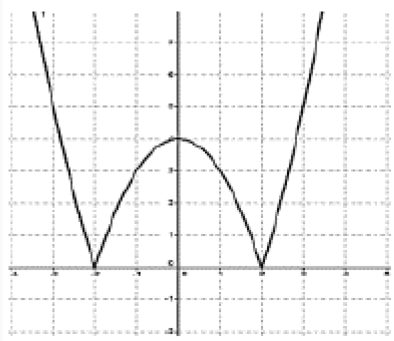
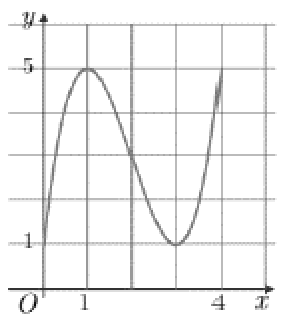
## أولاً: عن مجموعات التعريف:

**لإيجاد مجموعة تعريف تابع من خطه البياني نميز حالات:**

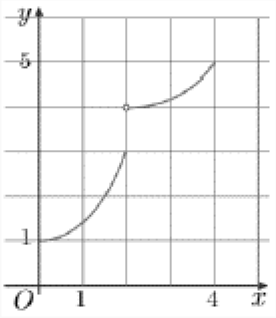
1- **الحالة الأولى:** إذا كان منحني التابع خط وحيد ومستمر (لا يحوي انقطاع):
عندئذ تكون مجموعة التعريف من فواصل أقصى نقطة اليسار (أو $-\infty$) إلى فواصل أقصى نقطة من اليمين (أو $+\infty$).



$D_f = ]-\infty, +\infty[$



$D_f = [0,4]$



$D_f = [0,2] \cup ]2,4]$

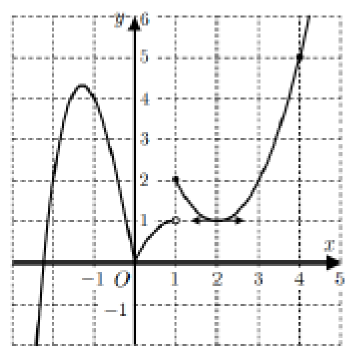
$D_f = [0,4]$

2- **الحالة الثانية:** المنحني عبارة عن اجتماع أكثر من خط.
نوجد مجموعة تعريف كل فرع لوحده ثم نضع بينها اجتماعات وتجدر الإشارة هنا أن التابع سيكون عبارة عن خطين يفصل بينهما إما مقارب شاقولي (وعنده يكون المجال دائماً مفتوح) أو نقطة انقطاع (وعندها نفتح المجال عن النقطة المفتوحة) ونغلقه عند النقطة المغلقة.

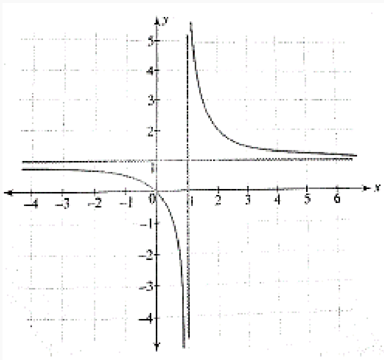
## ثانياً: عن النهايات:

عندما نجد سؤالاً يطلب فيه نهايات يفضل أن نكتب ما نجده من مقاربات قبل البدء فمثلاً:

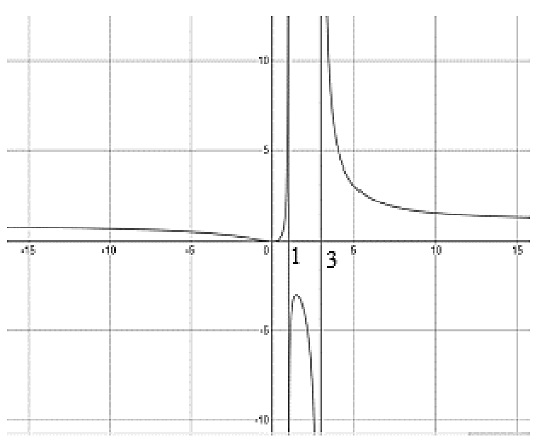
إذا وجدنا $y = 1$ مقارب أفقي عند $+\infty$ فهذا يعطينا معلومة أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ .



$D_f = ]-\infty, 1[ \cup [1, +\infty[$
$D_f = ]-\infty, +\infty[$



$D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$

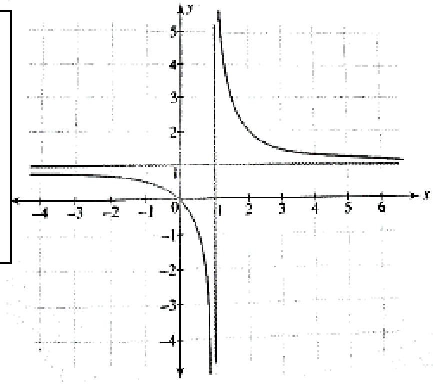


$D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1,3[ \cup ]3, +\infty$

وإذا وجدنا أن $\underbrace{x = 2}_{x\to 2}$ مقارب شاقولي عند $\underbrace{+\infty}_{\lim f(x) = +\infty}$ (نحو الأعلى) و $C$ يقع على $\underbrace{\text{يمين مقاربه}}_{x\to 2^+}$

وبذلك نتمكن من الإجابة عن أسئلة النهايات وعن أسئلة تعيين المقاربات.

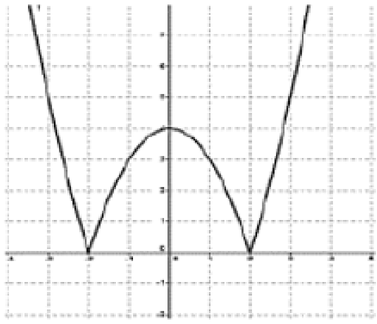
مثال<sub></sub>1:



هنا لدينا :
$y=1$ مقارب أفقي عند $+\infty$ و عند $-\infty$ بالتالي
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1\,,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=1$
$x=1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ على اليمين :
$\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$
$x=1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و على اليسار :
$\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$

**ملاحظة:** إذا كان التابع لا يملك مقاربات فغالباً يكون الجواب $+\infty$ (نحو الأعلى) و $-\infty$ (نحو الأدنى).

مثال2:



هنا نلاحظ أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

## ثالثاً: عن المقارب المائل:

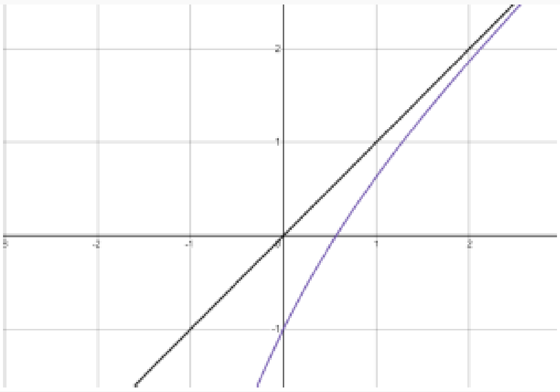
**-1 عندما يطلب حساب $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ :**

فيجب أن تتذكر أن هذه النهاية تساوي أمثال $x$ في معادلة المقارب المائل (أي تمثل ميله) وعليه يكون:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a=m_{\text{المقارب}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

حيث $A(x_1,y_1)\ ,\ B(x_2,y_2)$ نقاط يمر منها المقارب يمكن إيجادها من الرسم.

مثال1:



هنا نلاحظ أن المستقيم المرسوم مقارب مائل في جوار $+\infty$
و بالتالي عندما يطلب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ فهو يريدنا أن نحسب ميله
و نلاحظ أن المستقيم هنا يمر من $A(0,0)$ و $B(1,1)$
و بالتالي :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m_d=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-0}{1-0}=1$$

**-2 إذا طلب إيجاد معادلة المقارب المائل:**

أ- نوجد الميل من القانون:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ب- نطبق قانون معادلة المستقيم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ففي المثال السابق:

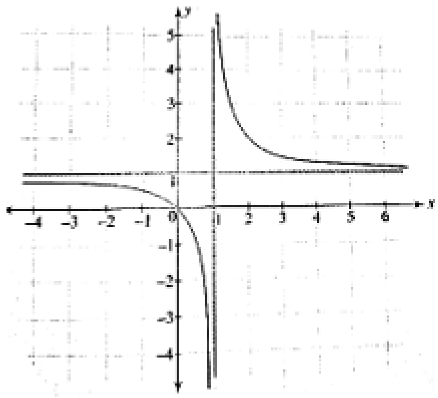
$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

**رابعاً: عن الاشتقاق:**

**1- قابلية الاشتقاق:**

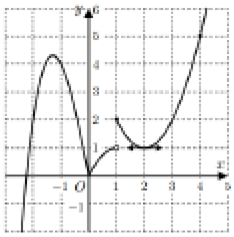
يكون $f$ غير قابل للاشتقاق عند نقطة $a$ في الحالات الآتية:

أ- إذا كانت $a$ لا تنتمي لمجموعة التعريف.



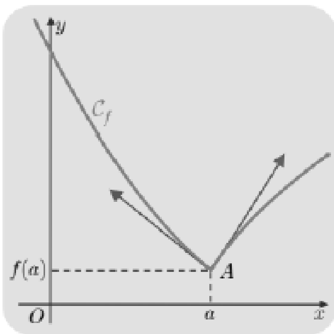
هنا $f$ غير اشتقاقي عند $x = 1$ لأن غير معرف عندها

ب- إذا كانت $a$ تنتمي إلى مجموعة التعريف ولكن $f$ غير مستمر عندها (منقطع).



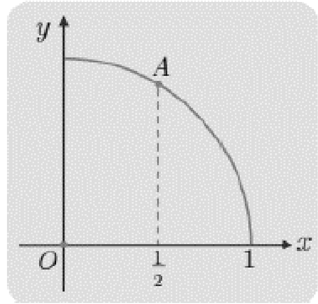
نلاحظ أن $f$ معرف عند $x=1$ لكنه غير مستمر عندها فهو غير اشتقاقي عند $x = 1$

ت- إذا كان التابع يقبل نصفي مماس عند $a$ (منكسر).




نلاحظ أن $f$ يقبل نصفي مماس عند $x = a$ فهو غير اشتقاقي عند $x = a$

ث- إذا كان التابع يقبل مماساً شاقولياً عند $a$ (يكون التابع مغلق عند طرفه):




$f$ غير اشتقاقي عند $x = 1$ لأنه يقبل مماساً شاقولياً عند $x = 1$

**2- حساب $f'(a)$ نميز حالتين هنا:**

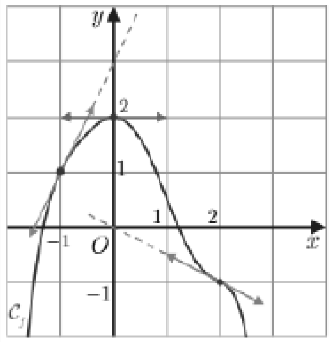
أ- عند $a$ يوجد للتابع مماس افقي (أو قيمة حدية): عندها $f'(a) = 0$ مباشرةً.

ب- عند $a$ يوجد مماساً مائلاً/ عندها يكون $f'(a) = m_{\text{المماس}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ولإيجاد معادلة المماس نطبق قانون معادلة المستقيم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

**مثال₁:**




حساب $f'(0)$: نلاحظ أن f يقبل مماساً أفقياً عند $x = 0$ و بالتالي $f'(0) = 0$

لكن $f(0) = 2$ (تصوير)

معادلته :

$y - 2 = 0(x - 0)$

$y = 2$

حساب $f'(-1)$: نلاحظ أن f يقبل مماساً مائلاً عند $x = -1$ و هذا المماس يمر من النقطتين :

$A(0,3)\ ,B(-1,1)$

و بالتالي :

$$f'(-1) = \frac{1-3}{0-(-1)} = -2$$

معادلته : $y - 3 = -2(x - 0)$

$y = -2x + 3$

حساب $f'(2)$: نلاحظ أن f يقبل مماساً مائلاً عند $x = 2$ و هذا المماس يمر من النقطتين :

$A(0,0)\ ,B(2,-1)$

و بالتالي :

$$f'(2) = \frac{-1-0}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

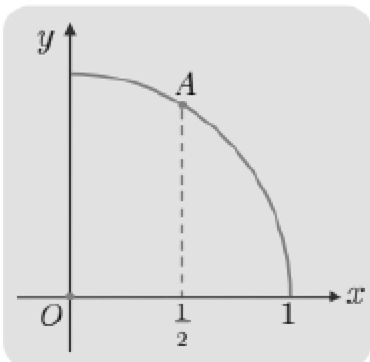
معادلته:

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y = -\frac{1}{2}x$$

**3- القيم الحدية:**

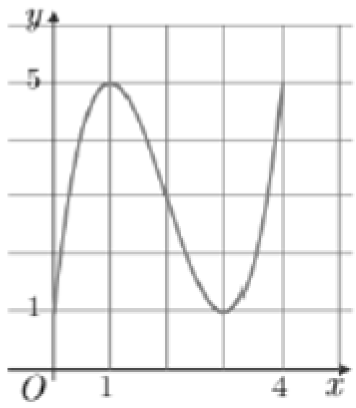
الأمر سهل هنا لكن مع ملاحظة أنه قد يكون هناك قيم حدية على **أطراف المجال** كما يلي:




هنا $f(1) = 0$ قيمة حدية صغرى و $f(0)$ قيمة حدية كبرى

(لم نضع تراتيبها لأنها غير مكتوبة على الرسم)

**4- المتراجحات $f'(x) > 0$ تعني متى يكون التابع متزايد (على أي مجال؟).**
**المتراجحات $f'(x) < 0$ تعني متي يكون التابع متناقص (على أي مجال؟).**




$f'(x) < 0 \rightarrow S = ]1,3[$
لأنه متناقص على هذا المجال
أما:
$f'(x) > 0 \rightarrow S = ]0,1[ \cup ]3,4[$
لأنه متزايد على كل من هذين المجالين

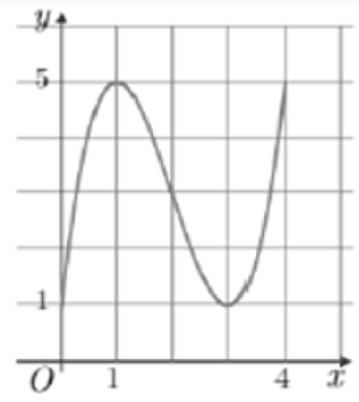
## خامساً: تتمات في الخطوط البيانية:

**1- حلول المعادلة $f(x) = k$:**

متى يقطع التابع المستقيم الأفقي $y = k$ **وهناك عدة أسئلة:**

أ- ما عدد الحلول: أي كم حل (حل وحيد، حلان، ثلاث حلول ....)
ب- ما هي حلول: هنا يجب كتابة فاصلة نقطة التقاطع ( .... $x_1 , x_2$)

**مثال₁:**

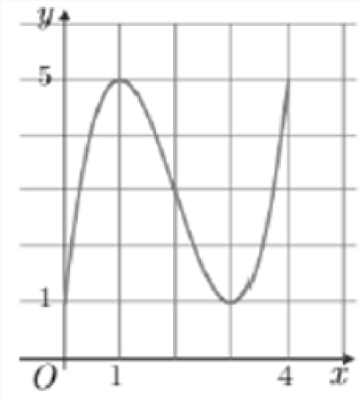



ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$: ثلاث حلول.

ماهي حلول المعادلة $f(x) = 1$: الحلول هي:

$$x_1 = 0 , x_2 = 3$$

**مثال$_2$:**




ناقش حسب قيم $m$ حلول المعادلة $f(x) = m$.

الحل:

$$f(x) = m \begin{cases} m \in ]-\infty, 1[ & \text{لا يوجد حلول} \\ m = 1 & \text{حلان} \\ m \in ]1,5[ & \text{ثلاث حلول} \\ m = 5 & \text{حلان} \\ m \in ]5, +\infty[ & \text{لا يوجد حلول} \end{cases}$$

مررنا مستقيماً افقياً من أسفل الرسمة إلى أعلى الرسمة وراقبنا عدد مرات تقاطع المستقيم الافقي مع المنحني.

**2- حل المتراجحات من الشكل:**

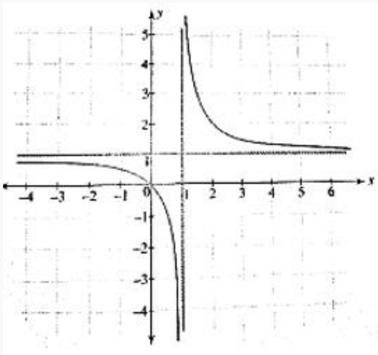
$$f(x) > m \ , f(x) < m \ , f(x) \leq m \ , f(x) \geq m$$

أي متى يكون التابع فوق أو تحت المستقيم الأفقي $y = m$ ويكون حلها مجال.

**مثال$_1$:**

ما هي حلول المتراجحة $f(x) > 1$: الحلول هي $]1, +\infty[$

أخذنا المجال الذي يكون عليه $f(x)$ فوق المستقيم $y = 1$.



**3- تصوير مجال:**

**ونميز الحالات الآتية:**

أ- التابع متزايد: فتكون صورة المجال $[a, b]$ هي $[f(a), f(b)]$ مع المحافظة على شكل المجالات.

ب- التابع متناقص: فتكون صورة المجال $[a, b]$ هي $[f(b), f(a)]$ مع المحافظة على شكل المجالات.

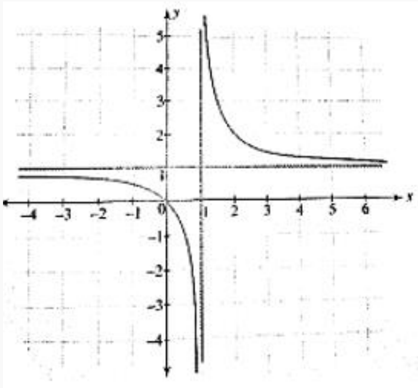
ت- التابع غير مطرد: نسقط القطعة من التابع التي على المجال $[a, b]$ على محور $yy'$ ونحدد المجال المطلوب.

**ملاحظة هامة:** في الحالة الأخيرة عندما نسقط المنحني على محور $yy'$ نحصل على مجال ما طرفيه (وايات أدنى نقطة إلى وايات أعلى نقطة)

إذا كانت هذه الوايات تقابل نقطة تنتمي إلى المجال المعطى نغلق المجال.

إذا كانت هذه الوايات تقابل نقطة لا تنتمي إلى المجال المعطى نفتح المجال.

مثال₁:



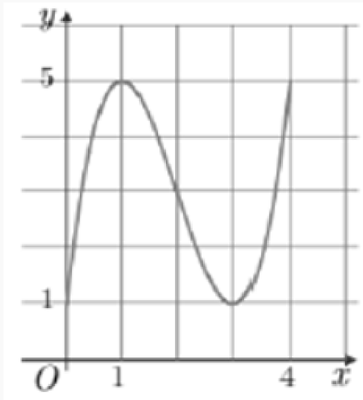

$f(]-\infty,1[)=]-\infty,1[$

قمنا بتصوير الفرع المقابل للمنحني على المجال $]-\infty,1[$ فنلاحظ أن مسقطه على محور التراتيب يغطي القيم $]-\infty,1[$.

$f(]1,+\infty[)=]1,+\infty[$

قمنا بتصوير الفرع المقابل للمنحني على المجال $]1,+\infty[$ فنلاحظ أن مسقطه على محور التراتيب يغطي القيم $]1,+\infty[$.

مثال₂:




$f([0,1])=[1,5]$

$f(]0,1[)=]1,5[$

حافظنا على شكل المجالات لأن التابع متزايد.

$f([1,3])=[1,5]$

$f(]1,3[)=]1,5[$

حافظنا على شكل المجالات لأن التابع متناقص.

$f(]0,3[)=]1,5]$

أغلقنا المجال عند 5 لأنه يقابل النقطة $x=1$ وهي تنتمي للمجال $]0,3[$ وفتحنا المجال عند 1 لأنه يقابل النقطتين $x=3$ , $x=0$ وكلاهما لا ينتمي للمجال $]0,3[$.

**ملاحظة: المستقر الفعلي:**

$$\boldsymbol{f(D_f)=E_f}$$

أي صورة مجموعة التعريف كاملة وهي من وايات أدنى نقطة إلى وايات أعلى نقطة.

### 4- مجموعات تعريف توابع مختلطة:

$$\boldsymbol{\sqrt{f(x)}\ ,\ln(f(x))\ ,\frac{1}{f(x)}\ ,\frac{1}{\sqrt{f(x)}}}$$

نضع شرط التعريف الأصلي فنحصل على متراجحة ونعود للحالات السابقة.

**مثال:**

إذا كان $h(x)=\sqrt{f(x)}$ فهو معرف بشرط $f(x)\geq 0$.

إذا كان $g(x)=\ln(f(x))$ فهو معرف بشرط $f(x)>0$.

إذا كان $l(x)=\frac{1}{f(x)}$ فالحل هو $\mathbb{R}$ ماعدا حلول المعادلة $f(x)=0$.