a

16- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = 2x - 1 + |x - 3|$ عندئذ نقاط تقاطع التابع f مع محور الفواصل:

$x = \frac{4}{3}, x = -2$	d	$x = -\frac{4}{3}, x = 2$	c	$x = -\frac{4}{3}, x = -2$	b	$x = \frac{4}{3}, x = 2$	a

17- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$ إن معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$ هي:

$y = 3x + 1$	d	$y = 3x - 1$	c	$y = 3x$	b	$y = -x$	a

18- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$ إن معادلة المقارب المائل في جوار $-\infty$ هي:

$y = 3x + 1$	d	$y = 3x - 1$	c	$y = 3x$	b	$y = -x$	a

19- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$ الذي يقبل المستقيم $y = 3x$ مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ عندئذ يكون c تحت مقاربه على المجال:

$]2, +\infty[$	d	$]4, +\infty[$	c	$]-\infty, 4[$	b	$\mathbb{R}$	a

20- بفرض $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x\right) = \frac{15}{8}$ فمعادلة المقارب المائل للتابع $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$ عند $+\infty$:

$y = x$	d	$y = \sqrt{2}x + \frac{4}{3}$	c	$y = -\sqrt{2}x$	b	$y = \sqrt{2}x + \frac{15}{8}$	a

21- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}+2x$. الخط البياني لهذا التابع يقبل مقارباً مائلاً عند $-\infty$ معادلته

a	$y=2x+1$	b	$y=2x$	c	$y=2x-1$	d	$y=-2x$

22- كن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$ فإذا علمت ان $y=-x-1$ معادلة المقارب المائل للخط C_f عند $-\infty$ عندئذٍ قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

a	1	b	-1	c	2	d	-2

23- ليكن f التابع المعرف على R و المستقيم ان $y=-x-1$ معادلة المقارب المائل للخط C_f عند $-\infty$ عندئذٍ قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

a	1	b	$+\infty$	c	2	d	0

24- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$ فإذا علمت ان $y=-x+4$ معادلة المقارب المائل للخط C_f عند $-\infty$ عندئذٍ قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}\left\{\left(\frac{3x^2+1}{x^3+x}\right)f(x)\right\}$

a	3	b	-3	c	0	d	المعطيات غير كافية

25- ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=\frac{5-ax}{x-b}$. إذا علمت أن $x=2$, $y=3$ مستقيمين مقاربين للخط البياني للتابع f عندئذٍ الثنائية (a,b) هي :

a	$(2,-3)$	b	$(2,3)$	c	$(-2-3)$	d	$(2,5)$

26- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{2x^2-5x+4}{1-x}$ عندئذٍ أي من القضايا الآتية صحيحة

a	للخط C مقارب أفقي	b	$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$	c	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$	d	$y=3-2x$ مقارب مائل لـ C

27- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2-2mx+4}$ خطه البياني C عندئذٍ قيمة m ليكون المستقيم $d: y=x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

a	2	b	1	c	0	d	-1

28- ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-1}$ عندئذٍ معادلة المقارب المائل لخطه البياني:

a	$y=x$	b	$y=x-3$	c	$y=x+1$	d	$y=2x$

29- ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^2-3mx+1}{x-1}$ عندئذٍ قيمة m التي تجعل المستقيم $y=x-\frac{1}{2}$ مقارباً مائلاً لخطه البياني :

a	$\frac{1}{2}$	b	2	c	1	d	$\sqrt{2}$

30- ليكن f التابع المعرف وفق : $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9x+1}{4x+5}}$ عندئذٍ معادلة المقارب المائل لخطه البياني :

$y=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}$	d	$y=\frac{x}{2}+\frac{2}{3}$	c	$y=\frac{x}{2}$	b	$y=\frac{x}{2}+1$	a

31- ليكن f التابع المعرف على $[0,+\infty[$ وفق : $f(x)=2x-1+\sqrt{x^2+4x}$ عندئذٍ معادلة المقارب المائل لخطه البياني :

$2x$	d	$y=3x$	c	$y=3x+1$	b	$y=2x-1$	a

32- ليكن f التابع المعرف على R^* وفق $f(x)=5+\frac{1}{x(x^2+2)}$. خطه البياني يقبل مستقيماً مقارباً معادلته

$x=-1$	d	$y=5x$	c	$x=0$	b	$y=0$	a

33- ليكن C الخط البياني لتابع f معرف على R و يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ معادلته $y=3x-5$

عندئذٍ $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+f(x)}{x}$ تساوي

3	d	2	c	-2	b	-3	a

34- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=\frac{x+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$. و C يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=2$ عند $+\infty,-\infty$ و مقارب شاقولي $x=-1$ و أخيراً $\lim_{x\to 0}f(x)=1$ عندئذٍ

$b+c+d$ يساوي

1	d	$\frac{3}{2}$	c	$\frac{5}{2}$	b	3	a

35- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $]0,+\infty[$ وفق العلاقة

$f(x)=x+1+\lambda x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. عندئذٍ قيمة العدد λ التي تجعل للخط C مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته $y=x-3$

3	d	-3	c	-4	b	4	a

36- ليكن f تابعاً خطه البياني يقبل المستقيم $y=-2x+4$ مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$ عندئذٍ أي من القضايا الآتية صحيحة

يمكن التأكيد على عدم وجود مقارب أفقي عند $+\infty$	d	$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$	c	$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=-4$	b	$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$	a

الجلسة السادسة

الاستمرار :

شرط الاستمرار عند النقطة a :

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

و يأتي السؤال على صيغتين :

1- ادرس استمرار التابع

2- عين الثابت m ليكون f مستمراً

تدرب 9:

ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x^3-1} & ;\ x\neq 1\\ \dfrac{4}{3} & :x=1\end{cases}$$

ادرس استمرار f على R

تدرب 10 :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-lnx} & :x>0\\ 0 & :x=0\end{cases}$$

ادرس استمرار التابع f عند الصفر

تدرب 11: جد قيمة الثابت A ليكون f مستمرعلى R

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{2x} & :x\neq 0\\ 2A-\dfrac{1}{2} & :x=0\end{cases}$$

التفسير الهندسي للنهايات

أولاً: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

صيغة السؤال :

جد عدداً حقيقياً A بحيث $f(x)\in]a,b[$ من أجل $x>A$

:

1- نحدد المركز $l=\frac{b+a}{2}$

2- نحدد نصف القطر $\varepsilon=b-l$

3- نعوض في القانون $|u_n-l|<\varepsilon$

تدرب 12:

ليكن f التابع المعرف على $]e^{-2},+\infty[$ وفق

: $f(x)=\frac{lnx-1}{lnx+2}$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و ما هو التفسير الهندسي

2- جد عدداً حقيقياً A يحقق الشرط :

$f(x)\in]0.99,1.01[$ من أجل $x>A$

الحل :

-1

$$f(x)=\frac{lnx\left(1-\frac{1}{lnx}\right)}{lnx\left(1+\frac{2}{lnx}\right)}=\frac{1-\frac{1}{lnx}}{1+\frac{2}{lnx}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

2- نحدد المركز $l=\frac{1.01+0.99}{2}=1$

نحدد نصف القطر :

$$\varepsilon=b-l$$

$$\varepsilon=1.01-1=0.01=\frac{1}{100}$$

نعوض في القانون :

$$|u_n-l|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{lnx-1}{lnx+2}-1\right|<\frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{-3}{lnx+2}\right|<\frac{1}{100}$$

و لأن $x\to+\infty$ فإن $lnx+2>0$

$$\frac{3}{lnx+2}<\frac{1}{100}$$

$$lnx+2>300$$

$$lnx>298$$

$$x>e^{298}$$

فنختار $A=e^{298}$ أو أي عدد حقيقي أكبر منه

ثانياً: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

صيغة أولى : جد عدداً حقيقياً يحقق الشرط:

$x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ من أجل $f(x) > M$

صيغة ثانية : عين مجالاً I مركزه x_0 يحقق :

$f(x) > M$ عندما $x \in I$ أو $(x \in I \setminus \{x_0\})$

1- نضع $f(x) > M$
2- بما أن $x \to x_0$ فنستبدل البسط بـ A حيث A يساوي تقريباً البسط
3- نعزل المقام لنحاول الوصول إلى الشكل :
$|x - x_0| < \alpha$
4- بذلك نكون أوجدنا قيمة α
5- إذا أردنا المجال , فحسب خواص القيمة المطلقة :
$-\alpha < x - x_0 < \alpha$
نضيف x_0 للأطراف :
$x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$
فنجد المجال المطلوب

تدرب 13 :

ليكن f المعرف على $R \setminus \{1\}$ وفق :

$$f(x) = \frac{5x - 1}{(x-1)^2}$$

1- احسب نهاية $f(x)$ عند الواحد
2- جد عدداً حقيقياً α يحقق الشرط :
$f(x) > 10^3$ عندما
$x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[$

الحل :

-1

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

2- نضع :

$$f(x) > 10^3$$
$$\frac{5x - 1}{(x-1)^2} > 10^3$$

بما أن $x \to 1$ فإن $5x - 1 = A \approx 4$

$$\frac{A}{(x-1)^2} > 10^3$$
$$(x-1)^2 < \frac{A}{10^3}$$

نختار $\alpha = 3.6$ (قريب من 4 و يمكن جذره)

$$(x-1)^2 < \frac{3.6}{10^3}$$
$$(x-1)^2 < \frac{36}{10^4}$$

نجذر :

$$|x - 1| < \frac{6}{10}$$
$$|x - 1| < 0.06$$

إذن $\alpha = 0.06$

و إذا كان المطلوب مجالاً :

$$-0.06 < x - 1 < 0.06$$
$$1 - 0.06 < x < 1 + 0.06$$
$$0.94 < x < 1.06$$
$$I =]0.94, 1.06[$$

ثالثاً : $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

صيغة السؤال : جد عدداً حقيقياً A بحيث :

$f(x) > M$ عندما $x > A$

1- ننطلق من $f(x) > M$
2- نعزل x فنصل إلى $x > A$

رابعاً: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

صيغة السؤال :

جد مجالاً I مركزه x_0 بحيث $f(x) \in]a, b[$

من أجل $x \in I$

1- ننطلق من : $a < f(x) < b$
2- نعزل x فنصل إلى : $A < x < B$

نهاية تابع مركب :

إذا كان $g(x) = f(u(x))$ و طُلب حساب

$$\lim_{x \to a} g(x)$$

1- نحسب نهاية المضمون عند a أي :
$\lim_{x \to a} u(x) = l$
2- نستبدل المضمون بـ u و نعوض في f فنحصل على : $f(u)$
3- نحسب نهاية التابع الجديد عندما $u \to l$

الصيغة الأولى : ليكن $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x + 1}{3x + 1}\right)$

احسب نهاية f عند $+\infty$

1- نرمز للمضمون $u(x)$:

$$u(x)=\frac{\pi x+1}{3x+1}$$

2- نحسب نهاية $u(x)$ عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)=\frac{\pi}{3}$$

3- نضع $f(x)=\cos(u)$

$$\lim_{u\to\frac{\pi}{3}}\cos(u)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

الصيغة الثانية :

استنتج $\lim_{x\to a} f(f(x))$

بشكل مشابه تماماً :

1- نفرض المضمون $u(x)=f(x)$

2- نحسب $\lim_{x\to a} u(x)=l$

3- نضع المضمون u فنحصل على : $f(u)$

4- نحسب $\lim_{u\to l} f(u)$

مثال: ليكن $f(x)=\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2- استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

الحل :

1- $\lim_{x\to+\infty} f(x):\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x)=\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{1-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

2- نضع $u(x)=f(x)$:

وجدنا أن :

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)=0$$

بالتالي :

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{u\to0} f(u)$$
$$=\lim_{u\to0}\frac{e^u-1}{e^{2u}+1}$$
$$=\frac{1-1}{1+1}=0$$

تابع الجزء الصحيح :

تدرب 14 :

$$f(x)=2x+E(x)\ :x\in[0,3[$$

1- اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

2- ادرس استمرار f على المجال $]0,3[$

3- ارسم c_f

4- احسب النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}$

الجلسة السابعة

بنك النهايات

السؤال الأول : ليكن $f(x)=\sqrt{4x^2+5}$ خطه البياني C

احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right)$

ثم استنتج معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$

السؤال الثاني : ليكن C الخط البياني للتابع :

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2- أثبت أن $d: y=x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي لـ d مع C

4- أثبت أن f فردي

السؤال الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع :

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

1- جد الأعداد a,b,c التي تحقق أن :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}$$

2- استنتج معادلة المقارب المائل و ادرس وضعه النسبي مع C

السؤال الرابع: احسب $\lim_{x\to0} x(lnx)^2$

السؤال الخامس : ليكن $f(x)=\frac{3}{2+cosx}$

1- أثبت محدودية f

2- استنتج $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x)$

السؤال السادس : ليكن f التابع المعرف على $]e^{-1},+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{2+lnx}{1+lnx}$$

1- جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعطِ عدداً حقيقياً A يحقق أن $f(x)$ من المجال $]0.9,1.1[$ عندما $x>A$

2- استنتج $\lim_{x\to+\infty} f\left(f(x)\right)$

السؤال السابع : ليكن f التابع المعرف وفق على R وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xsinx}{\sqrt{x^2+1}-1} & : x\neq 0\\ m & : x=0\end{cases}$$

جد قيمة m ليكون f مستمراً عند الصفر

السؤال الثامن : احسب

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+sinx)}{x}$$

السؤال التاسع : $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-3}$

1- جد عددين a, b يحققان :

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$$

2- استنتج معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي له مع C

السؤال العاشر : ليكن $f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$

1- احسب $\lim_{x\to-1} f(x)$

2- جد مجالاً I مركزه -1 يحقق الشرط:

إذا انتمت x إلى I كان $f(x)>10^2$

السؤال الحادي عشر : أوجد نهاية التابع :

$$f(x)=\frac{cosx-1}{x^2}+\frac{1}{2}$$

عند الصفر

السؤال الثاني عشر :

ليكن $f(x)=2e^{-x}+x-2$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2- أثبت أن $d: y=x-2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي

السؤال الثالث عشر :

$$f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$$

ما نهاية f عند $-\infty$

السؤال الرابع عشر : ليكن

$$g(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2- نضع $f(x)=\frac{g(x)}{x}$. احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$

السؤال الخامس عشر :

ليكن $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x}$

احسب نهاية f عند أطراف مجال تعريفه

السؤال السادس عشر : احسب :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{e^x}$$

السؤال السابع عشر :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(1+lnx)$$

الجلسة الثامنة

1- ليكن f التابع المعرف على $I = [0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{kx} & : 0 \le x \le 2 \\ x & : x > 2 \end{cases}$$

قيمة k التي تجعل التابع f مستمراً على I هي :

$\sqrt{2}$	d	1	c	2	b	$\frac{1}{2}$	a

2- ليكن f التابع المعرف على المجال $]-\pi, \pi[$ وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{sinx} & : x > 0 \\ 2x - m & : x \le 0 \end{cases}$$

إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الصفر هي :

-2	d	2	c	-1	b	1	a

3- ليكن f التابع المعرف على مجال مناسب I فق :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(ax)}{xtan(ax)} & : x < 0 \\ \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{b + x} - \sqrt{b}\right) & : x > 0 \\ \dfrac{1}{6} & : x = 0 \end{cases}$$

عندئذٍ إذا علمت أن f مستمر عند الصفر فإن :

$a = 2b$	d	$b = \frac{1}{a^2}$	c	$a = \frac{1}{b^2}$	b	$a = b$	a

4- ليكن f التابع المعرف وفق على R وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{cosx - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} & : x \ne 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$$

فإن قيمة m التي تجعل f مستمراً

0	d	1	c	-1	b	$\frac{1}{2}$	a

5- إذا علمت أن $f'(1) = 2\sqrt{3}$ فإن قيمة النهاية $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 1}{\sqrt{x} - 1}$ تساوي :

$\frac{\sqrt{3}}{2}$	d	$2\sqrt{3}$	c	$\sqrt{3}$	b	$4\sqrt{3}$	a

6- نهاية التابع $\frac{tanx - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

0	d	-1	c	1	b	2	a

7- ليكن f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق $f(0) = m$, $f(x) = \frac{x}{x - lnx}$ عندئذٍ قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الصفر

$m = e^{-1}$	d	$m = 0$	c	$m = 1$	b	$m = e$	a

8- لنعرف التوابع f, h, g وفق: $g(x) = x\sqrt{x}$, $h(x) = x|x|$, $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$ عندئذ

f, g, h اشتقاقية عند الصفر	d	g غير اشتقاقي عند الصفر	c	h, g اشتقاقيان عند الصفر	b	f اشتقاقي عند الصفر	a

9- النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{cosx-1}{x}$ تساوي:

0	d	1	c	-1	b	$-\infty$	a

10- بفرض f تابعاً اشتقاقياً على I فإن:

f يملك مماساً شاقولياً	b	f غير مستمر على I	a
f يقبل مماس عند كل نقطة من نقاطه	d	f يملك نصفي مماس	c

11- ليكن التابع المعرف وفق $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} & ; x \neq 1 \\ 2 & ; x = 1 \end{cases}$، إن $f(2)$ تساوي:

غير ذلك	d	1	c	5	b	2	a

12- لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+4} - 6x & ; x \neq 0 \\ 2\sqrt{3} & ; x = 0 \end{cases}$ ، إن $f(0)$ يساوي:

$\sqrt{5}$	d	2	c	$-2\sqrt{3}$	b	$2\sqrt{3}$	a

13- إن التابع f المعرف وفق $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & ; x \neq 2 \\ 4 & ; x = 2 \end{cases}$ ، هل التابع f مستمر عند $a = 2$؟

لا	b	نعم	a

14- إن التابع f المعرف وفق $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & ; x \neq 1 \\ 5 & ; x = 1 \end{cases}$ ، هل التابع f مستمر عند $a = 1$؟

لا	b	نعم	a

15- ليكن التابع f المعطى بالعلاقة $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x} & ; x \neq 0 \\ m-1 & ; x = 0 \end{cases}$ ، إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند 0 هي:

2	d	1	c	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{1}{2}$	a

16- ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} & ; x \neq 0 \\ m+1 & ; x = 0 \end{cases}$ ، إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند 0 هي:

غير ذلك	d	$-\frac{9}{8}$	c	$-\frac{1}{8}$	b	$\frac{9}{8}$	a

17- ليكن التابع المعطى بالعلاقة $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2+2\cos x}-\sqrt{3+\cos x}}{x^2} & ; x \neq 0 \\ 2m-1 & ; x = 0 \end{cases}$ ، إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند 0

هي:

غير ذلك	d	$\frac{1}{2}$	c	$\frac{7}{16}$	b	$-\frac{7}{16}$	a

18- ليكن f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق $f(0) = m$ ، $f(x) = \frac{x}{x-lnx}$ عندئذٍ قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الصفر

$m = e^{-1}$	d	$m = 0$	c	$m = 1$	b	$m = e$	a

19- ليكن f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(0)=0$ ، $f(x)=\frac{x}{x-lnx}$ عندئذٍ $f'(0)$ تساوي

e^{-1}	d	e	c	1	b	0	a

20- ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2\sqrt{x-1} & : x>1\\ (1-x)\sqrt{1-x} & : x\leq 1\end{cases}$$

عندئذٍ التابع f اشتقاقي على :

R	d	$R\backslash\{0\}$	c	$R\backslash\{-1\}$	b	$R\backslash\{1\}$	a

1- فرض أن C الخط البياني لتابع f معرف على المجال $]1,+\infty[$ وأن A عدد حقيقي مثبت وأنه من أجل كل $x>A$ يحقق أن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1{,}99,2{.}01[$ عندئذٍ

$x=2$ مقارب شاقولي للخط C نحو $-\infty$	b	$x=2$ مقارب شاولي للخط C نحو $+\infty$	a
$\boldsymbol{y=2}$ مقارب أفقي للخط $\boldsymbol{C}$ في جوار $+\infty$	d	$y=2$ مقارب أفقي للخط $\boldsymbol{C}$ في جوار $-\infty$	c

2- إذا كان f تابعاً يحقق أنه من أجل أي عدد حقيقي M يوجد عدد حقيقي A بحيث مهما يكن $x>A$ فإن $f(x)>M$ عندئذٍ:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	b	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	a
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	d	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	c

3- إذا كان $f(x)=\frac{2lnx-1}{lnx+1}$ فإن أصغر حقيقي A يحقق أنّ $f(x)\in]1.99,2.01[$ عندما $x>A$

$\ln(2)$	d	e	c	e^{99}	b	2	a

4- ليكن $f(x)=\frac{e^{x+1}-2}{e^x+e}$ فإن أصغر عدد حقيقي A يحقق أنّ $|f(x)-e|<10^{-3}$ عندما $x>A$

$\ln(2)$	d	$\frac{\ln(10^{10}-3)}{2}$	c	$10\ln(10)$	b	$\ln(10^3(2+e^2)-e)$	a

5- إذا كان $f(x)=\ln(e^{2x}+3)$ فإن أصغر عدد حقيقي A يحقق أن $f(x)>10\ln(10)$ عندما $x>A$

$\ln(2)$	d	$\frac{\ln(10^{10}-3)}{2}$	c	$10\ln(10)$	b	$\ln(10^3(2+e^2)-e)$	a

6- ليكن f التابع المعرف على $]-\infty,1[$ وفق $f(x)=\frac{2x-3}{1-x}$. إن أكبر عدد حقيقي A يحقق الشرط : إذا كان $x<A$ كان $f(x)\in]-2.05,-1.95[$

21	d	**−19**	c	**−20**	b	**−21**	a

7- ليكن f التابع المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ عندئذٍ أصغر قيمة للعدد الحقيقة A الذي يحقق أن $f(x)\in]0.9,1.1[$ أياً تكن $x>A$ هي :

9	d	**29**	c	**81**	b	**100**	a

8- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=\sqrt{5x^2-1}-x$ عندئذٍ C يتقاطع مع محور الفواصل في :

a	نقطة فاصلتها $\frac{1}{4}$	b	نقطة فاصلتها $\frac{1}{2}$	c	نقطة فاصلتها $-\frac{1}{2}$	d	نقطتين فاصلتيهما $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

1- ليكن التابع f المعرف على $[1,3[$ وفق $f(x) = 2x - 3E(x)$, إن عبارة f بصيغة مستقلة عن $E(x)$ نعطى بالشكل:

a	$\begin{cases} 2x-3 \,;\, x \in [1,2[\\ 2x-6 \,;\, x \in [2,3[\end{cases}$	B	$\begin{cases} 1 \,;\, x \in [1,2[\\ 2 \,;\, x \in [2,3[\end{cases}$	c	$\begin{cases} 2x+3 \,;\, x \in [1,2[\\ 2x-6 \,;\, x \in [2,3[\end{cases}$	d	$\begin{cases} 2x-3 \,;\, x \in [1,2[\\ 2x+6 \,;\, x \in [2,3[\end{cases}$

2- نهاية المقدار $\frac{x+E(x^2)}{x^2+1}$ عند $+\infty$ تساوي:

a	2	b	1	c	0	d	3

3- نهاية المقدار $\frac{1+E(\ln(x))}{x}$ عند $+\infty$ تساوي:

a	2	b	1	c	0	d	3

4- ليكن التابع f المعرف على $I]-2,0[$ وفق $f(x) = \left(x + mE(x)\right)^2$ حيث $m \in R^*$, فإن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند (-1) هي :

a	$-\frac{2}{3}$	b	$\frac{2}{3}$	c	$\frac{3}{2}$	d	$-\frac{3}{2}$

5- التابع $E(x)$:

a	متزايد	b	متزايد تماماً	c	متناقص	d	متناقص تماما

6- التابع f المعرف وفق $f(x) = E(x) - x$ محصور بين المستقيمين

a	$y = -1 , y = 0$	b	$y = -1 , y = x$	c	$y = 2 , y = 0$	d	$y = -1 , y = 1$

7- مجموعة تعريف التابع $f(x) = \frac{1}{1-E(x)}$

a	$\boldsymbol{R}\backslash\{\mathbf{1}\}$	b	$[\mathbf{1},\mathbf{2}[$	c	$\boldsymbol{R}\backslash[\mathbf{1},\mathbf{2}[$	d	$\boldsymbol{R}\backslash]\mathbf{1},\mathbf{2}[$

الجلسة التاسعة

الاشتقاق

تعريف العدد المشتق :

الصيغة الأولى : أثبت أن التابع f قابل للاشتقاق عند النقطة a

1- نشكل التابع $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
2- نحسب $\lim_{x\to a} g(x)$
3- إذا كان الجواب : عدد فهو قابل (يقبل مماس ميله الجواب)
إذا كان الجواب : لانهاية غير قابل (يقبل مماس شاقولي x = a)
4- في حال وجود قيمة مطلقة فإننا نحسب النهاية من اليمين و النهاية من اليسار فإذا كان :

$$\lim_{x\to a^+} g(x) \neq \lim_{x\to a^-} g(x)$$

فهو غير قابل للاشتقاق (يقبل نصفي مماسين)

تدرب 15:	
ادرس قابلية اشتقاق f عند a	
1	$f(x) = x\ln(x+1)\ , a = 0$
2	$f(x) = \sin(\sqrt{x})\quad , a = 0^+$
3	$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - lnx} & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ $a = 0$

الصيغة الثانية : إزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

تدرب 16 :

ليكن $f(x) = e^x$ و المطلوب:

1- احسب $f(ln2)$ و $f'(x)$ و $f'(ln2)$
2- استنتج قيمة النهاية :

$$\lim_{x\to ln2} \frac{e^x - 2}{x - ln2}$$

تدرب 17 : باستخدام تعريف العدد المشتق احسب النهاية :

$$\lim_{x\to e} \frac{xlnx - e}{x - e}$$

معادلة المماس و نصف المماس :

لتعيين معادلة المماس نحتاج معرفة :

1- الفاصلة a
2- التراتيب $f(a)$
3- الميل $m = f'(a)$

لنعوض في القانون :

$$T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

أما نصف المماس من اليمين :

$$T: y = f'(a^+)(x-a) + f(a)$$

و نصف المماس من اليسار :

$$T: y = f'(a^-)(x-a) + f(a)$$

تدرب 18 : اكتب معادلة المماس الأفقي للخط C_f للتابع $f(x) = e^{2x} - 2x$

تدرب 19 : اكتب معادلة المماس للخط C_f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب حيث :

$$f(x) = \ln(x+1)$$

تدرب 20 : اكتب معادلة الماس للخط C_f للتابع

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

الموازي للمستقيم $y - 4x = 0$

تدرب 21 :

ليكن $f(x) = \frac{x+|x|}{x+2}$

1- ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر
2- اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للتابع f

الجلسة العاشرة

التقريب التآلفي :

نجزئ العدد صعب الحساب إلى جزأين :

a , h

نعوض في القانون :

$$\boxed{f(a+h)\approx hf'(a)+f(a)}$$

تدرب 22 :

ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & : x\neq 0\\ 1 & : x=0\end{cases}$$

1- أثبت أن f مستمر عند الصفر

2- احسب $f'(x)$ على R^*

3- جد قيمة تقريبية لـ $f(0.1)$

الاشتقاق المركب :

الصيغة الأولى :

أثبت أن التابع $g(x)=f\big(u(x)\big)$ اشتقاقي على I :

يجب تحقق شرطان :

1- المضمون اشتقاقي على المجال المعطى

2- المضمون ينتمي إلى مجال اشتقاقية f

الصيغة الثانية : احسب مشتق $g(x)=f(u(x)$

$$g'(x)=f'\big(u(x)\big).u'(x)$$

تدرب 23 : ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{lnx}{x+1}$$

1- احسب $f'(x)$

2- نضع $g(x)=f(sinx)$

أ- أثبت أن g اشتقاقي على $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

ب- احسب $g'(x)$ على I

تدرب 24 : ليكن f التابع المعرف وفق :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x^2}$$

1- احسب $f'(x)$

2- استنتج مشتقات التوابع :

$$g(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$$

$$h(x)=\frac{e^{sinx}-1}{\sin^2 x}$$

المشتقات من مراتب عليا :

1- نحسب $f'(x),f''(x)$

2- نثبت بالتدريج صحة العلاقة التي تعطي صيغة $f^{(n)}(x)$ بدلالة n

حيث للانتقال من الفرض إلى الطلب نشتق الطرفين مع مراعاة أن :

$$\left(f^{(n)}(x)\right)'=f^{(n+1)}(x)$$

تدرب 25:

$$f(x)=-\ln(1-x)$$

1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$

2- أثبت بالتدريج أنه من أجل كل $n\geq 1$:

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

دراسة اطراد تابع و حل المتراجحات المختلطة:

1- نشتق التابع f

2- نعدم المشتق

3- ننظم جدول اطراد

و في حال طُلب استنتاج متراجحة فإننا نستنتجها من جدول الاطراد و تحديداً من حقل $f(x)$

تدرب 26 : ليكن $g(x)=e^x+2-x$

1- ادرس اطراد $g(x)$

-2 استنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$

تدرب 27 :

أثبت أن $\ln(x+1) \leq \sqrt{x+1}$ مهما يكن $x > -1$

الجلسة الحادية عشر	
حول دراسة تغيرات تابع	
1	إيجاد مجموعة التعريف
2	حساب النهايات عند الأطراف المفتوحة والصور عند الأطراف المغلقة مع ذكر المقاربات إن وجدت
3	ذكر مجال اشتقاق التابع ثم حساب التابع المشتق
4	نعدم التابع المشتق
5	نصور القيم التي عدمت التابع المشتق
6	جدول التغيرات من الشكل: x : مجموعة التعريف + القيم التي عدمت المشتق f' : إشارات + أصفار + شلمونات f : أسهم + شلمونات
ملاحظة	في حال أردت دراسة اطراد التابع فقط ستطبق نفس الخطوات السابقة ولكن بدون الرقم (2)
حول مبرهنة القيمة الوسطى	
مبرهنة الوجود ومبرهنة الوحدانية	شرط وجود حل على المجال $[a,b]$: -1 الاستمرار على المجال -2 $k \in f([a,b])$ شرط وجود حل وحيد على المجال $[a,b]$: -1 الاستمرار على المجال -2 الاطراد على المجال -3 $k \in f([a,b])$ أي مرور السهم من العدد k
ما عدد حلول المعادلة $f(x) = k$	-1 ندرس تغيرات التابع -2 نقوم بِعدّ مرات مرور السهم من k
التأكد من وجود حل للمعادلة $f(x) = 0$ على مجال	$f(a).f(b) < 0$
حصر حل المعادلة $f(x) = 0$ ضمن مجال طوله 1	-1 نحدد من الرسم أو من جدول التغيرات مجالاً من النمط $[a,+\infty[$ أو من $]-\infty,a]$ بحيث ينتمي الحل له

-2 نوجد $f(a), f(a+1), f(a+2), \dots$ حتى نحصل على تغير في الإشارة	

-1 بفرض f تابع معرف على R^* و يحقق أنّ :

- $f(x) = f(-x)$
- عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ على المجال $]0, +\infty[$ ثلاثة حلول مختلفة

عندئذٍ عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ على R^*

a	3	b	4	c	5	d	6

-2 عدد حلول المعادلة $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0$

a	0	b	1	c	2	d	5

-3 عدد حلول المعادلة $x(2x+1)^2 = 5$

a	0	b	1	c	2	d	3

-4 ن f تابع متزايد تماماً على المجال $I = [a, b]$ و مستمراً عليه عندئذٍ الشرط اللازم و الكافي ليكون للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال I هو :

a	$f(a.b) < 0$	b	$f(a)f(b) < 0$	c	$f(a)f(b) > 0$	d	$f(a).f(b) = 0$

-5 ليكن التابع f المعرف على المجال $]1, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$ عندئذ عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

a	0	b	1	c	2	d	3

-6 عدد حلول المعادلة $3x + \cos(x) = 0$:

a	0	b	1	c	2	d	3

-7 عدد حلول المعادلة $x^3 - x - 1 = 0$:

a	0	b	1	c	2	d	3

-8 عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ علماً أنّ $I =]1, +\infty[$; $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$:

a	0	b	1	c	2	d	3

-9 عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ حيثُ $f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$:

a	0	b	1	c	2	d	3

-10 ليكن $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$ فإنّ عدد حلول المعادلة $f(x) = g(x)$:

a	0	b	1	c	2	d	3

-11 ليكن $f(x) = 5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$ المعرّف على المجال $]4, +\infty[$ فإذا علمت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلّاً وحيداً α فإنّ هذا الحل ينتمي إلى المجال:

a	$]7, 8[$	b	$]6, 7[$	c	$]5, 6[$	d	$]4, 5[$

حول استنتاج إشارة تابع		
1	↗ عدد سالب ↘	$f(x)$
	$f(x) \le$ عدد سالب < 0	
2	↗ 0 ↘	$f(x)$
	$f(x) \le 0$	
3	↘ عدد موجب ↗	$f(x)$
	$f(x) \ge$ عدد موجب > 0	
4	↘ 0 ↗	$f(x)$
	$f(x) \ge 0$	
5	سالب ↗↗↗↗↗ سالب	$f(x)$
	$f(x) \le 0$	
6	موجب ↘↘↘↘↘ موجب	$f(x)$
	$f(x) \ge 0$	
7	↗↗ 0 ↗↗	$f(x)$
	سالب على المجال اليساري وموجب على المجال اليميني	

متى نستخدم ما سبق؟	1- عندما يكون السؤال عن دراسة إشارة تابع 2- متراجحات مختلطة (تابع مساعد) 3- دراسة إشارة مشتق مختلط (تابع مساعد) 4- الوضع النسبي عندما يكون الفرق تابع مختلط (تابع مساعد)

حول الأوضاع النسبية		
الفرق تابع أولي (نوع واحد فقط)	الفرق تابع مختلط	الفرق من الشكل $f(x) - \ell$
1- ندرس إشارة الفرق (إما واضح أو نعدم ونشكل جدول)	1- نسمي الفرق تابعاً مساعداً 2- ندرس اطراده 3- نستنتج إشارته	1- ندرس تغيرات f 2- نضيف سطر $f(x) - \ell$ إلى جدول التغيرات **ملاحظة:** عند طرح عدد من $f(x)$ يطرح من صوره ونهاياته

12- إذا علمت أنّ $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$ يقبل مماساً عند الصفر معادلته $y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$ عندئذٍ:

a	C فوق T على $\mathbb{R}$	b	C تحت T على $\mathbb{R}$	c	C فوق T على $]0\,,+\infty[$	d	C تحت T على $]0\,,+\infty[$

13- أوسع مجال تكون عليه المتراجحة $\ln(x+1) \ge \frac{x}{x+1}$ هو:

a	$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	b	$]-\infty, -1[$	c	$]-1\,,+\infty[$	d	$\mathbb{R}$

14- أوسع مجال تكون عليه المتراجحة $\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ هو:

a	$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	b	$]-\infty, -1[$	c	$]-1\,,+\infty[$	d	$\mathbb{R}$

15- أوسع مجال يكون عليه $e^x > x$ هو:

a	$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	b	$]-\infty,-1[$	c	$]-1\,,+\infty[$	d	$\mathbb{R}$

16- أوسع مجال يكون عليه $\ln(x) \leq 2\sqrt{x}$ هو:

a	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	b	$]-\infty,0[$	c	$]0\,,+\infty[$	d	$\mathbb{R}$

17- ليكن $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ عندئذٍ واحدة من القضايا الآتية خاطئة:

a	$A(1\,,2)$ مركز تناظر .	b	C فوق مقاربه الأفقي على $]1\,,+\infty[$
c	C تحت مقاربه الأفقي على $]1\,,+\infty[$	d	f متناقص تماماً .

18- إذا كان $f(x) = (x+1)\ln(x)$ فإنّ إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة:

a	$g(x) = x\ln(x) + x + 1$	b	$g(x) = \ln(x) + x + 1$	c	$g(x) = x\ln(x) + x$	d	$g(x) = x^2\ln(x) + x + 1$

19- إذا كان $f(x) = \frac{1}{x} + x\ln(x)$ فإنّ إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة:

a	$g(x) = x^2\ln(x) + x^2 - 1$	b	$g(x) = x^2\ln(x) - 1$	c	$g(x) = x^2\ln(x)$	d	$g(x) = x^2\ln(x) + x^2 - 2$

20- التابع $f(x) = (x+1)\ln(x)$:

a	يقبل قيمة حديّة عند $a = e^{-3}$	b	يقبل قيمة حديّة عند $a = e^{-\frac{3}{2}}$
c	يقبل قيمتان حديّتان.	d	مطّرد تماماً .

21- بفرض f تابع يحقق أنّ $f'(x) = \frac{x^2\ln(x)+x^2-1}{x^2}$ وبملاحظة أنّ $f'(1) = 0$ فإنّ c_f:

a	يقبل قيمة حديّة عند $a = 1$	b	يقبل قيمة حديّة عند $a = 0$
c	يقبل قيمتان حديّتان.	d	لا يقبل قيم حديّة.

حول التقابل والتقابل العكسي

شرط أن يكون f تقابل	1- f مستمر على I 2- f مطرد على I
معنى أن يكون f تقابل	أي يوجد له تابع عكسي g ندعوه "التقابل العكسي" ونرمز له $f^{-1}(x)$ ويحقق: 1- $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ 2- c_f و c_g متناظران بالنسبة لمنصف الربع الأول والثالث $y = x$
إثبات أن f و g يمثلان تقابلاً وتقابله العكسي	1- نثبت أن كل من f و g يحقق شرط التقابل 2- نثبت أن $f(g(x)) = g(f(x)) = x$
إيجاد التابع العكسي "التقابل العكسي"	1- $D_g = f(I)$ 2- نضع $y = f(x)$ 3- نبدل كل x بـ y وكل y بـ x أي $x = f(y)$ 4- نعزل y فنحصل على $y = g(x)$

حول مشتقات من مراتب عليا

تمهيد	1- ترميز: $f''(x) = f^{(2)}(x)$ $f'''(x) = f^{(3)}(x)$

وهكذا يكون رمز المشتق من المرتبة n هو:

$$f^{(n)}(x)$$

2- إن:

$$f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]'$$

3- أنصحك بحفظ أن المتتالية:

$1,1,2,6,24 \ldots = 0!\,,1!\,,2!\,,3!\,,4!\ \ldots$

4- إن التناوب بالإشارة يعبّر عنه بصيغتين:

a- إذا كان أول حد موجباً $(-1)^{n+1}$ حيث $n \geq 1$

b- إذا كان أول حد سالباً $(-1)^{n}$ حيث $n \geq 1$

5- في المشتقات من مراتب عليا نقبل أن:

$$[\sin(wx)]' = w\sin\left(wx + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$[\cos(wx)]' = w\cos\left(wx + \frac{\pi}{2}\right)$$

وعليه يكون:

$$[\sin(wx)]^{(n)} = w^n \sin\left(wx + n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$[\cos(wx)]^{(n)} = w^n \cos\left(wx + n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

6- إن:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$$

Hero’s idea

الطريقة الغشاشة:

1- نوجد المشتقين من المرتبة 3 و 4

2- نعوض $n = 3$ و $n = 4$ في الخيارات ونقارن

1- المشتق من المرتبة الثالثة للتابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ يساوي :

a	$-\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$	b	$-\frac{3\sqrt{x}}{8x^4}$	c	$\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$	d	$\frac{3\sqrt{x}}{8x^4}$

2- مشتق التابع f المعرف على R وفق $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ يساوي :

a	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	b	$-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	c	$\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$	d	0

3- ليكن $f(x) = 1 + x + 3x^2 + 4x^5 + 5x^6$ عندئذٍ المشتق من المرتبة السابع للتابع f :

a	0	b	720	c	$120x^5$	d	1

4- ليكن $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$ وليكن المستقيم $y = 1$ فإن C فوق المماس على المجال:

a	$]1, +\infty[$	b	$\mathbb{R}$	c	$]0, +\infty[$	d	$]-\infty, 0[$

5- ليكن f تابعاً معرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{3x}{x+1}$ فإن تقابله العكسي يعطى بالشكل:

a	$f^{-1}(x) = \frac{x}{3-x}$	b	$f^{-1}(x) = \frac{x}{x+1}$	c	$f^{-1}(x) = \frac{2x}{3-x}$	d	$f^{-1}(x) = \frac{x}{3-3x}$

6- ليكن g و f تابعان معرفان وفق $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ و $g(x) = \frac{2x+3}{1-x}$ فإن $f\big(g(x)\big)$ يساوي:

$3x-5$	d	$\frac{x}{x+1}$	c	$2x$	b	x	a

7- عبارة المشتق من المرتبة n للتابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ تعطى بالشكل:

$\frac{n!}{(1-x)^{n-1}}$	d	$\frac{n!}{(1-x)^{n}}$	c	$\frac{(n-1)!}{(1-x)^{n+1}}$	b	$\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$	a

8- عبارة المشتق من المرتبة n للتابع $f(x)=\ln(x)$ تعطى بالشكل:

$\frac{n!}{(x)^{n-1}}$	d	$(-1)^n\frac{n!}{(x)^{n}}$	c	$\frac{(n-1)!}{(x)^{n+1}}$	b	$(-1)^{n+1}\frac{n!}{(x)^{n}}$	a

9- عبارة المشتق من المرتبة n للتابع $f(x)=\cos(3x)-\sin(x)$ تعطى بالشكل:

$\cos\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$	d	$3^n\cos(3x+n\pi)-\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$	c	$3^n\cos\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)-\sin(x)$	b	$3^n\cos\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$	a

حول التوابع المركبة	
نهاية تابع مركب	إذا كان $f(x)=g(u(x))$ فلحساب نهاية $f(x)$ عند a نتبع الخطوات: 1- نحسب نهاية المضمون $u(x)$ عند a (ونفرض الجواب ℓ) 2- نحسب نهاية $g(x)$ عند ℓ 3- مبروك عليك!!!!
	إذا كان التابع من النمط $\frac{\sin(f(x)-2)}{f(x)-2}$ أو مثلاً $\left(\sqrt{2+\frac{1}{f(x)}}-\sqrt{2}\right)f(x)$ وعلمنا نهاية $f(x)$ فإننا: 1- نستبدل $f(x)$ بـ t 2- نجعل t تسعى لنهاية $f(x)$ (للجواب تبع النهاية)
مشتق تابع مركب	القانون العام: $[f(u(x))]'=f'(u(x)).u'(x)$
Hero's ideas	• إذا كان $g'(x)=0$ فإن $g(x)$ تابع ثابت • إذا كان $g(x)$ تابع ثابت فإن $g(x)=g$ (أي عدد) • نهاية التابع الثابت تساويه • إذا كان $g(x)$ تابع ثابت فإنه خطه البياني مستقيم أفقي معادلته الثابت $y=$

1- ليكن f التابع المعرف على $]3,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{3x-1}{x-3}$ عندئذٍ نهاية $f(f(x))$ عند 3 هي

غير موجودة	**d**	**3**	**c**	$+\infty$	**b**	$-\infty$	**a**

2- إذا كان $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ تساوي:

2	**d**	$\frac{3}{5}$	**c**	$\frac{2}{3}$	**b**	$\frac{5}{3}$	**a**

3- إذا كان $f(x)=\frac{x+2}{x}$ و $g(x)=\frac{2}{x-1}$ عندئذٍ $f(g(x))$ يساوي:

$\frac{x+1}{x-1}$	d	$-x$	c	$\frac{1}{x}$	b	x	a

4- ليكن f و g التابعان المعرفان وفق $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \sin x$ عندئذٍ يكون التركيب $(gof)(x)$ يساوي

$\sin(x^2) - 1$	d	$(\sin x - 1)^2$	c	$\sin^2 x - 1$	b	$\sin(x^2 - 1)$	a

5- بفرض I مجالاً يجقق أن $0 \notin I$ و $g(x) \neq 0$ مهما كانت $x \in I$ و g اشتقاقي على I . فأذا علمت أن :

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad (fog)(x) = x$$

فإن $g'(x)$ يساوي :

$g(x)$	d	$f(x)$	c	x	b	1	a

6- ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ عندئذٍ $\sqrt{1+x^2}f'(x)$ يساوي

$-f(x)$	d	$f(x)$	c	1	b	0	a

7- ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$ و ليكن $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ عندئذٍ

$g(x) = -f(-x)$	d	$g(x) = -f(x)$	c	$g(x) = f(-x)$	b	$g(x) = f(x)$	a

8- ليكن f تابعاً معرفاً على R يحقق أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ولنضع $g(x) = f(x) + f(-x)$ عندئذٍ واحدة من القضايا الآتية خاطئة

التابع g غير محدود	d	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2f(0)$	c	التابع g ثابت	b	C_g متناظر لمحور التراتيب	a

9- ليكن f تابعاً معرفاً على R يحقق أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ولنضع $g(x) = f(x) + f(\frac{1}{x})$ عندئذ واحدة من القضايا الآتية خاطئة

التابع g ثابت	b	التابع g متزايد	a
مساحة السطح المحصور بين C_g و محوري الإحداثيات و المستقيم $x = \frac{1}{2}$ تساوي $f(1)$	d	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2f(1)$	c

10- ليكن f تابعاً معرفاً على R يحقق أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ولنضع $g(x) = f(\tan x) - x$ عندئذٍ $g'(x)$ يساوي :

$\frac{1}{1+\tan^2 x} - 1$	d	$\tan^2 x$	c	$\frac{1}{1+\tan^2 x}$	b	0	a

11- ليكن f التابع المعرف على $]-5, \infty[$ وفق $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ عندئذٍ $f(f(x))$ يُعطى بالقاعدة

$\frac{x+9}{3x+11}$	d	$-\frac{x+9}{3x+11}$	c	$\frac{-x+9}{3x+11}$	b	$\frac{-x+6}{3x+11}$	a

12- ليكن f تابع ليس زوجي و ليس فردي و معرف على R و g تابع معرف على R وفق $g(x) = f(x) + f(-x)$ عندئذٍ يكون التابع g :

زوجياً	d	ليس ثابتاً	c	دورياً	b	فردياً	a

13- بفرض f تابع معرف على R ويحقق أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ وليكن g معرف على R وفق:
$g(x) = f(x) + f(-x)$

عندئذٍ مشتق التابع g يساوي:

$g'(x) = 1$	d	$g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	c	$g'(x) = 0$	b	$g'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$	a

14- بفرض f تابع معرف على R ويحقق أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ وليكن g معرف على R وفق:

$$g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

عندئذٍ مشتق التابع g يساوي:

$g'(x) = 1$	d	$g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	c	$g'(x) = 0$	b	$g'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$	a

15- بفرض f تابع معرف على R ويحقق أن $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ وليكن g معرف على R وفق:

$$g(x) = f(tanx) - x$$

عندئذٍ مشتق التابع g يساوي:

$g'(x) = 1$	d	$g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	c	$g'(x) = 0$	b	$g'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$	a

16- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-1,1\}$ وفق $f(x) = |x-1| + \frac{1}{x^2-1}$ إن معادلة المماس للخط C في النقطة منه التي فاصلتها صفر هي :

$y = -x + 1$	d	$y = x - 1$	c	$y = -x$	b	$y = x$	a

17- بفرض $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2+x+3}$ عندئذٍ عدد المماسات للخط C_f المارة من المبدأ (وليس بالضرورة في المبدأ)

3	d	2	c	1	b	0	a

الجلسة الثانية عشر

التابع الفردي و التابع الزوجي

الشرط الأول : $x \in D_f \to -x \in D_f$

الشرط الثاني : $f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{:زوجي} \\ -f(x) & \text{:فردي} \end{cases}$

الصفات التناظرية :

التابع الفردي متناظر بالنسبة للمبدأ

التابع الزوجي متناظر لمحور التراتيب

تدرب 28 :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,2]$ وفق :

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

1- ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $a = 2$ و $a = -2$ و فسر النتائج هندسياً

2- أثبت أن f فردي و اذكر الصفة التناظرية

3- ادرس تغيرات f على المجال $[0,2]$

4- ارسم c_f

5- استنتج الخط البياني للتابع g المعرف وفق :

$$g(x) = |x|\sqrt{4-x^2}$$

تدرب 29 :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف وفق :

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

1- تحقق أن $D_f =]-2,2[$

2- أثبت أن f فردي و استنتج الصفة التناظرية

3- ادرس تغيرات f على المجال $]-2,0]$

4- ارسم c_f

5- استنتج الخط البياني للتابع:

$$g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$$

مركز التناظر

تكون النقطة $I(a,b)$ مركز تناظر للخط c_f إذا تحقق شرطان :

الشرط الأول :

$$x \in D_f \rightarrow 2a - x \in D_f$$

1- ننطلق من $x \in D_f$
2- نضرب الطرفين بناقص (إذا كانت مجموعة التعريف على شكل مجال نعكس ترتيب الأطراف)
3- نضيف للطرفين $2a$
4- نصل إلى $2a - x \in D_f$

الشرط الثاني :

$$f(2a-x) + f(x) = 2b$$

1- نحسب $f(2a-x)$ باستبدال كل x بـ $2a - x$
2- نحسب المجموع :
$f(2a-x) + f(x)$
3- نصل إلى $2b$

تدرب 30 :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-1\}$ وفق : $\mathrm{f(x)} = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$

1- أثبت أن $I(-1,-3)$ مركز تناظر
2- جد الأعداد a, b, c بحيث يكون $f(x) = a + b + \frac{c}{x+1}$
3- استنتج معادلة المقارب المائل و ادرس الوضع النسبي لهما
4- ادرس تغيرات f
5- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم c_f
6- استنتج الخط البياني للتابع :

$$g(x) = \frac{2x^2 - x + 7}{1 - x}$$

تدرب 31 :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]1,3[$ وفق :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

1- ادرس تغيرات f
2- أثبت أن I(2,0) مركز تناظر
3- ارسم c_f

حول إيجاد مركز التناظر	
التابع يملك مقارب شاقولي $x = x_0$ ومقارب أفقي $y = y_0$ فقط	$I(x_0, y_0)$
التابع يملك مقارب شاقولي $x = x_0$ ومقارب مائل $y = ax + b$	فاصلة مركز التناظر هي x_0 تراتيب مركز التناظر هي y_0 الناتجة عن تعويض x_0 في معادلة المقارب المائل
التابع يقبل مقاربين شاقوليين $x = x_1 , x = x_2$	فاصلة مركز التناظر تساوي $\frac{x_1+x_2}{2}$ تراتيب مركز التناظر تساوي $f(x_0)$
التابع يقبل مقاربين أفقيين $y = y_1 , y = y_2$ ومقارب شاقولي $x = x_0$	فاصلة مركز التناظر x_0 تراتيب مركز التناظر $\frac{y_1+y_2}{2}$
التابع يقبل مقاربين شاقوليين $x = x_1 , x = x_2$ ومقارب مائل معادلته $y = ax + b$	فاصلة مركز التناظر تساوي $\frac{x_1+x_2}{2}$

تراتيب مركز التناظر هي y_0 الناتجة عن تعويض x_0 في معادلة المقارب المائل	

1- ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ وفق $f(x) = x + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع f هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	d	$(1,1)$

2- ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	d	$(1,1)$

3- f تابع معرف على $\mathbb{R}^*$ ووفق $f(x) = \frac{e^x+3}{e^x-1}$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع f هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	d	$(1,1)$

4- ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x-1}$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	d	$(1,1)$

5- ليكن f تابعاً معرفاً على $]1,3[$ وفق $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$ فإن إحداثيات مركز التناظر للخط البياني للتابع هي:

a	$(0,-1)$	b	$(1,0)$	c	$(2,0)$	d	$(1,2)$

6- ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على R ويقبل المستقيم $y = 2x - 3$ مقارباً مائلاً عند $+\infty$ و يقبل النقطة $A(1,-1)$ مركز تناظر له عندئذٍ تكون $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)-2x}{f(2-x)+f(x)}$ تساوي :

a	-2	b	$-\frac{3}{2}$	c	2	d	$\frac{3}{2}$

7- ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-1}$ إن مركز تناظر خطه البياني هو النقطة :

a	$(1,1)$	b	$(1,0)$	c	$(0,0)$	d	$(0,1)$

8- تابع يحقق عند كل x من R المساواة $\frac{f(1-x)+f(x)}{3} = 1$. الخط البياني له :

a	متناظر بالنسبة للمبدأ	b	متناظر بالنسبة للنقطة $(1,3)$	c	متناظر بالنسبة للنقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$	d	ليس متناظر

9- إذا كان $x \in R\backslash\{1,-1\}$ فالمقدار $2x - 3$ ينتمي إلى :

a	$R\backslash\{5,1\}$	b	$R\backslash\{1,-1\}$	c	$R\backslash\{-5,-1\}$	d	$R\backslash\{5,-1\}$

10- ليكن التابع f المعرف وفق $f(x) = \frac{2x^2+3x+9}{x+1}$ فإن $f(-2-x) + f(x)$ تساوي :

a	3	b	-2	c	$3(x+1)$	d	$3x$

11- إذا علمت أن النقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر للتابع f المعرف وفق $f(x) = \frac{2x^2x+7}{x+1}$ فإن قيمة المقدار $f(-2-x) + f(x)$ هي

a	3	b	-3	c	6	d	-6

الجلسة الثالثة عشر

تعيين الثوابت :

الحالة الاولى : صيغ متكافئة

نعطى صيغتين إحداهما معلومة و الأخرى تشتمل على ثوابت يُطلب تعيينها

نصلح إحدى الصيغ (بنشرٍ أو قسمة اقليدية أو توحيد مقامات) و نطابق الصيغتين

تدرب 32

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{x+1}$$

عين a,b إذا علمت $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

الحل:

بالقسمة الإقليدية

$$f(x)=x+2+\frac{2}{x+1}$$

بالمقارنة مع

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

نجد

$$a=1\,,b=2\,,c=2$$

تدرب33 :

بفرض $f(x)=\frac{x}{(x-1)(x-2)}$

أوجد عددين حقيقين a,b يحققان أن :

$$f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$$

الحل :

نوجد مقامات :

$$f(x)=\frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

نطابق البسوط :

$$x=a(x-2)+b(x-1)$$

نضع $x=1$:

$$1=-a$$
$$\boxed{a=-1}$$

نضع $x=2$:

$$\boxed{2=b}$$

و بالتالي :

$$f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}$$

تدرب 34 :

ليكن $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}$, جد عددين حقيقين a,b يحققان أن :

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

الحل :

نوجد مقامات :

$$f(x)=\frac{a(x-1)^2+b(x-1)+c}{(x-1)^2}$$

نطابق البسوط :

$$x^2=a(x-1)^2+b(x-1)+c$$

نضع $x=1$:

$$\boxed{c=1}$$

نضع $x=0$:

$$0=a-b+1$$
$$\boxed{a-b=-1}\ldots(1)$$

نضع $x=2$:

$$4=a+b+1$$

$\boxed{a+b=3}$ ... (2)

بجمع 1 و2 :

$\boxed{a=1}$

نعوض في 1 :

$\boxed{b=2}$

$a=1\ ,\quad b=2\ ,c=1$

تدرب 35:

بفرض $f(x)=\frac{x^3+4}{x^2+2x+3}$

يحقق أن : $u(x)$ و تابعاً a,bعين عددين حقيقين

$$f(x)=ax+b+\frac{u(x)}{x^2+2x+3}$$

الحل :

لدينا $f(x)=\frac{x^3+4}{x^2+2x+3}$ بالقسمة الاقليدية :

$$f(x)=x-2+\frac{x+2}{x^2+2x+3}$$

بالمقارنة مع :

$$f(x)=ax+b+\frac{u(x)}{x^2+2x+3}$$

نجد أن :

$a=1\ ,\quad b=-2\ ,\quad u(x)=x+2$

تدرب 36:

ليكن $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$. جد عددين a,b,c

تحقق أن :

$$f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

الجواب :

$$f(x)=3+\frac{1}{x+1}+\frac{8}{x-2}$$

الحالة الثانية : معطيات عددها يساوي عدد المجاهيل و يوضح الجدول الآتي كيف نترجم كلاً من المعطيات إلى عبارة رياضية

المعطى	العلاقة المكافئة
الخط البياني للتابع يمر من نقطة $A(x_0,y_0)$ أو النقطة $A(x_0,y_0)$ تنتمي للخط البياني	بما ان النقطة تنتمي للخط البياني فإن : $f(x_0)=y_0$
الخط البياني يقبل مماساً ميله m في النقطة التي فاصلتها x_0	من عبارة الميل : $f'(x_0)=m$
الخط البياني للتابع يقبل مماساً ميله m في نقطة منه $A(x_0,y_0)$	هنا لدينا معلومتين : 1- النقطة A تنتمي للتابع إذن : $f(x_0)=y_0$ 2- الميل عند A هو m : $f'(x_0)=m$ تذكر إذا ذكر أن المماس أفقي فإن $m=0$
للتابع قيمة حدية عند x_0	بما أنها قيمة حدية فهي تعدم المشتق : $f'(x)=0$
للتابع قيمة حدية عند x_0 مساوية لـ y_0	هنا لدينا معلومتين : $f'(x_0)=0$ $f(x_0)=y_0$

تدرب 37:

1 $f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$

عين a,b لتكون $y=4x+3$ معادلة المماس للخط C_f في النقطة التي فاصلتها0.

الحل:

من الميل $\boxed{f'(0)=4}$ والتابع يمر من النقطة (x_0, y_0)

حيث $x=0$ لكن y_0 غير معلومة فنحسبها من المستقيم :

$$y_0 = 4(0)+3 = 3$$

$$f(x_0) = y_0 \Rightarrow \boxed{f(0)=3}$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(9x^2+a)(x^2+1) - 2x(3x^3+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$1)\quad f'(0)=4 \Rightarrow a=4$$

$$2)\quad f(0)=3 \Rightarrow b=3$$

②

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x + b$$

عين a إذا علمت أنه يقبل قيمة حدية عند $x=-1$ مساوية للعدد 2 .

الحل: لدينا معلومتان :

$\boxed{f'(-1)=0}$, $\boxed{f(-1)=2}$

f اشتقاقي

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$$

$$f'(-1) = 0$$

$$3ax^2 + 6x + 3 = 0$$

$$3a - 3 = 0$$

$$a = 1$$

$$f(-1) = -a + 3 - 3 + b = 2$$

$$-a + b = 2$$

$$-1 + b = 2$$

$$b = 3$$

③ $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$

عين a, b إذا علمت أن $f(-1)=0$ قيمة حدية.

الحل:

$$\boxed{f(-1)=0}$$

$$\frac{a-b+1}{-2} = 0$$

$$a - b = -1 \ldots ❶$$

$$\boxed{f'(-1)=0}$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(2ax+b)(x-1) - (ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(-1) = 0$$

$$\frac{(-2a+b)(-2) - (a-b+1)}{4} = 0$$

$$4a - 2b - a + b - 1 = 0$$

$$3a - b = 1 \ldots ❷$$

بالجمع بين ❶ و ❷ نجد

$$-2a = -2$$

$$a = 1$$

استنتاج الخط البياني انطلاقاً من خط معلوم:

الانسحاب:

إذا كان $g(x) = f(x) + b$ فإن c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $b\vec{j}$ (انسحاب شاقولي)

إذا كان $g(x) = f(x+a)$ فإن c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $-a\vec{i}$ (انسحاب أفقي)

التناظر :

إذا كان $g(x) = f(-x)$ فإن c_g نظير c_f بالنسبة لمحور التراتيب

إذا كان $g(x) = -f(x)$ فإن c_g نظير c_f بالنسبة لمحور الفواصل

إذا كان $g(x) = -f(-x)$ فإن c_g نظير c_f بالنسبة للمبدأ

القيمة المطلقة:

إذا كان $g(x)=|f(x)|$ فإن c_g ينتج عن c_f باستبدال النقاط التي تحت محور الفواصل بنظائرها بالنسبة لمحور الفواصل

أمثلة و تدريبات :

استنتج في كلٍ من الحالات التالية الخط البياني c_g للتابع g انطلاقاً من الخط البياني c_f للتابع f المعرف بالشكل :

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

-1 $g(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

نلاحظ أن :

$$f(-x)=\frac{(-x+1)^2}{(-x)^2+1}=\frac{(1-x)^2}{x^2+1}\underset{\text{نخرج ناقص}}{=}\frac{\left(-(x-1)\right)^2}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}=g(x)$$

و منه c_g نظير c_f بالنسبة لمحور التراتيب .

-2 $g(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2+1}$

نلاحظ أن :

$$f(x-1)=\frac{(x-1+1)^2}{(x-1)^2+1}=\frac{x^2}{(x-1)^2+1}=g(x)$$

و بالتالي C_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $1\vec{i}$.

-3 $g(x)=\frac{(x+1)^2+x^2+1}{x^2+1}$

نلاحظ أن :

$$f(x)+1=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+1=\frac{(x+1)^2+x^2+1}{x^2+1}=g(x)$$

و بالتالي c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $1\vec{j}$

الجلسة الرابعة عشر

لمعادلات اللوغارتمية

مجموعة تعريف	المضمون >0
خواص	① $\ln(1)=0$ ② $\ln(a.b)=\ln(a)+\ln(b)$ ③ $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$ ④ $\ln(a^n)=n.\ln(a)$ ⑤ $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$ ⑥ $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$ ⑦ $\ln(e)=1\,;e\approx 2.7$

المعادلات اللوغارتمية

النوع الأول : $\ln(u)=\ln(v)$	
1	نوجد شرط تعريف الطرف الأبسط
2	نتخلص من اللوغارتمات و نحل
3	نقبل الحلول وفق شرط الحل

ملاحظة: في حالة المتراجحات :

-1 نختار شرط الطرف الأصغر حصراً

-2 الحلول تكون على شكل مجال

-3 لمعرفة الحلول المقبولة نقاطع المجال مع شرط الحل

النوع الثاني : $\ln(u)=$ عدد	
1	نوجد شرط اللوغارتم
2	$u=e^{\text{العدد}}$
3	نحل المعادلة
4	نقبل و نرفض

النوع الثالث : أكثر من لوغارتم	
1	نوجد شرط كل لوغارتم

2	نقاطع الحلول
3	نطبق الخواص
4	نتخلص من اللوغارتمات و نحل
5	نرفض و نقبل

في المتراجحات نطبق الخطوات و لكن الحلول تكون على شكل مجال فنقاطعها مع شرط الحل و يكون شرط الحل في الحالة الأولى هو شرط الطرف الأصغر

تدرب 45

حل في R كلاً من المعادلات أو المتراجحات الآتية :

1) $\ln(3x-4)=\ln(x^2-4)$

✓لنوجد E مجال التعريف للطرف الأول

$3x-4>0$ ومنه $3x>4$

$$\Rightarrow x>\frac{4}{3}$$

فيكون المجال $E=]\frac{4}{3},+\infty[$

$$\ln(3x-4)=\ln(x^2-4)$$

نتخلص من اللوغارتمات:

$$\Leftrightarrow (3x-4)=(x^2-4)$$

$$\Rightarrow 3x-4-x^2+4=0$$
$$\Rightarrow 3x-x^2=0 \Rightarrow x(3-x)=0$$

ومنه إما $\boxed{x=0}$ وهو مرفوض لأنه خارج المجال E

أو $3-x=0$ وبالتالي $\boxed{x=3}$ وهو مقبول لأنه ضمن المجال E

2) $\ln(x^2-4)\le \ln\ (-3x)$

مجموعة تعريف الطرف الأصغر E_1

$x^2-4>0$

$E_1=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

و سنكتفي بها حسب الفائدة السابقة

$$\ln(x^2-4)\le \ln\ (-3x)$$
$$\Leftrightarrow x^2-4\le -3x$$
$$\Rightarrow x^2+3x-4\le 0$$

$$\Rightarrow x^2+3x-4=0$$
$$\Rightarrow (x+4)(x-1)=0$$

إما $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$

ننظم جدول الإشارة كما يلي:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2-4+3x		$+$	0	$-$	0	$+$	
≤ 0		غ.م	|	م	|	غ.م	

فتكون مجموعة الحلول هي:

$S=[-4,1]$

$$E=E_1\cap S=[-4,-2[$$

3) $\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$

E_1: $2x-3>0$ وبالتالي يكون

$2x>3 \Rightarrow x>\frac{3}{2}$

ومنه $\boxed{E_1=]\frac{3}{2},+\infty[}$

E_2 $6-x>0$ وبالتالي يكون

$-x>-6 \Rightarrow x<6$

ومنه $\boxed{E_2=]-\infty,6[}$

E_3: $x>0$ فيكون المجال

$\boxed{E_3=]0,+\infty[}$

-نقاطع: $\boxed{E=]\frac{3}{2},6[}$

$$\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$$
$$\Rightarrow \ln(2x-3)^{\frac{1}{2}}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2x-3)=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$$
$$\underset{\text{بضرب بـ}2}{\Rightarrow}\ \ln(2x-3)=2\ln(6-x)-\ln x$$
$$\Rightarrow \ln(2x-3)=\ln(6-x)^2-\ln x$$
$$\Rightarrow \ln(2x-3)=\ln\left(\frac{(6-x)^2}{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x-3=\frac{(6-x)^2}{x}$$
$$\Rightarrow x(2x-3)=(6-x)^2$$
$$\Rightarrow 2x^2-3x=36-12x+x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x-36+12x-x^2=0$$

$$\Rightarrow x^2+9x-36=0$$
$$\Rightarrow (x+12)(x-3)=0$$

إما $x+12=0$ ومنه $x=-12$ مرفوض

أو $x-3=0$ ومنه $x=3$ مقبول

4) $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

E_1 مجموعة تعريف الحد الأول الذي يكافئ $x-2>0 \Rightarrow x>2$

فيكون المجال $E_1=]2,+\infty[$

E_2 مجموعة تعريف الحد الثاني الذي يكافئ $x+1>0 \Rightarrow x>-1$

فيكون المجال $E_2=]-1,+\infty[$ أي

فيكون تقاطعهما

$$E=E_1\cap E_2 \Rightarrow E=]2,+\infty[$$

$$\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=2$$
$$\Rightarrow e^{\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)}=e^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x+1}\right)=e^2$$
$$\Rightarrow x-2=e^2(x+1)$$
$$\Rightarrow x-2=xe^2+e^2$$
$$\Rightarrow x-xe^2=e^2+2$$
$$\Rightarrow x(1-e^2)=e^2+2$$
$$\Rightarrow x=\frac{(e^2+2)}{1-e^2}$$

قيمة x مرفوضة لأنها لا تقع ضمن المجال لأنها أقل من العدد 2

النوع الرابع : تحوي لوغارتم مربع و لوغارتم	
1	نوجد شرط اللوغارتم
2	نفرض $t=\ln^2 x$
3	نحل المعادلة
4	نعود إلى المتحول الأصلي
5	نرفض و نقبل

تدرب 46

1) $(\ln x)^2-5\ln x=6$

بشرط $x>0$ نفرض $\ln x=t$ فتصبح المعادلة من الشكل:

$$t^2-5t=6 \Rightarrow t^2-5t-6=0 \Rightarrow (t-6)(t+1)=0$$

إما $t-6=0 \Rightarrow t=6 \Rightarrow \ln x=6$
$$\Rightarrow \boxed{x=e^6}$$
أو $t+1=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow \ln x=-1$
$$\Rightarrow \boxed{x=e^{-1}}$$

2) $(\ln x)^2-5\ln x+6\le 0$

بشرط $x>0$ نفرض $\ln x=t$ فتصبح العلاقة:

$$(t-3)(t-2)\le 0$$
$$\Rightarrow (t-3)(t-2)=0$$

إما $t-3=0 \Rightarrow t=3$ ومنه $\ln x=3$
$$\Rightarrow \boxed{x=e^3}$$
أو $t-2=0 \Rightarrow t=2$ ومنه $\ln x=2$
$$\Rightarrow \boxed{x=e^2}$$

ننظم جدول الإشارة

x	0		e^2		e^3		$+\infty$
المتراجحة		+	0	−	0	+	
≤ 0		م.غ	|	م	|	م.غ	

وبالتالي مجموعة التعريف
$$S=[e^2,e^3]$$

النوع الخامس: جمل المعادلات	
1	نوجد شرط اللوغارتمات
2	نحاول الوصول إلى تجانس
3	نغير المتحول
4	نحل الجملة
5	نعود للمتحول الأصلي

تدرب 47

$$\begin{cases} (\ln x)(\ln y)=-12 \\ \ln(xy)=1 \end{cases}$$

تدرب 48

نفترض وجود عددين حقيقين موجبين تماماً a,b

يحققان :

$$ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{lna+lnb}{2}$$

جد $\frac{a}{b}$

المعادلات الأسية

	النوع الأول : $e^{u(x)}=e^{v(x)}$
1	نوجد شرط u و v و نقاطعهما
2	نتخلص من ال e
3	نوجد الحلول و نقبل و نرفض

	النوع الثاني : عدد $=e^{u(x)}$
1	نوجد شرط التعريف
2	نأخذ لوغارتم للطرفين
3	نقبل و نرفض

	النوع الثالث : تحوي e^x,e^{-x}
1	نوجد شرط التعريف
2	نضرب الطرفين بـ e^x
3	نوجد الحلول كمعادلات الدرجة الثانية

	المعادلات من النمط a^x
1	نوجد المجاهيل
2	نوجد الحلول
3	نأخذ لوغارتم الطرفين

تدرب 49:

حل في R كلاً من المعادلات :

1	$\boldsymbol{e^{x^2-2}\le e^{4-x}}$
2	$\boldsymbol{e^{2x^2-1}\ge 3}$
3	$4e^{2x}-e^{x}+2=0$
4	$e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$
5	$e^{2x}-2e^{-x}-3<0$
6	$e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0$
7	$\frac{e^{-x}-1}{e^{x}-1}=-2$

تدرب 50 :

حل في R كلاً من المعادلات :

1	$\frac{2^x}{2^x+1}<\frac{1}{3}$
2	$4^x+2^{x+1}-3\le 0$
3	$4e^{2x}-e^{x}+2=0$
4	$2^{x+1}-10\times 2^x+12\ge 0$
5	$3^{x+1}+2\times 3^{-x}\ge 7$

تدرب 51 :

حل في R كلاً من جمل المعادلات :

1	$\begin{cases}3^{x+y}=9\\3^x+3^y=4\sqrt{3}\end{cases}$
2	$\begin{cases}e^x-\frac{1}{2}e^y=1\\2e^x+e^y=4+e\end{cases}$

3	$\begin{cases} e^{4x}e^{y} = \dfrac{1}{e^{2}} \\ xy = -2 \end{cases}$

المعادلات التفاضلية

النمط الأول : حل المعادلات التفاضلية التي من الشكل $y' = ay + b$

1- قانون الحل : $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

2- إذا وجد شروط ابتدائية نستفيد منها لحساب k

تدرب 52 :

$y' = 2y$ والحل f يحقق الشرط أن $f(0) = 1$

$$y' = 2y$$

$$y' = ay$$

$$\Rightarrow y = ke^{ax} \Rightarrow y = ke^{2x}$$

بما أن $f(0) = 1 \Leftarrow$ النقطة $(0,1)$

تحقق المعادلة

$$1 = ke^{2(0)} \Rightarrow \mathrm{k} = 1$$

فالحل المطلوب

$$y = e^{2x}$$

تدرب 53 :

$y' + 5y = 0$ والخط البياني C للحل يمر من النقطة $A(-2,1)$

تدرب 54 :

$y' + 2y = 0$ و ميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$

النمط الثاني : الحل معلوم :

مثال : عين قيمة λ ليكون التابع $f(x) = (x+2)e^{-x}$

حل للمعادلة التفاضلية :

$$y' + y = \lambda e^{-x}$$

الحل :

$$y = f(x) = (x+2)e^{-x}$$
$$y' = e^{-x} - e^{-x}(x+2)$$
$$y' = e^{-x}(1 - x - 2)$$
$$y' = e^{-x}(-x-1)$$

نعوض في المعادلة :

$$e^{-x}(-x-1) + (x+2)e^{-x} = \lambda e^{-x}$$
$$e^{-x} = \lambda e^{-x}$$
$$\lambda = 1$$

الجلسة 15 + 16 + 17 + 18 + 19

التكامل

إثبات أن F تابع أصلي	إثبات أن F و G تابعان أصليان
1- F اشتقاقي على I. 2- $F'(x) = f(x)$	نثبت أن: $F(x) - G(x) = \underbrace{k}_{\text{ثابت}}$

إيجاد التوابع الأصلية لتوابع بسيطة

$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
$f(x)$		**$f(ax+b)$**	
$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$x^{n}\,;n \neq -1$	$\dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	$(ax+b)^{n}\,;n \neq -1$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$

$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\pm e^{\pm x}$	$e^{\pm x}$	$\frac{1}{a}\,e^{ax+b}$	e^{ax+b}
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$	$\frac{1}{ax+b}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$	$1+\tan^2 ax+b$
$-\cot(x)$	$1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{a}\cot(ax+b)$	$1+\cot^2 ax+b$
إضافات من النوطة			

<u>ملاحظات هامة:</u>

1- التكامل يحترم الجمع والطرح والأمثال لا تكامل.

2- بعد كل تكامل نضع $+k$.

3- تذكر أن: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ وأن $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

أي قوة أو جذر في المقام يرفع إلى البسط مع تغيير إشارة الأس.

إيجاد تابع أصلي لتابع جداء

تغيير المتحول	بسيط × بسيط (اختلاف بالنوع)
1- نفرض مضمون المركب H. 2- نوجد H'. 3- نظهر H' في عبارة $f(x)$. 4- نحذف المشتق ونكامل. 5- نعوض قيمة H. حالة خاصة: $\frac{1}{x} \times \underbrace{(\text{لوغارتمي})^n}_{H^n}$	1- أسي × صحيح 2- مثلثي × صحيح 3- لوغارتمي × صحيح 4- لوغارتمي × $\frac{1}{x^n}$ g $n \neq 1$. 5- اسي × مثلثي التكامل بالتجزئة: $\int_a^t u.v'dx = [u.v]_a^t - \int_a^t u'.v\,dx$
لتوضيح أكثر: $u(x).e^H$ $u(x)\cos(H)$ $u(x)\sin(H)$ $u(x)H^n$ $u(x)f(H)$	

التكاملات الكسرية

البسط مشتق المقام	درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام	درجة البسط أصغر تماماً من درجة المقام (تحليل المقام)	
$\ln\lvert\text{المقام}\rvert + k$ **<u>ملاحظة:</u>** للتخلص من القيمة المطلقة: 1- المضمون مثلثي (دائرة) 2- المضمون ليس مثلثي (قيمة تجريبية)	1- قسمة البسط على المقام قسمة إقليدية 2- نكتب التابع بالشكل: $f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$	<u>المقام مطابقة:</u> <u>نرفع المقام</u> للبسط ونغير إشارة الأس	<u>المقام</u> <u>قوسين</u> <u>مختلفين:</u> تفريق كسور

التكاملات المشابهة للصيغة $\frac{1}{e^x+1}$ نضرب البسط والمقام بـ e^{-x} والعكس بالعكس

أمثلة

$$f(x)=\frac{3}{5x-4}$$

$$f(x)=\tan(x)$$

$$f(x)=\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sin(2x)}$$

$$f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$$

$$f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

$$f(x)=\frac{2x^3+3x+1}{6x}$$

$$f(x)=\frac{1}{1-2x+x^2}$$

$$f(x)=\frac{x+3}{(x-1)^3(x^2+2x-3)}$$

التكاملات المثلثية

جميع الأسس زوجية	يوجد أس فردي	جداء تابعين مثلثيين
$\cos^2\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)$ $\sin^2\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)$	$\cos^{2k+1}x=$ $\cos^{2k}(x).\cos(x)=$ $(\cos^2 x)^k.\cos(x)=$ $(1-\sin^2 x)^k\cos(x)$ ثم ننشر المطابقة ونفرض $\sin(x)=$ H فيكون $H'=\cos(x)$ انتبه!! تكامل H' لحالو هو H	$\cos(a).\cos(b)=$ $\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$ $\sin(a).\sin(b)=$ $-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$ $\sin(a).\cos(b)=$ $\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$

كيف نكامل القيمة المطلقة؟!

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

1- نعدم $f(x)$ أي نضع $f(x)=0$

2- نحل المعادلة فنجد أن $x=c$

3- نجزء التكامل:

$$\int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|\,dx$$

4- على المجال الذي يكون عليه $f(x)$ سالباً نضع $|f(x)|=-f(x)$

وعلى المجال الذي يكون عليه $f(x)$ موجباً نضع $|f(x)|=f(x)$

ثم نكامل.

كيف نكامل $min-max$؟!

لإيجاد $\min(f(x),g(x))$:

1- نضع $f(x)=g(x)$.

2- نحل المعادلة.

3- ننظم الجدول:

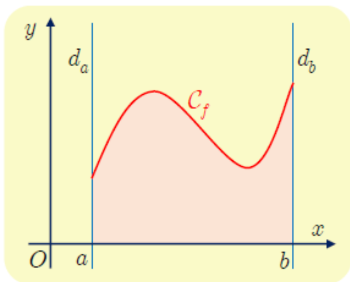
x	a	x_0	b
$\min(f(x),g(x))$	نجرب قيمة في التابعين ونختار التابع الذي يعطي القيمة الأصغر	|	نجرب قيمة في التابعين ونختار التابع الذي يعطي القيمة الأصغر

مساحة لخط بياني وحيد

التابع فوق الأرض

المساحة المحصورة بين الخط البياني ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a_1$, $x=a_2$:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx$$

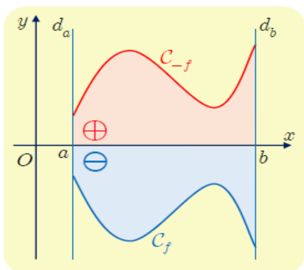


التابع تحت الأرض

المساحة المحصورة بين الخط البياني ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a_1$, $x=a_2$:

$$-\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx$$

$$=\int_{a_2}^{a_1} f(x)\,dx$$



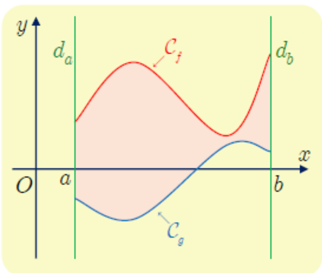
مساحة بين خطين

دائماً سيكون الشرط:

$$\int_{a_1}^{a_2} \text{الأعلى} - \text{الأدنى}\; dx$$

<u>ملاحظة:</u>

من الممكن أن يكون المساحة المطلوبة بين خطين بيانيين **<u>أو</u>** خط بياني ومستقيم مائل.



الحجوم	
حجم كرة انطلاقاً من مساحة مقطع	حجم مجسم ناتج عن دوران منحني لتابع
1- نحسب مساحة مقطع من هذا المجسم بدلالة متحول واحد ونرمز لها (متحول) A. 2- نكامل تابع المساحة A على الحدود المناسبة.	نستعمل القانون: $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$

أتمتة أسئلة الوحدة في التكامل
حساب تكاملين معاً
نعطى تكاملين محددين لهما نفس الحدود I و J ولكن أحدهما لسنا قادرين على حسابه عندئذ بحساب أحدهما و $I \pm J$ أو بحساب $I + J$ و $I - J$ يمكن استنتاج قيمة كل منهما
إيجاد تابع أصلي بالاستفادة من معادلة تفاضلية
إذا استطعنا الوصول إلى معادلة تفاضلية خطية من الشكل $f(x) = af'(x) + bf''(x)$ عندئذ بمكاملة الطرفين نصل إلى $F(x) = af(x) + bf'(x)$ حيث $\int f(x) = F(x)$ ، $\int f'(x) = f(x)$ ، $\int f''(x) = f'(x)$
المتراجحات والتأطير
مبرهنة: إذا كان F و G تابعان أصليان للتابعين f و g على الترتيب على I ويتحقق أن: $\forall x \in I\,;\, f(x) \le g(x) \Rightarrow F(x) \le G(x)$

1- ليكن لدينا التابعان $F(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+1}$ و $G(x) = \frac{2x^2+\lambda x+5}{2x+2}$ قيمة λ ليكون التابعين تابعين أصليين للتابع ذاته هي:

a	9	b	2	c	3	d	

2- ليكن لدينا التابعان $F(x) = \lambda - 2\cos^2(x)$ و $G(x) = -2\cos^2(x)$ قيمة λ ليكون التابعين تابعين أصليين للتابع ذاته هي:

a	2	b	1	c	5	d	$\lambda \in \mathbb{R}$

3- قيمة التكامل $\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right) e^{x^2+x}\,dx$ تساوي:

a	$\frac{e-1}{2}$	b	$-\frac{10}{24}$	c	$\frac{3}{2}$	d	$\frac{1}{2}$

4- التابع الأصلي للتابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ تساوي:

a	$\sqrt{x^2+3}$	b	$\sqrt{x^2-9}$	c	$2\sqrt{x^2-9}$	d	$2\sqrt{x^2+3}$

5- قيمة التكامل $\int_1^0 x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\,dx$ تساوي:

a	$\frac{e-1}{2}$	b	$-\frac{10}{24}$	c	$\frac{3}{2}$	d	$\frac{1}{2}$

6- قيمة التكامل $\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}\,dx$ تساوي:

a	$\frac{e-1}{2}$	b	$-\frac{10}{24}$	c	$\frac{3}{2}$	d	$\frac{1}{2}$

7- قيمة التكامل $\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)dx$ تساوي:

a	$\frac{e-1}{2}$	b	$-\frac{10}{24}$	c	$\frac{3}{2}$	d	$\frac{1}{2}$

8- قيمة التكامل $\int_1^e \left(\frac{\ln^2 x+2\ln(x)+2}{x}\right) dx$ تساوي:

4	d	$\frac{4-\pi}{4}$	c	2	b	$\frac{10}{3}$	a

9- قيمة التكامل $\int_{e^2}^{e^3} \left(\frac{1}{x\sqrt{\ln(x)-1}}\right) dx$ تساوي:

4	d	$\frac{4-\pi}{4}$	c	2	b	$\frac{10}{3}$	a

10- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x)\, dx$ تساوي:

4	d	$\frac{4-\pi}{4}$	c	2	b	$\frac{10}{3}$	a

11- قيمة العدد k التي تحقق $\int_0^k (x^2+x)dx = \frac{5}{6}$ هي:

$k=4$	d	$k=2$	c	$k=1$	b	$k=\frac{1}{2}$	a

12- إذا علمت أن $x \in [0,a]$ فواحدة من المتراجحات الآتية صحيحة:

$\frac{1}{a+1} \le \frac{\ln(a+1)}{a} \le 0$	b	$\frac{1}{a+2} \le \frac{\ln(a+1)}{a} \le 1$	a
$\frac{1}{a+1} > \frac{\ln(a+1)}{a} > 1$	d	$\frac{1}{a+1} \le \frac{\ln(a+1)}{a} \le 1$	c

13- قيمة التكامل $\int_1^0 \frac{x}{e^x} dx$ تساوي:

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi-\frac{1}{2}$	b	$\frac{2-e}{e}$	a

14- قيمة التكامل $\int_0^{\pi} (2x+1)\cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$ تساوي:

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi-\frac{1}{2}$	b	$\frac{2-e}{e}$	a

15- قيمة التكامل $\int_1^e \left(\frac{1+\ln(x)}{x^2}\right) dx$ تساوي:

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi-\frac{1}{2}$	b	$\frac{2-e}{e}$	a

16- قيمة التكامل $\int_1^e \left(\frac{1}{x^2}-\frac{3\ln(x)}{x^2}\right) dx$ تساوي:

e	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\frac{2-e}{e}$	b	$\frac{1}{e}$	a

17- قيمة التكامل $\int_0^1 (x^2e^x)\, dx$ تساوي:

$e-2$	d	$\frac{2e-3}{e}$	c	$\pi-\frac{1}{2}$	b	$\frac{2-e}{e}$	a

18- قيمة التكامل $\int_0^1 (x^2+x+1)e^{2x}\,dx$

الطريقة اليمانية في تكامل: مثلثي ضرب صحيح أو أسي ضرب صحيح: نأخذ التابع الصحيح ونشتقه إلى أن ينعدم , ونأخذ التابع الآخر (الأسي أو المثلثي) ونكامله إلى أن نصل لنفس مستوى التابع الصحيح ثم **نقاطع بتناوب:**

x^2+x+1	e^{2x}
$2x+1$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
2	$\frac{1}{4}e^{2x}$
0	$\frac{1}{8}e^{2x}$

والآن نأخذ تقاطع بتناوب وهو عبارة عن أخذهم بشكل قطري مع تناوب الإشارات:

$$\left[+(x^2+x+1)\frac{1}{2}e^{2x}-(2x+1)\frac{1}{4}e^{2x}+2\left(\frac{1}{8}e^{2x}\right)\right]_0^1$$

a	$e-\frac{1}{2}$	b	$\pi-\frac{1}{2}$	c	$\frac{2e-3}{e}$	d	$e-2$

19- قيمة التكامل $\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{x(\ln(x)-1)}\right)dx$ تساوي:

a	0	b	1	c	-1	d	2

20- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(x)\,.\,\sin(2x)\,dx$ تساوي:

a	$\frac{4}{3}$	b	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	c	$\frac{-2\sqrt{2}-8}{12}$	d	1

21- قيمة التكامل $\int_0^{\pi}\sin^3(x)\,dx$ تساوي:

a	$\frac{4}{3}$	b	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	c	$\frac{-2\sqrt{2}-8}{12}$	d	1

22- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5(x)\,dx$ تساوي:

a	$\frac{1}{3}$	b	2	c	1	d	4

23- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\cos^2(x)}\,dx$ تساوي:

a	-2	b	2	c	1	d	4

24- قيمة التكامل $\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos(x)}\,dx$ تساوي:

a	$\frac{8}{15}$	b	2	c	1	d	4

25- قيمة التكامل $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin(2x)}\,dx$ تساوي:

a	$\frac{4}{3}$	b	$-\frac{1}{2}\ln(3)$	c	$\frac{-2\sqrt{2}-8}{12}$	d	1

26- قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$ تساوي:

a	$\ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$	b	$\ln\left(2e+\frac{2}{e}\right)$	c	3	d	5

27- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx$ تساوي:

a	0	b	$\ln\left(2e+\frac{2}{e}\right)$	c	3	d	5

28- قيمة الثنائية (a,b) حتى يكون التابع $F(x)=(ax+b)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)=\frac{5x-4}{e^x}$ هي:

a	$(-5,-1)$	B	$(5,1)$	c	$(5,-1)$	d	$(-5,1)$

29- إذا علمت أن التابع $F(x)=P(x)e^{2x}$ تابع أصلي للتابع $f(x)=x^3e^{2x}$ علماً أن $P(x)$ كثير حدود فإن $Deg(P)$ تساوي:

a	3	b	4	c	2	d	1

30- قيمة التكامل $\int_1^3 |2x-4|dx$ تساوي

a	2	b	-2	c	1	d	0

31- قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max(\cos(x),\sin(x))\,dx$ تساوي:

a	$\sqrt{2}$	b	$2\sqrt{2}$	c	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	d	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

32- قيمة التكامل $\int_0^1 \min(x^2,x)\,dx$ تساوي:

a	$\frac{1}{3}$	b	$\frac{13}{3}$	c	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	d	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

33- ليكن $f(x)=e^x.\cos(x)$ فإن قيمة الزوج (a,b) التي تحقق $f(x)=af'+bf''$ هي:

a	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	b	$\left(1,-\frac{1}{2}\right)$	c	$\left(-\frac{1}{2},2\right)$	d	$\left(\frac{1}{2},1\right)$

34- ليكن $f(x)=e^x.\sin(2x)$ فإذا علمت أنه يوجد عددين a و b يحققان أن $f''(x)=af'+bf$ فإن التابع الأصلي للتابع f هو:

a	$-\frac{1}{5}f'(x)+\frac{2}{5}f(x)$	b	$f'(x)-f(x)$	c	$\frac{1}{5}f(x)+2f'(x)$	d	$f(x)-2f'(x)$

35- بفرض $g(x)=\frac{3tanx-1}{tanx+1}$ المعرف على $[0,\frac{\pi}{2}[$ فإن المشتق $g'(x)$ يساوي :

a	$\frac{tanx}{1+\tan^2 x}$	b	$\frac{4}{(1+\tan^2 x)^2}$	c	$\frac{4+4\tan^2 x}{(1+tanx)^2}$	d	$\frac{4\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)^2}$

36- بفرض $g(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ عندئذٍ $g'(x)$ يساوي :

a	$\frac{2(x^4-1)}{x^3}$	b	$\frac{2(x^2-1)}{x^3}$	c	$2\left(x+\frac{1}{x}\right)$	d	$2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

37- إذا علمت $1-\frac{x^2}{2}\le cosx\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ فأي من المتراجحات الآتية صحيحة :

a	$x-\frac{x^3}{6}\le sinx\le x$	b	$x-\frac{x^3}{3}\le sinx\le x$	c	$x-x^3\le sinx\le x$	d	غير ذلك

الجلسة 21 + 22

متتاليات

أشكال التعبير عن المتتالية		
الحد العام	المتتالية التدريجية	المجاميع
u_n بدلالة n أو $u_n = f(n)$	u_{n+1} بدلالة u_n أو $u_{n+1} = f(u_n)$	$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
أولاً: متتاليات الحد الصريح:		
أنواع المتتاليات		
حسابية	هندسية	unknown
كل حد ينتج عن سابقه بجمع بعدد r يسمى أساس المتتالية	كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد q يسمى أساس المتتالية	مافي شي ثابت

قوانين للمتتالية الحسابية والهندسية		
نوع المتتالية	الحسابية	الهندسية
معيار الكشف عنها	$u_{n+1} - u_n = r$	$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$
قانون الحدين	$u_n = u_m + r(n-m)$	$u_n = u_m . q^{n-m}$
العدد α الذي يجعل المتتالية $v_n = u_n + \alpha$ هندسية	إذا كانت $u_{n+1} = au_n + b \,; a \neq 1$ فإن المتتالية المعرفة وفق: $v_n = u_n + \dfrac{b}{a-1}$ هندسية أساسها a ثم نقارن	
تخمين الحد العام	إذا كانت $u_{n+1} = au_n + b \,; a \neq 1$ فإن المتتالية المعرفة وفق: $u_n = \left(u_0 + \dfrac{b}{a-1}\right).a^n - \dfrac{b}{a-1}$	
نهاية المتتالية	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ دوماً متباعدة.	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \,; q > 1 \\ u_0 \,; q = 1 \\ 0 \,; -1 < q < 1 \\ \text{غير موجودة} \,; q < -1 \end{cases}$

1- نهاية المتتالية $u_n = \frac{10^{n+1}+1}{10^n+1}$:

a	10	b	0	c	1	d	10^{-1}

2- نهاية المتتالية $u_n = 10^{-2n} - 2^{-2n} + ne^n$:

a	$+\infty$	b	0	c	1	d	$-\infty$

3- بفرض v_n المتتالية المعرفة بالشكل $v_n = \frac{\pi^{n+1}}{3\pi^n+3}$ ولتكن $u_n = \cos(n)$ عندئذ نهاية المتتالية $w_n = u_{v_n}$ هي:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	c	0	d	1

ثلاث حدود متعاقبة	
حسابية	هندسية

إذا ذكر الأساس: الثاني يساوي الأول + الأساس الثالث يساوي الثاني + الأساس الثالث يساوي الأول + 2 (الأساس)	إذا ذكر الأساس: الثاني يساوي الأول ضرب الأساس الثالث يساوي الثاني ضرب الأساس الثالث يساوي الأول ضرب الأساس مربع
إذا لم يذكر الأساس: ضعف الثاني يساوي الأول + الثالث مجموع الحدود الثلاثة يساوي ثلاث أضعاف الثاني	إذا لم يذكر الأساس: مربع الثاني يساوي الأول ضرب الثالث جداء الحدود الثلاثة يساوي مكعب الثاني

1- بفرض a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية تحقق أن:

$$a+b+2c=27$$

فإن المقدار $3b+c$ يساوي:

a	10	b	20	c	27	d	24

2- بفرض $2a$ و b و $3c$ ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها 2 تحقق:

$$2a+b+3c=14$$

فإن a و b و c تساوي:

a	$a=2\,,b=4\,,c=8$	b	$a=1\,,b=4\,,c=\frac{8}{3}$
c	$a=3\,,b=4\,,c=\frac{8}{3}$	d	$a=1\,,b=4\,,c=9$

3- الأعداد $1\,,k\ \,,k-\frac{2}{9}$ تمثل ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية . فإن قيمة k هي:

a	$\frac{1}{3}$	b	$-\frac{1}{3}$	c	$\frac{1}{9}$	d	3

4- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية تحقق أن $u_3+u_{11}=60$ عندئذٍ قيمة المجموع:

$$u_2+u_3+u_4+u_{10}+u_{11}+u_{12}$$

a	180	b	120	c	183	d	المعطيات غير كافية

5- إذا كان a,b,c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية و كان $abc=216$ فإن قيمة b

a	8	b	6	c	4	d	3

6- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r فإذا علمت أن $u_0+u_3=18$ و $u_2+u_5=34$ فالحد العام لها

a	$3n+4$	b	$4n-3$	c	$4n+3$	d	$-4n+3$

7- لدينا a,b,c ثلاثة حدود متوالية غير معدومة من متتالية هندسية أساسها q كما لدينا $12a$ و$5b$ و$2c$ ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية فان q تساوي:

a	$\begin{cases} q=-2 \\ q=3 \end{cases}$	b	$\begin{cases} q=-3 \\ q=2 \end{cases}$	c	$\begin{cases} q=-3 \\ q=-2 \end{cases}$	d	$\begin{cases} q=2 \\ q=3 \end{cases}$

8- a , b , c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية، حيث: $a < b < c$ و $a + b + c = 21$ و $abc = 216$ عندئذ قيمة $a + c$ هو:

15	d	6	c	21	b	27	a

9- لدينا a , b , c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها r موجب تماماً وتحقق $b^2 = 1 + ac$ عندئذٍ r :

1	D	2	C	8	B	-1	A

10- ليكن a عدداً حقيقياً ونفترض أن $a^2 - 4$ و $2a + 1$ و $a + 2$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية متناقصة عندئذ قيمة a هي:

$a = 4$	d	$a = 2$	c	$a = -1$	b	$a = 3$	a

11- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_1 + u_2 + u_3 = 9$ و $u_{10} + u_{11} = 40$ عندئذ قيمة الأساس r هي:

$r = 4$	d	$r = 1$	c	$r = 3$	b	$r = 2$	a

12- ليكن λ عدداً حقيقياً و لنفترض أن $\lambda^2 - 4$, $2\lambda + 1$, $\lambda + 2$ ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية متناقصة .

عندئذٍ قيمة λ هي :

-4	d	4	c	-1	b	1	a

13- a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a \neq 0$ نعلم أن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية غير ثابتة نرمز إلى أساسها q كما نعلم أن $4a$ و $3b$ و $2c$ هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية فإن قيمة الأساس q:

$q = 3$	d	$q = -1$	c	$q = 2$	b	$q = 1$	a

14- لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية فيها:

$$u_3 - 3u_5 = -42 \quad \text{و} \quad u_2 = 5$$

عندئذٍ قيمة r هي:

8	d	6	c	4	b	2	a

اطراد متتالية صريحة	
حالة وجود a^n أو $n!$	معيار النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ثم نقارن مع الواحد شرط التطبيق: $u_n > 0$

	حالة خاصة: المتتالية التي تحوي $(-1)^n$ لا يصح تطبيق معيار النسبة عليها وهي مباشرة غير مطردة (متناوبة في الاطراد)
باقي الحالات	معيار الاشتقاق: 1- نعرف تابعاً f على المجال المعطى 2- نشتق التابع 3- نقارن مع الصفر

محدودية متتالية صريحة

1- نعرف تابعاً f على المجال المعطى
2- ندرس تغيرات التابع
3- نستنتج من جدول التغيرات المطلوب (من حقل f)

Hero’s ideas

ملاحظة (1)	إذا كانت المتتالية متزايدة ونهايتها $+\infty$ فهي محدودة من الأدنى بحدها الأول وغير محدودة من الأعلى
ملاحظة (2)	إذا كانت المتتالية متناقصة ونهايتها $-\infty$ فهي محدودة من الأعلى بحدها الأول وغير محدودة من الأدنى
الملاحظة (3)	يوجد بعض المتتاليات التي يمكن الحكم على محدوديتها مباشرة مثل: $\sin(n)$ $\cos(n)$ $(-1)^n$ $\frac{n}{n+1}$ $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

تقارب المتتالية الصريحة وحساب نهايتها

نحسب النهاية بشكل مباشر بالاستفادة من حالات عدم التعيين الموجودة سابقاً	1- تكون المتتالية متقاربة إذا كانت نهايتها عدد ℓ ونقول أنها متقاربة من ℓ 2- تكون المتتالية متباعدة إذا كانت نهايتها لا نهائية (جوابها ∞) ونقول أنها متباعدة

$n! \geq a^n \geq n \geq \ln(n)$

"حكم القوي عالضعيف" تذكرتوها مو؟

Hero’s idea

يمكن تطبيق ما تعلمناه حول مفهوم النهاية بلغة المجالات في بحث النهايات على المتتاليات الصريحة

المتتاليات المعرفة بالتدريج

اطرادها

غالباً ما يكون من السهل دراسة اطرادها من حساب بعض الحدود الأولى.

المتتالية $u_{n+1}=u_n^2-au_n+b$ المزودة بمتراجحة مساعدة $m\le u_n\le M$ يمكن دراسة اطرادها من خلال معيار الفرق $u_{n+1}-u_n$ ثم التحليل المباشر والاستفادة من المتراجحة لتحديد إشارات الأقواس.. مثال: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق: $u_{n+1}=u_n^2-4u_n+6$ $u_0=\frac{5}{2}$ المحققة للمتراجحة $2\le u_n\le 3$ عندئذ المتتالية u_n: أ- ثابتة ب- غير مطردة ت- متزايدة ث- متناقصة
محدوديتها
من خلال إثبات متراجحة مطلوبة بالتدريج
بعض المنسيات:

شرط تزايد متتالية	$u_{n+1}\ge u_n$
شرط تناقص متتالية	$u_{n+1}\le u_n$
شرط ثبات متتالية	$u_{n+1}=u_n$
تقاربها	
مبرهنات التقارب:	
كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة	كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة
نهايتها	
حل المعادلة $f(x)=x$ ثم نقبل ونرفض حسب اطراد المتتالية	

1- المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية وفق:

$$u_{n+1}=\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}\;;u_0=1$$

بفرض $E(n):0<u_n<2$ إذا علمت أن $E(n_0)$ محققة وبفرض $E(n)$ صحيحة من أجل عدد معين n_0 فإن:

a	$E(n)$ صحيحة من أجل بعض قيم n	b	$E(n+1)$ غير صحيحة
c	$E(n)$ صحيحة من أجل n	d	$E(n+1)$ صحيحة فقط

2- نعرف المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ بالشكل $v_n=u_n^2-4$, فإن المتتالية v_n هندسية أساسها:

a	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{1}{2}$	c	1	d	2

3- الحد الأول للمتتالية v_n يساوي:

a	-3	b	-2	c	4	d	21

4- عبارة v_n بدلالة n هي:

a	$-2\left(\frac{1}{4}\right)^n$	b	$4(1)^n$	c	$-3\left(\frac{1}{2}\right)^n$	d	$21(2)^n$

5- عبارة u_n بدلالة n هي:

a	$\sqrt{4-2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$	b	0	c	$\sqrt{4-3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$	d	$\sqrt{4+21(2)^n}$

لتكن المتتاليتان u_n و v_n المعرفتان وفق:

$$v_{n+1} = 3av_n + (1-3a)u_n \,; v_0 = 3$$

$$u_{n+1} = 3au_n + (1-3a)v_n \,; u_0 = -1$$

حيث أن a عدد حقيقي.

6- تأمل المتتالية $w_n = v_n - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$, إن قيمة w_0 تساوي:

a	4	b	2	c	3	d	0

7- المتتالية w_n:

a	هندسية أساسها $2a-1$	b	هندسية أساسها $1-6a$	c	هندسية أساسها $6a-2$	d	هندسية أساسها $3a-1$

8- w_n بدلالة n و a تعطى بالشكل:

a	$4(1-6a)^n$	b	$2(2a-1)^n$	c	$3(1-3a)^n$	d	$2(3a-1)^n$

9- بفرض u_n متتالية معرفة بالتدريج وفق:

$$u_{n+1} = 2u_n - 4 \,; u_0 = 1$$

ونعرف المتتالية $x_n = u_n - 4$ فإن المتتالية x_n:

a	حسابية أساسها 2.	b	هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.	c	هندسية أساسها 2.	d	حسابية أساسها $\frac{1}{2}$.

10- الحد العام لـ x_n يعطى بالشكل:

a	$x_n = -3\,.2^n$	b	$x_n = -3\,.2^{n+1}$	c	$x_n = -2^n$	d	$x_n = 2^n$

11- الحد العام لـ u_n يعطى بالشكل:

a	$u_n = 2-3.2^n$	b	$u_n = 4+3.2^n$	c	$u_n = 4-3.2^{n+1}$	d	$u_n = 4+2^n$

12- بفرض u_n متتالية معرفة وفق:

$$u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n \,; u_0 = 2\,, u_1 = 5$$

نعرف المتتالية $v_n = u_{n+1} - 4u_n$ فإن v_n:

a	هندسية أساسها 3	b	هندسية أساسها 5	c	هندسية أساسها $\sqrt{3}$	d	ليست هندسية

13- نعرف المتتالية $y_n = u_{n+1} - 3u_n$ فإن y_n:

ليست هندسية	d	هندسية أساسها $\sqrt{2}$	c	هندسية أساسها 2	b	هندسية أساسها 4	a

14- الحد العام للمتتالية u_n يساوي:

$4^n - 3^{n+1}$	d	$-4^n - 3^{n+1}$	c	$-4^n + 3^{n+1}$	b	$4^n + 3^{n+1}$	a

15- قيمة المجموع $S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 1024 + 2000 + 1024 + 512 + \cdots + 4 + 2 + 1$ تساوي:

1024	d	2048	c	3047	b	6094	a

16- بفرض $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad , x_0 = 1 , y_0 = 3$$

و لنضع $t_n = x_n y_n$ من أجل كل $n \geq 0$ عندئذٍ المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$

غيرمطردة	d	ثابتة	c	متناقصة	b	متزايدة	a

17- بفرض $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \qquad , x_0 = 1 , y_0 = 3$$

فإذا علمت أن $x_n > y_n > 0$ مهما تكن n فالمتتالية

$(x_n), (y_n)$ متزايدتان معاً	d	$(x_n), (y_n)$ متناقصتان معاً	c	(x_n) متناقصة (y_n) متزايدة	b	(x_n) متزايدة (y_n) متناقصة	a

18- الحد العام للمتتالية المعرفة بالتدريج وفق $u_0 = 7$, $u_{n+1} = 10u_n - 18$ هو :

$u_n = 5 \times 10^n + 2$	d	$u_n = 5 \times 10^{n-2}$	c	$u_n = 5 \times 10^n - 2$	b	$u_n = 10^n + 2$	a

19- الحد العام للمتتالية المعرفة بالتدريج وفق : $u_{n+1} = 3u_n - 4 , u_0 = 0$

$u_n = -3^n + 2$	d	$u_n = -3^n$	c	$u_n = 2 + 2 \times 3^n$	b	$u_n = 2(1 - 3^n)$	a

20- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتدريج وفق $u_{n+1} = 2u_n + 3 , u_0 = 1$ فإن قيمة α التي تجعل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق

$v_n = u_n + \alpha$ هي :

$\frac{3}{2}$	d	2	c	-3	b	3	a

21- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتدريج وفق $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 1 , u_0 = 1$ فإن قيمة α التي تجعل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق

$v_n = u_n - \alpha$ هي :

$-\frac{4}{9}$	d	$\frac{4}{9}$	c	$-\frac{9}{4}$	b	$\frac{9}{4}$	a

22- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{nu_n+4}{n+1}$ و لنضع $v_n = nu_n$ عندئذٍ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$

a	هندسية أساسها 4	b	حسابية أساسها 4	c	هندسية أساسها 2	d	حسابية أساسها 2

23- بفرض $(x_n)_{n\geq0}$, $(y_n)_{n\geq0}$ وفق :

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(y_n + 2x_n) \quad , x_0 = 1$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n + 5y_n) \quad , y_0 = 2$$

عندئذ المتتالية المعرفة بالشكل $w_n = x_n + 2y_n$

a	متزايدة تماماً	b	متناقصة تماماً	c	ثابتة	d	غير مطردة

24- بفرض $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة بالشكل $u_{n+1} = (\alpha - 2)u_n + 5$ فإن قيمة α التي تجعلها حسابية أساسها غير معدوم

a	3	b	2	c	0	d	1

25- بفرض $u_{n+1} = \frac{3}{2}au_n + \frac{a+1}{3}$ و $u_0 = 2$ فإن قيمة a التي تجعل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ ثابتة

a	$\frac{1}{2}$	b	2	c	$\frac{2}{3}$	d	1

26- كن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $\left(u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+1} \quad , \quad u_0 = 1\right)$. من أجل كل $n \in N$ نضع $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ عندئذٍ المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$:

a	هندسية أساسها $\frac{1}{2}$	b	هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	c	حسابية أساسها $\frac{1}{3}$	d	حسابية أساسها $\frac{1}{2}$

27- $(u_n)_{n\geq0}$ و $(t_n)_{n\geq0}$ متتاليتان معرفتان وفق:

$$\begin{cases} t_0 = 2 \\ t_{n+1} = u_n + 7t_n \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n + 5t_n \end{cases}$$

عندئذٍ المتتالية $(u_n + 5t_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها:

a	4	b	8	c	16	d	32

28- متتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{3}{6}u_n + 3 \quad , \quad u_0 = 6$$

a	متزايدة تماماً	b	متناقصة تماماً	c	ثابتة	d	ليست مطردة

29- $(u_n)_{n\geq0}$ و $(t_n)_{n\geq0}$ متتاليتان معرفتان وفق:

$$\begin{cases} t_0 = 4 \\ t_{n+1} = \frac{u_n + 2t_n}{3} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + t_n}{3} \end{cases}$$

عندئذٍ المتتالية $(t_n - u_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها:

A	$\frac{1}{3}$	B	$-\frac{1}{3}$	C	3	D	1

30- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالتدريج وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ \ u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \end{cases}$$

عندئذٍ المتتالية $v_n = u_{n+1} - 2u_n$:

A	هندسية أساسها 3	B	هندسية أساسها 2	C	حسابية أساسها 3	D	حسابية أساسها 2

31- بفرض $\theta \in]\pi/2 , \pi]$ و لنعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ عندئذٍ u_1 يساوي :

a	$2cos\theta$	b	$-2\cos\theta$	c	$2\sin\theta$	d	$-2sin\theta$

32- لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$ و $u_0 = 1 , u_1 = 3$ و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ عندئذٍ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$

a	هندسية و $v_n = 2(3^n)$	b	هندسية و $v_n = 2(1^n)$	c	هندسية و $v_n = (1)^n$	d	حسابية و $v_n = 1+n$

33- المتتالية $u_n = \ln((n+1)^{n+1})$. أي من القضايا الآتية صحيحة:

a	محدودة من الأعلى	b	محدودة من الأدنى	c	محدودة	d	غير محدودة

<table>
<tr><th colspan="2">المجاميع</th></tr>
<tr><th>البسيطة</th><th>المعقدة</th></tr>
<tr><td>
المجموع الحسابي:
$S = \frac{a+\ell}{2}(n)$
المجموع الحسابي مع قفزات:
$\text{عدد الحدود الجديد} = \frac{\text{أول متغير} - \text{آخر متغير}}{\text{طول القفزة}} + 1$
$r' = \text{طول القفزة} \times r$
ونعود للقانون السابق.
المجموع الهندسي:
$S = a\frac{1-q^n}{1-q}$
المجموع الهندسي مع قفزات:
$\text{عدد الحدود الجديد} = \frac{\text{أول متغير} - \text{آخر متغير}}{\text{طول القفزة}} + 1$
$q' = q^{\text{طول القفزة}}$
ونعود للقانون السابق.
</td><td>
$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Hero's idea
$(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$
إذا كان:
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
فإن:
$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$
</td></tr>
<tr><th colspan="2">اطرادها</th></tr>
<tr><td>معيار الفرق</td><td>$u_{n+1} - u_n$
ثم نقارن مع الصفر</td></tr>
</table>

Hero's idea	
انتبه! في حال كان المجموع حده الأول يحوي n فإن تشكيل الفرق يحتاج إلى تفصيل	
محدوديتها	
الحالة (1)	مجموع متتالية حسابية محدود من الأدنى بـ S_0 وغير محدود من الأعلى
الحالة (2)	مجموع متتالية هندسية: 1- حالة $\lvert q \rvert > 1$ غير محدودة 2- حالة $0 < q < 1$ محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{a}{1-a}$ ومن الأدنى بـ S_0 3- حالة $-1 < q < 0$ محدودة من الأعلى بـ S_0 ومن الأدنى بـ $\frac{a}{1-a}$ 4- حالة $q = 1$ متتالية ثابتة مجموعها يساوي $n.u_0$ غير محدودة من الأعلى ومحدودة من الأدنى بـ u_0
الحالة (3)	- شكلها: غالباً يكون $u_n = \sum\left(\frac{n}{a^n}\right)$ or $\sum\left(\frac{1}{n!}\right)$ - نستفيد من إحدى المتراجحات المساعدة الآتية: $n \leq 2^n \quad , \quad n! \geq 2^{n-1}$ - نجد أن $S_n \leq q^1 + q^2 + \cdots + q^n$ ثم نعود لمحدودية الهندسية.
الحالة (4)	المجموع المباشر: أي مجموع حدوده موجبة في كوكب الأرض يمكن حصره بين أصغرهم مضروباً بعدد الحدود وأكبرهم مضروباً بعدد الحدود مثل: $3\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 3(1)$
الحالة (5)	التشطيب: 1- المتتالية كسرية مقامها جداء قوسين من الدرجة الأولى. أ- نفرق الكسر إلى كسور جزئية كما تعلمنا في التكامل ب- نشكل المجموع ونقوم بالتشطيب بعد كتابة حدود المجموع بشكل عمودي. 2- صيغتين متكافئتين إحداهما تحوي طرحاً أ- نشكل المجموع باستخدام الصيغة التي تحوي طرح ثم نحصل على تشطيب.

1- قيمة المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ هي :

a	$\frac{n(n+1)}{4}$	b	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	c	$\frac{n(n+1)}{2}$	d	n^2

2- قيمة النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2+1}$

1	d	$\frac{1}{2}$	c	$\frac{1}{4}$	b	0	a

3- قيمة المجموع $2+4+6+\cdots+2n$ هي :

$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	d	n^2	c	n^2+n	b	$\frac{n(n+1)}{2}$	a

4- قيمة المجموع $1+2+3+\cdots+100$

5000	d	5005	c	5050	b	550	a

5- قيمة المجموع $2+3+4+\cdots+15$

111	d	121	c	120	b	119	a

6- قيمة المجموع $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ هي :

n^2	d	$\frac{n(n+1)}{2}$	c	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	b	$\frac{n(n+1)}{4}$	a

7- قيمة النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{2n^3+1}$

$\frac{1}{8}$	d	$\frac{1}{2}$	c	$\frac{1}{4}$	b	$+\infty$	a

8- قيمة المجموع $1+8+27+..+125$

10044	d	1440	c	14040	b	14400	a

9- إذا علمت أن $(1\times2)+(2\times3)+(3\times4)+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

فإن قيمة المجموع $(1\times2)+(2\times3)+(3\times4)+\cdots+(10\times11)$

404	d	540	c	440	b	572	a

10- واحدة من المتتاليات الآتية متناقصة تماماً :

$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n$ $u_0=-1$	d	$u_{n+1}=2u_n$ $u_0=2$	c	$u_n=3\left(\frac{2}{5}\right)^n$	b	$u_n=\frac{4n+1}{n+2}$	a

11- بفرض $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية فيها $u_{11}=3k$, $u_2=6$ فإن قيمة k التي تجعل :

$u_2+u_3+u_4+\cdots+u_{11}=255$

26	d	13	c	39	b	36	a

12- قيمة المجموع $S=-3-\frac{3}{4}-\frac{3}{16}-\frac{3}{64}-\cdots-\frac{3}{4^n}$

$\frac{1}{2^{2n}}-4$	d	$\frac{1}{2^{2n}}+4$	c	$\frac{1}{2^n}+4$	b	$-\frac{1}{2^{2n}}-4$	a

13- قيمة المجموع $S=1-\frac{1}{9}-\frac{1}{9^2}-\frac{1}{9^3}-\cdots-\frac{1}{9^n}$

$S=-\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n$	d	$S=\frac{7}{8}+\left(\frac{1}{9}\right)^n$	c	$S=\frac{7}{8}+\frac{1}{8.9^n}$	b	$S=\frac{7}{8}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n$	a

14- قيمة المجموع $S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n}$

A	$3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$	b	$u_n\frac{1}{3}(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$	c	$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$	d	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

15- العدد $4^n + 2$ مضاعف للعدد :

a	3	b	4	c	5	d	7

16- إحدى الصيغ الآتية تعطي مُضاعفاً للعدد 7 مهما يكن العدد الطبيعي n

a	$3^{2n} - 2^n$	b	$3^n - 2^n$	c	$7^n - 2^n$	d	$9^n - 2^{2n}$

17- العدد $5^{22} - 2^{55}$ مضاعف للعدد

a	3	b	4	c	5	d	7

18- العدد $2^{23} - 2 \times 5^{33}$:

a	فردي و مضاعف للعدد 11	b	زوجي و مضاعف للعدد 11	c	مضاعف للعدد 120	d	مضاعف للعدد 7

19- قيمة المجموع $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots + 99 - 100$

a	-50	b	50	c	52	d	-52

20- نرمز بالرمز E(x) للجزء الصحيح للعدد x عندئذٍ :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(x) + E(2x) + E(3x) + \cdots + E(nx)}{n^2}$$

a	1	b	0	c	x	d	$+\infty$

21- إن أصغر عدد طبيعي غير معدوم يحقق المتراجحة $3^n \geq \frac{1}{3}(2^{n+1}) + \frac{5}{3}(n+1)^2$

a	5	b	4	c	3	d	6

22- عند إثبات صحة متراجحة برنولي بالتدريج $(1+x)^n \geq 1 + nx$ من أجل $x > -1$ نجد أن

$(1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2$ العلاقة الصحيحة للوصول الى المطلوب هي:

a	$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$	b	$(1+x)^n \geq 1+(n+1)x$	c	$(1+nx) \geq 1+(n+1)x$	d	$(1+x)^{n+1} \leq 1+nx$

23- نعرّف القضية $E(n)$ التي تدّعي أن العدد 9 يقسِمُ العدد $10^n + 1$. فإذا افترضنا أن القضية صحيحة من أجل عددٍ طبيعي مثبت n عندئذٍ

a	E(n + 1) غير صحيحة	b	$E(n+1)$صحيحة	c	$E(n)$ صحيحة أياً كان n ∈ N	d	$E(n)$صحيحة من أجل القيم الفردية لـ n

24- نرمز إلى القضية $n + 1 > n$ بالرمز $E(n)$ أياً كانت $n \in N$ إذا كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد n كانت:

a	E(n + 1) غير صحيحة	b	$E(n+1)$صحيحة	c	$E(n)$ صحيحة أياً كان n ∈ N	d	$E(n)$صحيحة من أجل القيم الفردية لـ n

25- في المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ لدينا $u_{30} = 20$ ، $u_{15} = -10$ إن قيمة المجموع:

$S = u_8 + u_9 + u_{10} + u_{20} + u_{21} + u_{22}$ يساوي:

60	d	-30	c	-40	b	-60	a

26- ليكن التابع f الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي P النقطة $M'(9x + 10y, 3x + 5y)$ أي, $f(M) = M'$. لتكن S_0 النقطة التي إحداثياتها $(0,1)$ عندئذ: $f(S_0)$ هي:

$(19,8)$	d	$(5,10)$	c	$(10,5)$	b	$(9,3)$	a

27- قيمة المجموع $S = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^5$ هي:

111111	d	11110	c	11111	b	999999	a

28- لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالصيغة $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ عندئذٍ

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n(2n+1)}$ و المتتالية متزايدة تماماً	d	$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n(2n+1)}$ و المتتالية متناقصة تماماً	c	$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n}$ و المتتالية متناقصة تماماً	b	$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1}$ و المتتالية متزايدة تماماً	a

29- بفرض $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $v_{n+1} = 4v_n + 3$ و $v_0 = 14$ و لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 4$ و تحقق أن $u_n - v_n = 1$ ليكن $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \cdots . + u_n^2$ عندئذٍ S_n بدلالة n

$15(4^n - 1)$	d	$15(16^{2n+1} - 1)$	c	$15(16^{n+1} - 1)$	b	$4^{n+1} - 1$	a

30- قيمة المجموع : $S = 1 + 3 + 9 + \cdots + 243$

364	D	363	C	362	B	360	A

31- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها وحدها الأول $u_0 = 1$ ، $q = 2$ إذا علمت أن: $u_3 + u_4 + \cdots + u_n = 248$

فإن قيمة n تساوي:

8	D	7	C	6	B	5	A

32- نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ عندئذٍ قيمة المقدار $u_{2n} - u_n$:

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$	b	$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$	a
$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$	d	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$	c

33- إذا كانت $u_{n+1} = 10u_n - 18$ و $u_0 = 7$, عندئذٍ بحساب u_1, u_2, u_3 يمكن ملاحظة أن عدد الأصفار في u_k هو :

$2k$	d	$k - 1$	c	k	b	$k + 1$	a

34- المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق $u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$ هي متتالية:

متزايدة	d	متناقصة	c	متناوبة	b	ثابتة	a

35- المتتالية $(u_n)_{\geq 0}$ المعرفة وفق $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$ و $u_0 = 8$

a	b	c	d
ثابتة	متناوبة	متناقصة	متزايدة

36- إذا كانت a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية عندئذٍ المقدار $(a+b+c)(a-b+c)$ يساوي :

a	b	c	d
$a^2+b^2+c^2$	$a^2-b^2+c^2$	a^2+b^2+2ac	$3b^2$

37- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $\left(u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \,;\, u_1 = 2 \,, u_0 = 1\right)$ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$v_n = u_{n+1} - u_n$:

a	b	c	d
هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	هندسية أساسها 3	حسابية أساسها $\frac{1}{3}$	حسابية أساسها $\frac{4}{3}$

38- قيمة المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \cdots + \frac{19}{2} + 20 + \frac{19}{2} + 9 + \cdots + 1 + \frac{1}{2}$ تساوي:

a	b	c	d
210	420	820	105

39- فرض $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = 2u_n + n - 1$ و $t_0 = 1$ و $t_{n+1} = 2t_n + n - 1$ ونضع $v_n = u_n - t_n$

عندئذٍ v_n بدلالة n

a	b	c	d
2^n	2^{n+1}	$2n+1$	$2n-1$

40- نرمز بالرمز i للوحدة التخيلية التي تحقق ان $i^2 = -1$ عندئذٍ قيمة المجموع :

$s = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \cdots + i^{600}$

a	b	c	d
0	1	-1	i

41- قيمة المجموع $S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4} + \frac{3}{2} + \cdots + 40 + \frac{39}{4} + \frac{17}{2} + + \frac{37}{4} + \cdots + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

a	b	c	d
819	409.5	1638	409

42- قيمة المجموع $S = 1 + 8 + 27 + 64 + \cdots + 1000$ هي :

a	b	c	d
3025	500500	2002	1512

المتتاليتان المتجاورتان	
الشرط الأول	واحدة متناقصة وواحدة متزايدة
الشرط الثاني	نهاية الفرق تساوي الصفر
Hero's ideas	
المتتاليتان المتجاورتان متقاربتان معاً من نفس العدد (أي لهم نهاية مشتركة)	
إذا تم الربط بين المتجاورتين بمتتالية ثابتة أمكن حساب النهاية المشتركة وذلك بملاحظة أن المتتالية الثابتة تساوي حدها الأول	
التمثيل البياني لحدود متتالية	
ليكن c الخط البياني للتابع f المستمر ونفترض المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق: $u_{n+1} = f(u_n)$	

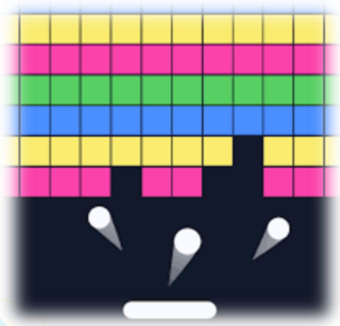
عندئذ يمكن تمثيل حدود المتتالية u_n على محور الفواصل من خلال الخطوات الآتية:

1- إيجاد نقطة التقاطع c و منصف الربع الأول والثالث $y = x$ من خلال حل المعادلة $f(x) = x$ (وهذا يعطي تأويلاً هندسياً لنهاية المتتالية)

2- نرسم المستقيم $y = x$ منصف الربع الأول والثالث ونرسم c موضحين نقطة التقاطع

3- نحدد u_0 على محور الفواصل

4- خطة Smash Hit



....

....

....

....

....

....

تفيد الخطة السابقة في استنتاج معلومات حول اطراد ومحدودية وتقارب ونهاية المتتالية

1- بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \quad , u_0 = \frac{3}{2}$$

فإذا علمت أن $1 \leq u_n \leq 2$ مهما يكن $n \geq 0$ عندئذ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

a	متناقصة	b	متزايدة
c	ثابتة	d	غير مطردة

2- نفترض أن $(l_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق : $l_0 = 10$, $l_{n+1} = \sqrt{1 + (l_n - 1)^2}$ و أن $1 \leq l_{n+1} \leq l_n$ عندئذٍ واحدة من القضايا الآتية خاطئة :

a	المتتالية متناقصة	b	المتتالية محدودة من الأدنى
c	المتتالية متقاربة من الصفر	d	المتتالية متقاربة من الواحد

3- بفرض $u_n = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{3}{\pi^3} + \frac{4}{\pi^4} + \cdots + \frac{n}{\pi^n}$ عندئذ أي من الأعداد الآتية لا يمثل حداً راجحاً على $(u_n)_{n\geq 1}$:

a	$M = \frac{2}{\pi - 2}$	b	$M = \frac{2}{\pi}$
c	$M = \pi$	d	$M = \frac{2}{\pi - 3}$

4- نتأمل المتتاليتين :

$$x_{n+1} = x_n + 2 \quad , x_0 = 3$$
$$y_{n+1} = x_n + y_n \quad , y_0 = 0$$

عندئذٍ قيمة المجموع :

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots x_n$$

a	y_{n-1}	b	y_{2n}
c	y_{n+1}	d	y_n

5- بفرض $x_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ و يفرض $x_n \le y_n$ عندئذٍ أي من الصيغ الآتية تصلح أن تكون y_n:

a	$y_n = \frac{3}{n^2}$	b	$y_n = 3 + \frac{3}{n^2}$
c	$y_n = 3$	d	$y_n = \frac{3}{n}$

6- نهاية المتتالية $v_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$:

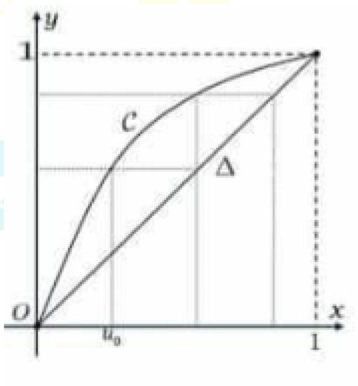
a	0	b	1
c	$+\infty$	d	$-\infty$

7- لتكن $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ و لنضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ عندئذٍ أبسط عبارة لـ s_n:

a	$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	b	$\sqrt{n-1}$
c	$\sqrt{n+1}$	d	$\sqrt{n}$

- تأمل الشكل المجاور C الخط البياني لتابع f و Δ منصف الربعين الأول و الثالث

ولتكن $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق $0 < u_0 < 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$



8- عدد حلول المعادلة $f(x) = x$:

a	0	b	1
c	2	d	3

9- جهة اطراد المتتالية (u_n):

a	متزايدة	b	متناقصة
c	ثابتة	d	غير مطردة

10- واحد من القضايا الآتية خاطئة :

a	المتتالية محدودة من الأدنى فقط	b	المتتالية محدودة
c	المتتالية محدودة من الأعلى فقط	d	النهاية المحتملة للمتتالية 1

- بفرض $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

11- أي من القضايا الآتية صحيحة:

a	$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n}$ و المتتالية متزايدة	b	$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1}$ و المتتالية متناقصة
c	$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$ و المتتالية متناقصة	d	$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n}$ و المتتالية متناقصة

12- نضع $x_n = u_{2n} - u_n$ عندئذٍ:

a	$x_n \geq \frac{n+1}{2}$	b	$x_n \geq \frac{n}{2}$
c	$x_n \leq \frac{n}{2}$	d	$x_n \geq \frac{1}{2}$

13- واحدة من المتراجحات الآتية صحيحة:

a	$x_n \geq \frac{n+1}{2}$	b	$x_n \leq \frac{n}{2}$
c	$x_n \geq \frac{n}{2}$	d	$x_n \geq \frac{1}{2}$