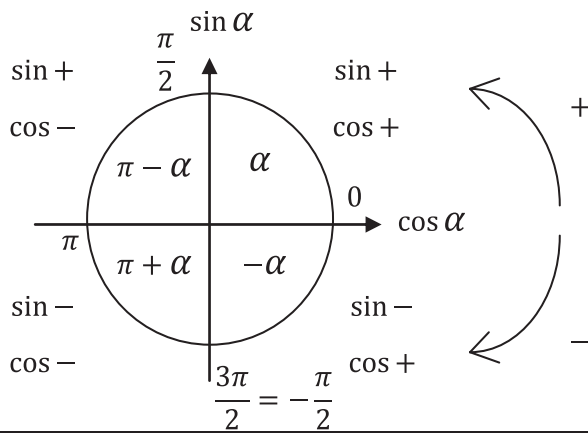




خواص مهمة للشكلين المثلثين والآسي :

$$* Z_1 (r_1, \alpha_1) , Z_2 (r_2, \alpha_2)$$

$$* Z_1 \cdot Z_2, (r_1 \cdot r_2, \alpha_1 + \alpha_2) \quad \text{جداء}$$

$$* \frac{Z_1}{Z_2} \left( \frac{r_1}{r_2}, \alpha_1 - \alpha_2 \right) \quad \text{قسمة}$$

$$* (Z_1)^n (r_1^n, n \alpha_1) \quad \text{قوة}$$

$$* \frac{1}{Z_1} \left( \frac{1}{r_1}, -\alpha_1 \right) \quad \text{مقلوب}$$

$$* \overline{Z_1} (r_1, -\alpha_1) \quad \text{مرافق}$$

$$* -Z_1 (r_1, \alpha_1 + \pi) \quad \text{معاكس}$$

ملاحظات مهمة : << آسيات شهيرة >>

$$* e^{2\pi i} = 1 \quad * e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

$$* e^{\pi i} = -1 \quad * e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$$

السؤال الأول : أعط الشكل الجبري :

$$Z_1 = \left( \frac{4-6i}{2-3i} \right) \left( \frac{1+3i}{3+2i} \right)$$

الحل :

$$= 2 \left( \frac{2-3i}{2-3i} \right) \left( \frac{1+3i}{3+2i} \right)$$

مجموعة الأعداد العقدية :

1- الشكل الجبري لعدد عقدي :

$$Z = x + iy$$

$$\text{قسم حقيقي} \quad \text{قسم تخيلي}$$

$$\text{Re}(z) = x \quad \text{Im}(z) = y$$

2- الشكل المثلثي لعدد عقدي :

$$Z = r[\cos \alpha + i \sin \alpha] : r \geq 0$$

3- الشكل الآسي لعدد عقدي :

$$z = r e^{i\alpha} :$$

r : حقيقة موجبة .

\* قوانين هامة :

$$\bullet r = \sqrt{x^2 + y^2} = |Z|$$

$$\bullet \cos \alpha = \frac{x}{r}, \sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\bullet e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\bullet e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$$

$$\bullet \begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \\ \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} -\sin(\alpha) = \sin(\pi + \alpha) \\ -\cos(\alpha) = \cos(\pi + \alpha) \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} \sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{cases}$$

ملاحظات هامة في علم المثلثات :

| $\alpha$      | $2\pi$ | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|---------------|--------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\sin \alpha$ | 0      | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos \alpha$ | 1      | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow Z_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)\right]^5$$

$$Z_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right]$$

السؤال الثالث : أعط الشكل الآسي :

$$Z_1 = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= -(\sqrt{2} - 1)e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= e^{i\pi} \cdot (\sqrt{2} - 1)e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_1 = (\sqrt{2} - 1)e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$$

$$Z_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

الحل :

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

الحل :

$$Z_3 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}} \left[ \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}} + e^{i\frac{\pi}{6}} \right] = e^{i\frac{\pi}{6}} \left[ e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{6}} \right]$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}} \left[ 2 \cos \frac{\pi}{6} \right] = e^{i\frac{\pi}{6}} \left[ 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$Z_3 = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2 \left( \frac{1+3i}{3+2i} \right) \left( \frac{3-2i}{3-2i} \right)$$

$$= 2 \left( \frac{3-2i+9i+6}{9+4} \right)$$

$$Z_1 = \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i$$

$$Z_2 = 3 \left[ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= 3 \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right]$$

$$Z_2 = \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) + \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)i$$

$$\diamond Z_3 = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

الحل :

$$= 2 \left[ \cos \left( \frac{-2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{-2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= 2 \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= 2 \left[ \left( -\frac{1}{2} \right) - \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)i \right]$$

$$Z_3 = -1 - \sqrt{3}i$$

السؤال الثاني : أعط الشكل المثلثي :

$$Z_1 = \left( \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \right)^5$$

الحل :

$$1+i = \sqrt{2} \left[ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\sqrt{3}+i = 2 \left[ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

السؤال الرابع: لتكن الأعداد العقدية :

$$Z_1 = 1 - i, Z_2 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$Z_3 = -3 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

1- أكتب كلاً من  $Z_1, Z_2, Z_3$  بالشكل الآسي .

$$* Z_1 = 1 - i \rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin Q = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} Q = \frac{-\pi}{4}$$

$$Z_1 = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$* Z_2 = 2 \left[ \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right] = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$* Z_3 = -3 e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} \cdot 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = 3 e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$$

2- أوجد  $(Z_1 \cdot Z_2)$  بالشكل الجبري والمثلثي

$$\text{واستنتج } \cos \frac{5\pi}{12}$$

الحل:

$$* Z_2 = 2 \left[ \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$= 2 \left[ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right]$$

$$Z_2 = -1 + \sqrt{3}i$$

$$* Z_1 \cdot Z_2 = (1 - i)(-1 + \sqrt{3}i)$$

$$= -1 + \sqrt{3}i + i + \sqrt{3}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i$$

$$* Z_1 \cdot Z_2 = \left[ 2 \left( \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{3} \right) \right) \right]$$

$$\bullet \left[ \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{-\pi}{4} \right) \right) \right]$$

$$= (2\sqrt{2}) \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$= (2\sqrt{2}) \left[ \cos \left( \frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{12} \right) \right]$$

استنتج  $\cos \left( \frac{5\pi}{12} \right)$  :مثلي  $(Z_1 \cdot Z_2 = Z_1 \cdot Z_2)$  جبري

$$\Rightarrow 2\sqrt{2} \cos \left( \frac{5\pi}{12} \right) = \sqrt{3} - 1$$

$$\cos \left( \frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

3- أثبت أن  $\left( \frac{Z_1^4 \cdot Z_2}{Z_3^2} \right)$  حقيقي

$$\frac{Z_1^4 \cdot Z_2}{Z_3^2} = \frac{\left( \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} \right)^4 \cdot (2 e^{i\frac{2\pi}{3}})}{\left( 3 e^{i\frac{4\pi}{3}} \right)^2}$$

$$= \frac{(4e^{-\pi i}) \cdot (2 e^{\frac{2\pi}{3}i})}{9 e^{i\left(\frac{8\pi}{3}\right)}}$$

$$= \frac{8}{9} e^{(-\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{8\pi}{3})i} = \frac{8}{9} e^{(-\pi)i}$$

$$= -\frac{8}{9} \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{حقيقي}$$

-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----

السؤال الخامس: ليكن العدد العقدي :

$$Z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

1- أثبت أن  $Z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  ثم اكتب  $Z^2$  بالشكل الآسي .

الحل :

$$Z^2 = \left( \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right)^2 + 2i \left( \frac{\sqrt{(2+\sqrt{3}) \cdot (2-\sqrt{3})}}{4} \right) + \left( i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \right)^2$$

$$\bullet x^2 + y^2 = r$$

$$\bullet x^2 - y^2 = a$$

$$\bullet 2xy = b$$

مثال : أوجد الجذور التربيعية للعدد

$$Z^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$$

الحل :

$$\textcircled{1} x^2 + y^2 = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\textcircled{2} x^2 - y^2 = 2$$

$$\textcircled{3} 2xy = -2\sqrt{3}$$

لجمع المعادلتين  $\textcircled{1}$  و  $\textcircled{2}$  نجد :

$$2x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

نعوض  $(x^2 = 3)$  بالمعادلة  $\textcircled{1}$

$$3 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 = +1 \\ y_2 = -1 \end{bmatrix}$$

\* بما أن  $2xy = -2\sqrt{3} < 0$

$$Z_1 = -\sqrt{3} + i$$

$$Z_2 = \sqrt{3} - i$$

-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----

\* حل المعادلات في (c) :

**[A]** حل معادلة تحوي  $Z$  و  $\bar{Z}$  :

مثال : حل في (c) المعادلات بالمجهول  $Z$  :

$$\textcircled{1} 2iZ + \bar{Z} = 3 + 3i$$

الحل : نفرض :  $Z = x + iy$

$$\Rightarrow \bar{Z} = x - iy$$

$$\text{نعوض : } 2i(x + iy) + (x - iy) = 3 + 3i$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{4} + i \frac{\sqrt{4 - 3}}{2} - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$Z^2 = \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2- تحقق أن  $Z = e^{i\frac{\pi}{12}}$  واستنتج :

$$\cos \frac{11\pi}{12}, \quad \cos \frac{\pi}{12}$$

الحل :

$$Z^2 = e^{\frac{\pi}{6}i} \Rightarrow r^2 e^{2Qi} = e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$\Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$\Rightarrow 2Q = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$Q = \frac{\pi}{12} + \pi k$$

$$Z = e^{i\frac{\pi}{12}} \Leftarrow \frac{\pi}{12} \Leftarrow (k = 0)$$

\* الاستنتاج

أسي  $Z = Z$  جبري

$$e^{\frac{\pi}{12}i} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \left( \frac{11\pi}{12} \right) = \frac{-\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----

\* إيجاد الجذور التربيعية لعدد عقدي جبري :

$$Z^2 = a + ib$$



$$= 16 - 4(1)(29) = -100 < 0$$

$$Z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 10i}{2} = -2 + 5i$$

$$Z_2 = Z_1^- = -2 - 5i$$

<< يوجد حلان عقديان مترافقان في C >>

-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----

$$(2) Z^2 + (1 + 4i)Z - 5 - i = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1 + 4i)^2 - 4(1)(-5 - i)$$

$$= 5 + 12i$$

$$w^2 = 5 + 12i \quad * \text{ لنوجد الجذر التربيعي للعدد}$$

$$\bullet x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = 13$$

$$\bullet x^2 - y^2 = 5$$

$$\bullet 2xy = 12 > 0$$

مجموع المعادلتين (1) و (2) نجد :

$$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

نعوض في المعادلة الأولى :

$$9 + y^2 = 13 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1 = 3 + 2i \\ w_2 = -3 - 2i \end{cases}$$

$$Z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{-1 - 4i + 3 + 2i}{2} = 1 - i$$

$$Z_2 = \frac{-b + w_2}{2a} = \frac{-1 - 4i - 3 - 2i}{2} = -2 - 3i$$

-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----

**[D] - حل معادلة أكبر من درجة ثانية :**

(1) - حل في (c) المعادلة :

$$Z^3 - (3 + 4i)Z^2 - 6(3 - 2i)Z + 72i = 0$$

إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحثاً

$$2ix - 2y + x - iy = 3 + 3i$$

$$(x - 2y) + i(2x - y) = 3 + 3i$$

نقارن طرفي المعادلة :

$$x - 2y = 3 \Rightarrow -2x + 4y = -6$$

$$2x - y = 3 \Rightarrow 2x - y = 3$$

بالجمع :  $3y = -3$

$$\Rightarrow \boxed{y = -1}$$

نعوّذ بإحدى المعادلتين  $\Leftarrow \boxed{x = 1}$

$\Leftarrow$  حل المعادلة :  $\boxed{Z = 1 - i}$

-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----

**[B] - حل معادلتين بمجهولين :**

حل في (c) بجملة المعادلتين بالمجهولين  $Z_1$  و  $Z_2$  :

$$\begin{cases} Z_1 - Z_2 = -3 \\ 2\overline{Z_1} + \overline{Z_2} = -3 + 3\sqrt{3}i \end{cases}$$

**الحل :** نأخذ مرافق الطرفين للمعادلة الثانية :

$$Z_1 - Z_2 = -3$$

$$2Z_1 + Z_2 = -3 - 3\sqrt{3}i$$

$$3Z_1 = -6 - 3\sqrt{3}i \quad \text{بالجمع}$$

$$\Rightarrow Z_1 = -2 - \sqrt{3}i$$

نعوض بالمعادلة الأولى :

$$-2 - \sqrt{3}i - Z_2 = -3$$

$$\Rightarrow Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----

**[C] - حل معادلات درجة ثانية بأمثال حقيقية أو أمثال تخيلية :**

حل في (c) المعادلات التالية :

$$(1) Z^2 + 4Z + 29 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

كون المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً ومن الدرجة الثالثة يمكن كتابتها بالشكل :

$$(Z - a i)(Z^2 + b Z + c) = 0$$

$$Z^3 + bZ^2 + cZ - a i Z^2 - a i b Z - a i c = 0$$

$$Z^3 + (b - a i)Z^2 + (c - a b i)Z - a i c = 0$$

بالمقارنة مع الفرض :

$$b - a i = -3 - 4 i \Rightarrow \boxed{a = 4 \mid b = -3}$$

$$c - a i b = -18 + 12 i \Rightarrow \boxed{c = -18}$$

$$\begin{bmatrix} -a \ b \ i = 12 \ i \text{ محققة} \\ -a \ c \ i = 72 \ i \text{ محققة} \end{bmatrix}$$

$$(Z - 4i)(Z^2 - 3Z - 18) = 0$$

$$\text{إما : } Z - 4i = 0 \Rightarrow \boxed{Z_1 = 4i}$$

$$\text{أو : } Z^2 - 3Z - 18 = 0$$

$$(Z - 6)(Z + 3) = 0 \Rightarrow \boxed{Z_2 = 6 \text{ , } Z_3 = -3}$$

② نتأمل كثير الحدود

$$P(Z) = Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7$$

1 أثبت أن  $P(-1) = 0$

$$L_1: P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7$$

$= 0 : L_2$  محقة

2 اكتب  $P(Z)$  بالشكل  $P(Z) = (Z + 1)Q(Z)$

ثم حل المعادلة :  $P(Z) = 0$

$$Z^2 - 4Z + 7$$

$$\begin{array}{r}
 Z + 1 \overline{) Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7} \\
 \underline{Z^3 + Z^2} \phantom{+ 3Z + 7} \\
 -4Z^2 + 3Z + 7 \\
 \underline{-4Z^2 - 4Z} \phantom{+ 7} \\
 7Z + 7 \\
 \underline{7Z + 7} \\
 0
 \end{array}$$

$$P(Z) = (Z + 1)(Z^2 - 4Z + 7)$$

\*  $P(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}$  : حل المعادلة

$$(Z + 1)(Z^2 - 4Z + 7) = 0$$

$$\text{إما : } Z + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{Z_1 = -1}$$

$$\text{أو : } Z^2 - 4Z + 7 = 0$$

$$\Delta = 16 - 28 = -12 < 0$$

يوجد حلان عقديان مترافقان في (c) :

$$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2\sqrt{3}i}{2} = 2 + \sqrt{3}i$$

$$Z_3 = 2 - \sqrt{3}i$$

حاول أن تحل : تدرّب (10)  
صفحة (123)

**ملاحظات مهمة حول مرافق عدد عقدي :**

$$\bar{Z} = Z \Leftrightarrow Z \text{ حقیقی} \quad (1)$$

$$\bar{Z} = -Z \Leftrightarrow \text{تخیلی } Z \quad (2)$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{7} \Leftarrow |Z| = 1 \quad (3)$$

مثال :

نتأمل عددين عقديين  $Z$  و  $W$  يحققان  $|Z| = 1$  و

$|W| = 1$  و  $ZW \neq -1$  أثبت أن

$$D = \frac{Z+W}{1+ZW} \text{ عدد حقيقي : } \textcircled{1}$$

الحل : الشرط :  $\bar{D} = D$

$$L_1: \bar{D} = \frac{\bar{Z} + \bar{W}}{1 + \overline{ZW}} = \frac{\frac{1}{Z} + \frac{1}{W}}{1 + \frac{1}{Z \cdot W}}$$

$$L_2: \bar{D} = \frac{\frac{W+Z}{ZW}}{\frac{ZW+1}{ZW}} = \frac{W+Z}{1+ZW} = D$$

$\Leftarrow D$  عدد حقيقي

-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----

$$K = \frac{Z-W}{1+ZW} \text{ تخيلي بحت : } \textcircled{2}$$

الحل : الشرط  $\bar{K} = -K$

يترك للقارئ كما سبق .

-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----

ملاحظة حول جذور معادلة من الدرجة الثانية :

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

يوجد لها حلان  $Z_1$  و  $Z_2$  يحققان :

$$Z_1 + Z_2 = -\frac{b}{a} , \quad Z_1 \cdot Z_2 = \frac{c}{a}$$

التحويلات الهندسية وصياغتها العقدية :

1- الانسحاب (T) :

$$\vec{Z} = Z + b$$

 $\vec{Z}$  : العدد العقدي الممثل لـ  $m$ 
 $Z$  : العدد العقدي الممثل لـ  $m$ 
 $b$  : العدد العقدي الممثل لشعاع الانسحاب

2- التحاكي (H) :

$$\vec{Z} - w = k(Z - w)$$

 $\vec{Z}$  : العدد العقدي الممثل للنقطة  $m$ 
 $Z$  : العدد العقدي الممثل للنقطة  $m$ 
 $w$  : العدد العقدي الممثل لمركز التحاكي

 $k \in R$  : نسبة التحاكي

3- الدوران (R) :

$$\vec{Z} - w = e^{iQ}(Z - w)$$

 $\vec{Z}$  : العدد العقدي الممثل للنقطة  $m$ 
 $Z$  : العدد العقدي الممثل للنقطة  $m$ 
 $w$  : العدد العقدي الممثل لمركز الدوران

 $Q$  : زاوية الدوران

4- التناظر (S) :

\* بالنسبة لـ  $(ox)$  :  $\vec{Z} = \bar{Z}$ \* بالنسبة لـ  $(oy)$  :  $\vec{Z} = -\bar{Z}$ \* بالنسبة لـ  $o(o, o)$  :  $\vec{Z} = -Z$ \* بالنسبة لـ  $\Omega(w)$  :  $\vec{Z} = 2w - Z$ 

السؤال الأول :

ليكن العدد العقدي  $Z = 1 + i$  الممثل بالنقطة  $m$ اوجد  $\vec{M}(\vec{Z})$  صورة  $M(Z)$  وفق :1- انسحاب شعاع  $\vec{k} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$ 

$$b = -2 + 3i$$

$$\vec{Z} = Z + b = -1 + 4i$$

2- تحاكٍ مركزه  $(o)$  ونسبته  $(3)$  :

$$\vec{Z} = k Z$$

$$\vec{Z} = 3(1 + i) = 3 + 3i$$

3- تناظر (S) مركزه  $A(1 - 3i)$ 

$$\vec{Z} = 2w - Z$$

$$= 2(1 - 3i) - (1 + i)$$

$$= 1 - 7i$$

4- تناظر (S) بالنسبة لـ  $xx'$  :

$$\vec{Z} = \bar{Z} = 1 - i$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

السؤال الثاني : لتكن المعادلة :

$$Z^2 + 2i Z - 2 = 0 \text{ في } (c)$$

1- أثبت أن  $Z_1 = 1 - i$  هو جذر للمعادلة واستنتج الجذر الآخر .

بتعويض نجد

$$(1 - i)^2 + 2i(1 - i) - 2 = 0 \text{ محققة}$$

لاستنتاج الجذر الآخر : نعلم أن :

$$Z_1 + Z_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 1 - i + Z_2 = -\frac{2i}{1}$$

$$\Rightarrow Z_2 = -1 - i$$

2- تحقق أن  $M_2$  نظيرة  $M_1$  بالنسبة لـ  $yy'$ 

$$\text{الشرط : } Z_2 = -\bar{Z}_1$$

$$\bar{Z}_1 = 1 + i \Rightarrow -\bar{Z}_1 = -1 - i = Z_2$$

أي أن  $M_2$  نظيرة  $M_1$  بالنسبة لـ  $yy'$ 

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

السؤال الثالث : في مجموعة الأعداد العقدية

1- أثبت أن  $[Z_1 = 2i]$  جذراً للمعادلة :

$$i Z^2 - 2i Z - 4 + 4i = 0$$

ثم أوجد الجذر الآخر :

الحل :

محقة  $L_1: i(2i)^2 - 2i(2i) - 4 + 4i = 0 : L_2$   
 لإيجاد الجذر الآخر :

$$Z_1 + Z_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 2i + Z_2 = \frac{2i}{i}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_2 = 2 - 2i}$$

2- أوجد  $M$  صورة  $M_1$  وفق دوران مركزه  $(o)$   
 وزاويته  $\frac{\pi}{4}$

$$\hat{Z} = e^{iQ} Z$$

$$= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) 2i$$

$$\boxed{\hat{Z} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

السؤال الرابع : لتكن النقاط  $B, A$  الممثلة للأعداد :

$$A: Z_1 = -2 + \sqrt{3}i, \quad B: Z_2 = 1$$

1- أوجد  $C$  نظيرة  $A$  بالنسبة لـ  $x\hat{x}$  :

$$C: Z_3 = \overline{Z_1} = -2 - \sqrt{3}i$$

2- أثبت أن  $ABC$  مثلث متساوي الأضلاع :

$$AB = |Z_B - Z_A| = |1 + 2 - \sqrt{3}i|$$

$$= |3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |Z_C - Z_A| = |-\sqrt{3}i - \sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |Z_C - Z_B| = |-3 - \sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$$

$ABC$  : مثلث متساوي الأضلاع .

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

السؤال الخامس : في معلم متجانس  $\vec{u}, \vec{v}, o$  منسوب  
 لمستوى عقدي نتأمل النقاط :

$B, C, D$  التي تمثل :

$$B: b = 2, C: c = -1 + i, D: d = 1 - 3i$$

1- أحسب  $\left[ \frac{c-b}{d-b} \right]$  واستنتج نوع المثلث  $(BCD)$  :

الحل :

$$\frac{c-b}{d-b} = \frac{-1+i-2}{1-3i-2} = \left( \frac{-3+i}{-1-3i} \right) \times \left( \frac{-1+3i}{-1+3i} \right)$$

$$= \frac{-10i}{10} = -i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{c-b}{d-b}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\left| \frac{c-b}{d-b} \right| = |-i| \Rightarrow \frac{BC}{BD} = 1 : \text{وكذلك}$$

$\Leftarrow BCD$  قائم في  $B$  ومتساوي الساقين .

2- جد العدد العقدي  $a$  الممثل للنقطة  $A$  بحيث يكون  
 $(ACBD)$  مربعاً .

الحل :

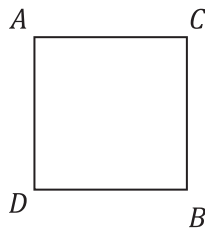
حتى يكون  $ACBD$  مربعاً يجب أن يتحقق :

$$Z_{\overline{AC}} = Z_{\overline{DB}}$$

$$c - a = b - d$$

$$-1 + i - a = 2 - 1 + 3i$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -2 - 2i}$$



0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

السؤال السادس : لتكن الأعداد العقدية :

$$Z_A = 3, Z_B = 1 + 2i, Z_Q = -1 + 2i$$

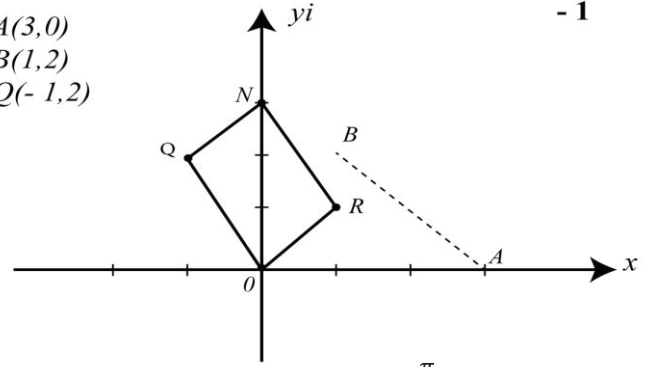
1- مثل النقاط  $A, B, Q$  في مستوي عقدي .

2- جد  $Z_N$  صورة  $A$  وفق دوران مركزه  $(o)$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

3- جد  $Z_R$  ليكون  $(OQNR)$  متوازي أضلاع .

4- أثبت تعامد  $AB$  و  $OR$  وأثبت أن :

$$OR = \frac{1}{2} AB$$

الحل :  
- 1A(3,0)  
B(1,2)  
Q(-1,2)

$$Z_N - Z_O = e^{i(\frac{\pi}{2})}(Z_A - Z_O) - 2$$

$$Z_N = i(3) = 3i$$

3- حتى تكون RNQO متوازي أضلاع  $\Leftrightarrow$ 

$$Z_{\overrightarrow{OR}} = Z_{\overrightarrow{QN}}$$

$$r - o = n - q$$

$$r = 1 + i$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{OR}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{r-o}{b-a} = \frac{1+i}{-2+2i} \times \frac{-2-2i}{-2-2i} = \frac{-1}{2} i - 4$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = \arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{OR}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{-1}{2} i\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} \Rightarrow AB \perp OR$$

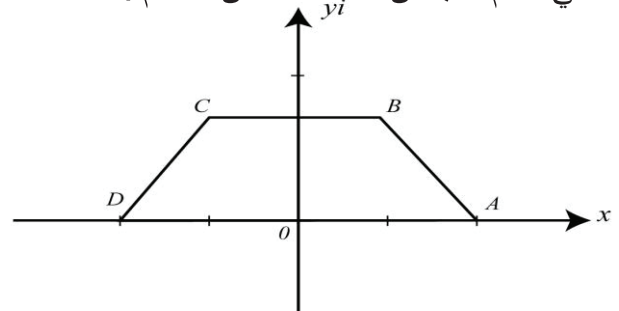
$$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{OR}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right| = \left|\frac{-1}{2} i\right| \Rightarrow \frac{OR}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow OR = \frac{1}{2} AB$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

السؤال السابع: في الشكل المجاور :

مثلاً في معلم متجانس نصف مسدس منتظم :

1- إذا علمت أن  $A: a = 2$  أوجد  $b, c, d$ 

الحل :

$$B\left(2, \frac{\pi}{3}\right): b = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$C\left(2, \frac{2\pi}{3}\right): c = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$D(2, \pi): d = 2(-1 + 0i) = -2$$

2- أحسب  $\left[\frac{d-c}{a-c}\right]$  ثم استنتج نوع المثلث ACD

الحل :

$$\frac{d-c}{a-c} = \frac{-2+1-\sqrt{3}i}{2+1-\sqrt{3}i} = \left[\frac{-1-\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}\right] \times \left[\frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right]$$

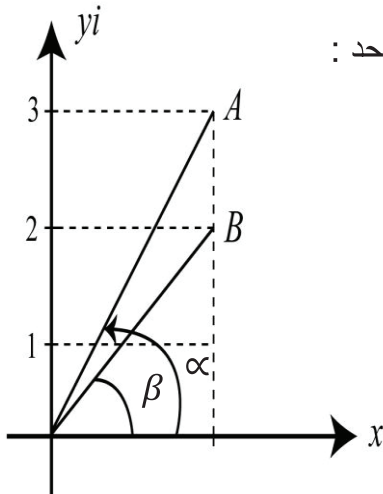
$$= \frac{-4\sqrt{3}}{12} i = \frac{-\sqrt{3}}{3} i$$

$$\arg\left(\frac{d-c}{a-c}\right) = \arg\left(\frac{-\sqrt{3}}{3} i\right) = \frac{-\pi}{2}$$

 $\Leftarrow$  ACD مثلث قائم في (C).

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

السؤال الثامن: في المستوي العقدي نتأمل معلم متجانس

 $(O, \vec{U}, \vec{V})$  في الشكل المجاور (3) مربعات طول ضلع

كل منها يساوي الواحد :

$$\arg(Z_A) = \alpha$$

$$\arg(Z_B) = \beta$$

1- أكتب كلاً من  $Z_A, Z_B$  بالشكل الجبري ثم الآسي .2- جد  $(Z_A, Z_B)$  بالشكل الجبري ثم بالشكل الآسيواستنتج قيمة  $(\alpha + \beta)$

الحل : أكتب

$$\begin{array}{l|l} Z_A = 1 + 3i & Z_B = 1 + 2i \\ r = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} & r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \\ Z_A = \sqrt{10} e^{i\alpha} & Z_B = \sqrt{5} e^{i\beta} \end{array}$$

$$\begin{aligned} * Z_A \cdot Z_B &= (1 + 3i)(1 + 2i) \\ &= 1 + 2i + 3i - 6 = -5 + 5i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * Z_A \cdot Z_B &= \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} e^{i(\alpha+\beta)} \\ &= 5\sqrt{2} e^{i(\alpha+\beta)} \end{aligned} \quad (1)$$

لاستنتاج  $(\alpha + \beta)$  :

$$\text{لدينا } Z_A \cdot Z_B = -5 + 5i$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

$$\cos Q = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \sin Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow Q = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

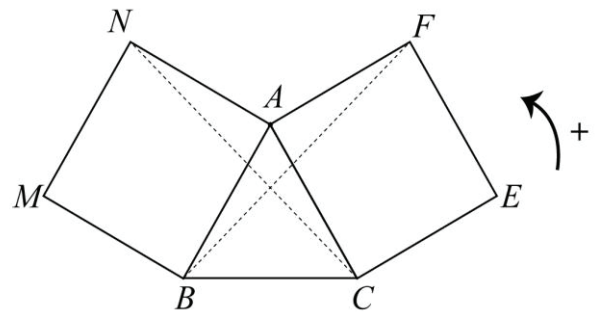
$$\Rightarrow Z_A \cdot Z_B = 5\sqrt{2} e^{i(\frac{3\pi}{4})} \quad (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد :  $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ 

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

السؤال التاسع : ABC مثلث متساوي الساقين ومباشر

التوجيه تنشئ خارجه مربعين ACEF و ABMN

نفرض  $(A, \vec{U}, \vec{V})$  معلماً متجانساً :نرمز للأعداد العقدية  $a, b, c, n, f$  التي تمثل النقاط : $A, B, C, N, F$  والمطلوب :

$$1- \text{أثبت أن } f = ic \text{ و } n = -ib$$

الحل :

لدينا فرضاً  $(A, \vec{U}, \vec{V})$  معلماً متجانساً و ACEF مربع  
و منه f صورة c وفق دوران مركزه (A) وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow f = e^{i\frac{\pi}{2}} c \quad \boxed{f = ic}$$

ABMN مربع ومنه N صورة B وفق دوران مركزه  
(A) وزاويته  $(\frac{-\pi}{2})$

$$\Rightarrow n = e^{-i\frac{\pi}{2}} b \quad \boxed{n = -ib}$$

$$2- \text{أثبت أن } b - f = -i(c - n)$$

$$l_1: b - f = b - ic$$

$$l_2: -i(c - n) = -i(c + ib) = b - ic$$

$$3- \text{استنتج أن } (CN) \perp (BF) \text{ وأن } BF = CN$$

$$\text{وجدنا أن : } b - f = -i(c - n)$$

$$\Rightarrow \frac{b - f}{c - n} = -i \Rightarrow \arg \left[ \frac{b - f}{c - n} \right] = \arg(-i)$$

$$= \frac{-\pi}{2} \Rightarrow FB \perp NC$$

$$* \left| \frac{b - f}{c - n} \right| = |-i| \Rightarrow \frac{FB}{NC} = 1$$

$$\Rightarrow FB = NC$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

السؤال العاشر : نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر

مباشر التوجيه ولتكن (M) منتصف [BC] وليكن

ACD, AEB مثلثين قائمين في A ومتساويا الساقين

نختار معلماً مباشراً مبدؤه النقطة (A)

نرمز بالرمزين b, c إلى العدين العقديين الممثلان للنقطتين

C, B

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{-1+3i}{1+2i} = \frac{c-a}{b-a}$$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{b-a} = \frac{-1+3i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = 1+i$$

[B] - استنتج قياس الزاوية  $(B\hat{A}C)$  :

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$$

### أسئلة تعيين مجموعة نقاط

#### السؤال الأول :

لتكن النقطتان  $A, B$  اللتان تمثلهما الأعداد العقدية :

$$B: b = 3 + 2i, \quad A: a = 1$$

مثل في كل من الحالتين الآتيتين مجموعة النقاط  $M(Z)$

التي تحقق :

$$|Z-1| = |Z-3-2i| - 1$$

الحل :

$$|Z-1| = |Z-(3+2i)|$$

$$|Z_{\overline{AM}}| = |Z_{\overline{BM}}|$$

$$AM = BM$$

$M$  : تمثل محور القطعة المستقيمة  $[AB]$  .

\* لإيجاد معادلة محور القطعة المستقيمة  $[AB]$  مستقيم :

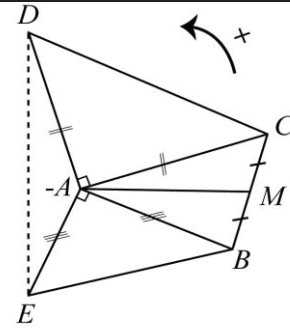
$$|x+iy-1| = |x+iy-3-2i|$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$4x + 4y - 12 = 0$$

$$\Delta: x + y - 3 = 0$$



1- أحسب بدلالة  $b, c$  الأعداد العقدية  $d, m, e$  :

الحل : باعتبار  $A$  مبدأ المعلم :

$$\bullet e = e^{\frac{-\pi}{2}i} b = -i b$$

$$\bullet d = e^{i\frac{\pi}{2}} c = i c$$

$$\bullet m = \frac{b+c}{2} \Leftarrow [BC] \text{ منتصف}$$

2- أحسب  $\frac{d-e}{m-a}$  ثم استنتج أن  $(AM)$  هو ارتفاع للمثلث

$$(AED) \text{ وأن } ED = 2AM$$

الحل :

$$\frac{d-e}{m-a} = \frac{\frac{ic+ib}{1}}{\frac{b+c}{2}} = \frac{\frac{i(b+c)}{1}}{\frac{b+c}{2}} = 2i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$$

أي  $AM \perp ED$  :

$$\frac{ED}{AM} = 2 \Rightarrow ED = 2AM$$

3-  $A$  : مركز أبعاد متناسبة للنقاط :

$$(B, 1), (C, 1), (E, 3), (D, 2)$$

$$[A] - \text{أحسب } \frac{c-a}{b-a}$$

$$a = \frac{2d+3e+c+b}{7} \Rightarrow o = \frac{2ic-3ib+c+b}{7}$$

$$\Rightarrow (1+2i)c + (1-3i)b = 0$$

$$(1+2i)c = -(1-3i)b$$



-2

$$|Z - 3 - 2i| = 3$$

$$|Z - (3 + 2i)| = 3$$

$$|Z_{BM}| = 3$$

$$BM = 3$$

$M$  : تمثل دائرة مركزها (a) ونصف قطرها  $[R = 3]$

\* لإيجاد معادلتها

$$|x + iy - 3 - 2i| = 3$$

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} = 3$$

بتربيع الطرفين :

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

$$0 \text{-----} 0 \text{-----} 0 \text{-----} 0 \text{-----} 0 \text{-----} 0 \text{-----} 0$$

السؤال الثاني :

نزود المستوي بمعلم متجانس مباشر  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  .

نقرن بكل نقطة  $m(Z)$  حيث  $Z \neq i$  النقطة  $m(k)$  حيث

$$k = \frac{Z + 2}{Z - i}$$

1- عين  $\Delta$  مجموعة النقاط  $(m)$  التي يكون عندها  $(k)$  عدداً حقيقياً :

الحل :

$$\bar{k} = k \Leftrightarrow \text{حقيقي } k$$

$$\frac{\bar{Z} + 2}{\bar{Z} + i} = \frac{Z + 2}{Z - i}$$

$$Z\bar{Z} + 2Z - i\bar{Z} - 2i = Z\bar{Z} + iZ + 2\bar{Z} + 2i$$

$$-i\bar{Z} - iZ + 2Z - 2\bar{Z} - 4i = 0$$

$$-i(Z + \bar{Z}) + 2(Z - \bar{Z}) - 4i = 0$$

$$-i(2x) + 2(2iy) - 4i = 0$$

$$\div 2i \quad -x + 2y - 2 = 0$$

$M$  : تمثل مستقيم ماعدا النقطة  $(0,1)$

$$0 \text{-----} 0 \text{-----} 0 \text{-----} 0 \text{-----} 0 \text{-----} 0 \text{-----} 0$$

2- عين  $\delta$  مجموعة النقاط  $(m)$  التي يكون عندها  $(k)$

عدد تخيلي :

الحل :

$$\bar{k} = -k \Leftrightarrow k \text{ تخيلي}$$

$$\frac{\bar{Z} + 2}{\bar{Z} + i} = \frac{-Z - 2}{Z - i}$$

$$-Z\bar{Z} - iZ - 2\bar{Z} - 2i = Z\bar{Z} + 2Z - i\bar{Z} - 2i$$

$$2Z\bar{Z} - i\bar{Z} + iZ + 2Z + 2\bar{Z} = 0$$

$$2(Z.\bar{Z}) + i(Z - \bar{Z}) + 2(Z + \bar{Z}) = 0$$

$$2(x^2 + y^2) + i(2iy) + 2(2x) = 0$$

$\div 2$

$$x^2 + y^2 - y + 2x = 0$$

بالإتمام إلى مربع كامل :

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$\delta$  : هي دائرة مركزها  $(-1, \frac{1}{2})$

ونصف قطرها  $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$  ماعدا النقطة  $(0,1)$

$$0 \text{-----} 0 \text{-----} 0 \text{-----} 0 \text{-----} 0 \text{-----} 0 \text{-----} 0$$

\* حل في (c) المعادلة :  $Z^3 = 8i$ الحل :

$$Z = re^{i\theta} \Rightarrow (re^{i\theta})^3 = 2^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow r^3 = 2^3 \Rightarrow \boxed{r = 2}$$

$$\Rightarrow 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$* \text{ عندما } k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$* \text{ عندما } k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \boxed{Z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

$$* \text{ عندما } k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{Z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}}$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

ملاحظة :

قد يقول لنا : بفرض  $A, B, C$  هي حلول المعادلة السابقة , عين نوع المثلث  $(ABC)$  .

**التحليل التوافقي :**

\* مبادئ العد

① العامل  $(n!)$  : << التباديل >>

$$n! = (n)(n-1)(n-2) \dots (1)$$

$$= (n)(n-1)! \quad : n \geq 0$$

$$* 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

② القوائم بدون تكرار &lt;&lt; الترتيب &gt;&gt; :

$$P_n^r = (n)(n-1) \dots (n-r+1)$$

$$= (n)(n-1) \dots \text{ مرة } r$$

$$n \geq r > 0 \quad : \text{ حيث }$$

$$* P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$* P_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

③ القوائم مع تكرار <<  $(n)^r$  >>

$$(n)^r = n \times n \times n \dots \times n \quad \text{مرة } r$$

$$* 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

ملاحظة : $r, n$  دائما أعداد طبيعية**السؤال الأول :**عين قيمة  $(n)$  التي تحقق المساواة :

$$\textcircled{1} \quad P_{n+2}^3 = 6P_{n+2}^1$$

الحل : شرط الحل :

**السؤال الثاني : تدريبات مسلية**

①- فريق لتسلق الجبال مكون من ثلاث مدربين وستة متدربين ، بكم طريقة يمكن ترتيبهم برتل أحادي في كل من الحالات :

**A:-** مدرب في بداية الرتل ومدرب في نهاية الرتل والباقي بينهما ؟

**الحل :**

مدرب / \* / 6 متدربين + مدرب / \* / 3 مدربين

$$30240 = 2 \times 7! \times 3 = \text{عدد الطرق}$$

**B:-** المدربون الثلاثة في بداية الرتل ثم يتبعهم المتدربون ؟

**الحل :**

3 متدربين / \* / 3 مدربين

$$4320 = 3! \times 6! = \text{عدد الطرق}$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

②- رف يحوي 7 كتب لمؤلفين :

( 3 كتب للمؤلف A و 4 كتب للمؤلف B ) .

المطلوب :

**A:-** بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B .

الحل :

$$BBB/BAAA$$

$$576 = 4! \times P_4^3 = \text{عدد الطرق}$$

**B:-** بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشتراطنا أن يكون كتاب معين للمؤلف B في بداية الرف .

$$B/AAABBB$$

$$720 = 1 \times 6! = \text{عدد الطرق}$$

$$n + 2 \geq 3$$

$$n + 2 \geq 1$$

$$n \geq 1$$

$$n \geq -1$$

⇐ الشرط المشترك  $[n \geq 1]$

$$(n + 2)(n + 1)(n) = 6(n + 2)$$

$$(n + 1)(n) = 6$$

$$n^2 + n - 6 = 0$$

$$(n + 3)(n - 2) = 0$$

مرفوض  $n = -3$  : إما

مقبول  $n = 2$  : أو

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

$$2 \quad P_n^2 = \frac{n!}{(n-1)!}$$

**الحل :** شرط الحل :

$$[n \geq 1] \text{ و } [n - 1 \geq 0] \text{ و } [n \geq 0] \text{ و } [n \geq 2]$$

⇐ الشرط المشترك  $[n \geq 2]$

$$(n)(n-1) = \frac{(n)(n-1)!}{(n-1)!}$$

$$n - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{n = 2} \text{ مقبول}$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

$$3 \quad P_n^3 = 4 \frac{n!}{(n-2)!}$$

**الحل :** شرط الحل :

$$[n \geq 2] \text{ و } [n - 2 \geq 0] \text{ و } [n \geq 0] \text{ و } [n \geq 3]$$

⇐ الشرط المشترك  $[n \geq 3]$

$$(n)(n-1)(n-2) = 4 \frac{(n)(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$$

$$n - 2 = 4 \Rightarrow \boxed{n = 6} \text{ مقبول}$$

$$\text{عدد الطرق} = 4 \times 3 = 12$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

⑥- مجموعة تضم 5 أشخاص نريد تشكيل لجنة مكونة

من ( رئيس – نائب رئيس – أمين سر ) علماً أن هناك

شخصان متخصصان لا يمكن أن يتواجدا معاً في ذات

اللجنة .

الحل :

نرمز للأشخاص  $A, B, C, D, E$  :

نفرض  $A, B$  هما الشخصان المتخصصان :

\* في حال وجود (A) في اللجنة :

$[ACE], [ADE], [ACD]$

\* في حال وجود (B) في اللجنة :

$[BCE], [BDE], [BCD]$

\* في حال عدم وجود (A, B) في اللجنة :

$[DCE]$

$$\text{عدد الطرق} = 7 \times 3! = 42$$

حيث (3!) عدد تبديلات كل مجموعة .

<< يوجد طرق إضافية للحل >>

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

### ملاحظة مهمة :

يعطى تبديلات عناصر مجموعة ما .

$$\text{عدد التعديلات} = \frac{(\text{عدد السحوبات})!}{(\text{جداء عدد المتشابهات})!}$$

③- لتكن المجموعة  $E = [1, 2, 4, 5]$

A:- كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلف من 3 منازل يمكن تشكيله من عناصر  $E$  .

الحل :

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|--|--|--|

$$\text{عدد الطرق} = P_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

B:- كم عدداً مؤلفاً من 3 منازل يمكن تشكيله من عناصر  $E$  مضاعفاً للعدد 5 وأكبر من 500 .

الحل :

|   |  |   |
|---|--|---|
| 5 |  | 5 |
|---|--|---|

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 4 \times 1 = 4$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

④- كم عدداً طبيعياً مكون من أربعة أرقام يمكن تشكيله

من مجموعة الأرقام  $[0, 1, 2, 4, 7, 8]$  ويكون أصغر تماماً

من  $[4000]$

الحل :

|   |  |  |
|---|--|--|
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |

$$\text{عدد الطرق} = 2 \times 6 \times 6 \times 6 = 432$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

⑤- لتكن المجموعة  $S = [0, 2, 5, 8, 9]$

A:- كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلف من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر (S) ؟

الحل :

|    |   |  |  |
|----|---|--|--|
| 2  | 5 |  |  |
| 89 |   |  |  |

$$\text{عدد الطرق} = 4 \times 4 = 16$$

B:- كم عدداً زوجياً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر (S) ؟

الحل :

|     |     |
|-----|-----|
| 258 | 028 |
| 9   |     |

مثال :

$$* T H H : \text{عدد التبديلات} = \frac{3!}{1! \times 2!} = 3$$

$$* T H M : \text{عدد التبديلات} = \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = 6$$

$$* T T T H H : \text{عدد التبديلات} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

السؤال الثالث : حل المسائل التالية :

① - مغلف يحوي بطاقات تحمل الأرقام :

$$[0,0,2,2,2,3,3,3,3]$$

\* نسحب ثلاث بطاقات على التوالي بدون إعادة :

**A:-** بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات

$$\text{عدد الطرق} = P_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

**B:-** بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات مجموعة أرقامها فردي

$$B = [(ف ز ز) 3 \text{ أو } (ف ف ف)]$$

$$n(B) = (4 \times 3 \times 2) + 3(5 \times 4 \times 4)$$

$$= 24 + 240 = 264$$

**C:-** بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات مجموع أرقامها زوجي

$$C = [(ف ف ز) 3 \text{ أو } (ز ز ز)]$$

$$n(C) = (5 \times 4 \times 3) + 3(5 \times 4 \times 3)$$

$$= 60 + 180 = 240$$

**D:-** بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات مجموع أرقامها

أصغر تماماً من (4)

$$D = [3(0,0,2) \text{ أو } 3(0,0,3)]$$

$$n(C) = 3(2 \times 1 \times 3) + 3(2 \times 1 \times 4) = 42$$

**E:-** بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات مجموع أرقامها

أكبر تماماً من (7)

$$E = [3(2,3,3) \text{ أو } (3,3,3)]$$

$$n(E) = 3(3 \times 4 \times 3) + (4 \times 3 \times 2) = 132$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

تدرب :

أعد المسألة في حالة سحب ثلاث بطاقات على التوالي مع الإعادة .

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

② - صندوق يحوي (10) كرات ملونة :

6 كرات حمراء ، 3 كرات بيضاء ، كرة سوداء

\* نسحب ثلاث كرات على التوالي مع الإعادة :

① كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟

② كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي كرتين فقط من

ذات اللون ؟

③ كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي ثلاث كرات

مختلفة الألوان ؟

④ كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي ثلاث كرات

ليست من لون واحد ؟

⑤ كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي كرة حمراء على

الأقل ؟

⑥ كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي كرة حمراء على

الأكثر ؟

الحل :

$$1B , 3W , 6R$$

$$+(3 \times 3 \times 7) = 486$$

$$\textcircled{3} C = [6(R, W, B)]$$

$$n(C) = 6 \times 6 \times 3 \times 1 = 108$$

$$\textcircled{4} n(D) = n(A) + n(C) \quad \textcircled{1} \text{ طريقة}$$

$$= 594$$

طريقة ②

$$n(D) = 720 - [(RRR) \text{ أو } (WWW)]$$

$$= 720[P_6^3 + P_3^3] = 594$$

$$\textcircled{5} E = [3(RR'R') \text{ أو } 3(RRR') \text{ أو } (RRR)]$$

$$n(E) = (3 \times 6 \times 4 \times 3)$$

$$+(3 \times 6 \times 5 \times 4) + P_6^3 = 696$$

$$\textcircled{6} F = [3(RR'R') \text{ أو } (R'R'R')]$$

$$n(F) = (3 \times 6 \times 4 \times 3)$$

$$+(4 \times 3 \times 2) = 240$$

$$\textcircled{1} \text{ عدد النتائج} = (10)^3 = 10 \times 10 \times 10$$

$$= 1000$$

$$\textcircled{2} A = [3(RRR') \text{ أو } 3(WWW') \text{ أو } 3(BBB')]$$

$$n(A) = (3 \times 6 \times 6 \times 4) +$$

$$+(3 \times 3 \times 3 \times 7)$$

$$+(3 \times 1 \times 1 \times 9) = 648$$

$$\textcircled{3} C = [6(R, W, B)]$$

$$n(C) = 6 \times 6 \times 3 \times 1 = 108$$

$$\textcircled{4} n(D) = n(A) + n(C) \quad \textcircled{1} \text{ طريقة}$$

$$= 648 + 108 = 756$$

طريقة ②

$$n(D) = 1000 - [(RRR) \text{ أو } (WWW) \text{ أو } (BBB)]$$

$$= 1000 - [(6)^3 + (3)^3 + (1)^3] = 756$$

$$\textcircled{5} E = [3(RR'R') \text{ أو } 3(RRR') \text{ أو } (RRR)]$$

$$n(E) = (3 \times 6 \times 4 \times 4)$$

$$+(3 \times 6 \times 6 \times 4) + (6)^3 = 936$$

$$\textcircled{6} F = [3(RR'R') \text{ أو } (R'R'R')]$$

$$n(F) = (3 \times 6 \times 4 \times 4)$$

$$+(4 \times 4 \times 4) = 352$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

③ - أعد السؤال السابق في حالة سحب ثلاث كرات على التتالي بدون إعادة

الحل :

$$\textcircled{1} \text{ عدد النتائج} = P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

$$\textcircled{2} A = [3(RRR') \text{ أو } 3(WWW')]$$

$$n(A) = (3 \times 6 \times 5 \times 4)$$

$$\Rightarrow n = [0,1,2,3]$$

$$\text{مقبول } 3n = n + 2 \Rightarrow \boxed{n = 1}$$

$$\text{مقبول } 3n + n + 2 = 10 \Rightarrow \boxed{n = 2}$$

$$0-----0-----0-----0-----0-----0$$

**مثال 2:** يتكون مكتب إداري من :

(6) رجال و (3) نساء نريد اختيار لجنة من ثلاثة أشخاص :

① بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة ؟

$$\text{عدد الطرق} = \binom{9}{3} = 84$$

② بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة على أن تضم امرأة على الأكثر ؟

$$[(mmm) \text{ أو } (mmf)]$$

$$\text{عدد الطرق} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2} \binom{3}{1} = 20 + 45 = 65$$

③ بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من (رئيس - نائب رئيس - أمين سر) .

$$\text{عدد الطرق} = P_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

$$0-----0-----0-----0-----0-----0$$

**مثال 3:** لتكن المجموعة :

$$E = [1,2,3, \dots, 7]$$

① كم عدد المجموعات الجزئية المؤلفة من ثلاثة عناصر من عناصر (E) ♦

$$\text{عدد المجموعات} = \binom{7}{3} = 35$$

② كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من (E) ومجموعهما مضاعف للعدد (2)

\* التوافيق : (( سحب معاً دفعة واحدة ))

$$\binom{n}{r} = \frac{p_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} : n \geq r \geq 0$$

**مثال 1:** عين قيمة (n) في كل من الحالات

التالية :

$$\textcircled{1} 3 \binom{n}{4} = 14 \binom{n}{2}$$

**الحل :**

شرط الحل :

$$[(n \geq 4)3(n \geq 2)] \Rightarrow (n \geq 4)$$

$$3 \frac{n!}{4!(n-4)!} = 14 \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\frac{3}{4!(n-4)!} = \frac{7}{(n-2)(n-3)(n-4)!}$$

$$(n-2)(n-3) = 56$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$

$$(n-10)(n+5) = 0$$

مقبول  $n = 10$  : إما

مرفوض  $n = -5$  : أو

$$0-----0-----0-----0-----0-----0$$

$$\textcircled{2} \binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$$

**الحل :**

شرط الحل :

$$10 \geq 3n$$

$$10 \geq n + 2$$

$$n \leq \frac{10}{3}$$

$$n \leq 8$$

$$n = [0,1,2,3]$$

$$n = [0,1, \dots, 8]$$

$$T_r = \binom{10}{r} (x)^{10-2r}$$

$$\textcircled{1} x^2 = x^{10-2r} \Rightarrow 10 - 2r = 2 \Rightarrow \boxed{r = 4}$$

$$\Rightarrow T_4 = \binom{10}{4} x^2 = 210x^2$$

$$\textcircled{2} x^0 = x^{10-2r} \Rightarrow 10 - 2r = 0 \Rightarrow \boxed{r = 5}$$

$$\Rightarrow T_5 = \binom{10}{5} = 252$$

$$\textcircled{3} x^3 = x^{10-2r} \Rightarrow 10 - 2r = 3 \Rightarrow \boxed{r = \frac{7}{2}}$$

⇐ لا يوجد حد يحوي  $(x^3)$  لان  $r, n$  أعداد طبيعية .

$$\textcircled{4} x^4 = x^{10-2r} \Rightarrow 10 - 2r = 4 \Rightarrow \boxed{r = 3}$$

$$\Rightarrow \text{الأمثال هي} = \binom{10}{3} = 120$$

$$0-----0-----0-----0-----0-----0-----0$$

مثال 2 : حدد الشرط : لكي يحوي المنشور

$$(x^2 + \frac{1}{x})^n \text{ على حد مستقل عن } (x)$$

الحل :

$$T_r = \binom{n}{r} (x^2)^{n-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= \binom{n}{r} (x)^{2n-2r} (x)^{-r}$$

$$\binom{n}{r} (x)^{2n-3r}$$

$$\Rightarrow x^0 = x^{2n-3r} \Rightarrow \boxed{r = \frac{2n}{3}}$$

أي يجب أن تكون  $(n)$  من مضاعفات العدد (3)

الحل : ليكون مجموعهما مضاعف للعدد (2)

يجب أن نختار ( ف ، ف ) أو ( ز ، ز )

$$\text{عدد المجموعات} = \binom{4}{2} + \binom{3}{2} = 6 + 3 = 9$$

$$0-----0-----0-----0-----0-----0-----0$$

منشور ثنائي الحد :

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (a)^{n-r} (b)^r$$

ملاحظات :

$$\textcircled{1} (a - b)^n = [(a) + (-b)]^n$$

(( الحد العام ))

$$\textcircled{2} T_r = \binom{n}{r} (a)^{n-r} (b)^r$$

$$0-----0-----0-----0-----0-----0-----0$$

مثال 1 : ليكن المقدار :  $(x + \frac{1}{x})^{10}$

① أوجد الحد الذي يحوي  $(x^2)$

② أوجد الحد المستقل عن  $(x)$

③ هل يوجد حد يحوي  $(x^3)$

④ عين أمثال الحد الذي يحوي  $(x^4)$

الحل :

$$T_r = \binom{n}{r} (a)^{n-r} (b)^r$$

$$T_r = \binom{10}{r} (x)^{10-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= \binom{10}{r} (x)^{10-r} (x)^{-r}$$



سؤال مهم :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{إذا علمت أن :}$$

$$(A) \text{ اكتب منشور } (e^{ix} + e^{-ix})^3$$

الحل :

$$(e^{ix} + e^{-ix})^3 = \binom{3}{0} (e^{ix})^3 (e^{-ix})^0$$

$$+ \binom{3}{1} (e^{ix})^2 (e^{-ix})^1$$

$$+ \binom{3}{2} (e^{ix})^1 (e^{-ix})^2$$

$$+ \binom{3}{3} (e^{ix})^0 (e^{-ix})^3$$

$$= e^{3xi} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}$$

$$= (e^{3ix} + e^{-3ix}) + 3(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$(e^{ix} + e^{-ix})^3 = 2\cos(3x) + 6\cos x$$

(B) اكتب  $\cos^3 x$  بصيغة عبارة خطية في النسب المتثلثة لمضاعفات الزاوية  $(x)$

$$\text{ثم أحسب } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$$

الحل :

$$\cos^3 x = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{2\cos 3x + 6\cos x}{8}$$

$$\Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x \right] dx$$

$$= \left[ \frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[ \left( \frac{1}{12}(-1) + \frac{3}{4} \right) - (0 + 0) \right]$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

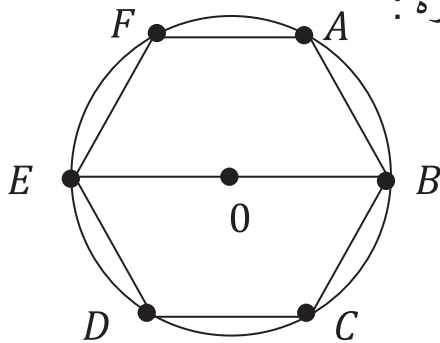
0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

تدرب أعد السؤال السابق من أجل :

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

تدرب ( أشكال هندسية ) :

$A, B, C, D, E, F$  نقاط تشكل سدس منتظم مرسوم على دائرة :



نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلث :

① ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب :

$$\text{مثلث } 20 = \binom{6}{3} = \text{عدد المثلثات}$$

② ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها

كل قطر مار من مركز الدائرة يشكل أربعة مثلثات قائمة ولدينا ثلاثة أقطار :

$$\text{قائم } 12 = 4 \times 3 = \text{عدد المثلثات القائمة}$$

**\* قوانين هامة :**

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- التقاطع ( $\cap$ ) : الحدثان  $A, B$  يقعان معاً .

- الاجتماع ( $\cup$ ) : يقع أحد الحدثين  $A$  أو  $B$  على الأقل

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P((A \cup B))$$

$$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P((A \cap B))$$

\* الاحتمال الشرطي :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

(( علماً أن - إذا علمت - إذا كان - مع أنه ))

**التوقع الرياضي :**

$$E(x) = \sum_{i=1}^m x_i P(X = x_i)$$

**\* التباين للمتحول العشوائي :**

$$V(x) = \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot P(x = x_i) - [E(x)]^2$$

\* الانحراف المعياري لمتحول عشوائي :

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

\* الاستقلال الاحتمالي

$A, B$  مستقلان احتمالياً  $\Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

③ ما عدد المثلثات المنفرجة التي يمكن الحصول عليها : (( المثلث منفرج في رأس المسدس ))

مثلثات 6 = عدد المثلثات المنفرجة

④ ما عدد المثلثات الحادة :

$$2 = 20 - 18 = \text{عدد المثلثات الحادة}$$

⑤ ما عدد الأقطار :

$$\text{عدد الأقطار} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{6(6-3)}{2} = 9$$

⑥ عدد نقاط تقاطع أقطار المضلع :

$$\text{عدد نقاط التقاطع} = \binom{n}{4} + n = \binom{6}{4} + 6 = 21$$

⑦ ما عدد الرباعيات ( شكل رباعي ) يمكن تشكيله :

$$15 = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \text{عدد الرباعيات}$$

⑧ ما عدد القطع المستقيمة الممكن تشكيلها من النقاط الستة :

$$15 = \binom{6}{2} = \text{عدد القطع}$$

⑨ ما عدد الأشعة غير الصفرية الممكن تشكيلها :

$$30 = P_6^2 = 6 \times 5 = \text{عدد الأشعة}$$

0-----0-----0-----0-----0-----0

**الاحتمالات**

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \quad \begin{array}{l} \text{عدد عناصر } A \\ \text{عدد عناصر } \Omega \end{array}$$

**مسألة ① :** يحتوي صندوق (9) كرات متماثلة وملونة كما يلي :

4 حمراء و 3 بيضاء و 2 سوداء نسحب من الصندوق 3 كرات دون إعادة بالتتالي ،

**والمطلوب :**

① أحسب احتمال أن تكون الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء .

② أحسب احتمال الحصول على كرة من كل لون

③ أحسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين وكرة بيضاء

④ أحسب احتمال أن تكون الأولى والثانية حمراوين والثالثة بيضاء

⑤ أحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات من ذات اللون .

**الحل :**

$$① A[(س, ب, ح)]$$

$$P(A) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$$

$$② B[(س, ب, ح) \times 6]$$

$$P(B) = P(A) \times 6 = \frac{1}{21} \times 6 = \frac{2}{7}$$

$$③ C[(ب, ح, ح)]$$

$$P(C) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} \times 3 = \frac{3}{14}$$

$$④ D[(ب, ح, ح)]$$

$$P(D) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$$

$$⑤ E[(ب, ب, ب), (ح, ح, ح)]$$

$$P(E) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7}$$

$$= (4 + 1) \left( \frac{3 \times 2}{9 \times 8 \times 7} \right) = \frac{5}{84}$$

0-----0-----0-----0-----0-----0

**مسألة ② :** يحتوي صندوق (5) كرات متماثلة

3 حمراء و 2 بيضاء ، نسحب كرتين بالتتالي مع الإعادة ، **والمطلوب :**

① إذا علمت أن الكرات من نفس اللون ، ما احتمال أن تكون حمراء .

② أحسب احتمال أن تكون الثانية بيضاء علماً أن الأولى بيضاء .

③ أحسب احتمال أن تكون الثانية حمراء مع أنه سحب كرة حمراء على الأقل .

④  $x$  متغير عشوائي يدل على عدد مرات سحب كرة حمراء ، احسب القانون الاحتمالي والتوقع الرياضي و التباين . الانحراف المعياري

⑤  $x$  متغير عشوائي يأخذ (9) عند سحب كرتين بيضاء ويأخذ ( $\alpha$ ) عند سحب كرتين حمراوين ويأخذ (0) ماعدا ذلك . احسب القانون الاحتمالي والتوقع الرياضي .

⑥ عين ( $\alpha$ ) إذا علمت  $E(x) = 0$

**الحل :**

$$A = [(R, R), (W, W)]$$

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{13}{25}$$

$$B = [(R, R)]$$

$$A \cap B = [(R, R)] \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

## القانون الاحتمالي :

| $x_i$    | 0              | 1               | 2              | مجموع |
|----------|----------------|-----------------|----------------|-------|
| $P(x_i)$ | $\frac{4}{25}$ | $\frac{12}{25}$ | $\frac{9}{25}$ | 1     |

## التوقع الرياضي :

$$E(x) = \frac{0 + 12 + 18}{25} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \quad \text{التباين :}$$

$$= \frac{0 + 12 + 36}{25} - \frac{36}{25} = \frac{12}{25}$$

## الانحراف المعياري :

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{12}{25}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$\Omega = [(R, R), (R, W), (W, W)] \quad (5)$$

$$x = [0, 9, \alpha]$$

$$P_0 = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25} \quad 2(R, W), x = 0$$

$$P_9 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} \quad (W, W) x = 9$$

$$P_\alpha = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} \quad (R, R) x = \alpha$$

| $x_i$    | 0               | 9              | $\alpha$       | مجموع |
|----------|-----------------|----------------|----------------|-------|
| $P(x_i)$ | $\frac{12}{25}$ | $\frac{4}{25}$ | $\frac{9}{25}$ | 1     |

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{13}{25}} = \frac{9}{13}$$

$$C = [(W, R), (W, W)] \quad \text{الأولى بيضاء} \quad (2)$$

$$P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{25}$$

$D$  : أن تكون الثانية بيضاء

$$D = [(W, W), (R, W)]$$

$$P(C \cap D) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(D|C) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$E$  (3) : أن تكون كرة حمراء على الأقل :

$$E = [2(R, W), (R, R)]$$

$$P(E) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{25}$$

$F$  : أن تكون الثانية حمراء  $(W, R)(R, R)$

$$P(E \cap F) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{15}{25}$$

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

$$\Omega = [(R, R), (R, W), (W, W)] \quad (4)$$

$$x = [0, 1, 2]$$

$$P_0 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} \quad (W, W) x = 0$$

$$P_1 = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} \quad 2(W, R) x = 1$$

$$P_3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} \quad (R, R) x = 2$$

$$P(x = 3) = \frac{\binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{1}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{12}{56}$$

|          |                |                 |                 |   |
|----------|----------------|-----------------|-----------------|---|
| $x_i$    | 1              | 2               | 3               |   |
| $P(x_i)$ | $\frac{5}{56}$ | $\frac{39}{56}$ | $\frac{12}{56}$ | 1 |

$$E(x) = \frac{5 + 78 + 36}{56} = \frac{119}{56}$$

0-----0-----0-----0-----0-----0

**مسألة 4 :** صندوق يحوي على كرات حمراء وكرات بيضاء بحيث يكون الكرات الحمراء ثلاثة أضعاف الكرات البيضاء

① أحسب احتمال سحب كرة حمراء

② أحسب احتمال سحب كرة بيضاء

③  $x$  : متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة احسب القانون الاحتمالي (( اسحب ثلاث كرات مع إعادة )) .

**الحل :**

$4n \begin{cases} n & \text{بفرض عدد الكرات البيضاء} \\ 3n & \text{بفرض عدد الكرات الحمراء} \end{cases}$

$$P(R) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4} \quad ①$$

$$P(W) = \frac{n}{4n} = \frac{1}{4} \quad ②$$

③

$$\Omega = [(R, R, R), (R, R, W), (R, W, W), (W, W, W)]$$

$$E(x) = \frac{0 + 36 + 9\alpha}{25} = \frac{36 + 9\alpha}{25}$$

$$E(x) = 0 \Rightarrow 36 + 9\alpha = 0 \quad ⑥$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -4}$$

0-----0-----0-----0-----0-----0

**مسألة 3 :** صندوق يحوي 8 كرات 4 زرقاء ، 3 خضراء ، 1 صفراء

نسحب ثلاث كرات معاً ،  $x$  متغير عشوائي يدل على الألوان المختلفة أحسب  $E(x)$

**الحل :**

$$x(\Omega) = [1, 2, 3]$$

$$1 = [(X, X, X), (Z, Z, Z)]$$

$$P(x = 1) = \frac{\binom{3}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$$

$$= \frac{1 + \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1}}{\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{1 + 4}{56} = \frac{5}{56}$$

$$2 = [(X, Z, Z), (Z, Z, V)]$$

$$[(X, X, Z), (X, V, V)]$$

$$P(x = 2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{3}{1} + \binom{4}{2} \binom{1}{1} + \binom{3}{2} \binom{4}{1} + \binom{3}{2} \binom{1}{1}}{\binom{8}{3}}$$

$$= \frac{6 \times 3 + 6 \times 1 + 3 \times 4 + 3 \times 1}{56} = \frac{39}{56}$$

$$3 = [(Z, X, V)]$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A) = \frac{2}{3}$$

$$x(\Omega) = [0,1,2] \quad (2)$$

$$P(x=0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \times = \frac{1}{9} \quad [T, T], x=0$$

$$P(x=1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \times 2 = \frac{4}{9} \quad [T, H], x=1$$

$$P(x=2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \quad [H, H], x=2$$

| $x_i$    | 0             | 1             | 2             | مجموع |
|----------|---------------|---------------|---------------|-------|
| $P(x_i)$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | 1     |

$$E(x) = 0 + \frac{4}{9} + \frac{8}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

(3) التجربة برنولية :

$$P(x=k) = \binom{n}{k} P^k q^{n-k}$$

$n = 5$  عدد الرميات

$k = 3$  عدد مرات ظهور الشعار

$P = \frac{2}{3}$  احتمال ظهور الشعار

$q = \frac{1}{3}$  احتمال ظهور الكتابة  $[q = 1 - p]$

$$P(x=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9} = \frac{80}{243}$$

$$P_0 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64} \quad (W, W, W) \quad x=0$$

$$P_1 = 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64} \quad 3(R, W, W) \quad x=1$$

$$P_2 = 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64} \quad 3(R, R, W) \quad x=2$$

$$P_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64} \quad (R, R, R) \quad x=3$$

| $x_i$    | 0              | 1              | 2               | 3               | مجموع |
|----------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-------|
| $P(x_i)$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{27}{64}$ | 1     |

0-----0-----0-----0-----0-----0

**مسألة 5 :** ضُنعت قطعة نقود بحيث احتمال

ظهور الشعار = ضعفي ظهور الكتابة .

\*  $A$  : حدث ظهور الشعار  $(H)$  .

\*  $B$  : حدث ظهور الكتابة  $(T)$  .

(1) أحسب احتمال ظهور كل من الشعار والكتابة

(2) عند إلقاء القطعة مرتين  $x$  : متغير عشوائي يدل

على عدد ظهور الشعار أحسب  $E(x)$

(3) عند إلقاء القطعة 5 مرات ، ما احتمال

الحصول على ثلاث شعارات .

**الحل :**

$$P(A) = 2P(B) \quad (1)$$

$$P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow 2P(B) + P(B) = 1$$

$$\Rightarrow 3P(B) = 1$$

$$n(\Omega) = [0,9,12]$$

$$P(x = 0) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

$$P(x = 9) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

$$P(x = 12) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

|          |               |               |               |
|----------|---------------|---------------|---------------|
| $x_i$    | 0             | 9             | 12            |
| $P(x_i)$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

$$E(x) = 0 + \frac{9}{5} + \frac{12}{5} = \frac{21}{5}$$

0-----0-----0-----0-----0-----0

**مسألة 7 :** يحوي صندوق 10 كرات  $n$  كرة حمراء ، والباقي سوداء  $(10 - n)$  نسحب كرتين معاً

① عين  $n$  ليكون احتمال سحب كرتين مختلفتين باللون يساوي  $\left(\frac{5}{9}\right)$

② من أجل  $n = 5$  ،  $x$  : متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الكرات الحمراء .

**الحل :** ①

سحب كرتين مختلفتين  $A = [(ح, س)]$

$$① P(A) = \frac{\binom{n}{1} \cdot \binom{10-n}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{n(10-n)}{2 \times 1}$$

**مسألة 6 :** يحوي مغلف (6) بطاقات متماثلة

ومرقمة : 0 , 0 , 3 , 3 , 3 , 4 نسحب من المغلف بطاقتين على التوالي دون إعادة .

① إذا علمت أن المجموع أولياً واحتمال أحدهما 4

②  $x$  : متغير يدل على جداء رقمي البطاقتين أحسب  $E(x)$  عين القانون الاحتمالي والتوقع الرياضي والتباين .

**الحل :**

①  $A$  : مجموع أولي

$$A = [(0,3) \times 2, (3,4) \times 2]$$

$B$  : أحدهما (4)

$$A \cap B = [(3,4) \times 2]$$

$$P(A) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times 2 + \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{1}{5}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$$

|   |   |   |    |    |    |    |
|---|---|---|----|----|----|----|
|   | 0 | 0 | 3  | 3  | 3  | 4  |
| 0 |   | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 0 | 0 |   | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 3 | 0 | 0 |    | 9  | 9  | 12 |
| 3 | 0 | 0 | 9  |    | 9  | 12 |
| 3 | 0 | 0 | 9  | 9  |    | 12 |
| 4 | 0 | 0 | 12 | 12 | 12 |    |

$$\sigma(x) = \sqrt{v(x)} = \frac{2}{3}$$

0-----0-----0-----0-----0-----0-----0

**مسألة 8 :** صندوقان يحوي الأول 1 , 2 , 3

ويحوي الثاني 2 , 3 , 4 , 5

نسحب كرة من الصندوق الأول وكرة من الصندوق الثاني

①  $A$  : حدث إحدى الكرتين على الأقل تحمل (3)

$B$  : حدث مجموع الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من (5)

هل  $A, B$  مستقلان احتمالياً

②  $x$  متغير عشوائي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبين أحسب  $E(x)$

**الحل :**

①

|   | 2     | 3     | 4     | 5     |
|---|-------|-------|-------|-------|
| 1 | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) |
| 2 | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) |
| 3 | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) |

$A = [(1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,4), (3,5)]$

$B = [(1,5), (2,4), (1,5), (3,5), (3,3), (3,4)]$

$$= \frac{10n - n^2}{45}$$

$$P(A) = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{10n - n^2}{45} = \frac{5}{9}$$

$$10n - n^2 = 25 \Rightarrow n^2 - 10n + 25 = 0$$

$$\Rightarrow (n - 5)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

② (5 ح) و (5 س) .

$$x(\Omega) = [0,1,2]$$

$$P(x = 0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9} \text{ س, س } x = 0$$

$$P(x = 1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{9} \text{ س, ح } x = 1$$

$$P(x = 2) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9} \text{ ح, ح } x = 2$$

| $x_i$    | 0             | 1             | 2             |
|----------|---------------|---------------|---------------|
| $P(x_i)$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |

$$E(x) = 0 + \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$$

$$V(x) = [(0)^2 \left(\frac{2}{9}\right) + (1)^2 \left(\frac{5}{9}\right) + (2)^2 \left(\frac{2}{9}\right)] - [1^2] = \frac{4}{9}$$



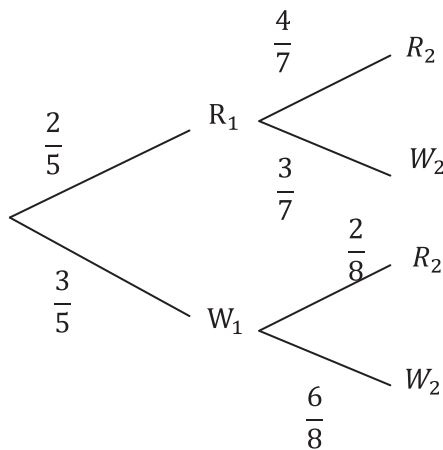
**مسألة ٩ :**

صندوق يحوي كرتين حمراء وثلاثة بيضاء  
\* نسحب كرة نسجل لونها ثم نعيدها إلى الصندوق  
ثم نضاعف عدد الكرات من لونها ثم نسحب كرة  
أخرى .

- ① أوجد المخطط الشجري للتجربة
- ② أحسب احتمال  $(R_2)$  حدث سحب كرة حمراء في المرة الثانية .
- ③ إذا علمت أن الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون ، ما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء اللون .

**الحل :**

①



$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(W_1 \cap R_2) \quad ②$$

$$= \left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{8}\right) = \frac{106}{280}$$

③

$$P(R_1|R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{8}{280}}{\frac{106}{280}} = \frac{8}{106} = \frac{4}{53}$$

حيث :

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{35} = \frac{64}{280}$$

$$A \cap B = [(3,3), (3,4), (3,5)]$$

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) ? = P(A) P(B)$$

$$\frac{1}{4} ? = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftarrow A, B \text{ مستقلات احتمالياً}$$

$$(\Omega) = [3,4,5,6,7,8] \quad ②$$

$$P(x=3) = \frac{1}{12}, P(x=4) = \frac{2}{12}$$

$$P(x=5) = \frac{3}{12}, P(x=6) = \frac{3}{12}$$

$$P(x=7) = \frac{2}{12}, P(x=8) = \frac{1}{12}$$

|          |                |                |                |                |                |                |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $r_1$    | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              |
| $P(x_1)$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{2}{12}$ | $\frac{1}{12}$ |

$$E(x) = \frac{3 + 8 + 15 + 18 + 14 + 8}{12} = \frac{11}{2}$$

## مسألة 10 :

يشترى محل (400) مصباح من المصنع (A)  
نسبة المصابيح المعطوبة منها (4%)

ويشترى ذات المحل من مصنع (B) (200)  
مصباح نسبة المصابيح المعطوبة (10%).

\* نسحب عشوائياً مصباحاً من المحل .

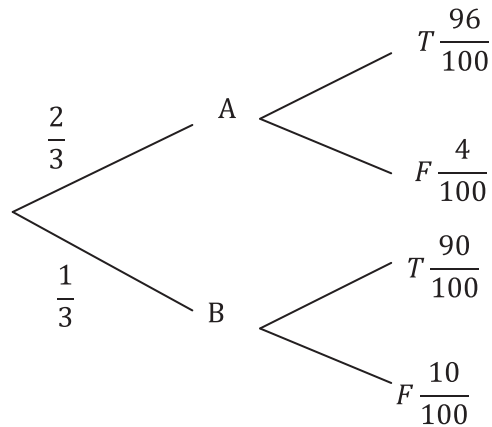
① ما احتمال أن يكون المصباح معطوب

② إذا علمت أن المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من المصنع (B)

③ نسحب عشوائياً معاً مصباحين من مصابيح المصنع (A) وليكن  $x$  : متحول عشوائي يدل على عدد المصابيح الصالحة للاستعمال ,  
والمطلوب : أحسب  $P(x = 0)$

الحل :

$T$  : مصباح صالح ،  $F$  : مصباح معطوب ①



$$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) \\ = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{100}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{10}{100}\right) = \frac{18}{300}$$

②

$$P(B|F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{10}{300}}{\frac{18}{300}} = \frac{5}{9}$$

③ عدد المصابيح المعطوبة في الورشة A :

$$\frac{4 \times 400}{100} = 16 \\ P(x = 0) = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{400}{2}} = \frac{1}{665}$$

تدريب على استقلال متحولين عشوائيين :  
الجدول الآتي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية  $(x, y)$  :  
① أكمله علماً أن  $x, y$  مستقلين احتمالياً .

| $x \backslash y$ | 0   | 1 | 2    | قانون $x$ |
|------------------|-----|---|------|-----------|
| 0                |     |   |      | 0.4       |
| 1                |     |   | 0.04 |           |
| 2                |     |   |      | 0.4       |
| قانون $y$        | 0.3 |   |      |           |

الحل :

| $x \backslash y$ | 0    | 1   | 2    | قانون $x$ |
|------------------|------|-----|------|-----------|
| 0                | 0.12 | 0.2 | 0.08 | 0.4       |
| 1                | 0.06 | 0.1 | 0.04 | 0.2       |
| 2                | 0.12 | 0.2 | 0.08 | 0.4       |
| قانون $y$        | 0.3  | 0.5 | 0.2  | 1         |

② أحسب :  $P(x = 2)$  ,  $P(y = 0)$

$$P[(x = 2) \cap (y = 2)]$$

الحل :

$$P(x = 2) = 0.4 , P(y = 0) = 0.3$$

$$P[(x = 2) \cap (y = 2)] = 0.08$$

③ اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي  $y$   
ثم أحسب  $E(y)$  و  $V(y)$  و  $\sigma(y)$

**الحل :**

$$P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$$

$$P(x = 0) = \binom{5}{0} \left(\frac{6}{10}\right)^0 \left(\frac{4}{10}\right)^5 = \left(\frac{4}{10}\right)^5$$

$$P(x = 1) = \binom{5}{1} \left(\frac{6}{10}\right)^1 \left(\frac{4}{10}\right)^4 = 3 \left(\frac{4}{10}\right)^4$$

$$P(x = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{6}{10}\right)^2 \left(\frac{4}{10}\right)^3 = \frac{36}{10} \left(\frac{4}{10}\right)^3$$

$$P(x \leq 2) = \left(\frac{4}{10}\right)^5 + 3 \left(\frac{4}{10}\right)^4 + \frac{36}{10} \left(\frac{4}{10}\right)^3$$

$$\left(\frac{4}{10}\right)^3 \left[ \left(\frac{4}{10}\right)^2 + 3 \left(\frac{4}{10}\right) + \frac{36}{10} \right]$$

$$= \left(\frac{64}{1000}\right) \left(\frac{496}{100}\right) = 0.31744$$

0-----0-----0-----0-----0-----0

**مسألة متتاليات واحتمالات :**

يوجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء :

\* إذا صد ضربة الجزاء  $(n)$  فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء  $(0.8)(n + 1)$

\* إذا لم يصد ضربة الجزاء  $(n)$  : فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء  $(n + 1)$  يساوي  $(0.6)$

\* نفترض أن احتمال أن يصد أول ضربة جزاء يساوي  $(0.7)$  .

ليكن  $(A_n)$  : الحدث يصد حارس المرمى ضربة الجزاء  $(n)$  والمطلوب :

① أحسب  $P(A_2|A_1)$  و  $P(A_2|\bar{A}_1)$

② استنتج أن :  $P(A_2) = 0.74$

③ نعرف  $P(A_n) = P_n$

|                   |                |                |                |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|
| $y$               | 0              | 1              | 2              |
| $P(y = y_i)$      | $\frac{3}{10}$ | $\frac{5}{10}$ | $\frac{2}{10}$ |
| $P_i \cdot y_i$   | 0              | $\frac{5}{10}$ | $\frac{4}{10}$ |
| $P_i \cdot y_i^2$ | 0              | $\frac{5}{10}$ | $\frac{8}{10}$ |

$$* E(x) = \sum_{i=1}^3 y_i p_i = \left[ 0 + \frac{5}{10} + \frac{4}{10} \right] = \frac{9}{10}$$

$$* = \sum_{i=1}^3 y_i^2 p_i - [E(x)]^2$$

$$= \left[ 0 + \frac{5}{10} + \frac{8}{10} \right] - \left[ \frac{9}{10} \right]^2$$

$$= \frac{13}{10} - \frac{81}{100} = \frac{130 - 81}{100} = \frac{49}{100}$$

$$* \sigma y = \sqrt{V(y)} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10}$$

0-----0-----0-----0-----0-----0

**تدرب : (( مسألة برنولي )) :**

يتواجه فريقان  $A, B$  في لعبة كرة طائرة مكونة من ( 5 ) أشواط يكسب الفريق  $B$  الشوط الواحد باحتمال يساوي  $(0.6)$  ويربح المباراة الفريق الذي يكسب أكبر عدد من الأشواط ، ما احتمال أن يربح الفرق  $(A)$  ؟؟

**الحل :**

نفرض :  $x$  : متحول يدل على عدد مرات ربح الفريق  $(B)$

$$n = 5, P = 0.6, q = 0.4$$

حتى يربح الفريق  $(A)$  المباراة يجب أن يربح الفريق  $(B)$  شوطان على الأقل :

$$P_{n+1} = P(A_{n+1}) = \frac{8}{10}P_n + \frac{6}{10}(1 - P_n)$$

$$= 0.2P_n + 0.6$$

$$U_{n+1} = P_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{2}{10}P_n + \frac{6}{10} - \frac{3}{4} \quad (4)$$

$$= \frac{2}{10}P_n - \frac{3}{20} = \frac{2}{10}\left(P_n - \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{10}U_n$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2}{10} = q$$

ومنه  $U_n$  متتالية هندسية أساسها  $(q = 0.2)$ .

$$U_n = U_1 q^{n-1} : U_1 = P_1 - \frac{3}{4} = \frac{-1}{20}$$

$$U_n = \left(\frac{-1}{20}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$P_n = U_n + \frac{3}{4} \Rightarrow P_n = \left(\frac{-1}{20}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{3}{4} : -1 < 9 = \frac{1}{5} < 1$$

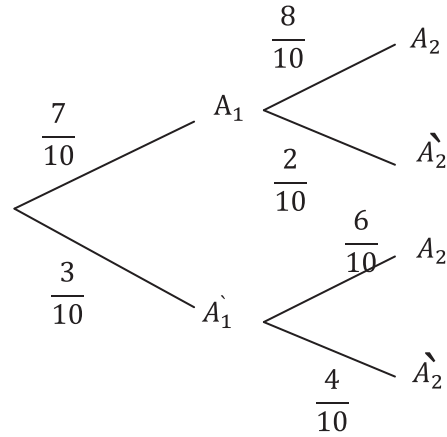
**برهن أن:**  $P_{n+1} = (0.2)P_n + 0.6$   
 لنعرف المتتالية:  $(U_n)_{n \geq 1}$  بالصيغة:

$$U_n = P_n - 0.75$$

\* بين أن المتتالية هندسية أساسها  $(0.2)$   
 استنتج عبارة  $P_n$  بدلالة  $(n)$  ثم أحسب

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$$

**الحل:** (1)



$$P(A_2|A_1) = \frac{8}{10}$$

$$P(A_2|A_1^c) = \frac{6}{10}$$

$$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2) \quad (2)$$

$$= \left(\frac{7}{10} \cdot \frac{8}{10}\right) + \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{6}{10}\right) = 0.74$$

$$P_n = P(A_n) \quad (3)$$

