السؤال الأول:

نتأمل جدول تغيرات التابع f المعرف والمستمر على $\mathbb{R}$ وخطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

1- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2- اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني.
3- هل $f(2) = 4$ قيمة حدية محلياً؟
4- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$.

الحل:

1- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \, , \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

2- المقاربات:

$$y = 3$$

3- لا، ليست قيمة حدية.
4- حلان.

السؤال الثاني:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ خطه البياني C:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

1- جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2- اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C.
3- دل على القيمة حدية الصغرى للتابع f.
4- احسب $f(]-1,2[)$.

الحل:

1- لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \, , \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

2- لدينا:

$$y = 3$$

3- لدينا:

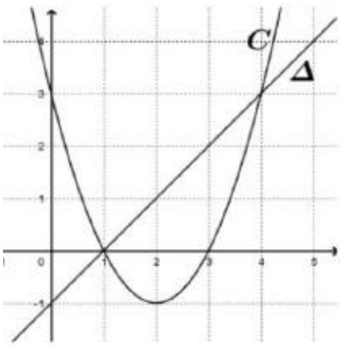
$$f(-1) = -2$$

4- إن صورة المجال:

$$f(]-1,2[) =]-2,4[$$

السؤال الثالث:

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$:



1- دل على القيم الحدية وبين نوعها.
2- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3- ماهي حلول المعادلة $f(x) = y_{\Delta}$.
4- اكتب معادلة Δ.
5- جد حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$.
6- ناقش حسب قيم m حلول المعادلة $f(x) = m$.

الحل:

1- لدينا:

$$f(2) = -1 \text{ قيمة حدية صغرى}$$

2- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3- الحلول هي:

$$x_1 = 1 \, , x_2 = 4$$

4- نوجد نقطتان يمر منها Δ:

$$A(1,0), B(2,1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{2-1} = 1$$

نعوض في القانون:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = 1(x - 1)$$

$$y_\Delta = x - 1$$

5- حلول المتراجحة هي:

$$x \in [1,3]$$

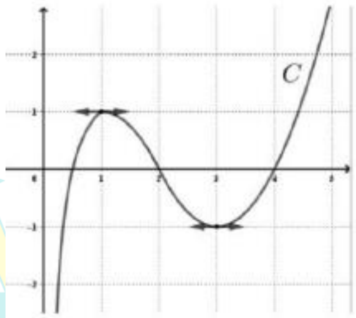
6- لمناقشة الحلول:

$$f(x) = m \begin{cases} m \in]-\infty, -1[& \text{لا يوجد حلول} \\ m = -1 & \text{حل وحيد} \\ m \in]-1, +\infty[& \text{حلان} \end{cases}$$

السؤال الرابع:

ليكن c الخط البياني للتابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$:

1- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.
2- دل على القيم الحدية مبيناً نوعها.
3- جد حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$.
4- جد $f([1,3])$.
5- اكتب معادلة كل مماس افقي للتابع.



الحل:

1- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \, , \, \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

2- لدينا:

$f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى

$f(3) = -1$ قيمة حدية صغرى

3- مجموعة الحلول هي:

$$x \in [1,3]$$

4- صورة المجال هي:

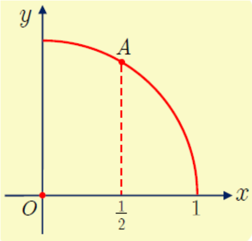
$$f([1,3]) = [-1,1]$$

5- لدينا:

$$y_1 = 1 \, , y_2 = -1$$

السؤال الخامس: في معلمٍ متجانس. لدينا الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ التي مركزها المبدأ ونصف قطرها 1 وعليه يكون ربع الدائرة المرسوم في الشكل المجاور هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق:

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ والمطلوب:



1- احسب $f'(x)$ على المجال $[0,1]$
2- استنتج معادلة المماس للخط C_f في نقطة منه A التي فاصلتها $\frac{1}{2}$
3- تحقق أن المستقيم (OA) والمماس السابق متعامدان.

الحل:

1- لدينا f اشتقاقي على المجال $]0,1[$:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

2- معادلة المماس عن $x = \frac{1}{2}$:

$$y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y = \frac{-2\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

نلاحظ أن $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

3- سنوجد ميل المستقيم OA :
نوجد تراتيب النقطة A حيث أن:

$$y_A = f(x_A) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ميله:

$$m' = \frac{y_A - 0}{x_A - 0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

شرط التعامد: $m.m' = -1$: نتحقق:

$$m.m' = \frac{-1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3} = -1$$

محققة.

السؤال السادس:

تتأمل جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $I = [1,4]$ وفق:

$$f(x) = ax + b + clnx$$

1- أثبت أن f اشتقاقي على I ثم احسب $f'(x)$
2- بالاستفادة من المعلومات الظاهرة في الشكل احسب a, b, c
3- احسب مساحة السطح المحصور بين c_f والمستقيمين $x = 1, x = 3$

الحل:

1- f معرف واشتقاقي بشرط $x > 0$ أي على المجال $]0, +\infty[$ وبالتالي f اشتقاقي على $I = [1,4]$.

2- لدينا:

$$f(1) = 1 \,, f'(2) = 0 \,, f(2) = 3 - 4\ln 2$$

نعوض:

$$f(1) = a + b$$

$$a + b = 1$$

$$f(2) = 2a + b + c\ln 2$$

$$2a + b + cln(2) = 3 - 4\ln 2$$

نوجد المشتق:

$$f'(x) = a + \frac{c}{x}$$

نعوض:

$$f'(2) = a + \frac{1}{2}c$$

$$a + \frac{1}{2}c = 0$$

نضرب بـ 2:

$$2a + c = 0$$

لدينا ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل:

$$a + b = 1$$

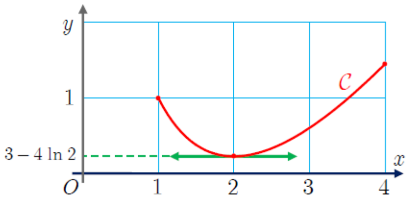
$$2a + c = 0$$

$$2a + b + cln(2) = 3 - 4\ln(2)$$

نجمع المعادلة الأولى والثانية:

$$3a + b + c = 1$$

$$2a + b + cln(2) = 3 - 4\ln(2)$$



نطرح:

$$a + c(1 - \ln(2)) = 4\ln(2) - 2$$

من المعادلة الثانية نجد:

$$2a = -c$$

$$a = -\frac{1}{2}c$$

نعوض:

$$-\frac{1}{2}c + c(1 - \ln(2)) = 4\ln(2) - 2$$

$$c\left(-\frac{1}{2} + 1 - \ln(2)\right) = 4\ln(2) - 2$$

$$c\left(\frac{1}{2} - \ln(2)\right) = 4\ln(2) - 2$$

$$c = \frac{4\ln(2) - 2}{\frac{1}{2} - \ln(2)} = \frac{-4\left(\frac{1}{2} - \ln(2)\right)}{\frac{1}{2} - \ln(2)} = -4$$

نعوض:

$$a = -\frac{1}{2}c = -\frac{1}{2}(-4) = 2$$

نعوض في المعادلة الأولى:

$$a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a = 1 - 2 = -1$$

فيكون:

$$a = 2\,, b = -1\,, c = -4$$

نعوض:

$$f(x) = 2x - 1 - 4\ln x$$

3- لحساب المساحة:

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (2x - 1 - 4\ln x)dx$$

$$= \left[\frac{2x^2}{2} - x\right]_1^3 - 4\int_1^3 \ln x\, dx$$

لدينا:

$$\int_1^3 \ln x\, dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow [xln(x)]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x}.xdx$$

$$= 3\ln 3 - [x]_1^3 = 3\ln 3 - 3 + 1$$

$$= 3\ln 3 - 2$$

نعوض في التكامل الأصلي:

$$[x^2 - x]_1^3 - 4(3\ln 3 - 2)$$

$$= 6 - 12\ln 3 + 8 = 14 - 12\ln 3$$

السؤال السابع:

ليكن g التابع المعرف على $]e^3, +\infty[$ وفق $g(x) = \frac{lnx-1}{lnx-3}$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} g\big(g(x)\big)$

2- جد عدداً حقيقياً A يحقق أن $g(x) \in]0.99,1.01[$ عندما $x > A$

الحل:

1- حالة عدم تعيين $\frac{+\infty}{+\infty}$: نخرج lnx عامل مشترك:

$$g(x) = \frac{lnx\left(1 - \frac{1}{lnx}\right)}{lnx\left(1 - \frac{3}{lnx}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{lnx}}{1 - \frac{3}{lnx}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

ثم لحساب $\lim_{x\to+\infty} g\big(g(x)\big)$: نستبدل المضمون بـ t ونجعل $t \to 1$:

$$\lim_{t\to1} g(t) = \lim_{t\to1} \frac{lnt - 1}{lnt - 3} = \frac{\ln(1) - 1}{\ln(1) - 3} = \frac{1}{3}$$

2- المجال $]0.99,1.01[$:

نوجد المركز $l = \frac{b+a}{2} = \frac{1.01+0.99}{2} = 1$

نوجد نصف القطر $r = b - l = 1.01 - 1 = 0.01 = \frac{1}{100}$

نعوض في القانون:

$$|g(x) - l| < r$$

$$\left|\frac{lnx - 1}{lnx - 3} - 1\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{2}{lnx - 3}\right| < \frac{1}{100}$$

و لما كانت $x \to +\infty$ كان:

$$\frac{2}{lnx - 3} < \frac{1}{100}$$

نقلب:

$$\frac{lnx - 3}{2} > 100$$

$$lnx - 3 > 200$$

$$lnx > 203$$

$$x > e^{203}$$

فنختار $A = e^{203}$ أو أي عدد أكبر منها.

السؤال الثامن: ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 5}$:

1- اكتب $4x^2 + 4x + 5$ بالصيغة القانونية

2- نضع $h(x) = f(x) - \sqrt{(2x+1)^2}$, احسب $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)$

3- استنتج معادلتي المقاربين المائلين للخط C_f

4- ادرس الوضع النسبي للخط C_f مع هذين المقاربين

> **ملاحظة:** قد يتم تعديل السؤال إلى صيغة (أثبت أن $d: y = 2x + 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي لهما)

الحل:

1- لدينا:

$$4\left(x^2 + x + \frac{5}{4}\right)$$

$$= 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right)$$

$$= 4\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)$$

$$= (2x+1)^2 + 4$$

2- لدينا:

$$f(x) - \sqrt{(2x+1)^2}$$

$$= \sqrt{(2x+1)^2+4} - \sqrt{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{(2x+1)^2+4} - \sqrt{(2x+1)^2}\right)\left(\sqrt{(2x+1)^2+4} + \sqrt{(2x+1)^2}\right)}{\sqrt{(2x+1)^2+4} + \sqrt{(2x+1)^2}}$$

$$= \frac{(2x+1)^2 + 4 - (2x+1)^2}{\sqrt{(2x+1)^2+4} + \sqrt{(2x+1)^2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{(2x+1)^2+4} + \sqrt{(2x+1)^2}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \sqrt{(2x+1)^2} = 0$$

3- لدينا:

$$y_\Delta = |2x+1|$$

في جوار $+\infty$:

$$y_{d_1} = 2x+1$$

في جوار $-\infty$:

$$y_{d_2} = -2x-1$$

4- لدينا:

لدراسة الوضع النسبي نجد:

$$f(x) - y_\Delta$$

$$= \frac{4}{\sqrt{(2x+1)^2+4} + \sqrt{(2x+1)^2}} > 0$$

C فوق d_1 و d_2.

السؤال التاسع:

نعرف التابع f على المجال $I =]\frac{1}{3}, 2]$ وفق: $f(x) = \frac{(x-1)E(x)}{x}$

1- اكتب f بعبارة مستقلة عن E(x)
2- ادرس استمرار f على I
3- احسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

الحل:

1- لدينا:

$$f(x) = \begin{cases} 0\,;\, x \in [\frac{1}{3}, 1[\\ \frac{(x-1)}{x}\,;\, x \in [1,2[\\ 1\,;\, x = 2 \end{cases}$$

2- سندرس الاستمرار عند نقاط انقطاع التابع:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 \,,\, f(1) = 0$$

مستمر عند $x = 1$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2} \,,\, f(2) = 1$$

غير مستمر عند $x = 2$ وبالتالي التابع غير مستمر على I.

3- لدينا:

$$x - 1 < E(x) \le x$$

نضرب بـ $(x-1) > 0$ في جوار $+\infty$:

$$(x-1)^2 < (x-1)E(x) \le x(x-1)$$

نقسم على $x^2 > 0$ في جوار $+\infty$:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} < \frac{(x-1)E(x)}{x^2} \le \frac{x^2 - x}{x^2}$$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{x^2} = 1$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

السؤال العاشر:

ليكن f التابع المعرف على $]1, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{1}{1-x}$

1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$
2- تحقق أن المشتق من المرتبة n للتابع f يعطى بالصيغة $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

الحل:

1- f اشتقاقي على $]1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{0 - (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{-3(1-x)^2(-1)}{(1-x)^6}=\frac{3}{(1-x)^4}$$

2- لدينا القضية:

$$E(n): f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$f(x)=\frac{0!}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$ …… الفرض

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$ …… الطلب

البرهان: لدينا من الفرض:

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

نشتق الطرفين:

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{-(n+1)(1-x)^n(-1).n!}{(1-x)^{2n}}$$

$$=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{2n+2}.(1-x)^{-n}}$$

$$=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{2n+2-n}}=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

وهو المطلوب.

السؤال الحادي عشر:

حل في R المعادلة

$$\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\ln(\sqrt{x+1})$$

الحل:

شروط الحل:

$$E_1=]0,+\infty[\ ,E_2=]-\infty,3[\ ,E_3=]-1,+\infty[$$

$$\Rightarrow E=]0,3[$$

لدينا:

$$\ln(\sqrt{2x})=\ln\left(\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}\right)$$

$$\sqrt{2x}=\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$$

$$\sqrt{2x(x+1)}=3-x$$

نضع شرط: $S:]-\infty,3]$ ثم نربع الطرفين:

$$2x^2+2x=(3-x)^2$$

$$2x^2+2x=9-6x+x^2$$

$$x^2+8x-9=0$$

$$(x+9)(x-1)=0$$

إما:

$x=-9$ مرفوض

أو:

$x=1$ مقبول

السؤال الثاني عشر: كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2-2x+\ln(m+1)=0$ جذران مختلفان؟

الحل:

أولاً: شرط الحل:

$$m+1>0$$
$$m>-1$$
$$m\in]-1,+\infty[$$

ثانياً: يكون للمعادلة جذران مختلفان إذا وفقط إذا:

$$\Delta>0$$
$$b^2-4ac>0$$
$$4-4\ln(m+1)>0$$
$$4>4\ln(m+1)$$
$$1>\ln(m+1)$$
$$e>m+1$$
$$e-1>m$$
$$m\in]-\infty,e-1[$$

ثالثاً: للحصول على القيم المقبولة نقاطع مجال الحلول مع شرط الحل فنجد أن:

$$m \in]-1, e-1[$$

السؤال الثالث عشر:

ليكن $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

1- تحقق أن $P(-1) = 0$
2- استنتج أنه يوجد كثير حدود من الدرجة الثانية $Q(x)$ بحيث $P(x) = (x+1)Q(x)$
3- حل المتراجحة $P(x) \leq 0$
4- استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة $2\ln(x) + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$

<u>الحل:</u>

1- لدينا:

$$P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 - 1 - 2$$
$$= -2 + 5 - 1 - 2 = 0$$

2- نقسم على $x+1$ قسمة اقليدية فنجد:

$$P(x) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2)$$

3- لحل المتراجحة: نعدم $P(x)$:

إما $x = -1$

أو $2x^2 + 3x - 2 = 0$:

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

للمعادلة حلان مختلفان:

$$x = \frac{-3-5}{4} = -2 \quad , \quad x = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

ننظم جدولاً:

x	$-\infty \qquad -2 \qquad -1 \qquad \frac{1}{2} \qquad +\infty$
$x+1$	$- - - - - - - - - - \; 0 \; + + + + + + + + + + +$
$2x^2+3x-2$	$+ + + + + \; 0 \quad - - \quad - - - - - - \; 0 \; + + + + + +$
$P(x)$	$- - - - - - - - - 0 + + + + + + 0 - - - - - - - - 0 + + + + + + + + +$
≤ 0	مقبول مرفوض مقبول مرفوض

فحلول المتراجحة المطلوبة:

$$S =]-\infty, -2] \cup [-1, \frac{1}{2}]$$

4- إن المتراجحة $2\ln(x) + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$ لها الشروط:

$$x > 0 \quad , \quad 2x+5 > 0 \quad , \quad 2-x > 0$$
$$x > 0 \quad , \quad x > \frac{-5}{2} \quad , \quad 2 > x$$

$$E_1 =]0, +\infty[\, , E_2 =]-\frac{5}{2}, +\infty[\, , E_3 =]-\infty, 2[$$

نقاطع الشروط : $E =]0,2[$

والمتراجحة تكافئ:

$$\ln(x^2) + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$$
$$\ln\left(x^2(2x+5)\right) \leq \ln(2-x)$$
$$\ln(2x^3 + 5x^2) \leq \ln(2-x)$$
$$2x^3 + 5x^2 \leq 2 - x$$
$$2x^3 + 5x^2 + x - 2 \leq 0$$
$$P(x) \leq 0$$

فيكون حل المتراجحة المطلوب هو:

$$S \cap E =]0, \frac{1}{2}]$$

السؤال الرابع عشر:

ليكن C_f و C_g الخطين البيانين للتابعين f و g على الترتيب المعرفين على $I =]-1, +\infty[$

$$f(x) = \ln(x+1) \quad , \quad g(x) = \frac{x}{x+1}$$

1- أثبت أن $g(x) \leq f(x)$ واستنتج الوضع النسبي للخط C_f بالنسبة للخط C_g
2- تحقق أن C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في المبدأ ثم اكتب معادلته

<u>الحل:</u>

1- لدينا:

$$g(x) \leq f(x)$$

$$f(x) - g(x) \geq 0$$

نعرف $h(x) = f(x) - g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$
وندرس إطراده:

h اشتقاقي على $]-1, +\infty[$:

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

نعدم المشتق:

$$h'(x) = 0$$

$$\frac{x}{(x+1)^2}=0$$

$$x=0$$

$$h(0)=0$$

ننظم جدول:

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	$\Vert$	$-----$	0	$+++++$	
$h(x)$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$h(x)\geq 0$$

$$f(x)-g(x)\geq 0$$

$$f(x)\geq g(x)$$

C_f فوق C_g.

-2 يجب أن يتحقق الشرط:

$$f(0)=g(0), f'(0)=g'(0)$$

نختبر الشرط:

$$f(0)=\ln(1)=0\,,g(0)=0$$

$$f'(0)=\frac{1}{1}=1\,,g'(0)=\frac{1}{1^2}=1$$

وبالتالي يقبلان مماساً مشتركاً عند النقطة $O(0,0)$ المبدأ ومعادلته:

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)=1(x-0)+0=x$$

$$y_T=x$$

السؤال الخامس عشر: اشرح لماذا تتفق إشارة المقدار $e^x-\frac{4}{e^x}$ مع إشارة e^x-2 ؟ ثم حل المتراجحة

$$e^x-\frac{4}{e^x}<0$$

الحل: لدينا:

$e^x-\frac{4}{e^x}=\frac{e^{2x}-4}{e^x}=\frac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^x}$ وبملاحظة أن $\frac{e^x+2}{e^x}>0$ فإن الإشارة من إشارة e^x-2

وبالتالي بدلاً من حل المتراجحة $e^x-\frac{4}{e^x}<0$ نحل المتراجحة $e^x-2<0$

$$e^x<2$$
$$x<ln2$$

$$S=]-\infty,ln2[$$

السؤال السادس عشر:

احسب كلاً من النهايات الآتية:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x-lnx \quad , \quad \lim_{x\to1}(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\,.2^{-x}\,,\ \lim_{x\to0^+} xln^2(x)\ ,\ \lim_{x\to+\infty} xln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

الحل:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-lnx=$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-\frac{lnx}{x}\right)=+\infty(+\infty-0)=+\infty$$

2) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$

حالة عدم تعيين من الشكل 1^∞ :

$$f(x)=(2-x)^{\frac{1}{x-1}}=(1+1-x)^{\frac{1}{x-1}}$$

نفرض $t=1-x$

نغير جهة السعي $x\to1$ بالتالي $t\to0$

نعزل x : $x=1-t$

نحسب الأس: $\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-1+t}=\frac{1}{t}$

نعوض:

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x.2^{-x})$

حالة عدم تعيين من الشكل $0.\infty$:

$$f(x)=x\,e^{\ln(2^{-x})}=x\,.e^{(-ln2)x}=\frac{x}{e^{(ln2)x}}$$

$$=\frac{1}{ln2}\frac{xln2}{e^{(ln2)x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{ln2}(0)=0$$

لأن $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} xln^2(x)$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}lnx\right)^2=\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}^2\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)=0$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} xln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

$$xln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = xln\left(1+\frac{x+1}{x+2}-1\right)$$

$$= xln\left(1+\frac{x+1-x-2}{x+2}\right)$$

$$= \text{xln}\left(1+\frac{-1}{x+2}\right)$$

نفرض $t = \frac{-1}{x+2}$ فيكون:

$$x+2 = -\frac{1}{t} \Rightarrow x = -\frac{1}{t} - 2$$

نغير جهة السعي:

$$(x \to +\infty) \Rightarrow (t \to 0)$$

نعوض:

$$\left(-\frac{1}{t}+2\right)\ln(1+t)$$

$$= -\frac{\ln(1+t)}{t} + 2\ln(1+t)$$

$$\lim_{t\to 0}\left(-\frac{\ln(1+t)}{t} + 2\ln(1+t)\right)$$

$$= -1 + 0 = -1$$

السؤال السابع عشر:

حل المعادلة $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$ ثم استنتج حلول المتراجحة $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$

الحل:

$$4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$$
$$2^{2x} + 2\, 2^x - 3 = 0$$
$$t^2 + 2t - 3 = 0 \quad : t = 2^x$$
$$(t+3)(t-1) = 0$$
$t = -3 \Longrightarrow 2^x = -3$ مستحيلة
$$t = 1 \Longrightarrow 2^x = 1 \Longrightarrow \boxed{x = 0}$$

حلول المتراجحة:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$4^x + 2^{x+1} - 3$	$- - - - - - - - -$	0	$+ + + + + + +$
≤ 0	مقبول		مرفوض

$$S =]-\infty, 0]$$

السؤال الثامن عشر: جد حل المعادلة التفاضلية $y' - 3y = 1$ والذي يمر خطه البياني من النقطة $A(ln2,1)$

الحل: نعزل y'

$$y' = 3y + 1$$

هي من الشكل: $y' = ay + b$ حيث $a = 3 \quad , \ b = 1$

ويكون عندئذٍ الحل العام من الشكل:

$$y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$y = ke^{3x} - \frac{1}{3} = f(x)$$

الآن: سنعين قيمة k المحققة للشرط (الخط البياني للحل يمر من النقطة $A(ln2,1)$) أي أن:

$$f(\ln 2) = 1$$

$$ke^{3ln2} - \frac{1}{3} = 1$$
$$k\, e^{ln8} = \frac{4}{3}$$
$$8k = \frac{4}{3}$$
$$k = \frac{1}{6}$$

فالحل المطلوب: $y = \frac{1}{6}e^{3x} - \frac{1}{3}$

السؤال التاسع عشر:

ليكن لدينا $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

1- أثبت أن f متزايد على R
2- استنتج أنه تقابل
3- عين تقابله العكسي

الحل:

1- لدينا f اشتقاقي على R :

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$$

فالتابع f متزايد تماماً على R

2- بما أن f متزايد ومستمر على R فهو تقابل على R
3- لتعيين التقابل العكسي:

- نضع $f(x) = y$

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = y$$

نعزل x :

نضرب الطرفين بـ 2 :

$$e^x + e^{-x} = 2y$$

نضرب الطرفين بـ e^x :

$$e^{2x}+1=2ye^x$$
$$e^{2x}-2ye^x-1=0$$
$$t^2-2y\,t+1=0 \quad : t=e^x$$
$$a=1 \;\; ,b=-2y \;\; ,c=-1$$

$$\Delta=4y^2+4=4(y^2+1)>0$$

للمعادلة حلان:

$$t_1=\frac{2y-2\sqrt{y^2+1}}{2}=y-\sqrt{y^2+1}$$

مرفوض

$$t_2=\frac{2y+2\sqrt{y^2+1}}{2}=y+\sqrt{y^2+1}$$

مقبول

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$$
$$x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

نبدل كل x بـ y :

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

فالتقابل العكسي $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

ويكون C_f و C_g متناظران بالنسبة للمستقيم $y=x$

مثال مشابه:

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$I=[0,+\infty[$$

السؤال العشرون:

ليكن $f(x)=e^x+e^{-x}$ ، عين الثابت k إذا علمت ان f هو حل للمعادلة التفاضلية:

$$(y')^2=y^2-k$$

<u>**الحل:**</u> لدينا $y=e^x+e^{-x}$

وبالتالي $y'=e^x-e^{-x}$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$(e^x-e^{-x})^2=(e^x+e^{-x})^2-k$$
$$e^{2x}-2+e^{-2x}=e^{2x}+2+e^{-2x}-k$$
$$\boxed{k=4}$$

السؤال الواحد والعشرون:

جد تابعاً أصلياً للتابع الآتي:

$$f(x)=\frac{-x-11}{x^2+x-2}:\left]-\infty,-2\right[$$

<u>**الحل:**</u> نحلل المقام:

$$f(x)=\frac{-x-11}{(x+2)(x-1)}$$

نفرق الكسر إلى مجموع كسور جزئية:

$$\frac{-x-11}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

نوحد المقامات ونحذفها:

$$-x-11=A(x-1)+B(x+2)$$

نفرض $x=1$:

$$-12=3B \Longrightarrow B=-4$$

نفرض $x=-2$:

$$-9=-3A \Longrightarrow A=3$$

إذن f يكتب بالشكل:

$$f(x)=\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x-1}$$

ويكون عندئذٍ التابع الأصلي:

$$F(x)=3\ln|x+2|-4\ln|x-1|$$

السؤال الاثنين والعشرون:

ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=\frac{x+2}{|x|+1}$. ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر:

<u>**الحل:**</u> نشكل التابع:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x+2}{|x|+1}-2}{x}$$

$$=\frac{\frac{x+2-2|x|-2}{|x|+1}}{x}=\frac{x-2|x|}{x(|x|+1)}$$

الآن بسبب وجود قيمة مطلقة: سنميز حالتين:

أ- الحالة الأولى $x > 0$: $(x \to 0^+)$:

$$g(x) = \frac{x-2x}{x(x+1)} = \frac{-x}{x(x+1)} = -\frac{1}{x+1}$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -1$$

إذن f قابل للاشتقاق عن الصفر **من اليمين** و

$$f'(0^+) = -1$$

ب- الحالة الثانية $x < 0$: $(x \to 0^-)$:

$$g(x) = \frac{x+2x}{x(-x+1)} = \frac{3x}{x(-x+1)} = \frac{3}{-x+1}$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 3$$

إذن f قابل للاشتقاق عن الصفر **من اليسار** و

$$f'(0^-) = 3$$

الآن بما أن $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ فإن f غير قابل للاشتقاق عند الصفر

السؤال الثالث والعشرون:

احسب النهاية $\lim_{x\to e} \frac{lnx-1}{x-e}$ ثم ادرس استمرار التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{lnx-1}{x-e} & : x \neq e \\ \dfrac{1}{e} & : x = e \end{cases}$$

عند $x = e$

<u>الحل:</u>

نعرف التابع g وفق: $g(x) = lnx - 1$. إن g اشتقاقي على $]0,+\infty[$ و:

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(e) = lne - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$g'(e) = \frac{1}{e}$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to e} \frac{g(x)-g(e)}{x-e} = g'(e)$$

$$\lim_{x\to e} \frac{lnx-1}{x-e} = \frac{1}{e}$$

الآن: بما أن $\lim_{x\to e} f(x) = \lim_{x\to e} \frac{lnx-1}{x-e} = \frac{1}{e} = f(e)$ فلتابع f مستمر عند $x = e$

السؤال الرابع والعشرون:

احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_{-1}^{3} (4 - |x^2 - 4|)\, dx$$

<u>الحل:</u> لنتخلص من القيمة المطلقة:

$$x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \mp 2$$

ننظم جدول إشارة:

x	$-\infty$	-2	-1	2	3	$+\infty$
x^2-4	++++++++	0	-------	0	++++++	
$\lvert x^2-4\rvert$	x^2-4	0	$-x^2+4$	0	x^2-4	

وبما أن حدود التكامل من -1 إلى 3 فنجزئ المجال:

$$I = \int_{-1}^{2} (4 - (-x^2+4))dx + \int_{2}^{3} (4 - (x^2-4))\, dx$$

$$I = \int_{-1}^{2} x^2 dx + \int_{2}^{3} (8 - x^2) dx$$

$$I = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} + \left[8x - \frac{x^3}{3}\right]_{2}^{3}$$

$$I = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left((24-9) - \left(16 - \frac{8}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{7}{3} + 13 - 16 + \frac{8}{3} = 5 + 13 - 16 = 2$$

السؤال الخامس والعشرون:

ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = ax + blnx$$

1- عين العددين a, b إذا علمت أن الخط البياني للتابع f يقبل مماساً أفقياً في النقطة منه $A(1,1)$

2- بفرض $a = 1 , b = -1$ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

3- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 2$ جذران مختلفان

<u>الحل:</u>

1- أولاً لدينا النقطة $A(1,1)$ تنتمي للخط البياني إذن:

$$f(1) = 1$$

$$a(1) + bln(1) = 1$$

$$a + b(0) = 1$$

$$\boxed{a = 1}$$

ثانياً بما أن المماس عند A أفقي: هذا يعني أن الميل عند $x = 1$ معدوم أي: $f'(1) = 0$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = a + b\frac{1}{x}$$

$$f'(1) = a + b \Longrightarrow a + b = 0 \Longrightarrow \boxed{b = -1}$$

2- الآن لدينا:

$$f(x) = x - lnx$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{lnx}{x}\right) = +\infty(1-0) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع يمين مقاربه

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$f(1) = 1$$

3- من الجدول نلاحظ أنّ:

- f مستمر ومتزايد على المجال $]1, +\infty[$ و $2 \in$
$f(]1, +\infty[) =]1, +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

فللمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد
المجال $]1, +\infty[$

- f مستمر ومتناقص على المجال $]0,1[$ و $2 \in$
$f(]0,1[) =]1, +\infty[$
فللمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد على المجال $]0,1[$

إذن للمعادلة جذرين مختلفين

السؤال السادس والعشرون:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

أثبت أن $\Delta: y = x + 1$ مقارب مائل عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي

<u>الحل:</u>

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} - 1 = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$$

بما أن $x \to +\infty$: فإن $|x| = x$:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = 1 - 1 = 0$$

- دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

نعدم:

$$x - \sqrt{x^2+1} = 0$$
$$x = \sqrt{x^2+1}$$

نربع بشرط $x > 0$:

$$x^2 = x^2 + 1$$
$$0 = 1$$

مستحيلة

x	$-\infty$	$+\infty$
$\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$	$-$	
الوضع النسبي	c تحت Δ	

السؤال السابع والعشرون:

اكتب cos^3x بدلالة عبارة خطية للنسب المثلثية لمضاعفات x ثم احسب

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3x\, dx$$

<u>الحل:</u>

$$cos^3x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(2cos3x + 3(2cosx)\right)$$

$$= \frac{1}{4}(cos3x + 3cosx)$$

حساب التكامل:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(cos3x + 3cosx)\,dx$$

$$I = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}sin3x + 3sinx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{3} + 3 - 0\right) = \frac{1}{4}\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

السؤال الثامن والعشرون:

ليكن لدينا المقدارين:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{cosx}{sinx + cosx} dx$$

$$J = \int_0^{\pi} \frac{sinx}{sinx + cosx} dx$$

1- احسب قيمة كلٍ من $I + J, I - J$

2- استنتج قيمة كلٍ من I و J

الحل: أولاً حساب $I + J$

$$I + J = \int_0^{\pi} \frac{cosx + sinx}{sinx + cosx} dx = \int_0^{\pi} 1\, dx$$

$$= [x]_0^{\pi} = \pi - 0 = \pi$$

ثانياً: حساب $I - J$:

$$I - J = \int_0^{\pi} \frac{cosx - sinx}{sinx + cosx} dx$$

نلاحظ أن البسط مشتقٌ للمقام:

$$I - J = [\ln|sinx + cosx|]_0^{\pi}$$

$$I - J = 0 - 0 = 0$$

2-لاستنتاج كلٍ من I, J :

$$I + J = \pi$$

$$I - J = 0$$

بجمع المعادلتين:

$$2I = \pi$$

$$I = \frac{\pi}{2}$$

نعوض في الثانية فنجد أن $J = \frac{\pi}{2}$

السؤال التاسع والعشرون:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + 3u_n}{3 + u_n} \end{cases}$$

1- أثبت أن التابع $f(x) = \frac{1+3x}{3+x}$ متزايد تماماً على R^+

2- استنتج أن $0 \le u_n < 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

3- ادرس اطراد u_n واستنتج أنها متقاربة وعين نهايتها

الحل:

1- التابع f اشتقاقي على $R^+ = [0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{3(3 + x) - (1 + 3x)}{(3 + x)^2}$$

$$= \frac{8}{(3 + x)^2} > 0$$

فالتابع f متزايد على $[0, +\infty[$

2- نعرف القضية $E(n): 0 \le u_n < 1$:

- نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$0 \le u_0 < 1$$

$$0 \le 0 < 1$$

صحيحة

- نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

الفرض..... $0 \le u_n < 1$

- نثبت صحة الخاصة $E(n + 1)$:

الطلب.... $0 \le u_{n+1} < 1$

- البرهان: لدينا من الفرض:

$$0 \le u_n < 1$$

ولمّا كان f متزايد على R^+ : نصور الأطراف:

$$f(0) \le f(u_n) < f(1)$$

$$0 < \frac{1}{3} \le u_{n+1} < 1$$

$$0 \le u_{n+1} < 1$$

3- لتخمين جهة الاطراد نحسب بعض الحدود الأولى:

$$u_0 = 0$$

$$u_1 = \frac{1 + 3u_0}{3 + u_0} = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{1 + 3u_1}{3 + u_1} = \frac{1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

بملاحظة أن $u_0 < u_1 < u_2$ فنتوقع أنها متزايدة

نفرض القضية $E(n): u_{n+1} \ge u_n$

- نثبت صحة القضية $E(0)$: $u_1 \ge u_0$

$$\frac{1}{3} \ge 0$$

محققة

- نفرض صحة القضية $E(n)$: $u_{n+1} \ge u_n$ ....(الفرض)

- نثبت صحة الخاصة $E(n + 1)$:

$u_{n+1} \ge u_n$ ....(الطلب)

البرهان:

لدينا من الفرض $u_{n+1} \ge u_n$ و لما كان f متزايد على R^+ ، نصور أطراف المتراجحة:

$$f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$$

$$u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

فالقضية صحيحة مهما يكن العدد الطبيعي n والمتتالية متزايدة

- بما أنها متزايدة ومحدود من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة
- لحساب النهاية: نبحث عن حل المعادلة $f(x) = x$

$$\frac{1+3x}{3+x} = x$$

$$1 + 3x = 3x + x^2$$

$$x^2 = 1 \quad \Longrightarrow x = 1$$

$x = -1$ مرفوض

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

السؤال الثلاثون:

ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = 4^n + 5$:

1- أثبت بالتدريج u_n مضاعف للعدد 3 مهما يكن $n \geq 0$
2- أثبت أن $u_{n+1} - u_n = 3 \times 4^n$ واستنتج جهة اطراد u_n
3- احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

الحل:

1- نعرف القضية:

$$E(n): 4^n + 5 = 3k$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$4^0 + 5 = 6$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ...... $4^n + 5 = 3k$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ...... $4^{n+1} + 5 = 3m$

البرهان: لجينا من الفرض:

$$4^n + 5 = 3k$$

نضرب الطرفين بـ 4:

$$4^{n+1} + 20 = 15k$$

$$4^{n+1} + 5 + 15 = 15k$$

$$4^{n+1} + 5 = 15k - 15$$

$$4^{n+1} + 5 = 3\underbrace{(5k-5)}_{m}$$

$$4^{n+1} + 5 = 3m$$

فالقضية صحيحة.

2- نشكل u_{n+1}:

$$u_{n+1} = 4^{n+1} + 5 = 4.4^n + 5$$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = 4.4^n + 5 - 4^n - 5$$

$$= 3 \times 4^n > 0$$

فالمتتالية متزايدة.

3- لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} 4^n + 5 = +\infty$$

لأن $q = 4 > 1$.

السؤال الاثنان والثلاثون:

ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$ ثم نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \;,\; u_0 = 2cos\theta$$

1- احسب u_1, u_2
2- أثبت بالتدريج أن $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

مساعدة تذكر أن $1 + cos2\theta = 2\cos^2\theta$

الحل

$$u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2 + 2cos\theta}$$

$$= \sqrt{2(1 + cos\theta)}$$

$$= \sqrt{2\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{2\left(2\cos^2\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{2}\right)\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

نعرف القضية :

$$E(n): \ll u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \gg$$

✌نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$$u_0 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) = 2cos\theta$$

✌نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \ldots.(\text{الفرض})$$

✌نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي :

$$u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \ldots..(\text{الطلب})$$

✌البرهان : لدينا من (الفرض) :

$$u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

نضيف للطرفين2:

$$2+u_n = 2+2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

$$2+u_n = 2\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)$$

$$2+u_n = 2\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right)$$

$$2+u_n = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

نجذر :

$$\sqrt{2+u_n} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

$$u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

وهو المطلوب .

السؤال الثلاثة والثلاثون:

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً به ثم استنتج E_f.
2- نضع $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$
أ- أثبت أن $\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$
ب- استنتج أنها متناقصة وهل هي متقاربة
ت- احسب نهايتها في حالة التقارب

الحل:

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x(2x)-2x^2-4}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2-2x^2-4}{4x^2} = \frac{2x^2-4}{4x^2}$$

نعدم:

$$2x^2-4 = 0$$

$$2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2$$

$$x = +\sqrt{2} \text{ مقبول}$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ مرفوض}$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{2+2}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

الجدول:

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-----$	0	$+++++$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

نجد أن:

$$E_f = f(D_f) = [\sqrt{2},+\infty[$$

2- لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} \; ; u_0 = 2$$

أ) نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\sqrt{2} \le \frac{3}{2} \le 2$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ... ... $\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ... ... $\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$$

نصور الأطراف في f:

$$\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$$

القضية صحيحة.

ب) من الطلب السابق أثبتنا أن:

$$u_{n+1} \le u_n$$

فهي متناقصة وبما أنها محدودة من الأدنى فهي متقاربة.

ت) لحساب نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$\frac{x^2 + 2}{2x} = x$$

$$x^2 + 2 = 2x^2$$

$$x^2 = 2$$

مقبول $x = \sqrt{2}$

مرفوض $x = -\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$$

السؤال الرابع والثلاثون:

نتأمل المتتاليتين $(t_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$, المعرفتين تدريجياً بالشكل:

$$s_{n+1} = \frac{t_n + 3s_n}{4} \; , s_0 = 12$$

$$t_{n+1} = \frac{t_n + 2s_n}{3} \; , t_0 = 1$$

1- أثبت أن المتتالية $v_n = s_n - t_n$ هندسية، واحسب نهايتها.
2- أثبت ان المتتاليتين $(t_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$ متجاورتان.

<u>الحل:</u>

1- لدينا:

$$v_{n+1} = S_{n+1} - t_{n+1}$$
$$= \frac{t_n + 3S_n}{4} - \frac{t_n + 2S_n}{3}$$
$$= \frac{3t_n + 9S_n - 4t_n - S_n}{12}$$
$$= \frac{1}{12}(S_n - t_n) = \frac{1}{12} v_n$$

متتالية هندسية وأساسها $q = \frac{1}{12}$.

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$

لأن $-1 < q = \frac{1}{12} < 1$.

2- الشرط الأول:
لندرس اطراد المتتالية S_n:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{t_n + 3S_n}{4} - S_n$$

$$= \frac{t_n + 3S_n - 4S_n}{4} = \frac{t_n - S_n}{4} = -\frac{1}{4}(v_n)$$

$$v_0 = S_0 - t_0 = 1 > 0 \; ; q > 0$$

$$v_n > 0$$

$$\Rightarrow S_{n+1} - S_n = -\frac{1}{4}(v_n) < 0$$

فالمتتالية S_n متناقصة.

لندرس اطراد t_n:

$$t_{n+1}-t_n=\frac{t_n+2S_n}{3}-t_n$$

$$=\frac{2S_n-2t_n}{3}=\frac{2}{3}(S_n-t_n)=\frac{2}{3}(v_n)\ge 0$$

فالمتتالية t_n متزايدة.

الشرط الثاني:

$$\lim_{n\to+\infty}(S_n-t_n)=\lim_{n\to+\infty}v_n=0$$

فالمتتاليتان S_n و t_n متجاورتان.

السؤال الخامس والثلاثون:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ و $u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$ و $u_0=e^3$ و v_n متتالية معرفة وفق $v_n=\ln(u_n)-2$ والمطلوب:

1- أثبت أن v_n هندسية وعين أساسها وحدها الأول
2- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
3- احسب نهاية u_n

الحل:

1- نوجد v_{n+1}:

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1})-2$$

$$=\ln\left(e\sqrt{u_n}\right)-2$$

$$=\ln(e)+\frac{1}{2}\ln(u_n)-2$$

$$=\frac{1}{2}\ln(u_n)-1=\frac{1}{2}(\ln(u_n)-2)$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{1}{2}(\ln(u_n)-2)}{\ln(u_n)-2}=\frac{1}{2}=q$$

$$v_0=\ln(u_0)-2=\ln(e^3)-2=1$$

2- لدينا:

$$v_n=v_0.q^n=1\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$$

$$v_n=\ln(u_n)-2$$

$$\ln(u_n)=v_n+2$$

$$u_n=e^{v_n+2}=e^{\frac{1}{2^n}+2}$$

3- لحساب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=e^2$$

السؤال السادس والثلاثون:

احسب نهاية المتتالية:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

الحل:

لدينا مجموع لحدود عددها n و

أصغر هذه الحدود هو $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ (لأن الكسور التي لها نفس البسوط يكون صاحب أكبر مقام هو الكسر الأصغر)

أكبر هذه الحدود $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ (لأن الكسور التي لها نفس البسوط يكون صاحب أصغر مقام هو الكسر الأكبر)

إذن:

$$\underbrace{n}_{\text{عدد الحدود}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{\text{أصغرهم}}\le u_n\le\underbrace{n}_{\text{عدد الحدود}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{\text{أكبرهم}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le u_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

الآن نحسب نهاية طرفي المتراجحة:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

وبشكل مماثل:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

فحسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

السؤال السابع والثلاثون:

احسب نهاية المتتالية $u_n = n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$ و هل هي متقاربة

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$$

لأن $\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

و بما أن نهايتها عدد حقيقي فهي متقاربة

مسائل شاملة في التحليل

المسألة الأولى: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{1+lnx}{x}$$

1- احسب نهايات f عند أطراف مجال تعريفه و اذكر ماله من مقاربات
2- احسب $f'(x)$ و استنتج جدول تغيرات f
3- جد معادلة المماس T في النقطة التي تعدم مشتقه الثاني
4- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم C_f
5- احسب مساحة السطح المحصور بين C_f و محور الفواصل و المستقيم $x = 1$
6- استنتج الخط البياني C' للتابع $g(x) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x}$
7- استنتج مجموعة تعريف التابع $h(x) = \sqrt{-f(x)}$

الحل:

1- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$$

$y = 0$ مقارب افقي في جوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C_g يقع على يمين مقاربه.

2- f اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1 - lnx}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

نعدم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1$$

الجدول:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+ + + + +$	0	$- - - - - -$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3- نوجد المشتق الثاني:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2x(-lnx)}{x^4} = \frac{-x + 2xlnx}{x^4}$$

نعدم:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -x + 2xlnx = 0$$

$$x(-1 + 2lnx) = 0$$

إما:

$x = 0$ مرفوض

أو:

$$-1 + 2\ln x = 0$$

$$2\ln x = 1$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1 + \frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{e}}$$

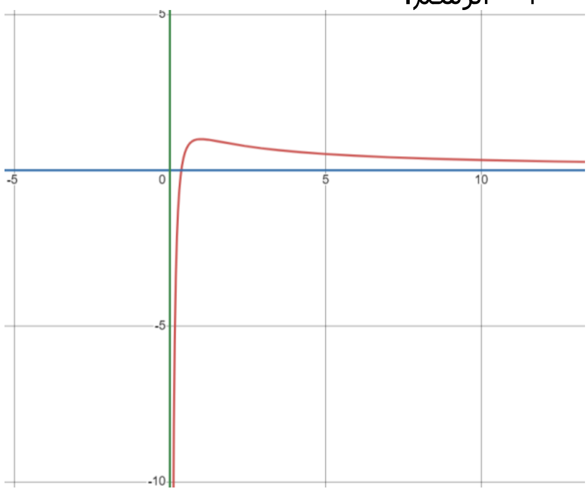
$$f'\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{-\ln e^{\frac{1}{2}}}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{-1}{2e}$$

نعوض:

$$y = f'\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\left(x - e^{\frac{1}{2}}\right) + f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2e}\left(x - e^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{3}{2\sqrt{e}}$$

4- الرسم:



5- نحتاج لإيجاد نقطة تقاطع التابع مع محور الفواصل:

$$y = 0$$

$$\frac{1+\ln(x)}{x} = 0$$

$$1 + \ln x = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$x = e^{-1}$$

نضع:

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln(x)$$

$$F(x) = \ln|x| + \frac{\ln^2 x}{2}$$

نعوض:

$$\left[\ln|x| + \frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = 0 - \left(\ln\frac{1}{e} + \frac{\ln^2\frac{1}{e}}{2}\right)$$

$$= 0 - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

6- لدينا:

$$g(x) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x} = \frac{-\ln(x) - 1}{x} = -\left(\frac{1+\ln(x)}{x}\right)$$

$$= -f(x)$$

C' ينتج عن C بتناظر بالنسبة لمحور الفواصل

7- لدينا:

$$-f(x) \geq 0$$

$$f(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow D_h = [1, +\infty[$$

المسألة الثانية:

ليكن f التابع المعرف على R وفق:

$$f(x) = \frac{2e^x - 2}{e^x + 1}$$

1- أثبت أن f فردي و ادرس تغيراته و نظم جدولاً بها
2- ليكن h التابع المعرف على R وفق : $h(x) =$ $f(x) - x$ و استنتج إشارة $h(x)$
3- اكتب معادلة المماس T للخط c_f في مبدأ الإحداثيات و ادرس الوضع النسبي للخط C مع T
4- ارسم كل مقارب وجدته و ارسم المماس T ثم ارسم C
5- أثبت أنّ التابع $F(x) = 2x + 4\ln\left(1 + e^{-x}\right)$ تابع أصلي للتابع f
6- استنتج مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = ln2$

<u>الحل:</u>

$$f(-x) = \frac{2e^{-x} - 2}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{2}{e^x} - 2}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{\frac{2 - 2e^x}{e^x}}{\frac{1 + e^x}{e^x}} = \frac{2 - 2e^x}{1 + e^x}$$

$$= -\frac{2e^x - 2}{e^x + 1} = -f(x)$$

إذن f فردي وخطه البياني متناظر للمبدأ

لندرس تغيراته:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-2}{+1} = -2$$

$y = -2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$:

$$f(x)=\frac{e^x\left(2-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{2-\frac{2}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{2-0}{1+0}=2$$

$y=2$ مقارب أفقي للخط c في جوار $+\infty$

f اشتقاقي على R :

$$f'(x)=\frac{2e^x(e^x+1)-e^x(2e^x-2)}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$++++++++++++++++++++++$	
$f(x)$	$-2 \nearrow$	2

2-لدينا h :

$$h(x)=\frac{2e^x-2}{e^x+1}-x$$

h اشتقاقي على R :

$$h'(x)=\frac{4e^x}{e^x+1}-1=\frac{4e^x-e^x-1}{e^x+1}=\frac{3e^x-1}{e^x+1}$$

$$h'(x)=0\Longrightarrow e^x=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{x=\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$h\left(\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{2e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}-2}{e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}+1}-\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{\frac{2}{3}-2}{\frac{1}{3}+1}+ln3$$
$$=-\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}+ln3=-1+ln3$$

(لاحظ أن $-1+ln3\approx 0.1$)

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{1}{3}\right)$	$+\infty$
$h'(x)$	$-------$	0	$++++++++$
$h(x)$	$\searrow$	$-1+ln3$	$\nearrow$

نلاحظ أنّ :

$$h(x)\geq -1+ln3>0$$
$$h(x)>0$$

3-معادلة المماس في المبدأ:

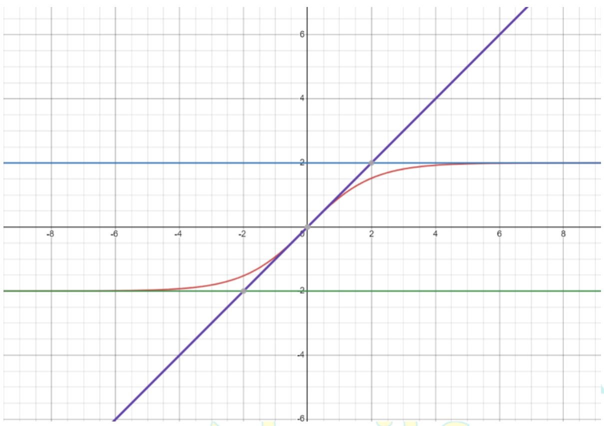
$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$y=x$$

لدراسة الوضع النسبي نلاحظ:

$$f(x)-y_T=f(x)-x=h(x)>0$$

إذن C فوق المماس

4-الرسم:



F اشتقاقي على R :

$$F'(x)=2+4\frac{-e^x}{1+e^{-x}}$$

$$F'(x)=\frac{2+2e^{-x}-4e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{2-2e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{2-\frac{2}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$$
$$=\frac{2e^x-2}{e^x+1}=f(x)$$

إذن F تابع أصلي لـ f

5-حساب السطح المحصور:

$$S=\int_0^{ln2} f(x)dx=[F(x)]_0^{ln2}$$
$$=[2x+4\ln(1+e^{-x})]_0^{ln2}$$
$$=\left(2ln2+4\ln\left(1+e^{-ln2}\right)\right)-(0+4\ln(1+1))$$
$$2ln2+4\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)-4ln2$$

$$= 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2ln2$$

المسألة الثالثة:

ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{2\}$ وفق : $f(x) = \exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ خطه البياني C

1- احسب نهايات f عند أطراف مجالات مجموعة تعريفه و اذكر ما له من مقاربات
2- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها
3- ارسم
4- نضع $g(x) = \exp\left(\frac{2+lnx}{2-lnx}\right)$ استنتج g'

الحل:

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{-1}$$

$y = e^{-1} = \frac{1}{e}$ مقارب افقي في جوار $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = e^{\frac{4}{0^+}} = +\infty$$

$x = 2$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C_f يقع على يسار مقاربه.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = e^{\frac{4}{0^-}} = 0$$

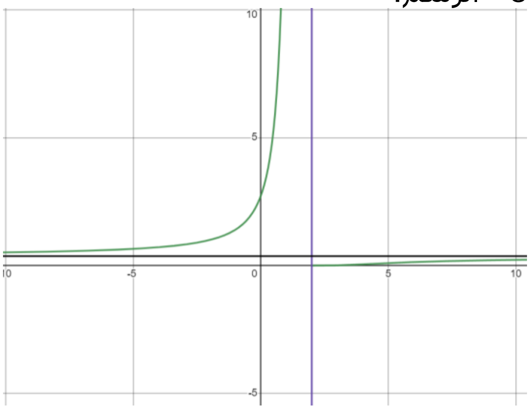
2- f اشتقاقي على $R\backslash\{2\}$:

$$f'(x) = \frac{2-x+2+x}{(2-x)^2}.e^{\frac{2+x}{2-x}}$$
$$= \frac{4}{(2-x)^2}.e^{\frac{2+x}{2-x}} > 0$$

الجدول:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+++++$	$\Vert$	$++++++$	
$f(x)$	e^{-1}	$\nearrow$	$+\infty \Vert 0$	$\nearrow$	e^{-1}

3- الرسم:



4- لدينا التابع

$$g(x) = f(\ln x)$$

$$g'(x) = f'(lnx).(\ln x)'$$
$$= \frac{4}{(2-\ln x)^2}e^{\frac{2+\ln x}{2-\ln x}}.\frac{1}{x}$$
$$= \frac{4}{x(2-\ln x)^2}e^{\frac{2+\ln x}{2-\ln x}}$$

المسألة الرابعة:

ليكن f التابع المعرف وفق $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ وخطه البياني C :

1- جد مجموعة تعريف التابع f ثم ادرس زوجية أو فردية التابع f
2- احسب نهايات f عند أطراف مجال تعريفه
3- اكتب معادلة المماس T للخط C في المبدأ ثم احسب قيمة تقريبية للعدد f(0.1)
4- استنتج جدول تغيرات f على المجال $]-2,0]$ و نظم جدولاً بها
5- ارسم T و ارسم C_f على مجموعة تعريفه.
6- نفترض g التابع المعطى وفق $g(x) = \ln\left(\frac{2+e^x}{2-e^x}\right)$.
استنتج مشتق التابع g مبيناً المجموعة التي يكون g اشتقاقيٌ عليها

الحل:

1- لدينا:

$$\frac{2+x}{2-x} > 0$$
$$2 + x = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$2-x=0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2+x$		$- - -$	0	$+ + +$		$+ + +$	
$2-x$		$+ + +$		$+ + +$	0	$- - -$	
$\frac{2+x}{2-x}$		$- - -$	0	$+ + +$	$\Vert$	$- - -$	
>0		غ م		م		غ م	

$$\Rightarrow D_f =]-2,2[$$

الشرط الأول:

$$x \in]-2,2[\Rightarrow -x \in]-2,2[$$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$
$$= -f(x)$$

التابع فردي ومتناظر بالنسبة للمبدأ.

2- النهايات:

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \ln\left(\frac{0}{4}\right) = -\infty$$

$x=-2$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يمين مقاربه.

3- نريد إيجاد معادلة المماس في النقطة $O(0,0)$:
f اشتقاقي على $]-2,0]$:

$$f(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}$$

$$= \frac{2-x+2+x}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$$

$$f'(0) = 1$$

نعوض في قانون معادلة المماس:

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = 1(x-0) + 0 = x$$

$$y = x$$

نعوض في المماس فنجد:

$$y = 0.1 \Rightarrow f(0.1) \approx 0.1$$

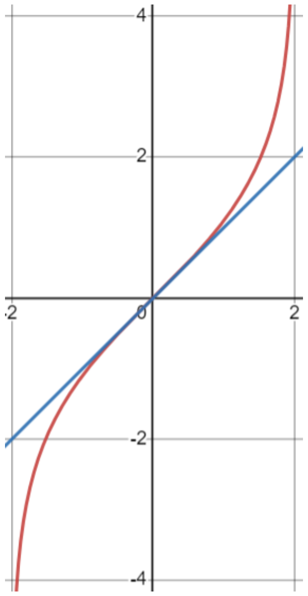
4- لدينا:

$$f(0) = 0$$
$$f'(x) \neq 0$$

جدول التغيرات:

x	-2		0
$f'(x)$	$\Vert$	$+ + + + + + + +$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0

5- سنرسم التابع على كامل مجموعة التعريف:



6- نلاحظ أن:

$$g(x) = f(e^x)$$

شرط أن يكون g اشتقاقي:

$$g(x) = \ln\left(\frac{2+e^x}{2-e^x}\right)$$

نوجد D_f فنجد:

$$\frac{2+e^x}{2-e^x} > 0$$

البسط موجب تماماً فالإشارة من إشارة المقام:

$$2-e^x = 0$$

$$e^x = 2$$

$$x = \ln(2)$$

نلاحظ أن:

المقام سالب على المجال $]\ln(2), +\infty[$ والمقام موجب على المجال $]-\infty, \ln(2)[$ وبالتالي g معرف واشتقاقي على المجال

$]-\infty, \ln(2)[$ ومشتقه:

$$g'(x) = f'(e^x).(e^x)' = \frac{4}{4-e^{2x}}.e^x = \frac{4e^x}{4-e^x}$$

المسألة الخامسة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$

1- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب ما تجده من مقاربات
2- جد معادلة المقارب المائل للخط C عند $+\infty$ و $-\infty$
3- ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب المائل
4- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها
5- اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب
6- أثبت أن النقطة $A(-1,-2)$ هي مركز تناظر للخط C
7- ارسم ما وجدته من مقاربات وارسم T ثم ارسم C
8- استنتج الخط البياني للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$

<u>الحل:</u>

1- مجموعة التعريف:

$$D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ وC_g على يسار مقاربه.

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ وC_g على يمين مقاربه.

2- بالقسمة الإقليدية:

$$\frac{x^2+3}{x+1} = x-1+\frac{6}{x+1}$$

نفرض $y_d = x-1$:

$$f(x) - y_d = \frac{6}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - y_d = 0$$

3- لدراسة الوضع النسبي نجد أن:

عندما $x > -1$ فإن C فوق d.

عندما $x < -1$ فإن C فوق d.

4- f اشتقاقي على $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2+2x-3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x=-3\,,x=1$$

$$f(1) = \frac{4}{2} = 2$$

$$f(-3) = \frac{12}{-2} = -6$$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f(x)$		0	‖	0	
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	-6 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↗	2 ↘	$+\infty$

5- التقاطع مع محور التراتيب:

$$x = 0$$

$$y_T = f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$= -3(x-0)+3 = -3x+3$$

6- النقطة $A(-1,-2)$:

$$x\in\mathbb{R} \Rightarrow -2-x\in\mathbb{R}$$

$$f(x)+f(2a-x) = 2b$$

$$f(x)+f(-2-x)$$

$$= \frac{x^2+3}{x+1}+\frac{(-2-x)^2+3}{-2-x+1}$$

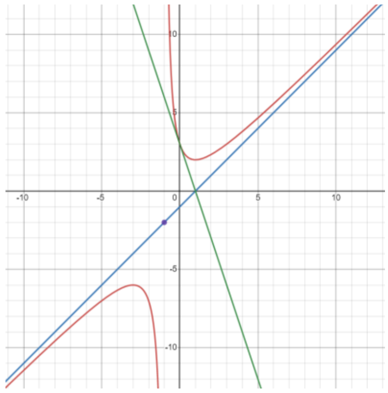
$$= \frac{x^2+3}{x+1}+\frac{4+4x+x^2+3}{-x-1}$$

$$= \frac{x^2+3-(7+4x+x^2)}{x+1}$$

$$= \frac{x^2+3-7-4x-x^2}{x+1}$$

$$= \frac{-4(x+1)}{(x+1)} = -4$$

7- الرسم:



8- لدينا:

$$f(-x) = \frac{x^2+3}{1-x} = -\frac{x^2+3}{x-1} = -g(x)$$

$$f(-x) = -g(x)$$

نضرب بـ -1:

$$g(x) = -f(-x)$$

الخط البياني للتابع g ينتج عن الخط البياني للتابع f بتناظر بالنسبة للمبدأ.

المسألة السادسة:

أولاً: ليكن g التابع المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق : $g(x) = x^2 + lnx - 1$

1- ادرس تغيرات g و نظم جدولاً با
2- أثبت أن $\alpha = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

ثانياً: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ بالشكل $f(x) = x + 1 - \frac{lnx}{x}$:

1- احسب نهايات f عند أطراف المجال و فسر النتيجة هندسياً
2- أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج جدول تغيرات f
3- عين القيمة الحدية للتابع f و استنتج معادلة المماس الأفقي لـ C
4- أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x + 1$ مقارب مائل للخط Cثم ادرس الوضع النسبي
5- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم C

الحل:

أولاً:

$$g(x) = x^2 + lnx - 1$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

g اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$$

نعدم:

$$2x^2 + 1 = 0$$

$$2x^2 = -1$$

مستحيلة.

الجدول:

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	‖ $+ + + + + + + + + + + +$
$g(x)$	‖ $-\infty \nearrow +\infty$

2- نجد أن التابع مستمر ومتزايد على مجموعة تعريفه وأيضاً:

$$0 \in f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$

وللتأكد أن $\alpha = 1$ حلاً:

$$g(1) = 0$$

وبالتالي إشارة $g(x)$:

$g(x) \geq 0$ على المجال $[1,+\infty[$

$g(x) < 0$ على المجال $]0,1[$

ثانياً:

$$\boldsymbol{f(x) = x + 1 - \frac{lnx}{x}\ ; x \in]0,+\infty[}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ وC يقع على يمين مقاربه.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

2- f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x}x-lnx}{x^2}=\frac{x^2-1+lnx}{x^2}$$

$$=\frac{x^2+lnx-1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-----$	0	$+++++$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

3- $f(1)=2$ قيمة حدية صغرى ومعادلة المماس الافقي:

$$y=2$$

4- نشكل الفرق:

$$f(x)-y_{\Delta}=-\frac{lnx}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

لدراسة الوضع النسبي، نعدم الفرق:

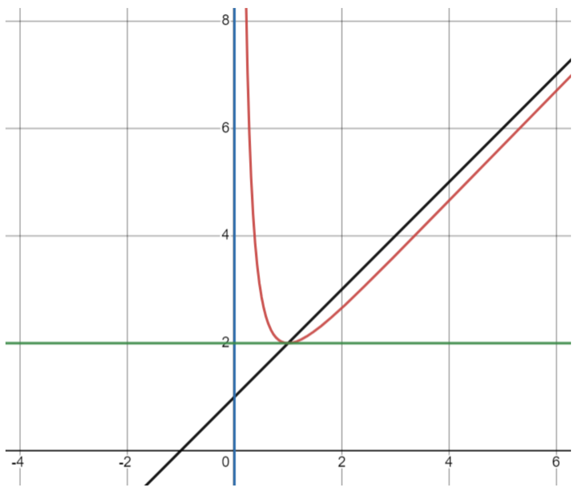
$$-\frac{lnx}{x}=0$$

$$lnx=0$$

$$x=1$$

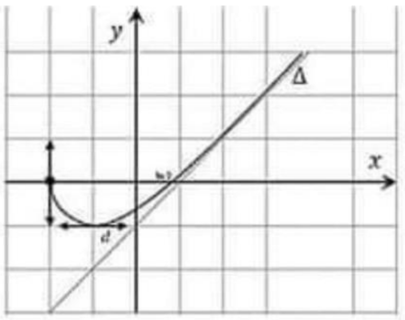
x	0		1		$+\infty$
$-\frac{lnx}{x}$	‖	$+++++$	0	$------$	
الوضع	‖	C فوق Δ		C تحت Δ	

5- الرسم:



مسائل فوق المستوى:

السؤال الأول: في الشكل المجاور الخط البياني لتابعٍ f معرف على المجال $[-2,+\infty[$



1- أيكون f اشتقاقياً عند -2 . علل
2- احسب $f(-1)$ و $f'(-1)$ ثم اكتب معادلة المماس d و المقارب Δ
3- ما هي مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq 0$ و المتراجحة $f'(x)\leq 0$
4- نظم جدول تغيرات f ثم قارن بين $f(2023)\,,f(2024)$
5- استنتج مجموعة تعريف التابع g المعرف وفق : $g(x)=\ln(-f(x))$

الحل:

1- لا لأنه يقبل مماساً شاقولياً عند $x=-2$
2- $f'(-1)=0\ ,f(-1)=-1$

$d: y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$

$d: y=-1$

أما لإيجاد معادلة Δ :

نلاحظ أنه يمر من النقطتين :

$A(0,-1)\ ,B(1,0)$

فيكون $m_{\Delta}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1}{1}=1$

$\Delta: y-y_A=m(x-x_A)$

$\Delta: y+1=1(x-0)$

$y=x-1$

3- حلول المتراجحة $f(x)\geq 0$:

$S_1=[ln2,+\infty[\cup\{-2\}$

و حلول المتراجحة $f'(x)\leq 0$:

$S_2=]-2,-1]$

قمنا بفتح المجال عند $x=-2$ لأن التابع غير اشتقاقي عند $x=-2$

4- الجدول:

x	$-2 \qquad -1 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$\| - - - - - \quad 0 + + + + + +$
$f(x)$	$0 \quad \searrow \quad -1 \quad \nearrow \quad +\infty$

بما أن f متزايد تماماً على $]-1,+\infty[$

و بما أن:

$$2023,2024 \in]-1,+\infty[$$

فإن $f(2023) < f(2024)$

5- التابع g معرف بشرط:

$$-f(x) > 0$$
$$f(x) < 0$$
$$D_g =]-2, ln2[$$

السؤال الثاني: نعرّف التابع f على المجال $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^2 + sinx}{x}$$

1- أثبت أن $d: y = 2x$ مقارب مائل للخط C ثم ادرس الوضع النسبي لهما

2- نعرف التابع g على المجال $[0,+\infty[$ وفق:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & : x > 0 \\ m-2 & : x = 0 \end{cases}$$

عين m ليكون g مستمراً عند الصفر

الحل:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x} + \frac{sinx}{x} = 2x + \frac{sinx}{x}$$

$$f(x) - y_d = \frac{sinx}{x}$$

$$-1 \le sinx \le 1$$

نقسم على $x > 0$:

$$-\frac{1}{x} \le \frac{sinx}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \ , \ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

فحسب الإحاطة:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_d = 0$$

إذن d مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

المقام $x > 0$

البسط $sinx = 0 \Longrightarrow x = \pi k : k \in Z$

x	$0 \quad \pi \quad 2\pi \quad 3\pi \ .... \quad +\infty$
$sinx$	$0 + \ 0 \ - \ 0 \ + \ 0$
x	$0 + + + + + + + + + + + + + + +$
$\frac{sinx}{x}$	$\| + + 0 - - \quad 0 + + \quad 0 - \cdots$
الوضع النسبي	فوق تحت فوق

السؤال الثالث: ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = 2^x$

1- احسب $f(1)$ و$f'(x)$ و $f'(1)$

2- استنتج قيمة النهاية:

$$\lim_{x\to1} \frac{2^x - 2}{x - 1}$$

3- احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx$$

الحل:

$$f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{xln2}$$
$$f(1) = e^{1(ln2)} = 2$$

f اشتقاقي على R :

$$f'(x) = ln2\ e^{xln2}$$
$$f'(1) = 2ln2$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$
$$\lim_{x\to1} \frac{2^x - 1}{x - 1} = 2ln2$$

الآن لحساب m نضع شرط الاستمرار عند $x = 0$:

$$\lim_{x\to0} g(x) = g(0)$$
$$\lim_{x\to0} 2^x = m - 2$$
$$1 = m - 2$$
$$m = 3$$

الآن لنحسب التكامل :

$$I = \int_0^1 e^{xln2} dx = \left[\frac{1}{ln2} e^{xln2}\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{ln2} - \frac{1}{ln2} = \frac{1}{ln2}$$

انتهى المقرر♡

لقد تعلّمتم خلال هذه السنة الكثير..

لكن ما لا تعلمونه أنكم قد علمتموني الكثير ❤️

تعلمت منكم كيف يدمج المرء بين الاجتهاد و المسؤولية 👌 ..و اللطافة و المرح 😍

بين الاحترام الواجب 😎و الأخوّة المطلوبة 😉

و زادني أمل و ثقة بالله أن ما صبرتم عليه و عملتم لأجله لن يضيع سدىً و لن تهزم الأماني و لن تمحى الأحلام 👊

فأنتم جعلتم من الأحلام تسعى نحوكم و سيكون لكم في منصات التكريم مكانٌ و رفعة 🏅🏆

لكم كل حبي .. لكم كل امتناني و شكري و لكم خالص الدعاء و أسمى الأمنيات بأن تكونوا كما تتمنون .. 🏅

إياكم أن تنسوا أستاذكم و أخوكم ^_^ نذير تيناوي 🙏

❤️لن يبلى الشغف❤️