طريق My Way
مع أنس أحمد

أوراق جلسة المراجعة الامتحانية في مادة

الرياضيات

قسم الهندسة

لطلاب الصف الثالث الاعدادي

لؤي الدمني

الوحدة الأولى

التناسب

إذا كانت $a\,,b\,,c\,,d$ أربعة اعداد غير معدومة في التناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ نُسمي الاعداد $a\,,b\,,c\,,d$ اعداد متناسبة حيث:

$a\,,d$ طرفي التناسب. $b\,,c$ وسطي التناسب.

خواص التناسب: في أي تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

- نستطيع قلب النسب.
- نستطيع التبديل بين الطرفين أو بين الوسطين.
- نستطيع تثبيت المقامات وإضافتها أو طرحها الى البسوط الموافقة.
- نستطيع تثبيت البسوط وإضافتها أو طرحها الى المقامات الموافقة.
- في أي تناسب صحيح جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين.

لحل أي مسألة تناسب فإننا نحتاج الى تناسب وعلاقة نسميها ⋆ حيث غالباً في مسائل التناسب يطلب منا حساب مجهولين.

تمرين 2022:

مثلث ABC فيه $\hat{C}=45^{\circ}$ و $\frac{\hat{A}}{\hat{B}}=\frac{1}{2}$ و $AB=2$ والمطلوب:

1. احسب $\hat{A}+\hat{B}$ ثم احسب قياس كل من الزاويتين $\hat{A}\,,\hat{B}$.
2. ارسم المثلث ABC واحسب الطول AC.

تصنيف مثلث:

تذكر أنَّ عدد الأضلاع المتساوية يساوي عدد الزوايا المتساوية.

- كل مثلث كانت ضلعاه أنصاف أقطار في دائرة كان مثلث متساوي الساقين. (أنصاف الأقطار متساوية)
- كل مثلث متساوي الساقين وجدت فيه زاوية تساوي 60° فهو مثلث متساوي الأضلاع.
- كل مثلث قائم وجد فيه زاوية تساوي 45° كان مثلث متساوي الساقين.

- نستطيع إثبات ان المثلث قائم عن طريق عكس مبرهنة فيثاغورث، يجب أن تتحقق العلاقة:

$$(\text{أطول ضلع})^2 \overset{?}{=} (\text{الضلع الأول})^2 + (\text{الضلع الثاني})^2$$

- كل مثلث تمر برؤوسه دائرة وأحد أضلاعه قطر فيها هو مثلث قائم ووتره هو قطر الدائرة.

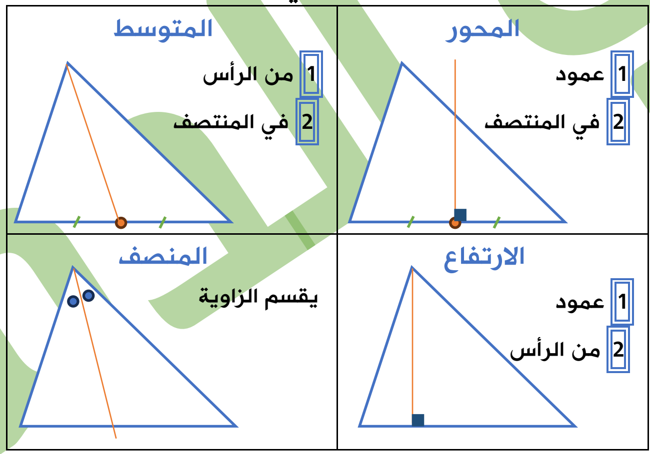
كل مثلث قائم تمر برؤوسه دائرة مركزها يقع في منتصف الوتر

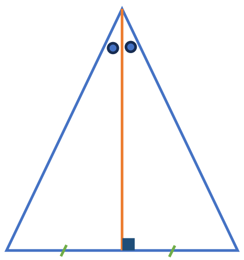
(تفيد هذه الخاصة في تعيين مركز الدائرة المارة برؤوس مثلث)

حساب طول ضلع في مثلث:

يجب عليك أن تتأمل معطيات السؤال لتستطيع تحديد القاعدة المناسبة للتطبيق.

- الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث القائم تساوي نصف طول الوتر.
- المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر.





في المثلث متساوي الساقين ومتساوي الأضلاع الارتفاع هو محور ومنصف ومتوسط أي أنه يحقق جميع الخواص السابقة من الرأس – عمود – في المنتصف يقسم الزاوية

- مبرهنة فيثاغورث: تستخدم عند معرفة طولي ضلعين ويطلب منا حساب طول الضلع الثالث وهي تنص على أنَّ

$$(\text{الوتر})^2 = (\text{الضلع القائمة }2)^2 + (\text{الضلع القائمة }1)^2$$

- عند وجود نسبة مثلثية معلومة فقط نعوض بشكل شاقولي (نحافظ على الطرف المعلوم).
- عند وجود زاوية حادة مشتركة بين مثلثين قائمين فإنَّ نسبها المثلثية من المثلث الأول تساوي نسبها المثلثية من المثلث الثاني.
- عند وجود زاويتين متساويتين بالقياس في مثلثين قائمين فإن النسب المثلثية للزاوية الأولى تساوي النسب المثلثية للزاوية الثانية.

تذكر

قوانين النسب المثلثية لزاوية حادة في المثلث القائم

$$\sin\theta = \frac{\theta\ \text{مقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos\theta = \frac{\theta\ \text{مجاور}}{\text{الوتر}} \qquad \tan\theta = \frac{\theta\ \text{مقابل}}{\theta\ \text{مجاور}}$$

ملاحظات

- النسب المثلثية ليس لها وحدات قياس.
- النسب المثلثية هي اعداد موجبة تماماً لكون كل منها نسبة لطولي ضلعين.
- جيب وتجيب أي زاوية حادة هي اعداد محصورة بين الصفر والواحد.
- زاويتا المثلث القائم الحادتين متتامتان أي مجموع قياسيهما 90° وفي حالة زاويتان متتامتان يكون جيب الزاوية الحادة الأولى يساوي تجيب الزاوية الحادة الثانية وعموماً:

$$sin(x) = cos(90-x)$$
$$cos(x) = sin(90-x)$$

انت قادر انت تستطيع انت رائع انت متميز وانا احبك جداً وأفتخر بك جداً وانتظر نجاحك بفارغ الصبر

عند وجود زاوية شهيرة

تذكر:

	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$

- لحساب طول ضلع عن طريق جدول نسب الزوايا الشهيرة نربط بين الضلع المعلوم والضلع المطلوب عن طريق الزاوية الشهيرة بنسبة مثلثية مناسبة ونعوض بشكل شاقولي.

عزيزي الطالب عند استلامك لورقة الإجابة قم بداية بكتابة جدول نسب الزوايا الشهيرة في المسودة للرجوع إليه وقت الحاجة.

حساب قياس زاوية في مثلث:

- تذكر أنَّ مجموع قياسات زوايا أي مثلث تساوي 180°.
- لحساب قياس زاوية عن طريق جدول نسب الزوايا الشهيرة في المثلث القائم يجب أن تتأكد أولاً من وجود ضلعين معلومين ثم نربط بينهما بنسبة مثلثية متعلقة بالزاوية التي نريد حسابها ونختزل الناتج ثم نقارنه بجدول نسب الزوايا الشهيرة ونختار الزاوية المساوية للناتج الذي أوجدناه.

حساب نسبة مثلثية:

إذا كان θ قياس زاوية حادة في مثلث قائم فإنّ:

$\boxed{1}$ $\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

- تستخدم في حساب الجيب بمعرفة التجيب والعكس.

$\boxed{2}$ $\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

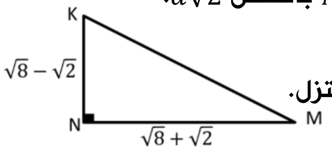
- تستخدم في حساب أي نسبة بمعرفة الاخريين.

إذا اعطانا ظل زاوية وطلب الجيب والتجيب فإننا نعوض أولاً قيمة الظل حسب المطابقة الثانية ثم نربع التناسب ونعتمد على خواص التناسب بالحل.

نكشة دمج $\sin^2 20^\circ+\sin^2 70^\circ=1$

تمرين 2019: MNK مثلث قائم في N فيه:

$NK=\sqrt{8}-\sqrt{2}$, $MN=\sqrt{8}+\sqrt{2}$ والمطلوب.



1. اكتب كلاً من MN , NK بالشكل $a\sqrt{2}$.
2. احسب $\tan(M)$ واكتبه بشكل كسر مختزل.
3. احسب KM.

تذكر وتدرب:

1. ناتج $\sin 45^\circ+\cos 45^\circ$ يساوي: دورة 2023

A	2	B	$\sqrt{2}$	C	1	D	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. إنَّ قيمة $2\sin 30^\circ+3\cos 60^\circ$ تساوي:

A	$\frac{5}{2}$	B	$\frac{7}{2}$	c	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$

3. إنَّ قيمة $\sin 70^\circ$ تساوي:

A	$\cos 70^\circ$	B	$\cos 20^\circ$	c	$\sin 20^\circ$

4. إذا علمت أنَّ $\tan\hat{D}$ عدد صحيح فإنَّ قياس الزاوية $\hat{D}$ يساوي:

A	30°	B	45°	c	60°

حساب مساحة مثلث:

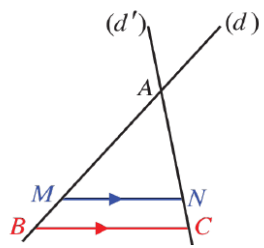
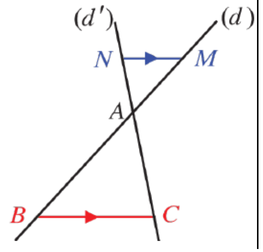
- مساحة أي مثلث تساوي القاعدة ضرب الارتفاع تقسيم اثنان
- اما المثلث القائم فمساحته تساوي: جداء الضلعين القائمتين تقسيم اثنين.
- والمثلث متساوي الأضلاع مساحته تساوي: $\frac{\sqrt{3}}{4}$ مضروباً بمربع طول الضلع.
- ارتفاع المثلث متساوي الأضلاع هو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ مضروباً بطول الضلع.

الوحدة الثانية

مبرهنة النسب الثلاث

شرطها	هدفها
وجود مستقيمين متوازيين	حساب طول ضلع ما

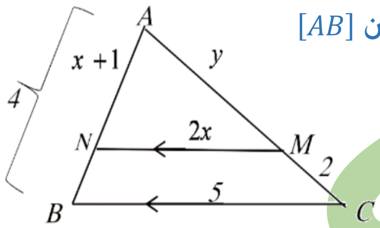
حالات النسب الثلاث:

نقطة التقاطع خارج التوازي	نقطة التقاطع داخل التوازي
	

بما أنَّ $MN//BC$ ومنه حسب مبرهنة النسب الثلاث:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

قد يأتي التمرين مباشر عن النسب الثلاث وقد يتم دمجه مع فكرة أخرى. المهمة الأساسية تكمن في كتابتك للنسب الثلاث بشكل صحيح ومتابعة الحل بعدها بطريقة منطقية واضحة. سأدرج لكم تمرين دورة 2018 مع الحل.



ABC مثلث فيه النقطة N من $[AB]$ والنقطة M من $[AC]$ تأمل الشكل المرافق جيداً.

والمطلوب:

1. اكتب النسب الثلاث.
2. احسب قيمة كل من x , y.
3. استنتج الأطوال AN , MN , NB.

انت قادر انت تستطيع انت رائع انت متميز وانا احبك جداً وأفتخر بك جداً وانتظر نجاحك بفارغ الصبر

بما أن $MN//BC$

نطبق مبرهنة النسب الثلاث:

$$\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

$$\underbrace{\frac{x+1}{4}}_{(1)}=\underbrace{\frac{y}{y+2}}_{(2)}=\underbrace{\frac{2x}{5}}_{(3)}$$

من النسب 1 و 3 نجد:

$$\frac{x+1}{4}=\frac{2x}{5}$$

$$5(x+1)=2x(4)$$

$$5x+5=8x$$

$$5=3x$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{5}{3}}$$

نعوض في النسبة 3:

$$\frac{2x}{5}\Rightarrow\frac{2}{5}\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\quad \dots\dots(3)$$

من النسب 2 و 3 نجد:

$$\frac{y}{y+2}=\frac{2}{3}$$

$$2(y+2)=3y$$

$$2y+4=3y$$

$$\boxed{y=4}$$

$$AN=\frac{5}{3}+1$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{3}{3}$$

$$\boxed{AN=\frac{8}{3}}$$

$$MN=2\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\boxed{MN=\frac{10}{3}}$$

$$NB=AB-AN$$

$$=4-\frac{8}{3}$$

$$=\frac{12}{3}-\frac{8}{3}$$

$$\boxed{NB=\frac{4}{3}}$$

تمرين 2019: في الشكل المجاور

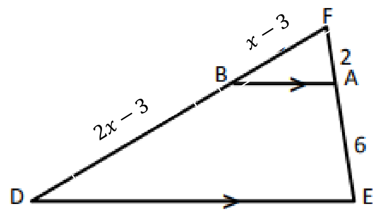
$AE=6\,,AF=2$

$,BF=x-3\,,DB=2x-3$

و $AB//ED$.

احسب قيمة x

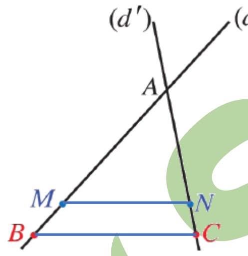
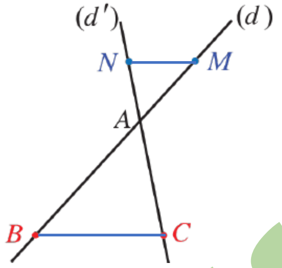
ثم أوجد الطول BD.



عكس مبرهنة النسب الثلاث

شرطها	هدفها
معرفة جميع أطوال الأضلاع	إثبات أنّ مستقيمين متوازيين

حالات عكس النسب الثلاث:

نقطة التقاطع خارج المستقيمين	نقطة التقاطع داخل المستقيمين
	

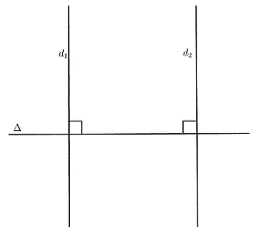
إذا كان $\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}$ يكون MN,BC متوازيان.

إذا كان $\frac{AN}{AC}\neq\frac{AM}{AB}$ يكون MN,BC ليسا متوازيان (متقاطعان)

تذكر بعض حالات اثبات التوازي

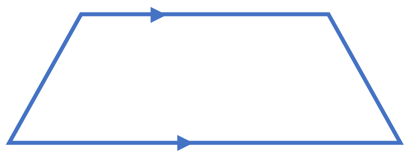
تعلم: المستقيمان العمودان على مستقيم واحد متوازيان.

$$d_1//d_2 \Leftarrow \begin{cases} d_1\perp\Delta \\ d_2\perp\Delta \end{cases}$$



تذكر: شبه المنحرف هو مضلع رباعي فيه ضلعان متوازيان

تسميان قاعدتا شبه المنحرف.



تعلم:

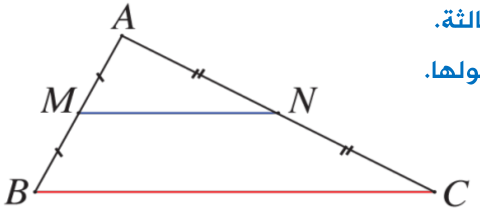
القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث:

1) توازي الضلع الثالثة.

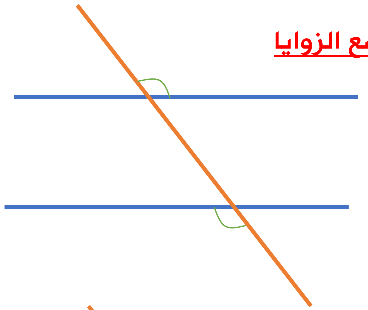
2) تساوي نصف طولها.

$MN//BC$

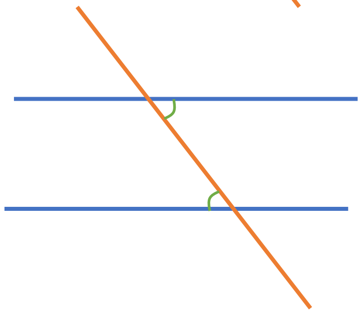
$MN=\frac{1}{2}BC$



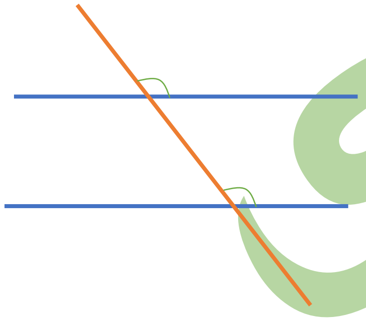
تذكرة بشكل سريع عن وضع الزوايا



إذا تساوت زاويتان متبادلتان خارجاً كان المستقيمان متوازيان



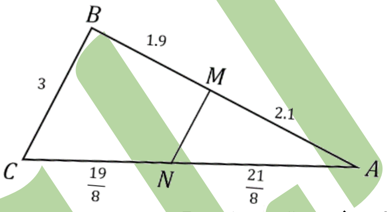
إذا تساوت زاويتان متبادلتان داخلاً كان المستقيمان متوازيان



إذا تساوت زاويتان متناظرتان كان المستقيمان متوازيان

تمرين 2023: نتأمل الشكل المرسوم جانباً: ABC مثلث فيه M و N نقطتان من $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب بحيث:

$$CB=3\,,MB=1.9\,,MA=2.1\,,CN=\frac{19}{8}\,,NA=\frac{21}{8}$$



والمطلوب:

1. أثبت أنَّ ABC مثلث قائم في B.
2. أثبت أنَّ $(CB)||(MN)$.

التـشـابـه

- متى نقول عن شكلين أنهما متشابهين؟

الإجابة 1:

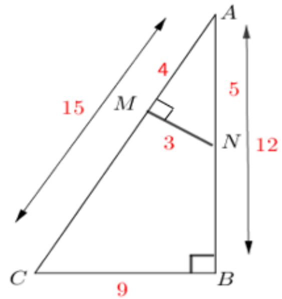
إذا نتجت أطوال أضلاع أحدهما عن الآخر بضربها بعدد.

الإجابة 2: إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتقابلة في الشكلين.

عزيزي الطالب هنا يمكن أن يكون السؤال أثبت تشابه – أثبت تصغير – أثبت تكبير ونتعامل مع هذا الطلب كما سيأتي:

تمرين1: أثبت أن المثلثين ABC و AMN متشابهين:

الحل: لنختبر تناسب الأطوال:



$$\frac{AC}{AN}=\frac{AB}{AM}=\frac{BC}{MN}$$

$$\frac{15}{5}=\frac{12}{4}=\frac{9}{3}$$

$$3=3=3$$

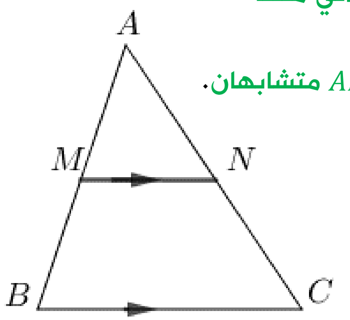
تناسبت أطوال الأضلاع

فالمثلثان متشابهان.

انتبه الى أنه في المثال السابق لم يوجد لدينا توازي فقسمنا كل ضلع من الشكل الأول على نظيره من الثاني.

تمرين2: لديك في الشكل الآتي مثلثاً فيه (MN) يوازي (BC).

أثبت أن المثلثان $AMN\,,ABC$ متشابهان.



الحل: بما أن $MN//BC$

نطبق مبرهنة النسب الثلاث:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

تناسبت أطوال الأضلاع

فالمثلثان متشابهان.

انتبه الى أنه في المثال السابق يوجد لدينا توازي فقمنا بتطبيق مبرهنة النسب الثلاث دون تعويض فقط كتبنا النسب ومن ثم استنتجنا وجود التشابه.

أي أننا نستنتج أنه دوماً في حال وجود مستقيمين متوازيين نستطيع تطبيق مبرهنة النسب الثلاث وفي حال وجود نسب ثلاث يوجد تشابه.

تتمة تعريف التشابه (الإجابة الأولى):

نقول عن شكلين أنهما متشابهين إذا نتجت أطوال أضلاع أحدهما عن الآخر بضربها بعدد نسمي هذا العدد معامل التشابه ونرمز له بالرمز k.

في حالة $k>1$: يؤول التشابه الى تكبير الشكل.

في حالة $0<k<1$: يؤول التشابه إلى تصغير الشكل.

كيف نوجد معامل التشابه؟

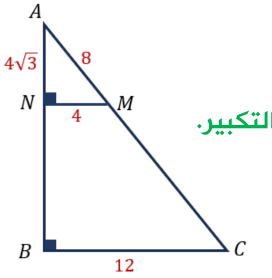
إذا أردنا معامل التكبير فإننا نقسم ضلعاً من الكبير على نظيره من الصغير.

إذا أردنا معامل التصغير فإننا نقسم ضلعاً من الصغير على نظيره من الكبير.

خواص التشابه:

- التشابه يحافظ على قياسات الزوايا.
- التشابه يضرب اطوال الاضلاع بمعامل التشابه k.
- التشابه يضرب مساحة السطح بمربع معامل التشابه k^2.
- التشابه يضرب حجم المجسم بمكعب معامل التشابه k^3.

تطبيق عملي: تأمل الشكل المرفق ثم أجب:



1) أثبت أن $MN//BC$.
2) أثبت أن المثلث ABC تكبير للمثلث ANM، ثم أوجد معامل التكبير.
3) احسب الطولين AC و AB.
4) احسب النسبة $\frac{S_{ANM}}{S_{MNBC}}$.

الحل: 1) لدينا:

$$BC//MN \Leftarrow \left[\begin{array}{l} BC\perp AB\\ MN\perp AB\end{array}\right.$$

لأن المستقيمان العمودان على مستقيم واحد متوازيان.

2) بما أن $BC//MN$ نطبق مبرهنة النسب الثلاث:

$$\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

تناسبت أطوال الأضلاع فالمثلثان متشابهان

أي أنَّ المثلث ABC تكبير للمثلث ANM

لحساب معامل التكبير:

$$k=\frac{BC}{NM}=\frac{12}{4}=3$$

3) لحساب أطوال الأضلاع:

$$AC=k\times AM=3\times 8=24$$

$$AB=k\times AN=3\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$

لأن التشابه يضرب أطوال الأضلاع بـk.

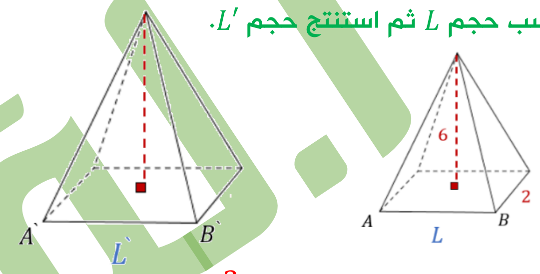
4) $$\frac{S_{ANM}}{S_{ABC}}=K^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{S_{ANM}}{S_{ABC}}=\frac{1}{9}$$

حسب خواص التناسب

$$\frac{S_{ANM}}{S_{ABC}-S_{ANM}}=\frac{1}{9-1}\quad\Rightarrow\quad\frac{S_{ANM}}{S_{MNBC}}=\frac{1}{8}$$

تمرين هام 2: L هرم قاعدته مربع طول ضلعه $2\ cm$ وارتفاعه $6\ cm$. L' نموذج مكبر عن L نسبته $k=\frac{3}{2}$.

1) اوجد طول ضلع قاعدة L' وارتفاعه.
2) احسب مساحة قاعدة L ثم استنتج مساحة قاعدة L'.
3) احسب حجم L ثم استنتج حجم L'.



الحل:

1) لدينا:

$A'B' = k \times AB = \frac{3}{2} \times 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A'B' = 3\ cm}$

$h' = k \times h = \frac{3}{2} \times 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h' = 9\ cm}$

لأن التشابه يضرب أطوال الأضلاع بـ k.

2) $S = (\text{طول الضلع})^2 = 2^2$

$\boxed{S = 4\ cm^2}$

$S' = k^2 \times S$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 4 \quad \Rightarrow \quad = \frac{9}{4} \times 4$

$\boxed{S' = 9\ cm^2}$

لأن التشابه يضرب المساحات بـ k^2.

3) $V = \frac{S.h}{3} = \frac{4\times 6}{3}$

$\boxed{V = 8\ cm^3}$

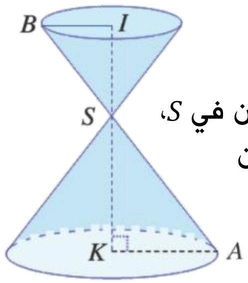
$V' = k^3 \times V$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^3 \times 8 \quad \Rightarrow \quad = \frac{27}{8} \times 8$

$\boxed{V' = 27\ cm^3}$

لأن التشابه يضرب الحجوم بـ k^3.

تمرين هام: في الشكل المرافق لدينا مخروطان دورانيان متقابلان بالرأس S، مركزا قاعدتيهما K و I، ونصفا قطريهما $[KA] , [IB]$، المستقيمان $(KI) , (AB)$ متقاطعان في S، والمستقيمان $(KA) , (IB)$، متوازيان ونعلم أنّ $KA = \frac{9}{2}\ cm$ و $KS = 6\ cm$ و $SI = 4\ cm$.



1. احسب طول IB ثم الطول SA.
2. المخروط الذي مركز قاعدته I تصغير للمخروط الذي مركز قاعدته K.
   A. ما معامل التصغير.
   B. احسب V_K ثم استنتج V_I.

1. بما أن $KA // IB$

نطبق مبرهنة النسب الثلاث:

$$\frac{SB}{SA} = \frac{SI}{SK} = \frac{BI}{KA}$$

من النسب 2 و3 نجد:

$$\frac{4}{6} = \frac{BI}{\frac{9}{2}} \Rightarrow BI = \frac{4 \times \frac{9}{2}}{6}$$

$$\Rightarrow BI = 3$$

بما أن KSA مثلث قائم في K نطبق مبرهنة فيثاغورث:

$$(SA)^2 = (SK)^2 + (KA)^2$$

$$(SA)^2 = 6^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$(SA)^2 = 36 + \frac{81}{4}$$

$$(SA)^2 = \frac{144}{4} + \frac{81}{4}$$

$$(SA)^2 = \frac{225}{4}$$

$$\Rightarrow SA = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{4}}$$

$$= \frac{15}{2}$$

$$SA = 7.5$$

A. لحساب معامل التصغير:

$$k = \frac{SI}{SK} = \frac{4}{6}$$

$$k = \frac{2}{3}$$

B. لحساب الحجم V_K:

$$V_K = \frac{S.h}{3} = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$$

$$V_K = \frac{\pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 \times 6}{3}$$

$$V_K = \pi \times 2 \times \frac{81}{4}$$

$$\Rightarrow V_K = \frac{81}{2}\pi\ cm^3$$

لنستنتج الحجم V_I:

$$V_I = k^3 \times V_K$$

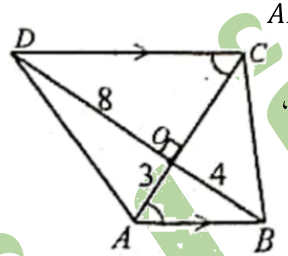
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{81}{2}\pi$$

$$= \frac{8}{27} \times \frac{81}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V_I = 12\pi\ cm^3$$

لأن التشابه يضرب الحجوم بـ k^3.

تمرين 2021: في الشكل جانباً $ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$, $[DC]$ ، O نقطة تقاطع قطريه المتعامدين، فيه $OA=3\,, OB=4\,, OD=8$

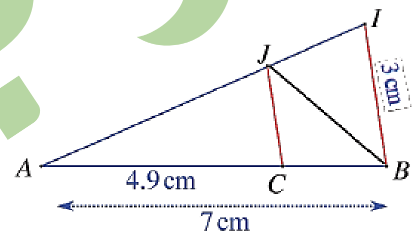


والمطلوب:

1. احسب طول AB، ثم اكتب النسب الثلاث المتساوية للمثلثين المتشابهين AOB و COD.
2. احسب الطولين $CD\,, OC$ واحسب النسبة $\frac{\text{مساحة } AOB}{\text{مساحة } COD}$

تمرين محلول: المستقيمان (IJ) و (BC) متقاطعان في A، والمستقيمان (JC) و (IB) متوازيان.

أثبت أن $\widehat{CJB}=\widehat{CBJ}$.



الحل:

لإثبات أن $\widehat{CJB}=\widehat{CBJ}$ لنثبت أن المثلث CBJ متساوي الساقين.

- نحسب BC:

$$BC=AB-AC=7-4.9 \Rightarrow BC=2.1$$

- نحسب CJ:

بما أن $CJ//IB$ نطبق مبرهنة النسب الثلاث:

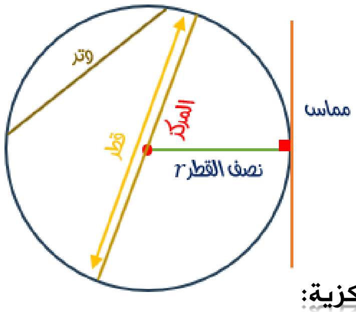
$$\frac{AC}{AB}=\frac{AJ}{AI}=\frac{CJ}{IB}$$

$$\frac{4.9}{7}=\frac{CJ}{3} \Rightarrow CJ=\frac{4.9\times 3}{7} \Rightarrow CJ=\frac{14.7}{7} \Rightarrow CJ=2.1$$

ومنه $CJ=BC$ فالمثلث CBJ متساوي الساقين فيه زاويتا القاعدة متساويتان أي أن $\widehat{CJB}=\widehat{CBJ}$ وهو المطلوب.

الوحدة الثالثة

الدائرة

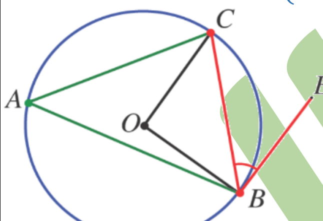


الزاوية المركزية:

هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة وضلعاها انصاف اقطار فيها. $(B\hat{O}C)$

الزاوية المحيطية:

هي الزاوية التي يقع رأسها على محيط الدائرة وضلعاها وترين فيها. $(B\hat{A}C)$



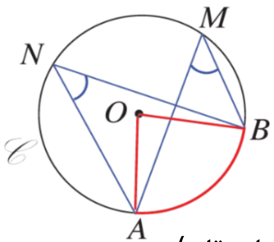
الزاوية المماسية:

هي الزاوية التي يقع رأسها على محيط الدائرة ضلعها الأول مماس والآخر وتر فيها.

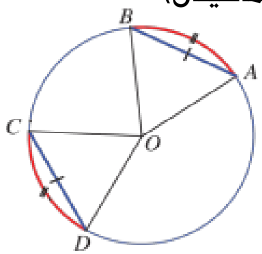
- قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس الذي تحصره.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي تحصره.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس.
- قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس الذي تحصره.
- قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس.
- قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بنفس القوس.

- قياسا زاويتان (محيطيتان/مماسيتان) تشتركان بنفس القوس متساويتان.

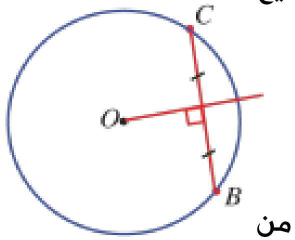
$$A\widehat{M}B=A\widehat{N}B$$



- قياسا زاويتان (محيطيتان/مركزيتان/مماسيتان) تحصران قوسين متساويين في دائرة متساويتان والعكس صحيح.

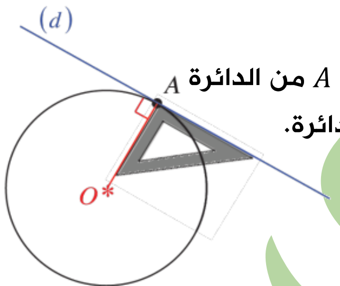


- الوتران المتساويان بالطول في دائرة يحصران قوسين متساويين بالقياس والعكس صحيح.



- المستقيم المار من مركز دائرة ويعامد وتر فيها يمر من منتصف ذلك الوتر.
- والعكس صحيح: المستقيم المار من مركز دائرة ويمر من منتصف وتر فيها يعامد ذلك الوتر.

- المستقيم (d) الذي يعامد نصف القطر $[OA]$ في نقطة A من الدائرة التي مركزها O هو مماس للدائرة.



شاهد فيديو الوضع النسبي لدائرتين على YouTube باسم:

الوضع النسبي لدائرتين – أ.لؤي الدمني

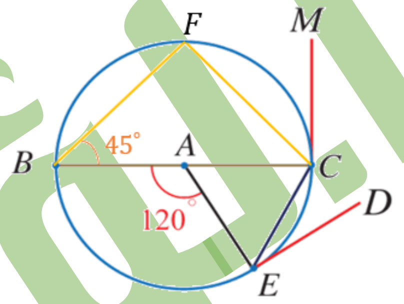
انت قادر انت تستطيع انت رائع انت متميز وانا احبك جداً وأفتخر بك جداً وانتظر نجاحك بفارغ الصبر

تمرين محلول: BC قطر في دائرة مركزها A،

E نقطة من هذه الدائرة تحقق، $B\hat{A}E = 120^\circ$

F نقطة اخرى من هذه الدائرة تحقق $C\hat{B}F = 45^\circ$

و $(ED)\,,(CM)$ مماسان للدائرة،



والمطلوب:

1. احسب قياس كل من الزوايا $F\hat{C}B, B\hat{F}C, B\hat{C}M, C\hat{E}D, C\hat{B}E, E\hat{C}B, C\hat{A}E$
2. ما نوع المثلثات $AEC\,,BFC\,,EBC$.

$C\hat{A}E$

بما أنَّ $B\hat{A}E = 120^\circ$

فإنَّ $C\hat{A}E = 60^\circ$

لأنهما تشكلان زاوية مستقيمة (مجموعهما 180°)

$E\hat{C}B$

بما أنَّ $B\hat{A}E = 120^\circ$

فإنَّ $E\hat{C}B = 60^\circ$

لأن الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس EB

$C\hat{B}E$

بما أنَّ $C\hat{A}E = 60^\circ$

فإنَّ $C\hat{B}E = 30^\circ$

لأن الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس EC

$C\hat{E}D$

بما أنَّ $C\hat{A}E = 60^\circ$

فإنَّ $C\hat{E}D = 30^\circ$

لأن الزاوية المماسية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس EC

$B\hat{C}M$

بما أنَّ CM مماس

فإنَّ $B\hat{C}M = 90^\circ$

لأن المماس عمود على نصف القطر في نقطة التماس C

$B\hat{F}C$

$B\hat{F}C = 90^\circ$

لأنها محيطية تقابل نصف قوس دائرة

$F\hat{C}B$

نعلم أنَّ مجموع قياسات زوايا المثلث BCF

تساوي 180° ومنه

$$F\hat{C}B = 180 - (\hat{F} + \hat{B})$$
$$F\hat{C}B = 180 - (90 + 45)$$
$$F\hat{C}B = 180 - 135$$
$$F\hat{C}B = 45^\circ$$

نوع المثلث EBC

قائم في E بسبب وجود دائرة مارة برؤوسه وأحد أضلاعه BC قطر فيها

نوع المثلث BFC

قائم في F بسبب وجود دائرة مارة برؤوسه وأحد أضلاعه BC قطر فيها

وفيه زاوية تساوي 45° فهو مثلث قائم ومتساوي الساقين

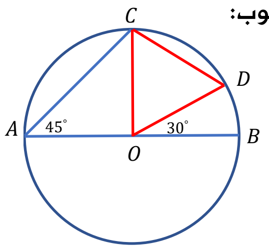
نوع المثلث AEC

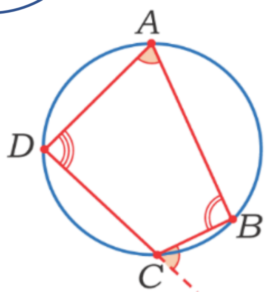
مثلث متساوي الساقين لأنَّ ضلعاه $AE\,,AC$ انصاف اقطار في الدائرة

وفيه $C\hat{A}E = 60^\circ$ فهو مثلث متساوي الأضلاع

تمرين 2019: في الشكل المجاور: دائرة مركزها O ونصف قطرها 4 فيها $C\hat{A}O = 45^\circ\ ,\ B\hat{O}D = 30^\circ$ والمطلوب:

1. احسب قياس كلاً من $A\hat{O}C$ و $\overset{\frown}{CD}$.
2. ما نوع المثلث COD واستنتج طول CD.





الرباعي الدائري

تعريف: هو مضلع رباعي تقع جميع رؤوسه على محيط دائرة واحدة.

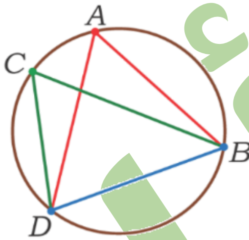
خواص الرباعي الدائري:

- **الخاصة الأولى:** كل زاويتان متقابلتان في رباعي دائري متكاملتان (مجموعهما 180°).
  - خلاصة $\boxed{1}$: الزاوية الخارجية في رباعي دائري تساوي الزاوية المقابلة لمجاورتها.
  - **ملاحظة:** الزاوية الخارجية لمضلع تكون محصورة بين ضلع وامتداد الأخرى.
  - خلاصة $\boxed{2}$: إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان الرباعي دائري.

  بمعنى أنه يوجد دائرة مارة برؤوسه

انت قادر انت تستطيع انت رائع انت متميز وانا احبك جداً وأفتخر بك جداً وانتظر نجاحك بفارغ الصبر

الخاصة الثانية:

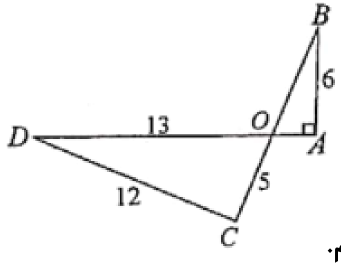


إذا كانت النقاط A , B , C , D واقعة على دائرة واحدة وكانت النقطتان A , C في جهة واحدة بالنسبة الى BD كانت الزاويتان $B\hat{C}D$, $B\hat{A}D$ متساويتان.

➢ خلاصة: إذا تساوت الزاويتان $B\hat{C}D$, $B\hat{A}D$ وكانت النقطتان A , C في جهة واحدة بالنسبة الى BD كان رباعي دائري.

أي أنه إذا أراد منا إثبات أنَّ رباعي هو رباعي دائري نبحث إما عن زاويتان متقابلتان متكاملتان أو زاويتان متجاورتان متساويتان

تمرين 2021: نتأمل الشكل المرسوم جانباً: OAB مثلث قائم و $AB = 6 , DO = 13 , DC = 12 , OC = 5$ والمطلوب:



1. أثبت أنَّ DOC مثلث قائم.
2. أثبت أنَّ النقاط D , C , A , B تنتمي الى دائرة واحدة عيّن مركزها.
3. احسب $\sin C\hat{O}D$ واستنتج الطول OB.

المضلعات المنتظمة

تعريف: هو مضلع تكون جميع قياسات زواياه متساوية واطوال اضلاعه متساوية.

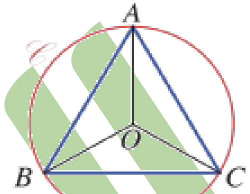
خاصة: كل مضلع منتظم قابل للارتسام في دائرة (بمعنى وجود دائرة مارة برؤوسه)

يسمى مركز الدائرة المارة برؤوسه مركز المضلع المنتظم.

قانون: إذا كان AB ضلعاً في مضلع منتظم مركزه O وعدد اضلاعه n كان: $A\hat{O}B = \frac{360^\circ}{n}$

أمثلة عن مضلعات منتظمة:

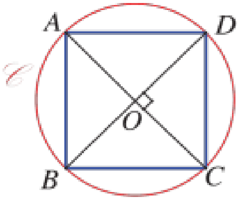
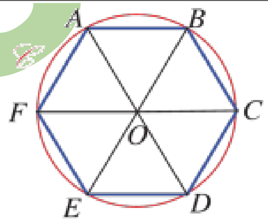
ثلاثي (مثلث متساوي الأضلاع)



ABC مثلث متساوي الأضلاع

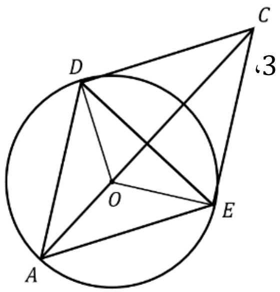
$\widehat{ABC} = 60^\circ$

$\widehat{AOB} = 120^\circ$

رباعي (مربع)	سداسي (مسدس)
	
$ABCD$ مربع	$ABCDEF$ مسدس
$\widehat{ABC} = 90^\circ$ $\widehat{AOB} = 90^\circ$	$\widehat{ABC} = 120^\circ$ $\widehat{AOB} = 60^\circ$

تمرين 2023:

في الشكل المرسوم جانباً ADE مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 3، مرسوم في دائرة مركزها O، وليكن (CD) و (CE) مماسين للدائرة، والمطلوب:



1. احسب قياس الزاوية $D\hat{O}E$، واستنتج قياس القوس $\widehat{DE}$.
2. احسب قياسات زوايا المثلث DEC.
3. احسب محيط الرباعي $AECD$، واذكر نوعه.

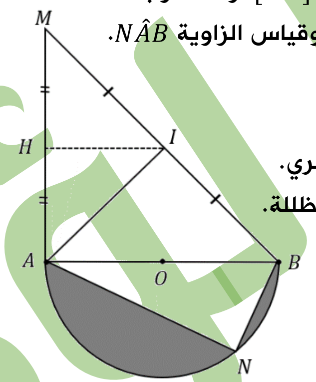
غالباً ما يتم دمج أفكار هذه الوحدة مع الوحدة الأولى في مسائل المئة درجة هندسة لذلك سأقوم بوضع جميع مسائل الدورات السابقة لتأخذ فكرة عامة عن كيفية تركيب المسألة علماً أنني سأقوم بإرسال حلول جميع المسائل على مجموعات المرجع في الرياضيات، كما بإمكانك متابعة حل المسائل بالصوت والصورة وبالتفصيل الممل عبر YouTube على قناة لؤي الدمني _ Louay Al damani

عزيزي الطالب أنا أعلم أن أكبر مخاوفك في الامتحان النهائي هي مسألة المئة درجة هندسة ولكن لا تقلق مع إتقانك ومراجعتك للقواعد السابقة للمادة ومع قراءتك الجيدة لنص السؤال وتأمل الرسم المرفق بطريقة جيدة ستستطيع الحل والتعبير عنه في الامتحان بأفضل طريقة. من الضروري متابعة حل على الأقل آخر ثلاث مسائل على YouTube.

انت قادر انت تستطيع انت رائع انت متميز وانا احبك جداً وأفتخر بك جداً وانتظر نجاحك بفارغ الصبر

مسألة 2023:

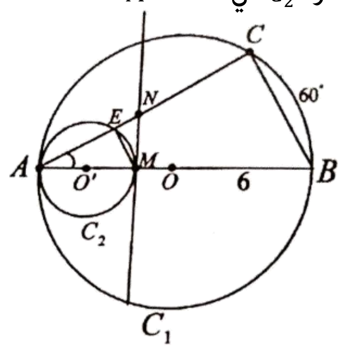
في الشكل المرسوم جانباً: نصف دائرة مركزها O، قطرها $[AB]$ طوله 8 فيها $\widehat{AN} = 2\widehat{NB}$، MAB مثلث متساوي الساقين وقائم في A، I منتصف $[MB]$ و H منتصف $[MA]$. والمطلوب:



1. احسب قياس القوس $\widehat{NB}$ وقياس الزاوية $N\hat{A}B$.
2. أثبت أن $NB = 4$.
3. احسب الطول NA.
4. أثبت أنَّ الرباعي $ANBI$ دائري.
5. احسب مساحة المنطقة المظللة.

مسألة 2022:

في الشكل المجاور: دائرتان متماستان داخلاً في النقطة A هما C_1 مركزها O ونصف قطرها 6 وC_2 مركزها O' وقطرها $AM = 4$ والمستقيم (MN) مماس للدائرة C_2 في النقطة M، وقياس القوس $\widehat{BC}$ هو 60°،



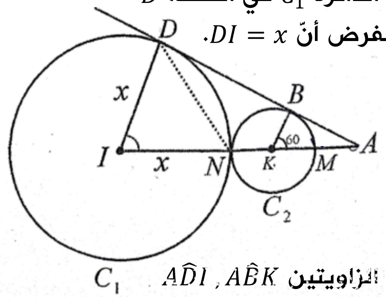
والمطلوب:

1. بيّن أنَّ $A\hat{C}B = 90^\circ$ و $B\hat{A}C = 30^\circ$، واحسب الطولين BC و AC.
2. بيّن أنَّ مبرهنة النسب الثلاث تشمل المثلثين ABC و AME، ثم اكتب النسب الثلاث المتساوية، واحسب طول ME.
3. أثبت أنَّ $CNMB$ رباعي دائري، عين مركز الدائرة المارة برؤوسه.
4. احسب قياس الزاوية $N\hat{M}E$.

مسألة 2021:

في الشكل المرسوم جانباً: C_1 دائرة مركزها I وC_2 دائرة مركزها K وهما متماستان خارجاً في النقطة N، ولدينا: الطول $AK = 10$ وقياس الزاوية $A\hat{K}B = 60^\circ$،

والمستقيم AB يمس كلاً من الدائرة C_1 في النقطة D والدائرة C_2 في النقطة B، ولنفرض أنّ $DI = x$.



والمطلوب:

1. احسب قياس كلاً من الزاويتين $A\hat{B}K$, $A\hat{D}I$ وبين أنّ المستقيمين ID , BK متوازيان.
2. احسب قياس كلاً من الزاويتين $A\hat{D}N$, $D\hat{I}A$.
3. في المثلث القائم KBA احسب الطول BK.
4. احسب الطول AN، ثم احسب قيمة x.

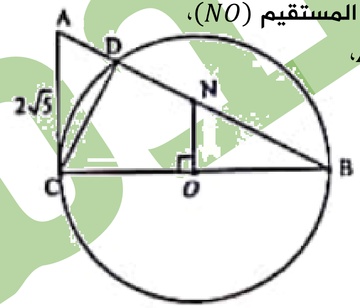
مسألة 2020:

في الشكل المجاور: دائرة مركزها O وقطرها $[CB]$،

والمستقيم (AC) مماس للدائرة في النقطة C،

والمستقيم (CB) عمودي على المستقيم (NO)،

ولدينا $AC = 2\sqrt{5}$ و $AB = 10$،

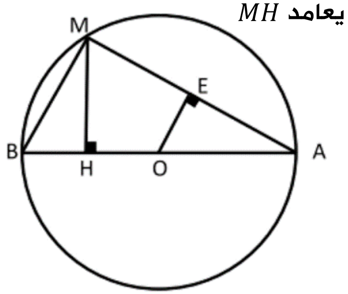


والمطلوب:

1. بيّن أنَّ قياس الزاوية $A\hat{C}D$ يساوي قياس الزاوية $C\hat{B}D$.
2. أثبت أنَّ ABC مثلث قائم في C، واستنتج أنَّ $BC = 4\sqrt{5}$.
3. اكتب عبارة $\sin(\hat{B})$ في كل من المثلثين ACB و CDB، ثم احسب الطولين CD و DB.
4. أثبت أن الرباعي $CDNO$ دائري، وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه.

مسألة 2019:

في الشكل المجاور جانباً: دائرة مركزها O ونصف قطرها 6 فيها AM يعامد OE ولدينا AB يعامد MH وقياس القوس $\widehat{AM} = 120^\circ$

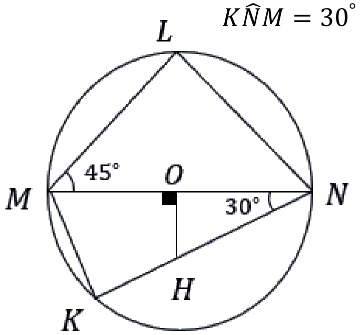


والمطلوب:

1. احسب قياسات زوايا المثلث BAM واطوال اضلاعه.
2. احسب طول OE ثم $\cos E\hat{O}A$.
3. علل تساوي الزاويتين $B\hat{M}H$, $O\hat{A}E$.
4. اثبت ان الرباعي $HOEM$ ثم عين مركز الدائرة المارة برؤوسها واحسب طول نصف قطرها.

مسألة 2018:

N , L , M , K نقاط من دائرة مركزها O حيث MN قطر في الدائرة طوله $8\ cm$ ولدينا: $L\hat{M}N = 45^\circ$، $K\hat{N}M = 30^\circ$



والمطلوب:

1. ما نوع المثلث LMN بالنسبة لأضلاعه؟ واستنتج قياس الزاوية $M\hat{N}L$.
2. احسب قياس كلاً من $\widehat{LMK}$, $M\hat{K}N$.
3. احسب طول كلاً من ML , MK , KN.
4. أثبت أنّ $OHKM$ رباعي دائري وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه.

الوحدة الرابعة

مجسمات ومقاطع

المساحة الجانبية للموشور القائم تساوي محيط القاعدة ضرب الارتفاع.

$$S_L = P \times h$$

المساحة الكلية للموشور القائم تساوي المساحة الجانبية + ضعفي مساحة القاعدة.

$$S_T = S_L + 2S$$

حجم الموشور القائم يساوي مساحة القاعدة ضرب الارتفاع.

$$V = S \times h$$

المساحة الجانبية للأسطوانة الدورانية تساوي محيط القاعدة (دائرة) ضرب الارتفاع.

$$S_L = 2\pi r \times h$$

المساحة الكلية للأسطوانة الدورانية تساوي المساحة الجانبية + ضعفي مساحة القاعدة (دائرة).

$$S_T = S_L + 2\pi r^2$$

حجم الأسطوانة الدورانية يساوي مساحة القاعدة (دائرة) ضرب الارتفاع.

$$V = \pi r^2 \times h$$

متوازي مستطيلات أبعاده x , y , z.

الحجم يساوي جداء ابعاده الثلاثة.

$$V = \underbrace{x}_{\text{الطول}} \times \underbrace{y}_{\text{العرض}} \times \underbrace{z}_{\text{الارتفاع}}$$

مساحة السطح تساوي مجموع مساحات سطوحه

$$S = 2(x.y) + 2(x.z) + 2(y.z)$$

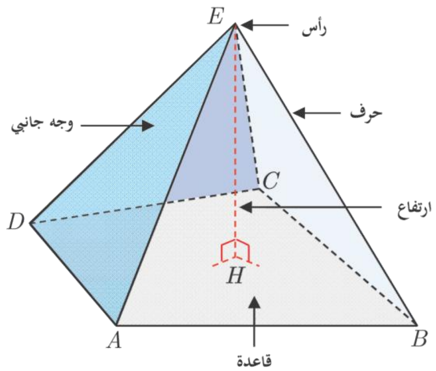
حجم مكعب طول حرفه x يساوي مكعب طول الحرف.

$$V = x^3$$

مساحة سطح مكعب طول حرفه x هو مساحة الوجه الواحد مضروباً بعدد الوجوه.

$$S = \underbrace{6}_{\text{عدد الوجوه}} \times \underbrace{x^2}_{\text{مساحة الوجه الواحد}}$$

الهرم



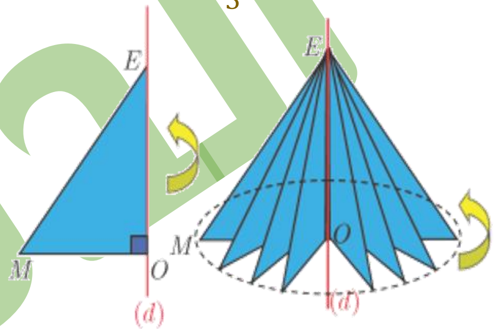
الهرم المنتظم: نقول عن هرم انه منتظم إذا تحقق:

1. قاعدته مضلع منتظم مركزه H.
2. ارتفاعه هو القطعة المستقيمة EH الواصلة بين رأس الهرم ومركز القاعدة.

حجم الهرم يساوي ثلث مساحة القاعدة ضرب الارتفاع

$$V = \frac{S \times h}{3}$$

الخروط

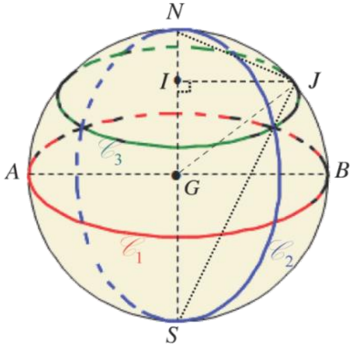


المخروط الدوراني الذي رأسه E هو المجسم المتولد عن دوران مثلث EOM قائم في O حول المستقيم OE القرص المتولد من دوران OM هو قاعدة المخروط.

حجم المخروط الدوراني يساوي ثلث مساحة القاعدة ضرب الارتفاع

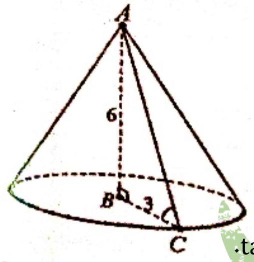
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$$

الكرة



- السطح الكروي ذو المركز O ونصف القطر R هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM = R$.
- المجسم الكروي ذو المركز O ونصف القطر R هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM \leq R$.
- حساب مساحة سطح الكرة:
$$S = 4\pi R^2$$
- حساب حجم الكرة:
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$
- قطر الكرة: هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة وطرفاها نقطتان من الكرة (تسميان نقطتان متقابلتان قطرياً).
- الدائرة الكبرى هي دائرة واقعة على الكرة وقطرها يساوي قطر الكرة.

تمرين 2022:



في الشكل المجاور المخروط C رأسه A وارتفاعه $AB = 6$ وقاعدته الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $BC = 3$، والمطلوب:

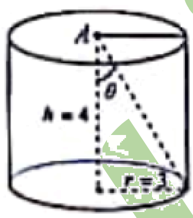
1. احسب الطول AC ثم $\tan A\hat{C}B$.
2. احسب S مساحة قاعدة المخروط، ثم احسب V حجمه.

انت قادر انت تستطيع انت رائع انت متميز وانا احبك جداً وأفتخر بك جداً وانتظر نجاحك بفارغ الصبر

تمرين 2020: في الشكل المجاور:

أسطوانة نصف قطر قاعدتها $r = 3$

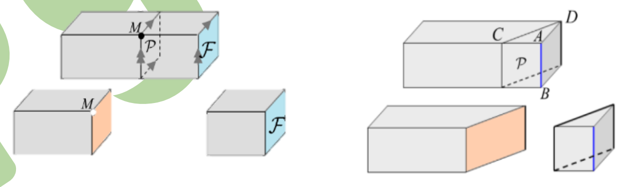
وارتفاعها $h = 4$.



1. احسب محيط قاعدة الأسطوانة، ومساحتها الجانبية.
2. احسب مساحة قاعدة الأسطوانة، ثم احسب حجمها.
3. احسب $\tan\theta$.

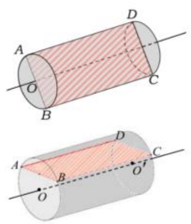
مقاطع المجسمات

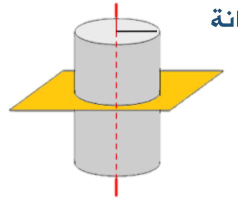
متوازي المستطيلات



- مقطع متوازي مستطيلات بمستوٍ يوازي أحد أوجهه هو مستطيل يطابق ذلك الوجه.
- مقطع متوازي مستطيلات بمستوٍ يوازي أحد أحرفه هو مستطيل أحد بعديه يساوي ذلك الحرف.

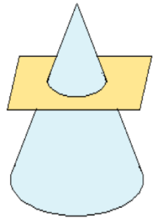
الاسطوانة





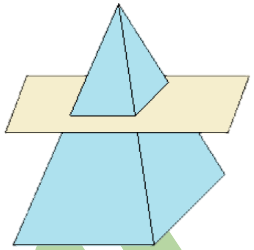
- مقطع أسطوانة دورانية بمستوٍ يوازي قاعدتها أو يعامد محورها هو دائرة تطابق القاعدة.
- مقطع أسطوانة دورانية بمستو يوازي محورها هو مستطيل أحد بعديه يساوي ارتفاع الأسطوانة.

المخروط



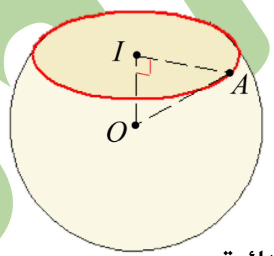
- مقطع مخروط دوراني بمستوٍ يوازي قاعدته هو دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة.

الهرم



- مقطع هرم بمستوٍ يوازي قاعدته هو تصغير عن القاعدة.
- اضلاع المقطع توازي مقابلاتها في القاعدة.

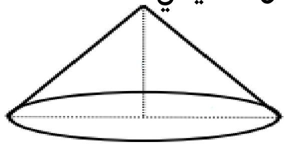
الكرة



- مقطع كرة بمستوٍ هو دائرة.
- مقطع مجسم كروي بمستوٍ هو قرص دائري.
- عندما يمر لمستوي القاطع بمركز الكرة فالمقطع هو دائرة كبرى.
- عندما يمس المستوي الكرة يكون المقطع هو نقطة التماس.

سؤال 2019: تأمل الشكل المجاور مخروط دوراني ارتفاعه $h = 2\ cm$ ونصف قطر قاعدته $r = 3\ cm$

ثم ضع في ورقة إجابتك كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة غلط أمام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:



1. مساحة القاعدة $S = 6\pi\ cm^2$.
2. حجم المخروط $V = 6\pi\ cm^3$.
3. مقطع المخروط الدوراني بمستوٍ يوازي قاعدته هو دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة.
4. إذا تغير الارتفاع وأصبح $h = 1\ cm$ فإن حجم المخروط الجديد يساوي نصف حجم المخروط الأصلي.

سؤال 2021: ضع في ورقة إجابتك كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وكلمة غلط أمام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:

1. مقطع متوازي مستطيلات بمستوٍ يوازي أحد الأوجه هو مستطيل يطابق ذلك الوجه.
2. مقطع متوازي مستطيلات بمستوٍ يوازي أحد أحرفه هو مستطيل أحد بعديه يساوي ذلك الحرف.
3. مقطع الهرم بمستوٍ يوازي قاعدته هو تصغير القاعدة.
4. مساحة دائرة نصف قطرها $3\ cm$ يساوي $6\pi\ cm^2$.

أحبابي الى هنا نكون قد انتهينا من مراجعة أفكار مادة الهندسة الأساسية على أمل أنكم في نهاية هذه الجلسة قد أصبحت هذه الأفكار حاضرة في ذهنكم وها أنتم مستعدون لدخول قاعة الامتحان والكتابة بأعلى المستويات
أسأل الله لكم التوفيق.

انت قادر انت تستطيع انت رائع انت متميز وانا احبك جداً وأفتخر بك جداً وانتظر نجاحك بفارغ الصبر

مخطط الهندسة

- الوحدة
  - الاولى
    - التناسب
    - النسب المثلثية
    - علاقات شهيرة في النسب المثلثية
    - نسب الزوايا الشهيرة
  - الثانية
    - مبرهنة النسب الثلاث
    - عكس مبرهنة النسب الثلاث
    - التشابه
  - الثالثة
    - الزوايا في الدائرة
    - الرباعي الدائري
    - المضلعات المنتظمة
  - الرابعة
    - المجسمات
    - الكرة
    - مقاطع المجسمات

انت قادر انت تستطيع انت رائع انت متميز وانا احبک جداً وأفتخر بک جداً وانتظر نجاحک بفارغ الصبر