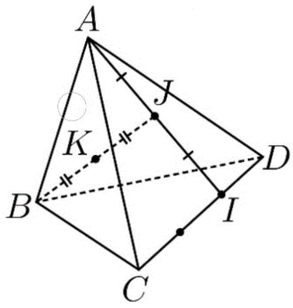
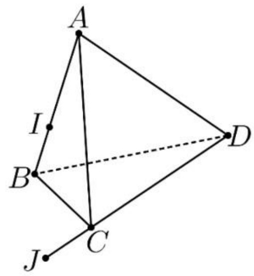
التمرين الأول:



انطلاقاً من الشكل المجاور:

عين الأمثال α و β و γ و δ لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ)

التمرين الثاني:



$ABCD$ رباعي وجوه

النقطتان I و J تحققان:

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

و $\overrightarrow{DJ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DC}$ و G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,4)$ و $(D,-1)$ والمطلوب:

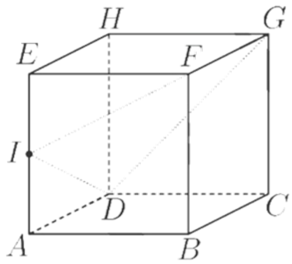
1. أثبت أن النقطة G منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$
2. جد إحداثيات النقطة G في المعلم $(B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$

التمرين الثالث:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$ والمطلوب:

1. أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة
2. أثبت أن النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد
3. عين α و β و γ لتكون D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ)

التمرين الرابع:



$ABCDEFGH$ مكعب

فيه I منتصف $[AE]$

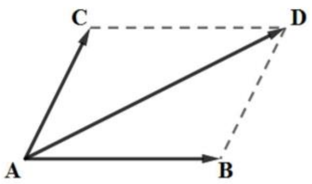
والمطلوب:

K نقطة تحقق العلاقة

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{AI}$,

أثبت أن K تنتمي إلى المستوي (IDG)

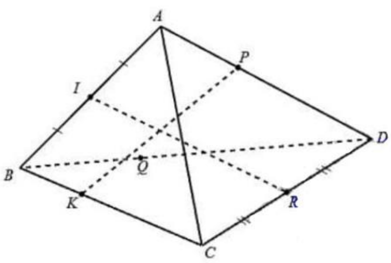
التمرين الخامس:



$ABDC$ متوازي أضلاع والمطلوب:

1. عين النقطة M التي تحقق العلاقة $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$
2. عبّر عن النقطة D كونها مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها

التمرين السادس:

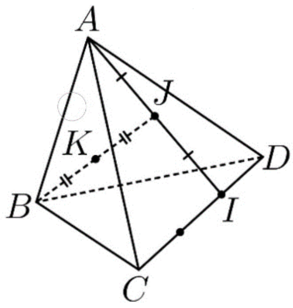


$ABCD$ رباعي وجوه , النقاط I و K و R و Q و P تحقق العلاقات:

$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ ولدينا G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,2)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ ولدينا R منتصف $[CD]$ و I منتصف $[AB]$ والمطلوب:

1. أثبت أن المستقيمان (IR) و (PK) متقاطعان
2. عين موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(C,1)$

التمرين الأول:



انطلاقاً من الشكل المجاور:

عين الأمثال α و β و γ و δ لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ)

الحل:

I تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

أي:

$$3\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CI} + 2\overrightarrow{ID}$$

ويكافئ:

$$\overrightarrow{CI} + 2\overrightarrow{DI} = \vec{0}$$

- وبالتالي $(I,3)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(D,2)$ و $(C,1)$
- ولدينا J منتصف $[AI]$ أي أن $(J,6)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,3)$ و $(A,3)$
- ولدينا K منتصف $[BJ]$ أي أن $(K,12)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(J,6)$ و $(B,6)$

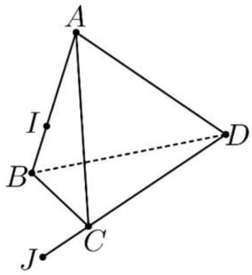
حسب الخاصة التجميعية:

تكون K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة

$(A,3)\,,(B,6)$

$(C,1)\,,(D,2)$

التمرين الثاني:



$ABCD$ رباعي وجوه

النقطتان I و J تحققان:

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

و $\overrightarrow{DJ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DC}$ و G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,4)$ و $(D,-1)$ والمطلوب:

1. أثبت أن النقطة G منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$
2. جد إحداثيات النقطة G في المعلم $(B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$

الحل:

الطلب الأول:

I تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

أي:

$$3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IB}$$

وتكافئ:

$$\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} = \vec{0}$$

وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$ و $(B,2)$

J تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{DJ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DC}$$

أي:

$$3\overrightarrow{DJ} = 4\overrightarrow{DJ} + 4\overrightarrow{JC}$$

وتكافئ:

$$4\overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{DJ} = \vec{0}$$

وبالتالي J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,4)$ و $(D,-1)$

وبما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,4)$ و $(D,-1)$ وحسب الخاصة التجميعية: G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,3)$ و $(J,3)$ أي أن النقطة G منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$

الطلب الثاني:

في المعلم $(B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$ نجد أن:

$B(0,0,0)\ ,C(1,0,0)$

$D(0,1,0)\ ,A(0,0,1)$

وبالتالي:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$
$$=\frac{0+0+4+0}{1+2+4-1}=\frac{4}{6}$$
$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$
$$=\frac{0+0+0-1}{1+2+4-1}=-\frac{1}{6}$$
$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$
$$=\frac{1+0+0+0}{1+2+4-1}=\frac{1}{6}$$

$$\rightarrow G\left(\frac{4}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$$

التمرين الثالث:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$ والمطلوب:

1. أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة
2. أثبت أن النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد
3. عين α و β و γ لتكون D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ)

الحل:

الطلب الأول:

نشكل الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)$

$\overrightarrow{AC}(3,-2,1)$

نلاحظ أن المركبات غير متناسبة ومنه الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة

الطلب الثاني:

لدينا:

$\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)$

$\overrightarrow{AC}(3,-2,1)$

$\overrightarrow{AD}(-1,-1,1)$

بما أن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً فإننا نبحث عن علاقة من الشكل:

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$
$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}9\\-1\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\alpha\\-\alpha\\-\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\beta\\-2\beta\\\beta\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\alpha+3\beta\\-\alpha-2\beta\\-\alpha+\beta\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$-1=9\alpha+3\beta\ \dots(1)$$
$$-1=-\alpha-2\beta\ \dots(2)$$
$$1=-\alpha+\beta\ \dots(3)$$

نختار الجملة:

$$-1 = 9\alpha + 3\beta \dots (1)$$
$$-1 = -\alpha - 2\beta \dots (2)$$

نضرب (2) بالعدد (9) ومنه:

$$-1 = 9\alpha + 3\beta \dots (1)$$
$$-9 = -9\alpha - 18\beta \dots (2)'$$

بجمع (1) و $(2)'$ نجد:

$$-10 = -15\beta$$
$$\beta = \frac{-10}{-15} = \frac{2}{3}$$

نعوض في (1) فنجد:

$$-1 = 9\alpha + 3\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$-1 = 9\alpha + 2$$
$$9\alpha = -3$$
$$\alpha = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

نعوض قيمة α و β في (3) فنجد:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$
$$1 = 1$$

محققة ^_^

إذاً يوجد $\alpha = -\frac{1}{3}$ و $\beta = \frac{2}{3}$ تحقق:

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

وبالتالي الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً ومنه النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد

الطلب الثالث:

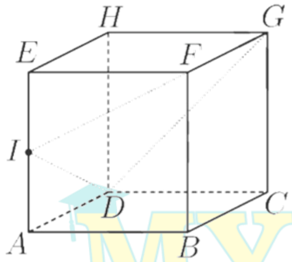
انطلاقاً من العلاقة السابقة والتي هي:

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) - \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$
$$-\overrightarrow{DA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$
$$-\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

ومنه النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$\left(A, -\frac{2}{3}\right), \left(B, \frac{1}{3}\right), \left(C, -\frac{2}{3}\right)$$

التمرين الرابع:



$ABCDEFGH$ مكعب

فيه I منتصف $[AE]$

والمطلوب:

K نقطة تحقق العلاقة

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{AI}$,

أثبت أن K تنتمي إلى المستوي (IDG)

الحل:

K تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{AI}$$
$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{AI}$$
$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{KI}$$
$$-\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{KI} = \vec{0}$$

وبالتالي $(K, 2)$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة

$$(I, 2), (D, 1), (G, -1)$$

أي أن K تنتمي إلى المستوي (IDG)

التمرين الخامس:

$ABDC$ متوازي أضلاع والمطلوب:

1. عين النقطة M التي تحقق العلاقة

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

2. عبّر عن النقطة D كونها مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها

الحل:

الطلب الأول:

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$
$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$$
حسب شال:
$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$$
$$2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC}$$
$$M = C$$

الطلب الثاني:

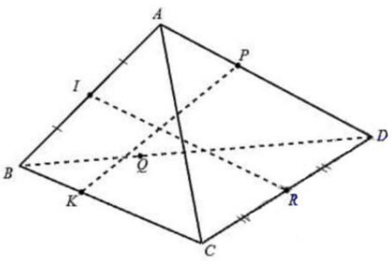
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$
$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$
$$-\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

وبالتالي النقطة D مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ أي:

$$\alpha = -1 \,, \beta = 1 \,, \gamma = 1$$

ويُقبل نتيجة أخرى..

التمرين السادس:



$ABCD$ رباعي وجوه , النقاط I و K و R و Q و P تحقق العلاقات:

$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ ولدينا G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,2)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ ولدينا R منتصف $[CD]$ و I منتصف $[AB]$ والمطلوب:

1. أثبت أن المستقيمان (IR) و (PK) متقاطعان

2. عين موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(C,1)$

الحل:

الطلب الأول:

من العلاقة

$$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

وبالتالي النقطة K مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,1)$ و $(B,2)$

من العلاقة:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

وبالتالي النقطة P مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(D,1)$

ولدينا النقطة G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,2)$ و $(D,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$

حسب الخاصة التجميعية:

G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(K,3)$ و $(P,3)$

G تقع على القطعة $[PK]$ ... $(*)$

وبالتالي G مركز أبعاد متناسبة لـ:

$$\underbrace{(A,2)\,,(B,2)}_{(I,4)}\,,\underbrace{(C,1)\,,(D,1)}_{(R,2)}$$

G تقع على القطعة $[IR]$ ... $(**)$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن المستقيمين (IR) و (PK) متقاطعان

الطلب الثاني:

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$