

التمرين الأول:

أوجد نهاية التابع f عند a :

$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}, a=1$	$f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x-1}, a=1$
$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}, a=0$	$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, a=1$
$f(x) = \frac{2-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{2x+5}}, a=2$	$f(x) = \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}, a=0$

$f(x) = \sqrt{5x+1}-x, a=+\infty$	$f(x) = \frac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}, a=3, +\infty$
$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}, a=1$	$f(x) = \sqrt{x^2+x+1}-x, a=-\infty$
$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}, a=+\infty$	$f(x) = x \left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2 \right), a=0^+$

$f(x) = \sqrt{2x^2-1}-3x, a=+\infty$	$f(x) = \frac{3x^2-3}{x-1}, a=1$
$f(x) = \sqrt{x^2-1}-x, a=+\infty$	$f(x) = \sqrt{3x^2+2x+2}-\sqrt{3x+1}, a=+\infty$
$f(x) = \sqrt{9x^2+2x-1}-2x+1, a=+\infty$	$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x}, a=-\infty$
$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}, a=+\infty$	$f(x) = \frac{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}, a=2, +\infty$
$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-3}{16-2x}, a=8$	$f(x) = x^2 \left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2} \right), a=+\infty$

$f(x) = \frac{x^2 - x}{\sin x}, a = 0$	$f(x) = \sin x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}, a = 0^+$
$f(x) = \frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x}, a = 0$	$f(x) = \frac{\sin(2x)}{3x}, a = 0$
$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + x}}, a = 0$	$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\sin(2x)}, a = 0$
$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x \cdot \sin 3x}, a = 0$	$f(x) = \frac{2x^2 + \sin x}{x}, a = 0$

التمرين الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $] - 5, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 5}$$

١. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ واستنتج

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$$

٢. جد عدداً حقيقياً يحقق الشرط: إذا كان $x >$

A كان $f(x)$ من المجال $]1.99, 2.01[$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على R بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{x}{|x| + 3}$$

١. احسب نهاية التابع f عند $-\infty$

٢. أوجد عدداً A يحقق الشرط إذا كان

$x < A$ كان $f(x)$ من المجال

$$]-1.05, -0.95[$$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعين بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{x + 3}{x - 3}$$

١. أوجد نهاية التابع f عند 5

٢. عين مجالاً I مركزه 5 يحقق الشرط: إذا كان

x من المجال I كان $f(x)$

من المجال $J =]3.95, 4.05[$

$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}, a=1$	$f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x-1}, a=1$
$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}, a=0$	$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, a=1$
$f(x) = \frac{2-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{2x+5}}, a=2$	$f(x) = \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}, a=0$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}$$

$$f(x) = \frac{x - 1}{(x - 3)(x - 1)}$$

$$= \frac{1}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{x+2}}{3 - \sqrt{2x+5}}$$

$$= \frac{4 - x - 2}{9 - 2x - 5} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{2x + 5}}{2 + \sqrt{x + 2}} \right)$$

$$= \frac{2-x}{4-2x} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{2x+5}}{2+\sqrt{x+2}} \right)$$

$$= \frac{2-x}{2(2-x)} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{2x+5}}{2 + \sqrt{x+2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{2x + 5}}{2 + \sqrt{x + 2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{4}\right) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 - x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x^2-x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{x+1-1}{x^2-x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{x}{x(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x}$$

$$= \frac{(\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x})(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})}$$

$$= \frac{4 - x - 4 - x}{x(\sqrt{4 - x} + \sqrt{4 + x})}$$

$$= \frac{-2x}{x(\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x})}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$f(x) = \sqrt{5x+1} - x, a = +\infty$	$f(x) = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}, a = 3, +\infty$
$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1}, a = 1$	$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x, a = -\infty$
$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-2}}, a = +\infty$	$f(x) = x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2 \right), a = 0^+$

$$= \frac{1 - \frac{9}{x^2}}{\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{3}}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f(x) = \sqrt{5x+1} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$\infty - \infty$ وهي حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \sqrt{5x+1} - x$$

$$= |x| \sqrt{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} - x$$

$$= x \sqrt{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} - x$$

$$= x \left(\sqrt{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(-1) = -\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

إيجاد نهاية التابع f عند 3 :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$\frac{0}{0}$ وهي حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})(x+3)}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

$$= (\sqrt{x} + \sqrt{3})(x+3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = (2\sqrt{3})(6) = 12\sqrt{3}$$

إيجاد نهاية التابع f عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$\frac{\infty}{\infty}$ وهي حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{x^2 \left(1 - \frac{9}{x^2} \right)}{x^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{\sqrt{3}}{x^2} \right)}$$

$$= \frac{x^2 \left(1 - \frac{9}{x^2} \right)}{x^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{\sqrt{3}}{x^2} \right)}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{x^2 + 1 - 2}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{x^2 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2}} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + x + 1} + x \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)}{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)} \\ &= \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \\ &= \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \\ &= \frac{x + 1}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} \\ &= \frac{x + 1}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} \\ &= \frac{x + 1}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

حل ورقة عمل في وحدة النهايات (1)
مادة: الرياضيات

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 2}}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 2})}{(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 2})(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 2})(\sqrt{x^2 + 1} + x)} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^2}{x^2 - 1 - x^2 + 2} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right) \\ &= \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + |x| \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} \\ &= \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + x \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} \\ &= \frac{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $0(\infty)$

$$f(x) = x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2 \right)$$

$$\begin{aligned} &= x \cdot \left(\frac{\left(\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2 \right) \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2 \right)}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2} \right) \\ &= x \cdot \frac{\left(4 + \frac{1}{x} - 4 \right)}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2} \\ &= \frac{x \left(\frac{1}{x} \right)}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

$f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} - 3x$ $a = +\infty$	$f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x - 1}, a = 1$
$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$ $a = +\infty$	$f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x + 1}$ $a = +\infty$
$f(x) = \sqrt{9x^2 + 2x - 1} - 2x + 1$ $a = +\infty$	$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x}$ $a = -\infty$
$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ $a = +\infty$	$f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ $a = 2, +\infty$
$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 3}{16 - 2x}$ $a = 8$	$f(x) = x^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{2} \right)$ $a = +\infty$

$f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} - 3x$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 $\infty - \infty$ وهي حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} - 3x$$

$$= |x| \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} - 3x$$

$$= x \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} - 3x$$

$$= x \left(\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} - 3 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(-1) = -\infty$$

$f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x - 1}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 $\frac{0}{0}$ وهي حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x - 1}$$

$$= \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$= \frac{3(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= 3(x + 1)$$

$$= 3x + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x}$$

$$= \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{2x}$$

$$= \frac{-x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{2x}$$

$$= \frac{-\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 2x - 1} - 2x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 2x - 1} - 2x + 1$$

$$= |x| \sqrt{9 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} - 2x + 1$$

$$= x \sqrt{9 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} - 2x + 1$$

$$= x \left(\sqrt{9 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} - 2 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(1) = +\infty$$

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

وهي حالة دم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x + 1}$$

$$= |x| \sqrt{3 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - |x| \sqrt{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= x \sqrt{3 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - x \sqrt{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= x \left(\sqrt{3 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(\sqrt{3}) = +\infty$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x^2 - 1 - x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{-1}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}$$

$$= \frac{x\sqrt{x+2} - x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+2}}$$

$$= \frac{x(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} \cdot (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} \cdot \left(\frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \right)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} \cdot \left(\frac{x+2 - x-1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \right)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \right)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \right)$$

$$|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \right)$$

$$f(x) = \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

إيجاد النهاية عند الـ 2 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x})^3 - (\sqrt{2})^3}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$= x + \sqrt{2}x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 + 2 + 2 = 6$$

إيجاد النهاية عند الـ $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x} \left(x - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \right)}$$

$$x - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 3}{16 - 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - 3)(\sqrt{x+1} + 3)}{(16 - 2x)(\sqrt{x+1} + 3)}$$

$$= \frac{x + 1 - 9}{(16 - 2x)(\sqrt{x+1} + 3)}$$

$$= \frac{x - 8}{16 - 2x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + 3} \right)$$

$$= \frac{x - 8}{-2(x - 8)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + 3} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + 3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{12}$$

$$f(x) = x^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $0(\infty)$

$$f(x) = x^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{2} \right)$$

$$= x^2 \cdot \left(\frac{\left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{2} \right) \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2} \right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2}} \right)$$

$$= x^2 \cdot \left(\frac{2 + \frac{1}{x} - 2}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{x^2 \left(\frac{1}{x} \right)}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$f(x) = \frac{x^2 - x}{\sin x}, a = 0$	$f(x) = \sin x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}, a = 0^+$
$f(x) = \frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x}, a = 0$	$f(x) = \frac{\sin(2x)}{3x}, a = 0$
$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + x}}, a = 0^+$	$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\sin(2x)}, a = 0$
$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x \cdot \sin 3x}, a = 0$	$f(x) = \frac{2x^2 + \sin x}{x}, a = 0$

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$\frac{0}{0}$ وهي حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{\sin x}$$

$$= \frac{x(x-1)}{\sin x}$$

$$= \frac{x}{\sin x} \cdot (x-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1(-1) = -1$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) = 1$$

$$f(x) = \sin x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$0(\infty)$ وهي حالة عدم تعيين من الشكل

$$f(x) = \sin x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \sin x \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}}$$

$$= \sin x \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \sin x \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|}$$

بما أن $x \rightarrow 0^+$ فإن $|x| = x$

$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (1)(1) = 1$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + x}}$$

$$= \frac{\sin x}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$$

بما أن $x \rightarrow 0^+$ فإن $|x| = x$

$$= \frac{\sin x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (1)(0) = 0$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + \sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2x^2 + \sin x}{x}$$

$$= \frac{2x^2}{x} + \frac{\sin x}{x} = 2x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + 1 = 1$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin 2x}{x}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin 2x}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{3} (1) = \frac{2}{3}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) = 1$$

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\sin(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\sin(2x)}$$

$$= \frac{\sin(\pi x)}{1} \cdot \frac{1}{\sin(2x)}$$

$$= \frac{\sin \pi x}{x} \cdot \frac{x}{\sin(2x)}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \pi x}{\pi x} \cdot \frac{\sin 2x}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2} (1)(1) = \frac{\pi}{2}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{\sin 2x} \right) = 1$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x \sin 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x \sin 3x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{x \sin 3x (\sqrt{x^2 + 4} + 2)}$$

$$= \frac{x^2 + 4 - 4}{x \sin 3x (\sqrt{x^2 + 4} + 2)}$$

$$= \frac{x^2}{x \sin 3x (\sqrt{x^2 + 4} + 2)}$$

$$= \frac{x}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2}$$

$$= \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \cdot \left(\frac{1}{12} \right) = \frac{1}{12}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{\sin 3x} \right) = 1$$

انتهى السؤال الأول ^ _ ^

$$f(x) = \frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x}$$

نعلم أن: $\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$ ومنه:

$$\sin(\pi\sqrt{1-x}) = \sin(\pi - \pi\sqrt{1-x})$$

$$f(x) = \frac{\sin(\pi - \pi\sqrt{1-x})}{x}$$

$$= \frac{\sin(\pi(1 - \sqrt{1-x}))}{x}$$

$$= \frac{\sin(\pi(1 - \sqrt{1-x}))}{1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin(\pi(1 - \sqrt{1-x}))}{\pi(1 - \sqrt{1-x})} \cdot \frac{\pi(1 - \sqrt{1-x})}{x}$$

$$= \frac{\sin(\pi(1 - \sqrt{1-x}))}{\pi(1 - \sqrt{1-x})} \cdot \frac{\pi(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})}{x(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{\sin(\pi(1 - \sqrt{1-x}))}{\pi(1 - \sqrt{1-x})} \cdot \frac{\pi(1 - 1 + x)}{x(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{\sin(\pi(1 - \sqrt{1-x}))}{\pi(1 - \sqrt{1-x})} \cdot \frac{\pi x}{x(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{\sin(\pi(1 - \sqrt{1-x}))}{\pi(1 - \sqrt{1-x})} \cdot \frac{\pi}{(1 + \sqrt{1-x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (1) \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

علماً أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\pi(1 - \sqrt{1-x}))}{\pi(1 - \sqrt{1-x})} \right) = 1$$

$$\frac{-x + 3}{3} > 20$$

$$-x + 3 > 60$$

$$-x > 57$$

$$x < -57 \rightarrow A \leq -57$$

التمرين الثالث:ليكن لدينا التابع f المعين بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{x + 3}{x - 3}$$

١. أوجد نهاية التابع f عند الـ 5٢. عين مجالاً I مركزه 5 يحقق الشرط: إذا كان x من المجال I كان $f(x)$ من المجال $J =]3.95, 4.05[$

الطلب الأول:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{8}{2} = 4$$

الطلب الثاني:

بما أن التابع f ينتمي إلى المجال J فإن:

$$3.95 < f(x) < 4.05$$

$$3.95 < \frac{x + 3}{x - 3} < 4.05$$

نصلح التابع f باستخدام القسم الاقليدية لكينكتبه بدلالة x واحدة ومنه:

$$3.95 < 1 + \frac{6}{x - 3} < 4.05$$

$$2.95 < \frac{6}{x - 3} < 3.05$$

$$\frac{1}{2.95} > \frac{x - 3}{6} > \frac{1}{3.05}$$

$$\frac{6}{2.95} > x - 3 > \frac{6}{3.05}$$

التمرين الثاني:ليكن لدينا التابع f المعروف على R بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{x}{|x| + 3}$$

١. احسب نهاية التابع f عند $-\infty$ ٢. أوجد عدداً A يحقق الشرط إذا كان $x < A$ كان $f(x)$ من المجال

$$]-1.05, -0.95[$$

الطلب الأول:

$$f(x) = \frac{x}{|x| + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{-x + 3} \right) = -1$$

الطلب الثاني:

نحدد مركز ونصف قطر المجال وفق:

$$C = \frac{a + b}{2} = \frac{-1.05 - 0.95}{2}$$

$$= \frac{-2}{2} = -1$$

$$r = \frac{b - a}{2} = \frac{-0.95 + 1.05}{2} =$$

$$= \frac{0.1}{2} = \frac{1}{20}$$

بما أن التابع f من المجال $]-1.05, 0.95[$ فإن:

$$|f(x) - C| < r$$

$$\left| \frac{x}{-x + 3} + 1 \right| < \frac{1}{20}$$

$$\left| \frac{x - x + 3}{-x + 3} \right| < \frac{1}{20}$$

$$\left| \frac{3}{-x + 3} \right| < \frac{1}{20}$$

$$\frac{|3|}{|-x + 3|} < \frac{1}{20}$$

$$\frac{3}{-x + 3} < \frac{1}{20}$$

$$\left| \frac{2x + 1 - 2x - 10}{x + 5} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{-9}{x + 5} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{|-9|}{|x + 5|} < \frac{1}{100}$$

$$\frac{9}{x + 5} < \frac{1}{100}$$

$$\frac{x + 5}{9} > 100$$

$$x + 5 > 900$$

$$x > 895 \rightarrow A \geq 895$$

نحن لأحلامنا وهي لنا..
ولو شاء ألف طريق أن يمنعنا..
دُمت في توفيق من الله.. ♡

$$\frac{6}{2.95} + 3 > x > \frac{6}{3.05} + 3$$

$$5.03 > x > 4.97$$

إذاً:

$$I =]4.97, 5.03[$$

التمرين الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $] -5, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 5}$$

١. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ واستنتج

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$$

٢. جد عدداً حقيقياً يحقق الشرط: إذا كان $x >$

A كان $f(x)$ من المجال $]1.99, 2.01[$

الطلب الأول:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) \text{ استنتج}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{5}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \frac{5}{7}$$

الطلب الثاني:

نحدد مركز ونصف قطر المجال وفق:

$$C = \frac{a + b}{2} = \frac{1.99 + 2.01}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$r = \frac{b - a}{2} = \frac{2.01 - 1.99}{2}$$

$$= \frac{0.02}{2} = \frac{2}{200} = \frac{1}{100} = 0.01$$

بما أن $f(x)$ من المجال $]1.99, 2.01[$ فإن:

$$|f(x) - C| < r$$

$$\left| \frac{2x + 1}{x + 5} - 2 \right| < \frac{1}{100}$$