الأعداد العقدية وتطبيقاتها

اشكال العدد العقدي		
الشكل الجبري $z = x + iy$	الشكل المثلثي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	الشكل الأسي $z = re^{i\theta}$

الانتقال بين الأشكال

من جبري إلى مثلثي أو أسي	من مثلثي أو أسي إلى جبري
1- نحدد x, y 2- نحسب $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 3- نحسب النسب المثلثية : $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$ 4- نستنتج الزاوية (القيمة و الربع المناسب) 5- نعوض في الشكل الأسي أو المثلثي حسب الطلب.	1- نحدد r, θ 2- نحسب النسب المثلثية للزاوية θ 3- نضع $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ 4- نعوض في الشكل الجبري $z = x + iy$ ملاحظة : قد نحتاج إلى إرجاع الزاوية إلى الربع الأول من خلال الخطوات : 1- نكتب البسط بدلالة مضاعف للمقام 2- نفرق 3- نميز حالتين : أ- إذا وجدنا عدد زوجي مضروب بـ π نحذف الحد كاملاً ب- إذا وجدنا عدد فردي مضروب بـ π نستبدله بـ π 4- نحدد الإشارات حسب الربع الموافق

تمارين

1- اكتب بالشكل الأسي و المثلثي كل من الأعداد العقدية الآتية:

$z = \sqrt{2}i - \sqrt{6}$	$z = 3 - 3i$	$z = -3 + \sqrt{3}i$
$z = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}}$	$z = \frac{\sqrt{3} - 3i}{3 + 3\sqrt{3}i}$

2- اكتب بالشكل الجبري كل من الأعداد العقدية الآتية:

$z = 2\,e^{\frac{i2\pi}{3}}$	$z = e^{\frac{i9\pi}{4}}$	$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

تحويلات سريعة

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$	$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$-1 = e^{i\pi}$	$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

اشكال مثلثية ناقصة

$\cos(\theta) - i\sin(\theta)$	$-\cos(\theta) + i\sin(\theta)$	$-\cos(\theta) - i\sin(\theta)$	$\sin(\theta) + i\cos(\theta)$
نستبدل θ بـ $-\theta$.	نستبدل θ بـ $\pi - \theta$.	نستبدل θ بـ $\pi + \theta$.	نستبدل θ بـ $\frac{\pi}{2} - \theta$.
$\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$	$\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)$	$\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

العمليات على الشكل المثلثي أو الأسي

الضرب	القسمة	القوة	المرافق
نضرب الطويلات و نجمع الزاويا	نقسم الطويلات ونطرح الزوايا	قوةً للطويلة و أمثالاً للزاوية	يحافظ على الطويلة ونعكس الزاوية

تمارين		
التمرين الأول: اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:		
$z=\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$	$z=\overline{\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}+isin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\right)}$	$z=\left(2(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{10}$

التمرين الثاني: ليكن $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2=1-i$

1- اكتب $z_1, z_2, \frac{z_1}{z_2}$ بالشكل المثلثي

2- اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري

3- استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

التمرين الثالث: نتأمل النقطتين $\boldsymbol{A,B}$ اللتين يمثلهما العددان $\boldsymbol{a=2}$ و $\boldsymbol{b=2e^{\frac{3i\pi}{4}}}$ و ليكن $\boldsymbol{I}$ منتصف $[\boldsymbol{AB}]$ و المطلوب :

1- ارسم شكلاً مناسباً و بين طبيعة المثلث $\boldsymbol{OAB}$

2- استنتج قياس الزاوية $(\vec{u},\vec{OI})$

3- احسب العدد العقدي $\boldsymbol{z_I}$ الممثل للنقطة $\boldsymbol{I}$ بالشكلين الجبري و الأسي ثم استنتج $\boldsymbol{sin}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

التمرين الرابع: بفرض $z_1=e^{ia}$ و $z_2=e^{ib}$ استنتج $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$.

علاقات أويلر eular	
$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin(\theta)$	$e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+isin(-\theta)$
$2\cos(\theta)=e^{i\theta}+e^{-i\theta}$	$2isin(\theta)=e^{i\theta}-e^{-i\theta}$

تمارين		
التمرين الأول: بسط كلاً من الأعداد الآتية:		
$z=\dfrac{1+\cos(x)-isin(x)}{1+\cos(x)+isin(x)}$	$z=\dfrac{\cos(x)+isin(x)}{\cos(x)-isin(x)}$	$z=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$

التمرين الثاني: ليكن $\alpha=e^{2i\frac{\pi}{5}}$ نضع

$$B=\alpha^2+\alpha^3 \qquad A=\alpha+\alpha^4$$

1- أثبت أن $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$ واستنتج أن A,B هما جذرا المعادلة $x^2+x-1=0\ldots(*)$

2- عبر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

3- حل المعادلة $(*)$ واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

التمرين الثالث: ليكن $z=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$ أثبت أن $z=itan(\theta)$.

طويلة عدد عقدي		
اثبات أن Z حقيقي	اثبات أن Z تخيلي	اثبات صحة علاقة تحوي $\lvert z\rvert^2$
1- نأخذ المرافق $\bar{Z}$ 2- نستفيد من كل عدد w طويلته 1 بأنه يحقق أن $\overline{w}=\frac{1}{w}$ 3- نصلح ونحاول اظهار أن: $\bar{Z}=Z$ عندئذٍ Z حقيقي	1- نأخذ المرافق $\bar{Z}$ 2- نستفيد من كل عدد w طويلته 1 بأنه يحقق أن $\overline{w}=\frac{1}{w}$ 3- نصلح ونحاول اظهار أن: $\bar{Z}=-Z$ عندئذٍ Z تخيلي	ننطلق من طرف لنصل للطرف الآخر وذلك باستخدام العلاقة: $\lvert z\rvert^2=z.\bar{z}$

تمارين
التمرين الأول: ليكن $u=\frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{i\pi}{3}}$: 1- أثبت أن $\|u\|=1$ 2- أثبت أن العدد: $$W=\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$$ حقيقي.
التمرين الثاني: إذا كان β عدداً حقيقياً و كان العدد العقدي $W=\frac{\beta+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\beta}$ 1- أثبت أن $\|W\|=1$ 2- من أجل $\beta=1$. أثبت أن W^{12} حقيقي
التمرين الثالث: أثبت صحة المساواة: $$\|z+z'\|^2+\|z-z'\|^2=2\|z\|^2+2\|z'\|^2$$

الصيغ العقدية للتحويلات الهندسية		
الانسحاب $\underbrace{z'}_{\text{صورة}}=\underbrace{z}_{\text{أصل}}+Z_{\vec{w}}$	التحاكي $\underbrace{z'}_{\text{صورة}}-\underbrace{w}_{\text{مركز}}=\underbrace{k}_{\text{نسبة تحاكي}}\left(\underbrace{z}_{\text{أصل}}-w\right)$	الدوران $\underbrace{z'}_{\text{صورة}}-\underbrace{w}_{\text{مركز}}=\underbrace{e^{i\theta}}_{\text{زاوية}}(\underbrace{z}_{\text{أصل}}-w)$
التناظر المركزي $\underbrace{z'}_{\text{صورة}}-\underbrace{w}_{\text{مركز}}=-(\underbrace{z}_{\text{أصل}}-w)$	تناظر محوره ox $\underbrace{z'}_{\text{صورة}}=\bar{z}$	تناظر محوره oy $\underbrace{z'}_{\text{صورة}}=-\bar{z}$

تمارين
التمرين الأول: ليكن $z=3+5i$ العدد العقدي الممثل للنقطة M . في كلٍ من الحالات الآتية جد z' العدد الممثل للنقطة M' : 1- M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}(3,4)$ 2- M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $2\vec{u}-\vec{v}$ 3- M' صورة M وفق تحاكٍ مركزه $A(2+i)$ و نسبته -3 : 4- M' صورة M وفق تناظر محوري محوره Ox 5- M' صورة M وفق دوران مركزه المبدأ و زاويته $\frac{\pi}{6}$
التمرين الثاني: لتكن النقطتان: $$G(3-\sqrt{3}i)\,,H(3+\sqrt{3}i)$$ وليكن R الدوران الذي مركزه O وتحقق $R(G)=H$ احسب $(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران . <u>**ملاحظة غير ملاحظة:**</u> عندما يطلب الصيغة العقدية أي تحديد عناصر التحويل دون تعويض الصورة والأصل.

الكسر الذهبي $\frac{b-a}{c-d}$		
1- نعوض الأعداد ونبسط. 2- نكتب الكسر بالشكل الأسي. 3- نحدد الطويلة والزاوية ونميز الحالات الآتية:		
الحالة الأولى: $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$ يكون (CD) و (AB) متعامدين	**الحالة الثانية:** $\left\|\frac{d-c}{b-a}\right\|=1$ يكون $AB=CD$	**الحالة الثالثة:** اجتماع الحالتين: $\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right)=\frac{\pi}{3}$ & $\left\|\frac{d-a}{b-a}\right\|=1$ عندئذٍ يكون المثلث ABD متساوي الأضلاع
الحالة الرابعة : $\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right)\in\{0,\pi\}$ النقاط A,B,D على استقامة واحدة	**الحالة الخامسة :** $\frac{d-a}{b-a}=k\in R$ الشعاعان $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ مرتبطان خطياً.	**الحالة السادسة:** $\arg\left(\frac{d-e}{b-e}\right)=\arg\left(\frac{c-e}{d-e}\right)$ المستقيم (DE) منصف للزاوية BEC

الحالة السابعة:

$$\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) > \frac{\pi}{2}$$

المثلث ABD منفرج الزاوية A.

تمارين

التمرين الأول: لتكن النقاط A, B, C, D التي تمثلها الأعداد :

$$a = 2 - 2i\,, b = -1 + 7i$$
$$c = 4 + 2i\,, d = -4 - 2i$$

1- لتكن النقطة Ω التي يمثلها العدد $w = -1 + 2i$ أثبت أن النقاط A, B, C, D تقع على دائرة واحدة مركزها Ω

2- ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E منتصف $[AB]$. احسب e ثم برهن أن $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

3- ماذا تستنتج .

التمرين الثاني: لتكن النقاط A, B, C نقاط المستوي التي تمثل الاعداد العقدية :

$$a = 2 \quad , \qquad b = 1 + \sqrt{3}i$$
$$c = -1 + i\sqrt{3}$$

1- أثبت أن $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC

2- ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل . عين a', b', c'

التمرين الثالث: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس نتأمل النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد $a = 8\,, b = -4 + 4i\,, c = -4i$

1- احسب $\frac{b-c}{a-c}$ و ماذا تستنتج

2- جد العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{4}$

3- جد العدد العقدي e الممثل للنقطة E التي تجعل الرباعي $ACBE$ مربعاً

التمرين الرابع: نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد $a = 6 - i\,, b = -6 + 3i\,, c = -18 + 7i$

1- احسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ و ماذا تستنتج

2- بفرض $d = 1 + 6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O و زاويته θ

3- جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N التي تجعل الرباعي $OAND$ مربعاً

التمرين الخامس: لتكن M النقطة التي تمثل العدد العقدي $z = -1 + i$ و المطلوب :

1- أثبت أن z^8حقيقي (بطريقتين)

2- جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$

التمرين السادس: نتأمل النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد

$$a = -1\,, b = 2 + i\sqrt{3}$$
$$c = \bar{b} \quad , d = 3$$

و المطلوب :

1- ارسم النقاط A, B, C, D ثم احسب AB, AC, BC و استنتج طبيعة المثلث ABC

2- عين $\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)$ و استنتج طبيعة المثلث ACD

3- أثبت أن D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(A, -1)\,, (B, 2), (C, 2)$$

مسائل التطبيقات العقدية

1- أي معلومة عن ضلعين مشتركين بالرأس متساويين بالطول فأحدهما دوران للآخر (مربع، مثلث متساوي الساقين , ... etc)

2- عندما يذكر (مثلاً مباشر التوجيه): عميل حالك اعمى.

3- الدوران المباشر عكس عقارب الساعة

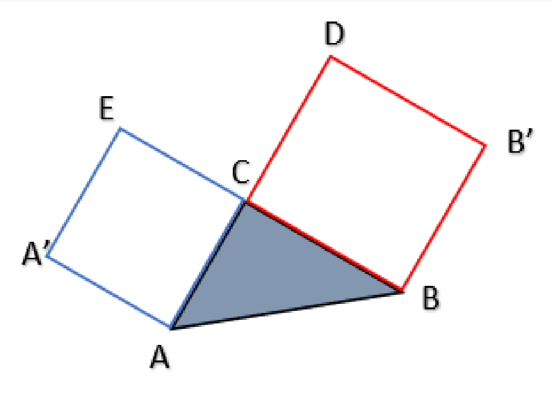
4- ربع الدورة يساوي $\frac{\pi}{2}$

5- يُفضل عند تطبيق دوران ما: جعل الصورة هي النقطة المراد حسابها و الأصل هي النقطة التي نريد الكتابة بدلالتها

6- حالة خاصة: بعض المسائل لا تحوي أي اضلاع متساوية لذلك نفرض احداثيات النقاط ونوجد علاقات بينها.

مسائل

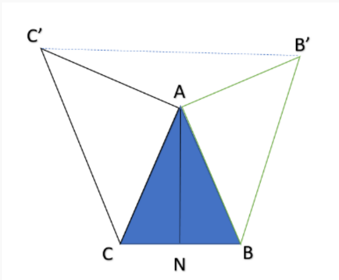
المسألة الأولى: ليكن المثلث ABC في المستوي
ننشئ على ضلعيه $[AC]$ و [BC] و خارجه المربعين $ACEA'$, $CBB'D$ كما في الشكل المجاور
تمثل الأعداد a,b,c,a',b' النقاط A,B,C,A',B'



1- B' صورة C وفق دوران مركزه B . عينه و اكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b,c
2- أثبت أن $a' = i(c-a)+a$
3- عين بدلالة a,b العدد m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$

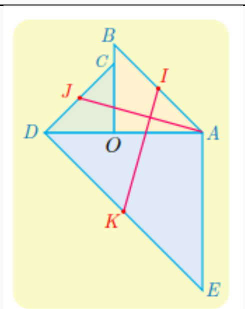
المسألة الثانية: في الشكل المجاور نتأمل مثلثاً ABCمتساوي الساقين رأسه A , ننشئ على ضلعيه مثلثين قائمين و متساويي الساقين ABB', ACC' و النقطة N منتصف CB

و بفرض a,b,c,b',c',n الأعداد العقدية التي تمثلها النقاط A,B,C,B',C',N



1- أوجد بدلالة c,b الأعداد b',c',n
2- اكتب العدد $\frac{c'-b}{c-b'}$ بالشكلين الجبري و الأسي
3- أثبت $(C'B)$ يعامد (CB') و أن $C'B = CB'$
4- بفرض A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B',2)$ و $(C'3)$ و $(C,1)$و (B, 1)
احسب $\frac{c}{b}$

المسألة الثالثة: نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ المثلثات OAB , ODB , AFD قائمة و متساوية الساقين و مباشرة و النقاط I,J,K منتصفات أوتار هذه المثلثات كما هو موضح في الشكل . و لتكن الأعداد a,b,c,e,d الممثلة للنقاط A,B,C,E,D

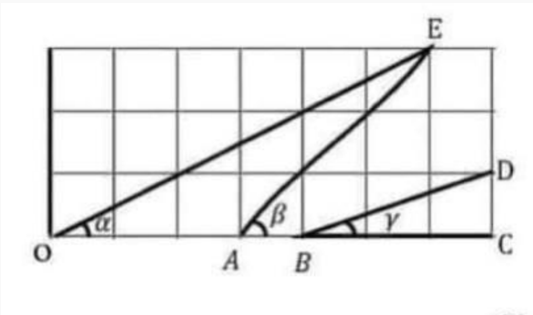


1-عبر بدلالة a,c عن e,d,b ثم استنتج z_I, z_J, z_K
2-أثبت أن $z_K - z_I = i(z_J - a)$ و استنتج أن IK يعامد AI و أن لهما نفس الطول

خواص الـ arg

مشان ما نطول عليكون بعرف تعبانين..
نفس خواص اللوغارتم 😉 والمرافق يغير الإشارة

مثال: في معلم متجانس:
α , β , γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OE}), (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}), (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$
على الترتيب و المطلوب :



1- اكتب كلاً من $Z_{\overrightarrow{OE}}$ و $Z_{\overrightarrow{AE}}$ و $Z_{\overrightarrow{BD}}$ بالشكل الجبري و الأسي
2- احسب الجداء $Z_{\overrightarrow{OE}} \cdot Z_{\overrightarrow{AE}} \cdot Z_{\overrightarrow{BD}}$ بالشكلين الجبري و الأسي
3- استنتج قياساً للزاوية $\alpha + \beta + \gamma$

المعادلات العقدية

أولاً: معادلات الدرجة الأولى:

معادلة تحوي z	معادلة تحوي $\bar{z}$	معادلة تحوي z و $\bar{z}$
نعزل z	نأخذ المرافق ثم نعزل z	1- نفرض $z = x + iy$ فيكون $\bar{z} = x - iy$ 2- نعوض ونصلح. 3- نقارن الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي
تمارين		
$-2z + 3 = iz$	$-\bar{z} + 3i = 2i\bar{z} + 1$	$z + 2\bar{z} = 3 + 3i$

ثانياً: معادلات الدرجة الثانية:

$z^2 = -k^2$	$z^2 = a + ib$	$az^2 + bz + c = 0$
نضع $-1 = i^2$ ثم نجذر	1- نفرض $Z = x + iy$ 2- نضع المعادلات $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & \dots ① \\ x^2 - y^2 = a & \dots ② \\ 2xy = b & \dots ③ \end{cases}$ 3- نجمع ① و ② فنحسب x_1 و x_2 4- نطرح ① و ② فنحسب y_1 و y_2 5- من المعادلة ③ نميز حالتين: أ- $2xy = b > 0$ فنأخذ x و y من نفس الإشارة ونضعها بالشكل الجبري ب- $2xy = b < 0$ فنأخذ x و y من إشارتين متعاكستين ونضعها بالشكل الجبري **صيغة يمكن تجي مو اكيد:** جد الجذور التربيعية للعدد العقدي $a + ib$.	أ- حالة $\Delta > 0$: للمعادلة حلان $Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ب- حالة $\Delta = 0$: للمعادلة حل وحيد : $Z = -\frac{b}{2a}$ ت- حالة $\Delta < 0$: أي $\Delta = -k^2$ عندها للمعادلة حلان عقديان $Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ث- حالة $\Delta = a + ib$ (عدد عقدي): عندئذٍ نفرض $w = x + iy$ هو الجذر التربيعي لـΔ عندها $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ $x^2 - y^2 = a$ $2xy = b$ ونوجد الحلول فنحصل على جذري المميز Δ : w_1 , w_2 $Z_1 = \frac{-b + w_1}{2a}$ $Z_2 = \frac{-b + w_2}{2a}$

ثالثاً: معادلات من الدرجة الثالثة فما فوق:

الحل المعلوم حقيقي أو تخيلي	الحل تخيلي والمعاملات حقيقية	يوجد صيغ متكافئة لتعيين الثوابت
نقسم على $(z - \text{الحل})$	نقسم على $\left(z^2 - \text{الحل}^2\right)$	ننشر ونطابق

نمط مميز: أوجد حلول المعادلة إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً:

1- نفرض الحل $z = bi$ ونعوض ونصلح فنحصل على المعادلة (1).
2- نأخذ مرافق طرفي المعادلة (1) فنحصل على المعادلة (2).
3- نجمع (1) و (2) ونحسب b.
4- نقسم على $z - bi$.
5- مبرووووك عليك!

التمرين الأول: حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية:

$z^2+(1+4i)z-5-i=0$	$z^2=-3+4i$	$z^2+2(1+i)z+i+\frac{3}{4}=0$
$2z^2-5z+6=0$	$z^2-2\sin(\theta)\,z+1=0$	$Z^2-2(1+\sqrt{2})Z+2(\sqrt{2}+2)=0$

التمرين الثاني: ليكن كثير الحدود:

$$\boldsymbol{P(Z)=Z^4-19Z^2+52Z-40}$$

عين عددين حقيقيين a و b يحققان أن

$$P(Z)=(Z^2+aZ+b)(Z^2+4Z+2a)$$

ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$.

التمرين الثالث: لتكن المعادلة:

$$Z^3-3Z^2+3Z+7=0$$

1- أثبت أن $Z=-1$ حل للمعادلة
2- اكتب المعادلة بالشكل :

$$(Z+1)Q(Z)=0$$

3- أوجد حلول هذه المعادلة

التمرين الرابع:

$$P(z)=z^3-2(\alpha+i\sqrt{3})z^2-4(\alpha-i\sqrt{3})z+8$$

المطلوب :

1- عين α إذا علمت أن $z=2$ حل للمعادلة $P(z)=0$
2- بفرض $\alpha=1$. جد كثير حدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ بحيث :

$$P(z)=(z-2)Q(z)$$

ثم استنتج حلول المعادلة $P(z)=0$

أفكار يجب تمثلها:

الجذور التكعيبية لعدد عقدي $z^3=a+ib$	خواص حلول معادلة من الدرجة الثانية
1- نكتب $w=a+ib$ بالشكل الأسي: $w=m\,e^{i\alpha}$ 2- نفرض $z=re^{i\theta}$ ونعوض. 3- $r^3e^{i3\theta}=m\,e^{i\alpha}$ بالمقارنة نجد: $r=\sqrt[3]{m}\,,\theta=\frac{\alpha+2\pi k}{3}\,;k\in\{0,1,2\}$	$z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ و $z_1.z_2=\frac{c}{a}$ 1- الحلان معلومان والمطلوب هو التحقق أنهما حلول 2- حل معلوم و مطلوب حساب الآخر 3- الحلان معلومان و مطلوب حساب a,b,c

التمرين الأول: جد حلول كلٍ من المعادلات:

$$z^3=1$$
$$3j^3-27i=0$$

التمرين الثاني: أثبت أن العدد $z=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ حل للمعادلة

$$1+z+z^2=0$$

ثم استنتج الحل الآخر , و اكتبهما بالشكل الجبري

المجموعات النقطية		
$Re(z)=a$ المستقيم الشاقولي x = a	$Im(z)=b$ المستقيم الأفقي y = b	$\lvert z-a\rvert=r$ الدائرة التي مركزها A(a) ونصف قطرها r
$\lvert z-a\rvert=\lvert z-b\rvert$ محور القطعة المستقيمة $[AB]$ $A(a),B(b)$	$argz=\theta$ نصف المستقيم الذي يصنع زاوية θ مع محور الفواصل دون المبدأ	في باقي الحالات نضع z = x + iy ونعزل ونستنتج المعادلة انتبه!! إذا كانت المعادلة بدلالة arg نضع $z=re^{i\theta}$ ونطبق خواص الـ $.arg$

التمرين الأول: صف مجموعة النقاط $M(z)$ في الحالات الآتية:		
$\lvert z+2\rvert = \lvert z-1+i\rvert$	$\lvert z\rvert = 3$	$\lvert z-1\rvert = \sqrt{2}$
$Re(iz) = 3$	$\arg iz^2 = \frac{2\pi}{3}$	$\arg(\bar{z}) = \arg\left(\frac{1}{i}\right)$

التمرين الثاني: في حالة عدد عقدي $z \neq -1$ نتأمل العدد العقدي $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ وبفرض أن $z = x + iy$ و $Z = X + iY$ والمطلوب:

1- اكتب X, Y بدلالة x, y
2- أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل العدد Z حقيقي هي مستقيم محذوف منه نقطة
3- أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل العدد Z تخيلي بحت هي دائرة محذوف منها نقطة

اختبار في الأعداد العقدية وتطبيقاتها

التمرين الأول: ليكن z العدد العقدي الذي يحقق:

$$\bar{z} = \frac{9}{z} \;,\arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

اكتب z بالشكل الأسي.

التمرين الثاني: ليكن المجموع $S = 1 + i + i^2 + \cdots + i^7$:

1- بسط عبارة S.
2- اكتب S بالشكل المثلثي.
3- أثبت أن S^8 حقيقي.

التمرين الثالث:

أ- حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة $z^2 - 8z + 41 = 0$

ب- نعتبر في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس النقاط A, B, C, D التي تمثلها الأعداد العقدية

$$a = 4 + 5i \;,b = 3 + 4i \;\;,c = 6 + 7i \;,d = 4 + 7i$$

1- احسب $\frac{c-b}{a-b}$ و استنتج أن النقاط A, B, C على استقامة واحدة
2- بفرض $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ وفق الدوران الذي مركزه D و زاويته $-\frac{\pi}{2}$, أثبت أن :
$z' = -iz - 3 + 11i$
3- عين صورة C وفق الدوران السابق و ما طبيعة المثلث ACD
4- ليكن T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{DC}$ و لتكن B' صورة B وفق T و A' صورة A وفق T و المطلوب :
   a- اكتب الصيغة العقدية للانسحاب ثم استنتج a', b'
   b- اكتب الشكل الجبري و الأسي للعدد $Z = \frac{d-b}{a'-b'}$
   c- استنتج أن المستقيمين $(A'B')$ و (DB) متعامدين و أن $DB = A'B'$
5- ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E منتصف [AD] أثبت أن النقاط A', B', B, C تقع على دائرة واحدة مركزها E

التمرين الرابع: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A,B,C,M التي تمثلها الأعداد :

$$a=-i \quad , \quad b=1-i \ , \qquad m=-1+i \quad , d=2i$$

1- مثل A,B,C,M في المستوي

2- احسب العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة النقطة D وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

3- أثبت أن النقاط O,B,M على استقامة واحدة

4- احسب $\frac{d-c}{m}$ بالشكل الأسي ثم استنتج أن $(DC),(OM)$ متعامدان

5- حل المعادلة $Z^3=4z^2+29z=0$

6- عين العددين z,w المحققان :

$$2z-w=-3$$
$$2\bar{z}-\bar{w}=-3+2\sqrt{3}i$$

7- أوجد e صورة m وفق تحاكٍ مركزه b و نسبته -3

8- أوجد الجذرين التربيعين للعدد العقدي $z=3-4i$

التمرين الخامس: اكتب $\cos^3 x$ على شكل عبارة خطية للنسب المثلية لمضاعفات الزاوية ثم احسب $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$ ثم احسب ثم احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحصور بين منحني التابع المعرف وفق $f(x)=\cos^3 x$ والمستقيمان $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ ومحور الفواصل.

تمارين صفحة 73:

1- لدينا:

$$z = -3 + \sqrt{3}i$$

$$x = -3 \,, y = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos\theta = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$z = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z = 3 - 3i$$

$$r = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \,, \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$z = 3\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z = \sqrt{2}i - \sqrt{6}$$

$$r = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z = \frac{\sqrt{3} - 3i}{3 + 3\sqrt{3}i} = \frac{(\sqrt{3} - 3i)(3 - 3\sqrt{3}i)}{9 + 27}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - 9i - 9i - 9\sqrt{3}}{36} = \frac{-6\sqrt{3} - 18i}{36}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{\frac{3}{36} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \,, \quad sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \,, \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2- لدينا:

$$z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right] = -1 + i$$

$$z = e^{i\frac{9\pi}{4}} = \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z =$$

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right] = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمارين صفحة 74:

التمرين الأول

$$z=\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$$

$$z=\overline{\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\imath\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)}$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$$

$$z=\left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{10}$$

$$=2^{10}\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)$$

التمرين الثاني

1- لدينا:

$$\boldsymbol{Z_1=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}}$$

$$x=\frac{\sqrt{6}}{2}\ \ \&\ \ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r=\sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}}=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta&=-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Z_1}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{Z_2=1-i}$$

$$x=1\ \ \&\ \ y=-1$$

$$r=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Z_2}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\frac{\boldsymbol{Z_1}}{\boldsymbol{Z_2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

2- لدينا:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}i}{2}}{1-i}$$

نضرب بالمرافق

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}{2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i}{2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

3- لدينا:

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)_{\text{مثلثي}}=\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)_{\text{جبري}}$$

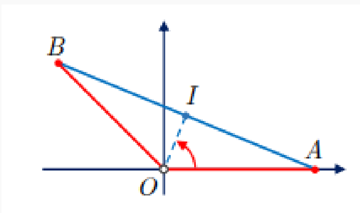
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

بالمطابقة نجد:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

التمرين الثالث



1- العدد $a=2$ عدد طويلته 2 , إذن $OA=2$ و أن العدد $b=2e^{\frac{3i\pi}{4}}$ أيضاً طويلته 2

إذن $OB=2$ فالمثلث متساوي الساقين

و لما كانت I منتصف $[AB]$ فإن OI متوسط في المثلث OAB , و لكن نعلم أن المتوسط في المثلث متساوي الساقين هو منصفٌ أيضاً

و,,, عليه يكون $(\vec{u},\overrightarrow{OI})=\frac{\frac{3\pi}{4}}{2}=\frac{3\pi}{8}$

2- لحساب العدد العقدي z_I بالشكل الجبري :

$$z_I=\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}\left(2+2e^{\frac{i3\pi}{4}}\right)=1+e^{\frac{i3\pi}{4}}$$

لكن هذا ليس شكلاً جبرياً , يجب أن نعود من الشكل $e^{\frac{3i\pi}{4}}$ إلى الشكل الجبري :

$$e^{\frac{i3\pi}{4}}=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

فالزاوية هنا زاوية موجودة في الربع الثاني (راجع الدائرة المثلثية و ارسمها هنا)

$$\Rightarrow e^{\frac{i3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

نعوض في z_I :

$$z_I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \boxed{z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

أما لكتابته بالشكل الأسي : فلدينا أولاً زاويته من الطلب الأول $\frac{3\pi}{8}$ و لنحسب الطويلة :

$$|z_I| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}}{4}}$$
$$= \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

فالشكل الأسي له هو :

$$z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\, e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

لاستنتاج النسب المثلثية للزاوية $\frac{3\pi}{8}$ نضع :

$$\underbrace{z_I}_{\text{أسي}} = \underbrace{z_I}_{\text{جبري}}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}\, e^{i\frac{3\pi}{8}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

نقسم على أمثال $e^{i\frac{3\pi}{8}}$

$$e^{\frac{i3\pi}{8}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{i\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

نرد الأسي إلى مثلثي :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} + i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

بالمقارنة نجد أن :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

التمرين الرابع

$$z_1.z_2 = e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

ولكن بالشكل الجبري:

$$z_1.z_2 = [\cos(a) + i\sin(a)][\cos(b) + i\sin(b)]$$
$$= \cos(a)\cos(b) + i\cos(a)\sin(b)$$
$$+ i\sin(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)]$$
$$+ i[\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)]$$

بالمقارنة بين الشكل الجبري والمثلثي:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

تمارين صفحة 75 (بالرأس):

التمرين الأول

$$z = \frac{1+\cos(x) - i\sin(x)}{1+\cos(x) + i\sin(x)} = \frac{1+e^{-ix}}{1+e^{ix}}$$

$$= \frac{\frac{e^{ix}+1}{e^{ix}}}{e^{ix}+1} = e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

يكون موجوداً بشرط:

$$1 + e^{ix} \neq 0$$
$$e^{ix} \neq -1$$
$$e^{ix} \neq e^{i\pi+2\pi k}$$
$$x \neq \pi + 2\pi k$$

$$z = \frac{\cos(x) + i\sin(x)}{\cos(x) - i\sin(x)} = \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{i2x}$$
$$= \cos(2x) + i\sin(2x)$$

يكون موجوداً بشرط:

$$e^{-ix} \neq 0$$
$$e^{-ix} \neq e^{i2\pi k}$$

$$-x \neq 2\pi k$$

$$x \neq -2\pi k$$

$$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}} + e^{\frac{i\pi}{6}}\right)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

التمرين الثاني

-1 لدينا مجموع متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها α وعدد حدودها 5

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0 = 1\frac{1-\alpha^5}{1-\alpha}$$

$$= 1\frac{1-\left(e^{2i\frac{\pi}{5}}\right)^5}{1-e^{2i\frac{\pi}{5}}}$$

$$= \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{2i\frac{\pi}{5}}}$$

لكن $e^{2i\pi} = 1$

$$\Rightarrow 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$$

إذا كان A, B حلول المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$ عندئذٍ

$$A + B = \frac{-b}{c} \Leftrightarrow A + B = -1$$

$$A.B = \frac{c}{a} \Leftrightarrow A.B = -1$$

البرهان:

$$A + B = (\alpha + \alpha^4) + (\alpha^2 + \alpha^3)$$

حسب الطلب السابق :

$A + B = -1$ و هو المطلوب

$$A.B = (\alpha + \alpha^4)(\alpha^2 + \alpha^3)$$

$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7$$

$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5.\alpha + \alpha^5.\alpha^2$$

$$= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha + \alpha^2 = -1$$

إذاً A, B جذرا المعادلة $(*)$

-2

$$\alpha^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{10\pi-2\pi}{5}} = e^{i\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)} = e^{-i2\pi 5}$$

$$\Rightarrow A = \alpha + \alpha^4 = e^{\frac{i2\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

-3

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$a = 1, b = 1, c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-1) = 5$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

بملاحظة أن $A > 0$ و $x_2 > 0$ هما الجذر الموجب للمعادلة $(*)$ نجد أن

$$A = x_2$$

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

التمرين الثالث

$$z = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{2isin(\theta)}{2\cos(\theta)} = itan(\theta)$$

تمارين صفحة 75 (في الأسفل):

التمرين الأول

-1 لدينا:

$$|u| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

-2 لدينا:

$$\overline{W} = \frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}}$$

وبما أن $|u| = 1$ فإن $\bar{u} = \frac{1}{u}$:

$$\overline{W} = \frac{\bar{z} - \frac{1}{u}z}{1 - \frac{1}{u}} = \frac{\bar{z}u - z}{u - 1} = \frac{-(z - u\bar{z})}{-(1-u)} = W$$

حقيقي.

التمرين الثاني

أوراق الدورة المكثفة

1- لدينا:

$$|W| = \left|\frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta}\right| = \frac{\sqrt{\beta^2+3}}{\sqrt{3+\beta^2}} = 1$$

2- لدينا:

$$W = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$$

نضرب بسط ومقام بـ i:

$$= \frac{i(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}} = i$$

ويكون W^{12}:

$$i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$$

حقيقي.

التمرين الثالث

لدينا:

$$(z+z')(\bar{z}+\bar{z'}) + (z-z')(\bar{z}-\bar{z'})$$

$$= z\bar{z} + z\bar{z'} + z'\bar{z} + z'\bar{z'} + z\bar{z} - z\bar{z'} - z'\bar{z} + z'\bar{z'}$$

$$= 2z\bar{z} + 2z'\bar{z'} = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

تمارين صفحة 76:

التمرين الأول

1- $'$ صورة M وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}(3,4)$

$z' = z + z_{\vec{w}}$

$z' = 3 + 5i + 3 + 4i = 6 + 9i$

2- M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $2\vec{u} - \vec{v}$

$z' = z + z_{\vec{w}}$

$z' = 3 + 5i + 2 - i = 5 + 4i$

3- M' صورة M وفق تحاكٍ مركزه $A(2+i)$ و نسبته -3 :

$z' - w = k(z - w)$

$z' - (2+i) = -3(3+5i-2-i)$

$z' - (2+i) = -3(2+4i)$

$z' - (2+i) = -6 - 12i$

$z' = -6 - 12i + 2 + i$

$z' = -4 - 11i$

4- M' صورة M وفق تناظر محوري محوره Ox

$z' = \bar{z}$

$z' = 3 - 5i$

5- M' صورة M وفق دوران مركزه المبدأ و زاويته $\frac{\pi}{6}$

$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$

$z' - 0 = e^{\frac{i\pi}{6}}(3 + 5i - 0)$

$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(3 + 5i)$

$z' = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}i - \frac{5}{2}$

$$z' = \frac{3\sqrt{3}-5}{2} + \frac{5\sqrt{3}-5}{2}i$$

التمرين الثاني

$$R(G) = H$$

$$z' - w\,,e^{i\theta}(z - w)$$

$$h = e^{i\theta}(g)$$

$$e^{i\theta} = \frac{h}{g} = \frac{3+\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}$$

$$e^{i\theta} = \frac{\sqrt{12}e^{\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{12}e^{-\frac{i\pi}{6}}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$$

$$(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}) = \frac{\pi}{3}$$

الصيغة العقدية $z' = e^{\frac{i\pi}{3}}z$

ملاحظة:

$$(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}) = \arg\left(\frac{h-o}{g-o}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{h}{g}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}\right)$$

$$= \arg\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

تمارين صفحة 77:

تمرين الأول

-1

$$\Omega A = |Z_{\Omega A}| = |Z_A - Z_\Omega| = |a - w|$$

$$= |2 - 2i + 1 - 2i| = |3 - 4i| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\Omega B = |Z_{\Omega B}| = |b - w|$$

$$= |-1 + 7i + 1 - 2i| = |5i| = 5$$

وبالمثل $\Omega C = 5$, $\Omega D = 5$ فإن A, B, C, D تقع على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها $r = 5$

2- E منتصف $[AB]$

$$e = \frac{a+b}{2} = \frac{1+5i}{2}$$

$$L_1=\frac{a-e}{d-e}=\frac{2-2i-\frac{1+5i}{2}}{-4-2i-\frac{1+5i}{2}}$$
$$=\frac{4-4i-1-5i}{-8-4i-1-5i}$$
$$=\frac{3-9i}{-9-9i}$$
$$=\frac{1-3i}{-3-3i}\times\frac{-3+3i}{-3+3i}$$
$$=\frac{-3+3i+9i+9}{9+9}$$
$$=\frac{6}{18}+\frac{12}{18}i$$
$$L_1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

بنفس الأسلوب $L_2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

$$\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right)=\arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)$$

DEC منتصف (EA)

التمرين الثاني

-1

$$a=2\quad ,\quad b=1+\sqrt{3}i\ ,\ c=-1+\sqrt{3}i$$
$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{2-1-\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i}$$
$$=\frac{1-\sqrt{3}i}{-2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{i2\pi}{3}}$$

إما:

$$\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

ABC منفرج الزاوية B

أو:

$$\left|\frac{a-b}{c-b}\right|=1$$
$$\Rightarrow AB=CB$$

$\Rightarrow B$ متساوي الساقين رأسه ABC

-2

$$a'=\bar{a}=2$$
$$b'=\bar{b}=1-\sqrt{3}i$$
$$c'=\bar{c}=-1-\sqrt{3}i$$

التمرين الثالث

-1

$$a=8\ \ ,b=-4+4i\ \ ,c=-4i$$
$$\frac{b-c}{a-c}=\frac{-4+4i+4i}{8+4i}$$
$$=\frac{-4+8i}{8+4i}=\frac{-1+2i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}$$
$$\frac{-2+i+4i+2}{4+1}=i$$
$$\frac{b-c}{a-c}=e^{\frac{i\pi}{2}}$$

إما:

$$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)=\frac{\pi}{2}$$

أو:

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=1$$

ABC قائم في C ومتساوي الساقين

-2 D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$

$$d'-0=e^{i\frac{\pi}{4}}(a\ .6)$$
$$d'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)(8)$$
$$d'=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EB}$$
$$c-a=e-b$$
$$e=c-a+b$$
$$=-4i-8-4+4i$$
$$e=-12$$

التمرين الرابع

-1

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}$$
$$=\frac{-12+4i}{-24+8i}$$
$$=\frac{(-12+4i)}{2(-12+4i)}=\frac{1}{2}\in R$$

$C\ ,B,A$ على استقامة واحدة

-2

$$z'-w=e^{i\theta}(z-w)$$
$$d-0=e^{i\theta}(a-0)$$
$$d=e^{i\theta}\ a$$
$$e^{i\theta}=\frac{d}{a}=\frac{1+6i}{6-i}$$
$$e^{i\theta}=i$$
$$e^{i\theta}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

-3

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DN}$$
$$a=n-d$$

$$n = a + d$$

$$n = 7 + 5i$$

التمرين الخامس

$$z = -1 + i$$

إما:

$$z = \sqrt{2}e^{i3\frac{\pi}{4}}$$

$$z^8 = \sqrt{2}^8\ e^{i3\frac{\pi}{4}.8}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}.8}e^{i6\pi}$$

$$= 2^4 e^{i0}$$

$$= 16 \in R$$

أو:

$$z^8 = (-1+i)^8$$

$$= [(-1+i)^2]^4$$

$$= [1 - 2i - 1]^4$$

$$= [-2i]^4$$

$$= 16 \in R$$

التمرين السادس

$$a = -1\,, \qquad b = 2 + i\sqrt{3}$$

$$c = \bar{b} = 2 - i\sqrt{3}\ , \qquad d = 3$$

-1

$$AB = |Z_{AB}| = |b - a| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |Z_{AC}| = |c - a| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |Z_{BC}| = |c - b| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

-2

$$\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = \arg\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)$$

$$= \arg\left[\frac{(-3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{1+3}\right]$$

$$= \arg\left[\frac{-3+3i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3}{4}\right]$$

$$= \arg(i)$$

$$= \arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

قائم في C

$$D: \quad (A,-1)\ ,(B,2)\,,(C,2)$$

$$\alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} + \gamma\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$-(a-d) + 2(b-d) + 2(c-d) = 0$$

$$-a + d + 2b - 2d + 2c - 2d = 0$$

$$-3d - a + 2b + 2c = 0$$

$$-3(3) - (-1) + 2(2 + i\sqrt{3}) + 2(2 - i\sqrt{3}) = 0$$

$$-9 + 1 + 4 + 2i\sqrt{3} + 4 - 2i\sqrt{3} = 0$$

محققة

<u>مسائل صفحة 79:</u>

المسألة (1)

1- لدينا:

$$b' - b = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - b)$$

$$b' = i(c - b) + b$$

$$= ic - ib + b$$

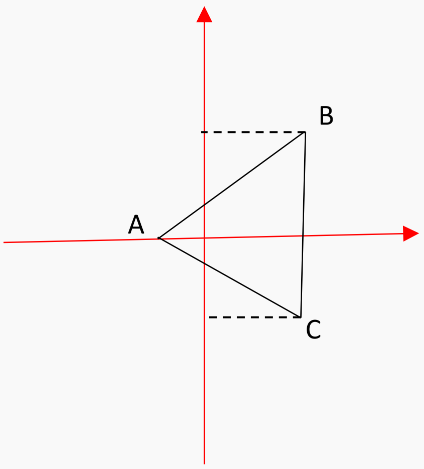
2- A' صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$a' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a)$$

$$a' = i(c - a) + a$$

3- لدينا:

$$m = \frac{a' + b'}{2}$$



$$= \frac{i(c-a) + a + i(c-b) + b}{2}$$

$$= \frac{ic - ia + a + ic - ib + b}{2}$$

$$= \frac{a+b}{2} + i\frac{2c - b - a}{2}$$

المسألة (2)

1- نعرف معلماً:

$$(A;\vec{u},\vec{v})$$

C' صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$:

$$c'-a=e^{-i\frac{\pi}{2}}(c-a)$$

$$c'=-ic$$

B' صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$b'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(b-a)$$

$$b'=ib$$

N منتصف القطعة $[CB]$:

$$n=\frac{c+b}{2}=\frac{1}{2}(c+b)$$

2- لدينا:

$$\frac{c'-b}{c-b'}=\frac{-ic-b}{c-ib}=\frac{c-bi}{i(c-ib)}$$

$$=\frac{1}{i}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

3- لدينا:

$$\arg\left(\frac{c'-b}{c-b'}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\left|\frac{c'-b}{c-b'}\right|=1$$

فيكون:

$$C'B\perp CB'$$

$$C'B=CB'$$

4- لدينا:

$$\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AC'}+2\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$c-a+3(c'-a)+2(b'-a)+(b-a)=0$$

ولكن $a=0$:

$$c+3c'+2b'+b=0$$

$$c-3ic+2bi+b=0$$

نقسم على b:

$$\frac{c}{b}-\frac{3ic}{b}+2i+1=0$$

$$\frac{c}{b}-3i\frac{c}{b}=-1-2i$$

$$\frac{c}{b}(1-3i)=-1-2i$$

$$\frac{c}{b}=\frac{-1-2i}{1-3i}=\frac{(-1-2i)(1+3i)}{1+9}$$

$$=\frac{-1-3i-2i+6}{10}$$

$$=\frac{5}{10}-\frac{5i}{10}=\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}$$

أي:

$$\frac{c}{b}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

المسألة (3)

1- لدينا:

A صورة النقطة B وفق دوران مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$:

$$a-o=e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-o)$$

$$a=-ib$$

$$\Rightarrow b=ia$$

D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$d-o=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-o)$$

$$d=ic$$

E صورة النقطة D وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$e-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(d-a)$$

$$e=i(d-a)+a$$

$$=i(ic-a)+a$$

$$=-c-ia+a$$

$$=a-c-ia$$

ولدينا:

$$Z_I=\frac{a+b}{2}=\frac{a+ia}{2}=\frac{1}{2}(a+ia)$$

$$Z_J=\frac{d+c}{2}=\frac{ic+c}{2}=\frac{1}{2}(c+ic)$$

$$z_K=\frac{d+e}{2}=\frac{ic+a-c-ia}{2}$$

$$=\frac{a-c+i(c-a)}{2}=\frac{a-c}{2}+i\frac{c-a}{2}$$

2- لدينا:

$$\ell_1=z_K-z_I=\frac{a-c}{2}+i\frac{c-a}{2}-\frac{a}{2}-i\frac{a}{2}$$

$$=-\frac{c}{2}+i\frac{c-2a}{2}$$

ولدينا:

$$\ell_2 = i(z_J - a) = i\left(\frac{c}{2} + i\frac{c}{2} - a\right)$$

$$= i\left(\frac{c-2a}{2} + i\frac{c}{2}\right)$$

$$= i\frac{c-2a}{2} - \frac{c}{2} = \ell_1$$

بما أن:

$$z_K - z_I = i(z_J - a)$$

$$\frac{z_K - z_I}{z_J - a} = \frac{IK}{AJ} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\left|\frac{z_K - z_I}{z_J - a}\right| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_K - z_I}{z_J - a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

فيكون:

$(AJ) \perp (IK)$ و $AJ = IK$

مثال صفحة 80:

1- لدينا:

$$Z_O = 0\ , \qquad Z_A = 3$$

$$Z_B = 4\ , \qquad Z_D = 7 + i$$

$$Z_E = 6 + 3i$$

$$Z_{\overrightarrow{OE}} = Z_E - Z_O = 6 + 3i$$

$$Z_{\overrightarrow{AE}} = Z_E - Z_A = 6 + 3i - 3 = 3 + 3i$$

$$Z_{\overrightarrow{BD}} = Z_D - Z_B = 7 + i - 4 = 3 + i$$

2- لدينا:

$$Z_{\overrightarrow{OE}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{BD}} = (6+3i)(3+3i)(3+i)$$

$$= (18 + 18i + 9i - 9)(3+i)$$

$$= (9 + 27i)(3+i)$$

$$= 27 + 9i + 81i - 27 = 90i = 90e^{i\frac{\pi}{2}}$$

3- لدينا:

$$\arg(Z_{\overrightarrow{OE}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{BD}}) = re^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$$

وأيضاً:

$$\arg(Z_{\overrightarrow{OE}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{BD}}) = 90e^{i\frac{\pi}{2}}$$

فتكون:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

تمارين صفحة 80 (في الأسفل):

$$\boldsymbol{z + 2\bar{z} = 3 + 3i}$$

بفرض $z = x + iy$ فيكون $\bar{z} = x - iy$:

$$x + iy + 2x - 2iy = 3 + 3i$$

$$3x - iy = 3 + 3i$$

بالمقارنة نجد:

$$3x = 3 \Rightarrow x = 3$$

$$-y = 3 \Rightarrow y = -3$$

$$\Rightarrow z = 3 - 3i$$

$$\boldsymbol{-\bar{z} + 3i = 2i\bar{z} + 1}$$

نأخذ مرافق الطرفين:

$$-z - 3i = -2iz + 1$$

$$-z + 2iz = 1 + 3i$$

$$z(-1 + 2i) = 1 + 3i$$

$$z = \frac{1+3i}{-1+2i} = \frac{(1+3)(-1-2i)}{1+4}$$

$$= \frac{-1-2i-3-6i}{5} = -\frac{4}{5} - i\frac{8}{5}$$

$$\boldsymbol{-2z + 3 = iz}$$

$$3 = iz + 2z$$

$$3 = z(i+2)$$

$$z = \frac{3}{i+2} = -i + 2$$

تمارين صفحة 82:

التمرين الأول

$$\boldsymbol{z^2 + (1+4i)z - 5 - i = 0}$$

$$\Delta = (1+4i)^2 - 4(1)(-5-i)$$

$$= 1 + 8i - 16 + 20 + 4i = 5 + 12i$$

نوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي الناتج بفرض:

$$w^2 = 5 + 12i$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

$$x^2 - y^2 = 5$$

$$2xy = 12$$

بجمع المعادلة الأولى والثانية:

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

بطرح المعادلة الأولى والثانية نجد:

$$2y^2 = 8$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

من المعادلة الثالثة نجد أن $2xy > 0$ فالحلول من إشارات متماثلة:

$$w_1 = 3 + 2i$$

$$w_2 = -3 - 2i$$

وتكون حلول المعادلة:

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{-1 - 4i + 3 + 2i}{2}$$

$$= \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

$$z_2 = \frac{-b - w_1}{2a} = \frac{-1 - 4i - 3 - 2i}{2}$$

$$= -2 - 3i$$

$$\boldsymbol{z^2 = -3 + 4i}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$x^2 - y^2 = -3$$

$$2xy = 4$$

بجمع المعادلة الأولى والثانية:

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

بطرح المعادلة الأولى والثانية:

$$2y^2 = 8$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

من المعادلة الثالثة نجد أن $2xy > 0$ فالحلول من إشارات متماثلة:

$$z_1 = 1 + 2i \;, z_2 = -1 - 2i$$

$$z^2 + 2(1 + i)z + i + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Delta = 4(1 + i)^2 - 4(1)\left(i + \frac{3}{4}\right)$$

$$= 4(1 + 2i - 1) - 4i - 3$$

$$= 8i - 4i - 3 = -3 + 4i$$

Δ نفسا حلينا جذورها التربيعية من شوي , فرضها w وشتغل:

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{-2 - 2i + 1 + 2i}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{-b - w_1}{2a} = \frac{-2 - 2i - 1 - 2i}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} - 2i$$

$$\boldsymbol{2z^2 - 5z + 6 = 0}$$

$$\Delta = 25 - 4(2)(6) = 25 - 48$$

$$= -23 < 0$$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان:

$$z_1 = \frac{5 + i\sqrt{23}}{4}$$

$$z_2 = \frac{5 - i\sqrt{23}}{4}$$

$$\boldsymbol{z^2 - 2\sin(\theta) + 1 = 0}$$

$$\Delta = 4\sin^2\theta - 4 = -4(1 - \sin^2\theta)$$

$$= -4\cos^2\theta < 0$$

للمعادلة حلان عقديان:

$$z_1 = \frac{2\sin(\theta) + i\sqrt{4\cos^2\theta}}{2}$$

$$= \sin(\theta) + i\cos(\theta)$$

والحل الآخر مرافقه:

$$z_2 = \overline{z_1} = \sin(\theta) - i\cos(\theta)$$

$$\boldsymbol{z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0}$$

$$\Delta = 4(1 + \sqrt{2})^2 - 4(1)(2)(\sqrt{2} + 2)$$

$$= 4(1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} - 4)$$

$$= -4 < 0$$

للمعادلة جذران عقديان:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2\sqrt{2} + 2i}{2}$$

$$= (1 + \sqrt{2}) + i$$

والحل الآخر مرافقه:

$$z_2 = (1+\sqrt{2}) - i$$

التمرين الثاني

-1 ننشر :

$$P(Z) = Z^4 + 4Z^3 + 2aZ^2 + aZ^3 + 4aZ^2$$

$$+2a^2Z + bZ^2 + 4bZ + 2ab$$

$$= Z^4 + (4+a)Z^3 + (6a+b)Z^2$$

$$+(2a^2+4b)Z + 2ab$$

بالمطابقة بين شكلي $P(Z)$ نجد أن :

$$4 + a = 0 \quad ①$$

$$6a + b = -19 \quad ②$$

$$2a^2 + 4b = 52 \quad ③$$

$$2ab = -40 \quad ④$$

من ① نجد أن $a = -4$

نعوض في ② $b = 5$

نعوض في باقي المعادلات للتحقق :

③ $\Rightarrow 32 + 20 = 52$ صحيحة

④ $\Rightarrow 2(-4)(5) = -40$ صحيحة

-2 نستفيد من الشكل الجديد :

$$(Z^2 - 4Z + 5)(Z^2 + 4Z - 8) = 0$$

إما

$$Z^2 - 4Z + 5 = 0$$

أو $Z^2 + 4Z - 8 = 0$

أكمل الحل و أنجزه.

التمرين الثالث

-1

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = 0$$

$$-1 - 3 - 3 + 7 = 0$$

$$0 = 0$$

إذن $z = -1$ حلٌ لها .

-2 نقسم على $Z + 1$

-3 وبالتالي المعادلة تكتب بالشكل :

$$(Z+1)(Z^2 - 4Z + 7) = 0$$

إما

$$Z + 1 = 0$$

$$Z = -1$$

أو

$$Z^2 - 4Z + 7 = 0$$

أكمل الحل .

التمرين الرابع

$$P(z) = z^3 - 2(\alpha + i\sqrt{3})z^2 - 4(\alpha - i\sqrt{3})z + 8$$

-1 لدينا $z = 2$ حلاً لها:

$$P(2) = 0$$

$$8 - 8(\alpha + i\sqrt{3}) - 8(\alpha - i\sqrt{3}) + 8 = 0$$

$$16 - 16\alpha - 8\sqrt{3}i + 8\sqrt{3}i = 0$$

$$16\alpha = 16$$

$$\alpha = 1$$

-2 بالقسمة الإقليدية على $z - 2$:

$$P(z) = (z-2)(z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4)$$

$$P(z) = 0$$

إما:

$$z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2$$

أو:

$$z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$$

$$\Delta = -12 - 4(-4)(1) = 4 > 0$$

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3}i + 2}{2} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 1 - \sqrt{3}i$$

التمرين الأول (في أسفل الصفحة 82)

$$\boldsymbol{z^3 = 1}$$

$$z^3 = e^{i(0+2\pi k)}$$

بفرض $z = re^{i\theta}$:

$$r^3 e^{i3\theta} = 1.e^{i2\pi k}$$

بالمقارنة:

$$r = 1$$

$$3\theta = 2\pi k$$

$$\theta = \frac{2\pi k}{3}$$

$k = 0$ الحل الأول:

$$\theta_1 = 0$$

$k = 1$ الحل الثاني:

$$\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$\mathrm{k} = 2$ الحل الثالث:

$$\theta_3 = \frac{4\pi}{3}$$

فالحلول:

$$z_1 = e^{i0}, z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\boldsymbol{3j^3 - 27i = 0}$$

$$3j^3 = 27i$$

$$j^3 = 8i$$

بفرض $\mathrm{j} = \mathrm{r}e^{i\theta}$:

$$r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{\pi}{2}+2\pi k}$$

بالمقارنة:

$$r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$$

$k = 0$ الحل الأول:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6}$$

$k = 1$ الحل الثاني:

$$\theta_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$\mathrm{k} = 2$ الحل الثالث:

$$\theta_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$$

فالحلول:

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

التمرين الثاني

$$z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$1 + z + z^2 = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$= 0$$

بما أنها معادلة من الدرجة الثانية والمعاملات a, b, c حقيقية فإن لها حلان مترافقان:

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

والشكل الجبري لهما:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

تمارين صفحة 83:

التمرين الأول

$$\boldsymbol{|z + 2| = |z - 1 + i|}$$

$$|z - (-2)| = |z - (1 - i)|$$

تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث:

$$a = -2, b = 1 - i$$

$$\boldsymbol{|z| = 3}$$

تمثل دائرة مركزها O ونصف قطرها 3.

$$\boldsymbol{|z - 1| = \sqrt{2}}$$

تمثل دائرة مركزاه $a = 1$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

$$\boldsymbol{Re(iz) = 3}$$

بفرض $z = x + iy$:

$$Re(ix - y) = 3$$

$$-y = 3$$

$$y = -3$$

تمثل المستقيم الأفقي الذي معادله $y = -3$.

$$\boldsymbol{\arg(iz^2) = \frac{2\pi}{3}}$$

$$\arg(i) + \arg(z^2) = \frac{2\pi}{3}$$

$$2\arg(z) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(z)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

تمثل نصف مستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{12}$ مع محور الفواصل دون المبدأ.

$$\arg(\bar{z})=\arg\left(\frac{1}{i}\right)$$

$$\arg(\bar{z})=\arg(1)-\arg(i)$$

$$\arg(\bar{z})=-\frac{\pi}{2}$$

$$\arg(z)=\frac{\pi}{2}$$

تمثل نصف مستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{2}$ مع محور الفواصل دون المبدأ.

التمرين الثاني

1- أولاً بما أنه في نص المسألة أشار إلى أن $z=x+iy$ و $Z=X+iY$ فيمكن أن نبدل في الكسر المعطى فنضع :

$$Z=\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$$

$$X+iY=\frac{2+x-iy}{1+x-iy}$$

لكن الطرف الأيسر كسر فيجب أن نضرب بالمرافق و إذا لاحظنا أن المقام $1+x-iy$ فيكون مرافقه $1+x+iy$ إذن لنضرب البسط و المقام بـ $1+x+iy$:

$$X+iY=\frac{(2+x-iy)(1+x+iy)}{(1+x-iy)(1+x+iy)}$$

في المقام لدينا العدد ضرب مرافقه فيمكن أن نضع جوابه مباشرة $\boxed{\text{حقيقي}^2+\text{تخيلي}^2}$:

و الحقيقي هو $1+x$ و التخيلي y

$$X+iY=\frac{(2+x-iy)(1+x+iy)}{(1+x)^2+y^2}$$

و ننشر البسط :

$$X+iY$$

$$=\frac{2+2x+2iy+x+x^2+iyx-iy-ixy-\underbrace{i^2}_{-1}y^2}{(1+x)^2+y^2}$$

$$X+iY=\frac{x^2+3x+y^2+iy}{(1+x)^2+y^2}$$

نفرق الكسر لجزأيه الحقيقي و التخيلي

$$X+iY=\frac{x^2+3x+y^2+2}{(1+x)^2}+i\frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

بالمقارنة بين الطرفين نجد أنّ:

$$X=\frac{x^2+3x+y^2+2}{(1+x)^2+y^2}$$

$$Y=\frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

2- حتى يكون العدد $Z=X+iY$ حقيقي يجب أن يكون قسمه التخيلي معدوم أي :

$$Y=0$$

$$\frac{y}{(1+x)^2+y^2}=0$$

ينعدم الكسر إذا انعدم البسط :إذن $y=0$ و هي تمثل معادلة مستقيم أفقي

و لكن بما أن Y تابع كسري فيجب أن نحذف النقاط التي تعدم المقام

و ينعدم المقام إذا كان $(1+x)^2+y^2=0$ أي $x=-1$ و $y=0$ فالنقطة التي يجب حذفها $A(-1,0)$

الخلاصة: مجموعة النقاط التي تجع العدد Z تخيلي هي المستقيم $y=0$ محذوف منه النقطة $A(-1,0)$

3- حتى يكون العدد $Z=X+iY$ تخيلي بحت يجب أن يكون قسمه الحقيقي معدوم أي :

$$X=0$$

$$\frac{x^2+3x+y^2+2}{(1+x)^2+y^2}=0$$

$$x^2+3x+y^2+2=0$$

و نعلم من دراستنا للأشعة أنه لإصلاح معادلة تحوي x^2,y^2 نقوم بالاتمام لمربع كامل (الكتابة بالشكل القانوني) لذلك نضيف و نطرح مربع نصف أمثال x :

أمثال x هي 3 و نصفها $\frac{3}{2}$ فمربعها $\frac{9}{4}$ إذن نضيف و نطرح $\frac{9}{4}$:

$$x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+2=0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2-\frac{9}{4}+2=0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}=0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

و هي من الشكل :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

فهي تمثل دائرة مركزها $B(-\frac{3}{2},0)$ و نصف قطرها $r=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ و كذلك محذوف منها النقطة $A(-1,0)$

يبس

التمرين الأول

$$\bar{z} = \frac{9}{z} \Rightarrow z.\bar{z} = 9 \Rightarrow |z|^2 = 9$$

$$|z| = 3$$

وبما أن $\arg z = \frac{\pi}{3}$ فيكون:

$$z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$$

التمرين الثاني

تصويب: احذف الحد الأول:

1- نلاحظ أن S مجموع متتالية هندسية أساسها i وحدها الأول i:

$$S = i\frac{1-i^7}{1-i} = i\frac{1-i^6.i}{1-i} = i\frac{1-(i^2)^3 i}{1-i}$$

$$= i\frac{1+i}{1-i} = i\frac{2i}{2} = i^2 = -1$$

2- لدينا:

$$S = -1 \Rightarrow S = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$$

3- لدينا:

$$S^8 = (-1)^8 = 1$$

حقيقي.

التمرين الثالث

أ) لدينا:

$$z^2 - 8z + 41 = 0$$

$$\Delta = 64 - 4(41)(1) = 64 - 164 = -100$$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{8+10i}{2} = 4+5i$$

$$z_2 = 4-5i$$

ب) لدينا:

$$a = 4+5i\,, b = 3+4i\,, c = 6+7i$$

$$d = 4+7i$$

1- لدينا:

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{6+7i-3-4i}{4+5i-3-4i}$$

$$= \frac{3+3i}{1+i} = 3\frac{1+i}{1+i} = 3$$

إذن النقاط على استقامة واحدة لأن:

$$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BA}} = 3$$

$$\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BA}$$

وهذه علاقة ارتباط خطي.

2- لدينا:

$$z' - d = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-d)$$

$$= -i(z-d) + d$$

$$= -i(z-4-7i) + 4 + 7i$$

$$= -iz + 4i - 7 + 4 + 7i$$

$$= -iz - 3 + 11i$$

3- لدينا:

$$c' - d = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c-d)$$

$$c' = -i(6+7i-4-7i) + 4 + 7i$$

$$= -2i + 4 + 7i = 4 + 5i = a$$

المثلث ACD قائم في D.

4- T انسحاب شعاعه $\overrightarrow{DC}$ و B' صورة B وفق T و A' صورة A وفق T:

a- لدينا:

$$T = \overrightarrow{DC} = c - d = 2$$

$$a = a' + T \Longrightarrow a' = a - T$$

$$= 4 + 5i - 2 = 2 + 5i$$

$$b' = b + T = 3 + 4i + 2 = 5 + 4i$$

b- لدينا:

$$\frac{d-b}{a'-b'} = \frac{4+7i-3-4i}{2+5i-5-4i} = \frac{1+3i}{-3+i}$$

$$= \frac{i(1+3i)}{-3i-1} = -\frac{i(1+3i)}{1+3i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

c- لدينا من الطلب السابق:

$$\arg\left(\frac{d-b}{a'-b'}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\left|\frac{d-b}{a'-b'}\right| = 1$$

وبالتالي:

$$DB \perp D'A' \;, DB = D'A'$$

5- لدينا:

$$e = \frac{a+d}{2} = \frac{4+5i+4+7i}{2} = \frac{8+12i}{2}$$

$$= 4 + 6i$$

$$|A'E| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$|B'E| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|BE| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|CE| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

إذن النقاط تقع على كرة مركزها E ونصف قطرها $\sqrt{5}$.

التمرين الرابع

-1

-2 لدينا:

$$c - 0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(d - 0)$$

$$c = i(2i)$$

$$c = -2$$

-3 لدينا:

$$\frac{m-0}{b-0} = \frac{-1+i}{1-i} = \frac{-(1-i)}{(1-i)} = -1$$

M, B, O على استقامة واحدة

-4 لدينا:

$$\frac{d-c}{m} = \frac{2+2i}{-1+i} = \frac{2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

$$\frac{d-c}{m-0} = 2\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$(DC) \perp (OM)$$

-5 لدينا:

$$z^3 + 4z^2 + 29z = 0$$

$$z(z^2 + 4z + 29) = 0$$

$$z = 0$$

$$z^2 + 4z + 29 = 0$$

$$\Delta = 16 - 116$$

$$= -100$$

$$z_1 = \frac{-4 - i10}{2}$$

$$z_1 = -2 - 5i$$

$$z_2 = -2 + 5i$$

-6 لدينا:

$$\begin{cases} 2z - w = -3 \\ 2\bar{z} + \bar{w} = -3 + 2\sqrt{3}i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2z - w = -3 \\ 2z + w = -3 - 2\sqrt{3}i \end{cases}$$

$$4z = -6 - 2\sqrt{3}i$$

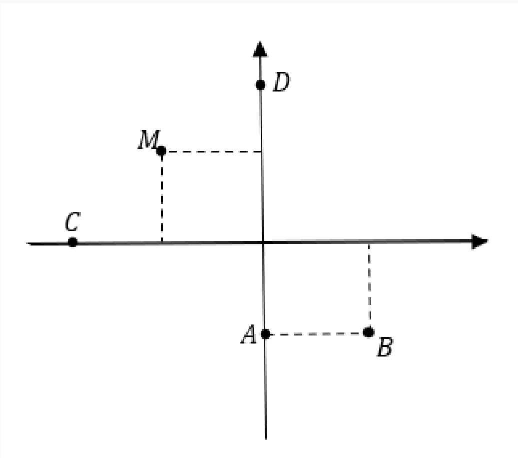
$$z = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow w = 2z + 3$$

$$= -3 - \sqrt{3}i + 3$$

$$w = -\sqrt{3}i$$

-7 لدينا:



$$e - b = -3(m - b)$$

$$e = -3(m - b) + b$$

$$= -3(-2 + 2i) + 1 - i$$

$$= 6 - 6i + 1 - i$$

$$e = 7 - 7i$$

-8 لدينا:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

بجمع (1) (2)

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

إما $x = 2$

أو $x = -2$

بطرح (1) (2)

$$2y^2 = 2$$

$$y^2 = 1$$

إما $y = 1$

أو $y = -1$

بما أن $2xy = -4 < 0 \Leftarrow y, x$ مختلفان بالإشارة

$$z_1 = -2 + i \quad , \quad z_2 = 2 - i$$

التمرين الخامس

لدينا:

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}[e^{ix} + e^{-ix}]^3$$

$$= \frac{1}{8}[e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{-2ix}e^{ix} + e^{-3ix}]$$

$$= \frac{1}{8}[(e^{i3x} + e^{-i3x}) + 3(e^{ix} + e^{-ix})]$$

$$= \frac{1}{8}[2\cos(3x) + 6\cos(x)]$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

لدينا:

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos(x)$$

نعوض في النهاية:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^3 x - 3\cos(x)}{\cos(x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [4\cos^2 x - 3] = -3$$

$$x = 0 \ , x = \frac{\pi}{2} \ , f(x) = \sqrt{\cos^3 x}$$

$$v = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(\cos x + 3\cos x)dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

المهارات الحسابية

أولاً: العاملي:

نرمز له بالرمز $n!$ ويُحسب كما يلي:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$$

ونصطلح أن $1! = 1$ و $0! = 1$

أمثلة توضيحية:

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

كيف نجري الحساب باستخدام العاملي:

بوجهٍ عام يمكن أن نقوم بالرجوع بدءاً من العدد الاصلي ونقف عند أي عدد نريده و نضع (!)

فمثلاً:

$$5! = 5 \times 4!$$

هنا قمنا بالرجوع خطوة واحدة ثم وضعنا (!)

و كان بالإمكان أن نضع:

$$5! = 5 \times 4 \times 3!$$

وبالتالي نكون قد رجعنا خطوتين ثم وضعنا (!)

وهكذا يمكن أن نضع بعض الصيغ التي نستخدمها كثيراً.

$\boldsymbol{n! = n(n-1)!}$
$\boldsymbol{(n+1)! = (n+1)n!}$
$\boldsymbol{(n+2)! = (n+2)(n+1)!}$

ثانياً: الترتيب:

ورمزه p_n^r حيث $n \geq r$

و يُحسب من القانون:

$$p_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(الكبير عاملي على طرحهم عاملي)

أمثلة:

$$p_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$$

$$p_3^1 = \frac{3!}{2!} = 3$$

حسابات سريعة:

$$p_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$p_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$$p_n^n = n!$$

ويمكن أيضاً أن نحسب قيمة أي ترتيب بتشكيل عدد من المضاريب يساوي r ابتداءً من n مثلاً:

$p_4^3 = 4 \times 3 \times 2$ (منرجع 3 خطوات)

$p_5^2 = 5 \times 4$ (منرجع خطوتين)

$p_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$

$p_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

ثالثاً: التوافيق:

رمزه $\binom{n}{r}$ حيث $n \geq r$ ويُحسب من القانون:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

(الكبير عاملي على الصغير عاملي بطرحهم عاملي)

أو $\binom{n}{r} = \frac{p_n^r}{r!}$

أمثلة:

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$

$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \times 2!} = 3$

$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15$

$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \times 2!} = 15$

حسابات سريعة:

$$\binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{1} = n$$

فمثلاً:

$$\binom{10}{9} = 10$$

ويمكن أيضاً أن نحسب أي توافيق بأن نرجع في البسط بقدر r و نقسم على $r!$ مثلاً:

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

ملاحظة للحساب:

إذا كان r أكبر من نصف n يمكن أن نستفيد من العلاقة:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

يعني مثلاً عند حساب $\binom{10}{8}$ فإنه بالطريقة المباشرة سيكون لدينا ثمانِ مضاريب في البسط و ثمانِ مضاريب في المقام و لكن

بملاحظة أن 8 أكبر من نصف العدد 10 نستفيد من العلاقة السابقة و نستبدل 8 بمتممتها لـ 10 أي 2 :

$$\binom{10}{8}=\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2!}=45$$

■ **حل المعادلات التي تحوي P_n^r أو $\binom{n}{r}$:**

- نضع شرط الحل $n \geq r$ ونقاطع الشروط لإيجاد شرط الحل.
- نطبق قانون التراتيب أو التوافيق ونختصر.
- نحل المعادلة الناتجة ونختار الحلول المقبولة.

التمرين (1)

حل المعادلة التالية:

-1 $P_n^5 = 18.P_{n-2}^4$

-2 $P_{n+2}^4 = 14.P_n^3$

التمرين (2)

عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق الشرط المعطى

-1 $\binom{n}{2}=36$

-2 $3\binom{n}{4}=14\binom{n}{2}$

حالة خاصة: المعادلات من الشكل:

العدد الأكبر نفسه

$$\binom{n}{m}=\binom{n}{r}$$

إما $m=r$ أو (العدد الكبير) $m+r=n$

مثال:

$$\binom{10}{3n}=\binom{10}{n+2}$$

مثال:

حل المعادلة الآتية :

$$\binom{12}{n+1}=\binom{12}{2n+2}$$

■ **جمل المعادلات:**

نعطى عدد من الشروط يساوي عدد المجاهيل:

- نبسط الشروط للحصول على جملة معادلتين بسيطة
- نحل الجملة حلاً مشتركاً

التمرين (1)

احسب قيمة كل من n و r إذا علمت أنّ:

$$2\binom{n+1}{r+1}=5\binom{n+1}{r}$$

$$3\binom{n}{r}=8\binom{n}{r-1}$$

■ **علاقات وبراهين:**

يوجد أسلوبان:

-1 الانطلاق من طرف للوصول للآخر

-2 تبسيط كل من الطرفين والوصول إلى نفس الصيغة

التمرين (1)

أثبت صحة العلاقتين:

-1 $\dfrac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\dfrac{n+1}{r+1}$

-2 $\dfrac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}}=\dfrac{n+1}{n+1-r}$

-3 $n\binom{n-1}{r-1}=r\binom{n}{r}$

منشور ثنائي الحد

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(a)^{n-r}.(b)^r$$

ويتم النشر بتعويض قيم متتالية لـ r بدءاً من $r=0$ وحتى $r=n$ كما يلي:

$$=\underbrace{\binom{n}{0}a^n.b^0}_{r=0}+\underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}.b^1}_{r=1}+\cdots+\underbrace{\binom{n}{n}a^0.b^n}_{r=n}$$

مثال: انشر كلاً من العبارات التالية:

-1 $(2+x)^4$

-2 $(3-2i)^3$

-3 $\left(\frac{1}{x}+x^2\right)^3$

التمرين (2)

أثبت أن:

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

التمرين (3)

أثبت أن: أوجد منشور $(1+2x)^n$ ثم استنتج قيمة المجموع:

$$S_n=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\cdots+2^n\binom{n}{n}$$

■ **الحد T_r :**

إذا كان السؤال لا يتطلب إيجاد كامل المنشور وإنما فقط حد من هذا المنشور

- نضع القانون $T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}.b^r$
- نصلح هذا الجداء.
- نضع شرط على الأس الناتج ونحسب r ولنفترض أن ⊛ $= r$
- نعوض في القانون:

$$T_{⊛}=\binom{n}{⊛}a^{n-⊛}.b^{⊛}$$

التمرين (4)

عين في منشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ الحد الذي يحوي x^2 ثم الحد الثابت

التمرين (5)

انشر كلاً من المقادير الآتية:

1- أوجد الحد الذي يحوي $x\sqrt{x}$ في منشور $\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^3$

2- أوجد الحد الذي يحوي x^2y^3 في منشور $(2x+y)^5$

3- أوجد الحد المستقل عن y في منشور $(3y-2)^{10}$

التمرين (6)

1- ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحوي المنشور $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ على حد ثابت؟؟

2- ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحوي المنشور $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ على حد ثابت؟؟

التمرين (7)

اختزل منشور المقدار:

$$(1+x)^6+(1-x)^6$$

التمرين (8)

احسب أمثال x^3 في منشور:

$$(2+3x)^{15}$$

9 5 10 10

آحاد عشرات مئات الآلاف

مافيني حط صفر

قدماً نحو الأمام:

يمكن الاستفادة من منشور ثنائي الحد في إيجاد صيغة بعبارات خطية للنسب المثلثية بدلالة مضاعفات زاوية ما:

1- نضع: $cosx=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$$sinx=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

2- تطبيق منشور ثنائي الحد

3- تجميع الحدود للحصول على علاقات أويلر جديدة

التمرين (9)

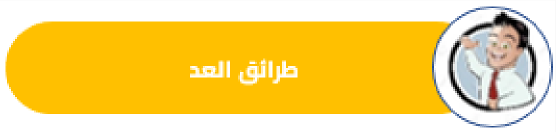
اكتب المقدار $\cos^3 x$ بصيغة عبارات خطية للنسب المثلثية لمضاعفات الزاوية ثم احسب النهاية

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cos3x}{cosx}$$

التمرين (11)

اكتب المقدار $\sin^3 x$ بصيغة عبارات خطية للنسب المثلثية لمضاعفات الزاوية ثم احسب قيمة النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x-3sinx}{\tan^3 x}$$



المبدأ الأساسي في العد:

يُستخدم غالباً عندما يكون السحب مقسماً إلى مراحل فنكتب:

المرحلة الأولى تتم بـ n_1 طريقة

المرحلة الثانية تتم بـ n_2 طريقة

......

المرحلة الأخيرة تتم بـ n_k طريقة

فيكون عدد الطرق الكلية هي جداء عدد طرق كل مرحلة أي:

$$n_1\times n_2\times\ldots\times n_k$$

مثال: نتأمل المجموعة:

$$D=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

ما عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها من عناصر D و عدد منازلها 4 وخانة مئاتها زوجية؟

4 5

آحاد عشرات

الحل

- المرحلة الأولى تتم بـ .... طريقة
- المرحلة الثانية تتم بـ .... طريقة
- المرحلة الثالثة تتم بـ .... طريقة
- المرحلة الرابعة تتم بـ ...... طريقة

⇐ عدد الطرائق المطلوبة:

....

....

مثال: لتكن $S=\{1,2,5,8,9\}$

1- كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمن تشكيله من عناصر S ؟

5 5

آحاد عشرات

....

....

....

ملاحظة:

هو لم يطلب أن تكون المنزلتين مختلفتين وبالتالي التكرار مسموح في الخانات

2- كم عدداً مؤلفاً من منزلتين ومختلفة الأرقام يمكن تشكيله من عناصر S ؟؟

....
....
....
....

3- كم عدداً زوجياً مؤلف من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر S ؟؟؟

عشرات	آحاد
5	2

....
....
....

4- كم عدداً زوجياً مؤلف من منزلتين مختلفتين يمكن تشكيله من عناصر s؟

....
....
....

التمرين (1) (شروط متقاطعة)

لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$

ولدينا H مجموعة من الأعداد التي تتمتع بالخصائص التالية:

أرقامها مختلفة ومأخوذة من S ص

لا يوجد أي عدد منها من مضاعفات 5

كل عدد منها أكبر تماماً من 2000

فما هو عدد عناصر H ؟

التمرين 2: (شروط متقاطعة)

لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

كم عدداً مؤلفاً من 6 منازل مختلفة يمكن تشكيله من عناصر S بحيث يكون زوجياً و أكبر تماماً من 300.000

تمهيد: تعريف القائمة:

القائمة المكونة من r خانة تعني عنصر مرّتب يحوي r خانة مسحوبة من مجموعة تحوي n عنصراً

و هذه القائمة قد تشتمل على تكرار في الخانات أو لا تشتمل

فمثلاً لو كان لدينا المجموعة $A = \{a, b, c, d, e\}$ المكونة من 5 عناصر فإن

(a, b, c) قائمة و (a, c, b) قائمة مختلفة

و (a, a, b) قائمة و (a, b, a) قائمة مختلفة

■ **التباديل: (كل من كل- الترتيب مهم – دون تكرار)**

إذا كانت لدينا المجموعة $\{a, b, c\}$, فنلاحظ أنه يمكن تشكيل القوائم التالية :

$$abc \quad acb \quad cab \quad cba \quad bca \quad bac$$

وعدد هذه التباديل $3!$ أي 6

بالحالة العامة عدد التباديل لمجموعة مكونة من n عنصراً هو $n!$

انتبه: إذا كان لدينا بعض العناصر المكررة مثلاً: $\{a, a, b\}$

$$aab \quad aba \quad baa$$

عددهم هنا:

$$\frac{(\text{العدد الكلي})!}{(\text{التكرار})!} = \frac{3!}{2!} = 3$$

مثال: كم كلمة مكونة من 5 أحرف مختلفة يمكن تشكيلها من حروف كلمة $SYRIA$

الجواب: ....

و هذا يوافق المبدأ الأساسي في العد :

....
..

مثال: بكم طريقة يمكن توزيع 4 طلاب على 4 كراسي

الجواب : ....

مثال: بكم طريقة يمكن توزيع 3 هدايا على 3 طلاب بشرط أن يحصل كل طالب على جائزة واحدة فقط.

الجواب : ....

■ **التراتيب (القوائم دون تكرار) : (جزء من كل والترتيب مهم ودون إعادة)**

رمزه P_n^r , وقانونه :

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \; ; n \geq r$$

ويستخدم لحساب عدد الطرق الممكنة لتشكيل قائمة حجمها r من مجموعة عدد عناصرها n بشكل مرتب ودون تكرار.

مثال: يتألف مجلس إدارة نادي من سبعة أعضاء , بكم طريقة يمكن اختيار رئيس أو نائب رئيس وأمين سر !؟

نلاحظ أنه المطلوب أن نسحب جزءاً من كل و أن الترتيب مهم (حيث تغيير الترتيب يؤدي إلى تغيير توزيع المناصب)

....

مثال :

اشترك مئة سابق في سباق , يجري توزيع ثلاثة ميداليات (ذهبية , فضية , برونزية)

نلاحظ أنه المطلوب أن نسحب جزءاً من كل و أن الترتيب مهم (حيث تغيير الترتيب يؤدي إلى تغيير توزيع المراكز)

....
....

■ القوائم مع تكرار (n^r) : (جزء من كل والترتيب مهم والتكرار مسموح)

مثال :

بكم طريقة يمكن تشكيل كلمة مكونة من ثلاث حروف من حروف كلمة $Syria$ ؟!

(كونه لم يذكر أن حروف الكلمة المطلوبة يجب أن تكون مختلفة و أننا نسحب جزء من كل فالقانون هو n^r) حيث n عدد الخيارات المتاحة (الكل) و r عدد الخيارات المطلوبة (الجزء)

....
....

■ التوافيق: (جزء من كل والترتيب غير مهم أي السحب معاً)

عدد المجموعات الجزئية ذات الحجم r والمأخوذة من عناصر المجموعة الأكبر ذات الحجم n حيث $(n \geq r)$

هو $\binom{n}{r}$ ويحسب بالشكل :

$$\boxed{\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

تذكر : عندما نستخدم التوافيق فنحن هنا لا نهتم بترتيب العناصر المسحوبة و تذكر:

$$\binom{n}{0} = 1\,, \binom{n}{1} = n\,, \binom{n}{n} = 1\,,$$
$$\binom{n}{n-1} = n$$

في المسائل $\begin{pmatrix}\text{عندي}\\\text{بدي}\end{pmatrix}$

مثال :

نريد تأليف لجنة مكونة من أربعة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي خمسة رجلاً وأربع نساء .

1- كم لجنة مختلفة يمكن تأليفها ؟
2- كم لجنة مختلفة مكونة من رجلين و امرأتين يمكن تأليفها ؟
3- كم لجنة مختلفة تحوي رجلين على الأكثر
4- كم لجنة مختلفة تحوي على 3 نساء على الأقل

التمرين (1)

يلتقي عشرة أصدقاء في حفل , يصفح كل منهم الأشخاص التسعة الأخرين مرة واحدة فقط

كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل ؟

عمم النتيجة السابقة إلى حالة n صديقاً

إضافي :

إذا كان عدد المصافحات 10 فما عدد الأشخاص في الحفل

التمرين (2)

في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن سبعة أسئلة من عشرة

بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟

بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة إذا علمت أن الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية ؟

التمرين (3)

أراد صف فيه 12 طالب و 8 طالبات تأليف لجنة نشاط للصف مؤلفة من 5 أشخاص

كم لجنة مختلفة يمكن تشكيلها في الحالات الآتية ؟!

اللجنة مؤلفة من 3 طلاب و طالبتين

في اللجنة طالبتان على الأكثر

في اللجنة طالبتان على الأقل

التمرين (4)

يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرعة يفتح عند إدخال رماز (كود) مكون من عدد ذي أربع خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أياً من القيم : $0,1,2,3,\ldots,9$

1- ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل
2- ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل و المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى ؟!
3- عند فصل المذياع عن التغذية الكهربائية , يجب إعادة إدخال الرماز الصحيح مجدداً

يتذكر المالك أن الرماز الصحيح مكون من الأرقام 9,9,5,1 ولكنه نسي ترتيبها

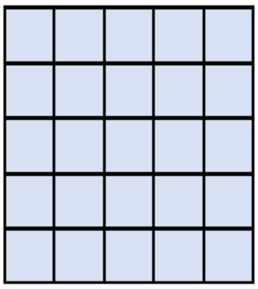
كم رمازاً مختلفاً يمكن تشكيله من هذه الأرقام ؟

التمرين (5)

أثبت أن عدد أقطار مضلع محدب عدد رؤوسه n حيث $n \geq 4$ يعطى بالعلاقة $\frac{n(n-3)}{2}$

التمرين (6)

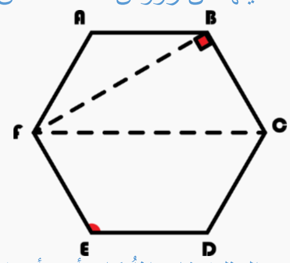
ما عدد المستطيلات في الشكل المجاور ؟



المسألة (1)

نتأمل مسدساً منتظماً $ABCDEF$

1 ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من رؤوس هذا المسدس



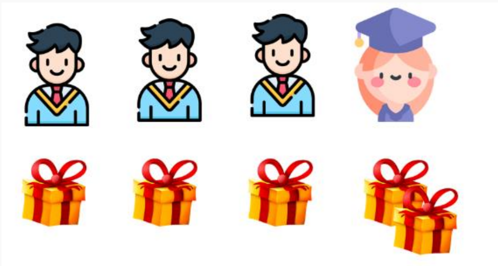
2 ما عدد المثلثات القائمة: يكون المثلث قائم إذا كان أحد أضلاعه قطراً

3 ما عدد المثلثات منفرجة الزاوية

إضافي: ما عدد المثلثات حادة الزوايا

المسألة (2)

يريد معلم توزيع $n+1$ جائزة مختلفة على n تلميذاً بحيث يحصل كل تلميذ على هدية واحدة على الأقل . ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية:



المسألة (3)

لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,\dots,30\}$

كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S و مجموعها من مضاعفات العدد 3

تمهيد

....
....
....
....
....
....
....

مسائل إضافية:

المسألة (1)

يحتوي مغلف على 5 بطاقات , اثنتان تحملان الرقم , واثنتان تحملان الرقم , واحدة تحمل الرقم , نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي دون إعادة و المطلوب :

1- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما 4
2- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما عدد فردي
3- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين بطاقتين بطاقتين مجموعهما 2 أو 5

المسألة (2)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء و كرتين بيضاوين و كرة زرقاء

نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً و المطلوب :

1- ما عدد النتائج التي تشتمل على 3 كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى
2- ما عدد النتائج التي تشتمل على كرتين من نفس اللون
3- ما عدد النتائج التي تشتمل على كرات من لون واحد

المسألة (3)

رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ثلاثة كتب للمؤلف A و 4 كتب للمؤلف B

1- بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B
2- بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كان كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية

المسألة (4)

صندوق يحمي خمس كرات حمراء و خمس كرات خضراء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً

1- كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات حمراء
2- كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل كرتين حمراوين و كرة خضراء

المسألة (5)

احسب قيمة r إذا علمت :

$$\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$$

المسألة (6)

ما هي أمثال x^2y في منشور

$$\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y}\right)^8$$

المسألة (7)

مغلق يحوي 6 بطاقات مرقمة بالأرقام 1,2,3,4,5,6

نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي دون إعادة

1- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين أصغرهما 3
2- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين أصغرهما 1
3- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما زوجي
4- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعها 5

المسألة (8)

نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير و نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمس أشخاص . بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

المسألة (9)

لتكن المجموعة $S=\{2,3,5,6,7,9\}$

1- ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى و أرقامها مأخوذة من S
2- ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلة و أرقامها مأخوذة من S و كل عدد منها من مضاعفات العدد 5 و أصغر من 500

المسألة (10)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء مرقمة بالأرقام 1و2 و3

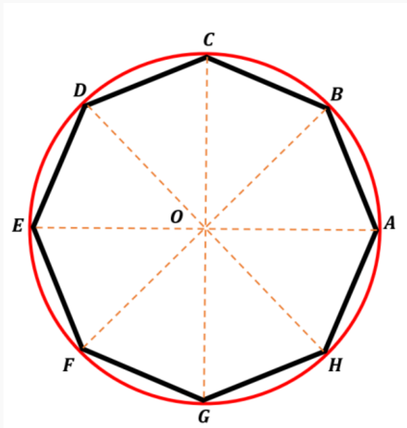
و كرتين زرقاوين مرقمين بالأرقام 1و2

و كرتين بيضاوين مرقمين بالأرقام 2و3

نسحب من الصندوق 3 كرات معاً

1- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات مختلفة الألوان
2- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات تحمل نفس الرقم
3- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات مختلفة اللون و تحمل نفس الرقم

المسألة (11)



نتأمل في معلم متجانس $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$ في المستوي الشكل المرسوم جانباً .

لدينا ثما نقاط A,B,C,D,E,F,G,H موزعة على دائرة نصف قطرها 1 . و التي تمثل رؤوس مثمن منتظم

1- أثبت أن الشكل الجبري للعدد b هو
$$b=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$
2- اكتب الأعداد a,c,d بالشكل الجبري
3- ليكن I منتصف $[AD]$ استنتج قياساً للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})$
4- احسب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I بصيغتيه الجبرية و الأسية و استنتج $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$
5- ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن
6- ما عدد المثلثات التي نحصل عليها من ثلاث نقاط من النقاط A,B,C,D,E,F,G,H,O
7- ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن .

سؤال إضافي

يلتقي n شخصاً في حفل ويصافح كل منهم الأشخاص البقية فإذا علمت أن عدد المصافحات التي تتم في الحفل 66 , احسب عدد الأشخاص في الحفل.

سؤال إضافي تاني

التقى عشرة أصدقاء في حفل, ما عدد المصافحات التي ممكن ان تتم بينهم إذا علمت أن في الحفل ثلاثة اشخاص متخاصمين.

إن عدد طرائق النجاح متناسبٌ طرداً مع عدد المحاولات و عدد العثرات و عدد المرات التي تقع فيها ثم تنهض مرة أخرى لأنك قد علمت أن في نهاية الطريق جِنَانٌ و قطاف يستحقُ تعبك و اجتهادك

إياك أن تقع و تبقى طريح الأرض .. فإن العلا ينادي لك و يستدعيك

فقط قم و اسعَ .. فلن يخيب الله مسعى السعاة

لن يبلى الشغف

التمرين (1)

-1

$$P_n^5 = 18P_{n-2}^4$$

شروط الحل :

$$n \geq 5 \ \& \ n-2 \geq 4$$
$$n \geq 6$$

فشرط الحل الكلي $n \geq 6$

نبسط :

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$
$$= 18\,(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

نختصر :

$$n(n-1) = 18(n-5)$$
$$n^2 - n = 18n - 90$$
$$n^2 - 19n + 90 = 0$$
$$(n-10)(n-9) = 0$$
$$n = 10 \ or \ n = 9$$

و كلاهما مقبول

-2 $\quad P_{n+2}^4 = 14P_n^3$

شروط الحل :

$$n+2 \geq 4 \quad \& \ n \geq 3$$
$$n \geq 2 \quad \& \ n \geq 3$$

نقاطع : $n \geq 3$

نبسط :

$$(n+2)(n+1)(n)(n-1) = 14n\,(n-1)(n-2)$$

$$n^2 + 3n + 2 = 14n - 28$$
$$n^2 - 11n + 30 = 0$$
$$(n-6)(n-5) = 0$$
$$n = 6 \ \ , n = 5$$

التمرين (2)

عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق الشرط المعطى

-1 $\quad \binom{n}{2} = 36$

شرط الحل : $n \geq 2$

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 36$$
$$n^2 - n = 72$$
$$n^2 - n - 72 = 0$$
$$(n-9)(n+8) = 0$$

$n = 9 \ \ , n = -8$ مرفوض

-2 $\quad 3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

شروط الحل: $n \geq 4 \ \ , n \geq 2$

فالشرط الكلي :

$$n \geq 4$$

$$3\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 14\,\frac{n(n-1)}{2}$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$
$$(n-10)(n+5) = 0$$

$n = 10 \quad , \qquad n = -5$ مرفوض

مثال

$$\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$$

شروط الحل :

$$10 \geq n+2 \to 8 \geq n$$
$$10 \geq 3n \to \frac{10}{3} \geq n$$

نقاطع $n \leq \frac{10}{3}$

إما : $3n = n + 2$

و بالتالي $n = 1$

أو : $3n + n + 2 = 10$

$$n = 2$$

و كلاهما مقبول

مثال

حل المعادلة الآتية :

$$\binom{12}{n+1} = \binom{12}{2n+2}$$

الشرط الأول : $12 \geq n + 1$

$$11 \geq \text{n}$$

الشرط الثاني :

$$12 \geq 2n + 2$$
$$5 \geq n$$

نقاطع : $n \leq 5$

إما $n + 1 = 2n + 2$ و بالتالي $n = -1$ مرفوض

أو $n + 1 + 2n + 2 = 12$

$$3n = 9$$
$$n = 3$$

التمرين (1)

$$2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$$
$$3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1}$$

لنبسط المعادلة الأولى :

$$2\,\frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!} = 5\,\frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$2\,\frac{1}{(r+1)r!\,(n-r)!} = 5\,\frac{1}{r!\,(n-r+1)(n-r)!}$$

$$\frac{2}{r+1}=\frac{5}{n-r+1}$$
$$2n-2r+2=5r+5$$
$$2n-7r=3 \ldots (1)$$

نبسط الثانية :

$$3\frac{n!}{r!\,(n-r)!}=8\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$\frac{3}{r(r-1)!\,(n-r)!}=$$

$$\frac{8}{(r-1)!\,(n-r+1)(n-r)!}$$

$$\frac{3}{r}=\frac{8}{n-r+1}$$
$$3n-3r+3=8r$$
$$3n-11r=-3 \ldots . (2)$$

الآن لحلهما حلاً مشتركاً نضرب الأولى بـ 3 و الثانية بـ -2 :

$$6n-21r=9$$
$$-6n+22r=6$$

بالجمع :

$$r=15$$

نعوض في (1) :

$$n=45$$

<u>تمارين صفحة (35):</u>

التمرين (1)

1- لدينا:

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{\frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!}}{\frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

$$=\frac{n+1}{r+1}$$

2- لدينا:

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}}=\frac{\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}}{\frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

$$=\frac{n+1}{n+1-r}$$

3- لدينا:

$$n\binom{n-1}{r-1}=r\binom{n}{r}$$

$$\frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}=\binom{n}{r}$$

$$\frac{n}{r}\,\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$\frac{n}{r}\,\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!}=\frac{n\,(n-1)!}{r\,(r-1)!\,(n-r)!}$$

$$\frac{n}{r}=\frac{n}{r}$$

محققة.

المثال

1- لدينا:

$$(2+x)^4=\sum_{r=0}^{4}\binom{4}{r}\,2^{4-r}\,x^r$$
$$=\binom{4}{0}2^4x^0$$
$$+\binom{4}{1}2^3x^1$$
$$+\binom{4}{2}2^2x^2$$
$$+\binom{4}{3}2^1x^3$$
$$+\binom{4}{4}2^0x^4$$
$$=16+32x+24x^2+8x^3+x^4$$

2- لدينا:

$$(3-2i)^3=\sum_{r=0}^{3}\binom{3}{r}\,3^{3-r}\,(-2i)^r$$
$$=\binom{3}{0}3^4(-2i)^0$$
$$+\binom{3}{1}3^3(-2i)^1$$
$$+\binom{3}{2}3^2(-2i)^2$$
$$+\binom{3}{3}3^1(-2i)^3$$
$$=81-162i-54+6i=27-156i$$

3- لدينا:

$$\left(\frac{1}{x}+x^2\right)^3=\sum_{r=0}^{3}\binom{3}{r}\left(\frac{1}{x}\right)^{3-r}(x^2)^r$$
$$=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{x}\right)^4(x^2)^0$$
$$+\binom{3}{1}\left(\frac{1}{x}\right)^3(x^2)^1$$

$$+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{2}(x^2)^2$$

$$+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^{1}(x^2)^3$$

$$=\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x}+3x^2+x^5$$

التمرين (2)

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(1)^{n-r}(1)^r$$

$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$$

التمرين (3)

$$(1+2x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(1)^{n-r}(2x)^r$$

$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}2x+\binom{n}{2}2^2x^2+\cdots+\binom{n}{n}2^nx^n$$

بأخذ $x=1$:

$$(1+2)^n=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\cdots+2^n\binom{n}{n}$$

$$=3^n$$

التمرين (4)

$$T_r=\binom{10}{r}x^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$=\binom{10}{r}x^{10-r}x^{-r}$$

$$=\binom{10}{r}x^{10-2r}$$

بوضع:

$$10-2r=2$$

$$r=4$$

$$T_4=\binom{10}{4}x^2=210x^2$$

بوضع:

$$10-2r=0$$

$$r=5$$

$$T_5=\binom{10}{5}=252$$

التمرين (5)

$$T_r=\binom{3}{r}x^{3-r}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^r$$

$$=\binom{3}{r}x^{3-r}(-2)^r x^{-\frac{1}{2}r}$$

$$=\binom{3}{r}(-2)^r . x^{3-\frac{3}{2}r}$$

نلاحظ أن قوة $x\sqrt{x}=x.x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}$, نضع شرط:

$$3-\frac{3}{2}r=\frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2}r=-\frac{3}{2}$$

$$r=1$$

$$T_1=-6x\sqrt{x}$$

-2 لدينا:

$$T_r=\binom{5}{r}(2x)^{5-r}y^r$$

نضع شرطاً على y:

$$r=3$$

نعوض في الـ x للتحقق:

$$5-r=5-3=2$$

محققة.

$$T_2=10\times 4x^2y^3=40x^2y^3$$

-3 لدينا:

$$T_r=\binom{10}{r}(3y)^{10-r}(-2)^r$$

نضع شرطاً على y:

$$10-r=0$$

$$r=10$$

$$T_{10}=-2$$

التمرين (6)

-1 لدينا:

$$T_r=\binom{n}{r}(x^2)^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$=\binom{n}{r}x^{2n-3r}$$

نضع شرطاً:

$$2n-3r=0$$

$$2n=3r$$

$$n = \frac{3}{2}r$$

-2 لدينا:

$$T_r = \binom{n}{r} x^{n-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r$$

$$= \binom{n}{r} x^{n-r}.x^{-\frac{1}{2}r}$$

$$= \binom{n}{r} x^{n-\frac{3}{2}r}$$

نضع شرطاً:

$$n - \frac{3}{2}r = 0$$

$$n = \frac{3}{2}r$$

التمرين (7)

$$(1+x)^6 = \sum_{r=0}^{6} \binom{6}{r}\, 1^{6-r}\, x^r$$

$$= \binom{6}{0}x^0 + \binom{6}{1}x^1 + \binom{6}{2}x^2$$

$$+ \binom{6}{3}x^3 + \binom{6}{4}x^4 + \binom{6}{5}x^5 + \binom{6}{6}x^6$$

ولدينا:

$$(1-x)^6 = \sum_{r=0}^{6} 1^{6-r}\,(-x)^r$$

$$= \binom{6}{0}x^0 - \binom{6}{1}x^1 + \binom{6}{2}x^2$$

$$- \binom{6}{3}x^3 + \binom{6}{4}x^4 - \binom{6}{5}x^5 + \binom{6}{6}x^6$$

بالجمع نجد:

$$= 2\left[\binom{6}{0}x^0 + \binom{6}{2}x^2 + \binom{6}{4}x^4 + \binom{6}{6}x^6\right]$$

$$= 2[1 + 15x^2 + 15x^4 + x^6]$$

$$= 2 + 30x^2 + 30x^4 + 2x^6$$

التمرين (8)

$$T_r = \binom{15}{r}\, 2^{15-r}\,(3x)^r$$

بوضع $r = 3$:

$$T_3 = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2} \times 2^{12} \times 27x^3$$

$$= 12{,}285 \times 2^{12} x^3$$

$$12{,}285 \times 2^{12}$$

التمرين (9)

لدينا:

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left[e^{ix} + e^{-ix}\right]^3$$

$$= \frac{1}{8}\left[e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{-2ix}e^{ix} + e^{-3ix}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}[2\cos(3x) + 6\cos(x)]$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

لدينا:

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos(x)$$

نعوض في النهاية:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^3 x - 3\cos(x)}{\cos(x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} [4\cos^2 x - 3] = -3$$

التمرين (10)

$$\sin^3 x = \frac{1}{-8i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3$$

$$= -\frac{1}{8i}\left[e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{-2ix}e^{ix} - e^{-3ix}\right]$$

$$= -\frac{1}{8i}\left[\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) - 3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{8i}[2i\sin(3x) - 6i\sin(x)]$$

$$\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin(x)$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(\sin(3x) - 3\sin(x))$$

$$4\sin^3 x = \sin(3x) - 3\sin(x)$$

نعوض في النهاية:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\sin^3 x}{\tan^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sin^3 x}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}} = \lim_{x\to 0} 4\cos^3 x = 4$$

تمارين صفحة 37:

التمرين (1)

الحالة الأولى: إذا تم أخذ الرقم 5 في احاد الألوف:

$$\underbrace{1}_{\text{آحاد ألوف}} \times \underbrace{4}_{\text{آحاد}} \times \underbrace{3}_{\text{عشرات}} \times \underbrace{2}_{\text{مئات}} = 24 \text{ عنصر}$$

الحالة الثانية: إذا لم يتم أخذ 5 في احاد الألوف:

$$\underbrace{3}_{\text{آحاد ألوف}} \times \underbrace{3}_{\text{آحاد}} \times \underbrace{3}_{\text{عشرات}} \times \underbrace{2}_{\text{مئات}} = 54 \text{ عنصر}$$

فعدد عناصر H يساوي مجموع الحالات:

$$54 + 24 = 78 \text{ عنصر}$$

التمرين (2)

الحالة الأولى: في حال أخذنا الرقم 2 في الآحاد:

$$\underbrace{1}_{\text{آحاد}} \times \underbrace{4}_{\text{مئات الألوف}} \times \underbrace{4}_{\text{عشرات الألوف}} \times \underbrace{3}_{\text{آحاد الألوف}} \times \underbrace{2}_{\text{مئات}} \times \underbrace{1}_{\text{عشرات}}$$
$$= 96 \text{ طريقة}$$

الحالة الثانية: في حال لم نأخذ الرقم 2 في الآحاد:

$$\underbrace{2}_{\text{آحاد}} \times \underbrace{3}_{\text{مئات الألوف}} \times \underbrace{4}_{\text{عشرات الألوف}} \times \underbrace{3}_{\text{آحاد الألوف}} \times \underbrace{2}_{\text{مئات}} \times \underbrace{1}_{\text{عشرات}}$$
$$= 144 \text{ طريقة}$$

فيكون عدد الطرائق الكلي:

$$96 + 144 = 240 \text{ طريقة}$$

تمارين صفحة 39:

المثال

1- لدينا:

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3 \times 6 \times 7 = 126$$

2- نريد 2 رجال 2 نساء:

$$\binom{4}{2} . \binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60$$

3- لدينا:

$$\binom{5}{0}\binom{4}{4} + \binom{5}{1}\binom{4}{3} + \binom{5}{2}\binom{4}{2}$$
$$= 1 + 20 + 60 = 81$$

4- لدينا:

$$\binom{4}{3}\binom{5}{1} + \binom{4}{4}\binom{5}{0}$$
$$20 + 1 = 21$$

التمرين (1)

$$\binom{10}{2} = 45$$

وفي حالة n شخصاً:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

إضافي:

لدينا:

$$\binom{n}{2} = 10$$
$$\frac{n(n-1)}{2} = 10$$
$$n(n-1) = 20$$
$$n^2 - n - 20 = 0$$
$$(n-5)(n+4) = 0$$

إما:

$n = 5$ مقبول أو $n = -4$ مرفوض.

التمرين (3)

طالب تقدم للامتحان المكون من 10 أسئلة ويجب الإجابة على 7 أسئلة

1- لدينا 7 أسئلة يجب الإجابة عنها ولكن ترتيبها غير مهم:

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}$$
$$= 120$$

2- هنا الترتيب مهم في أول أربعة أسئلة ولكن غير مهم في الثلاث أسئلة الباقية:

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

التمرين (4)

اللجنة الأولى: 3 طلاب وطالبتين:

$$\binom{12}{3}\binom{8}{2} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 2} = 6{,}160$$

اللجنة الثانية: طالبتان على الأكثر:

$$\binom{12}{5}\binom{8}{0} + \binom{12}{4}\binom{8}{1} + \binom{12}{3}\binom{8}{2}$$

حسبهن لحالك 😊

اللجنة الثالثة: طالبتان على الأقل, بأخذ المتمم طالبة على الأكثر:

$$\binom{12}{5}\binom{8}{0} + \binom{12}{4}\binom{8}{1}$$
$$792 + 3960 = 4752$$

فتكون النتيجة:

$$\binom{20}{5} - 4752 = 15504 - 4752 = 10752$$

التمرين (5)

1- عدد الرمازات:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$$

2- عدد الرمازات:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

3- عدد الرمازات:

$$\frac{4!}{2!} = 12 \text{ رماز}$$

التمرين (6)

عدد المستقيمات في أي مضلع يكون:

$$\binom{n}{2}$$

ولكن عدد الأقطار هو عدد المستقيمات التي يمكن تشكيلها من رؤوس هذا المضلع ناقص منها عدد الأضلاع , وعدد الأضلاع هو نفسه عدد الرؤوس وبالتالي تكون:

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n$$

$$= \frac{n(n-1) - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2} \; ; \; \forall n \geq 4$$

التمرين (7)

نريد أخذ ضلعان افقيان من اصل ستة اضلاع وضلعان شاقوليان من اصل ستة اضلاع وبالتالي:

$$\binom{6}{2}.\binom{6}{2} = 225$$

المسألة (1)

1- كل مثلث يحتاج إلى ثلاث رؤوس:

$$\binom{6}{3} = 20 \text{ مثلث}$$

2- يكون المثلث قائم إذا كان أحد اضلاعه قطراً في الدائرة المارة برؤوس الشكل , وكل قطر في الشكل يشكل 4 مثلثات قائمة:

$$\underbrace{3}_{\text{أقطار}} \times \underbrace{4}_{\text{مثلثات}} = 12 \text{ مثلث قائم}$$

3- كل رأس يشكل مثلث منفرج الزاوية وبالتالي يكون هناك 6 مثلثات منفرجة.

إضافي: عدد المثلثات الحادة:

$$\underbrace{20}_{\text{كلية}} - \underbrace{12}_{\text{قائمة}} - \underbrace{6}_{\text{منفرجة}} = 2$$

المسألة (2)

نريد إعطاء طالب ما منهم هديتان وباقي الطلاب هدية واحدة:

$$\binom{n+1}{2}.n!$$

المسألة (3)

المجموعة الأولى: ستكون تحوي جميع العناصر التي باقي قسمتها على 3 يساوي الصفر:

$$S_0 = \{3,6,9,12, \dots ,24,27,30\}$$

المجموعة الثانية: ستكون تحوي جميع العناصر التي باقي قسمتها على 3 يساوي 1:

$$S_1 = \{1,4,7,10,13, \dots ,25,28\}$$

المجموعة الثالثة: ستكون تحوي جميع العناصر التي باقي قسمتها على 3 يساوي 2:

$$S_2\{2,5,8,11, \dots ,26,29\}$$

فالحالات الممكنة لتحقيق الشرط :

$$S_0S_0S_0 \;\; or \;\; S_1S_1S_1 \; or \; S_2S_2S_2 \; or \; S_0S_1S_2$$

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}$$

$$= 120 + 120 + 120 + 1000 = 1360$$

المسائل الإضافية

المسألة (1)

	1	1	2	2	3
1		1,1	1,2	1,2	1,3
1	1,1		1,2	1,2	1,3
2	2,1	2,1		2,2	2,3
2	2,1	2,1	2,2		2,3
3	3,1	3,1	3,2	3,2	

1- عدد نتائج كرتين مجموعهما 4يساوي 5.
2- عدد نتائج كرتين مجموعهما عدد فردي 12.
3- عدد نتائج كرتين مجموعهما 5 أو 2 يساوي 6.

المسألة (2)

1- لدينا:

$$\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 6$$

2- لدينا:

$$(WWW') \;\; or \;\; (RRR')$$

$$\binom{2}{2}\binom{4}{1} + \binom{3}{2}\binom{3}{1}$$

$$= 4 + 9 = 13$$

-3 لدينا:

$$(RRR)$$

$$\binom{3}{3} = 1$$

المسألة (3)

-1 لدينا:

$$P_4^3 . 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 576$$

-2 لدينا:

$$1 \times 6! = 720$$

المسألة (4)

-1 لدينا:

$$(RRR)$$

$$\binom{5}{3} = 10$$

-2 لدينا:

$$\binom{5}{2}\binom{5}{1} = 50$$

المسألة (5)

شرط الحل:

$$E:]-\infty, 4[$$

$$\frac{r!\,(4-r)!}{4!} = \frac{r!\,(5-r)!}{5!} + \frac{r!\,(6-r)!}{6!}$$

$$1 = \frac{5-r}{5} + \frac{(6-r)(5-r)}{30}$$

$$1 = (5-r)\left[\frac{6+6-r}{30}\right]$$

$$30 = (5-r)(12-r)$$

$$60 - 5r - 12r + r^2 = 30$$

$$r^2 - 17r + 30 = 0$$

$$(r-15)(r-2) = 0$$

إما:

مقبول $r = 2$

أو:

مرفوض $r = 15$

المسألة (6)

لدينا:

$$T_r = \binom{8}{r}\left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r}\left(\frac{x}{y}\right)^r$$

$$= \binom{8}{r} y^{16-2r} x^{r-8} x^r y^{-r}$$

$$= \binom{8}{r} y^{16-3r} x^{2r-8}$$

نضع:

$$16 - 3r = 1$$

$$3r = 15$$

$$r = 5$$

نتحقق في x:

$$2(5) - 8 = 2$$

وبالتالي:

$$T_5 = \binom{8}{5} x^2 y = \binom{8}{3} x^2 y = 56x^2 y$$

المسألة (7)

	1	2	3	4	5	6
1		1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1		2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2		3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3		4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4		5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	

-1 عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين أصغرهما 3 يساوي 6.

-2 عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين أصغرهما 1 يساوي 10

-3 عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما زوجي يساوي 12

-4 عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما 5 يساوي 4.

المسألة (8)

بفرض الشخصين المتخاصمين x, y و الأشخاص البقية a, b, c فنميز الحالات الآتية :

نميز الحالات

x في الجنة | y في اللجنة | x و y ليسا في اللجنة

حالة x في اللجنة:

$$\underbrace{\binom{3}{2}}_{a,b,c \text{ شخصان من }} \times \underbrace{3!}_{\text{تبديلاتهم}} = 18$$

حالة y في اللجنة:

$$\underbrace{\binom{3}{2}}_{a,b,c \text{ شخصان من}} \times \underbrace{3!}_{\text{تبديلاتهم}} = 18$$

حالة x, y ليسو في اللجنة:

$$\underbrace{\binom{3}{3}}_{a,b,c \text{ أشخاص من } 3} \times \underbrace{3!}_{\text{تبديلاتهم}} = 6$$

النتائج الممكنة:

$$18 + 18 + 6 = 42$$

المسألة (9)

1- لدينا:

$$\underbrace{6}_{\text{مئات}} \times \underbrace{5}_{\text{عشرات}} \times \underbrace{4}_{\text{آحاد}} = 120 \text{ عدد}$$

2- نريد أخذ الرقم 5 حصراً في الآحاد , وإحدى الرقمين 3 , 2 في المئات فيكون عدد الأعداد:

$$\underbrace{2}_{\text{مئات}} \times \underbrace{4}_{\text{عشرات}} \times \underbrace{1}_{\text{آحاد}} = 8 \text{ عدد}$$

المسألة (10)

1- لدينا:

$$(RWB)$$

$$\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 12$$

2- لدينا:

$$(2,2,2)$$

$$\binom{3}{3} = 1$$

3- لدينا:

$$(R_2, B_2, W_2)$$

$$\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1} = 1$$

المسألة (11)

1- لدينا:

$$b = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

2- لدينا:

$$a = 1 \,, c = i \,, d = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

3- لدينا:

نلاحظ أن المثلث AOD متساوي ساقين طول كل من ضلعيه 1 و OI منصف في المثلث وبالتالي:

$$\arg\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}\right) = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

4- لدينا:

$$Z_I = \frac{a+d}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$= \frac{\left(2-\sqrt{2}\right) + i\sqrt{2}}{4}$$

بالشكل الأسي:

$$Z_I = \left|\overrightarrow{OI}\right| e^{i\frac{3\pi}{8}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2 + 2}{16}}\, e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

$$= \frac{\sqrt{4 - 4\sqrt{2} + 2 + 2}}{4} e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

$$= \frac{\sqrt{8 - 4\sqrt{2}}}{4} e^{i\frac{3\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

لدينا:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

5- لدينا:

$$\binom{8}{3} = 56 \text{ مثلث}$$

6- عدد المثلثات هو عدد المثلثات الكلي ناقص النقاط التي تقع على استقامة واحدة:

$$\binom{9}{3} - 4 = 80 \text{ مثلث}$$

7- المثلث القائم يجب أن يكون أحد أضلاعه قطراً , كل قطر يشكل 6 مثلثات قائمة:

$$6 \times 4 = 24 \text{ مثلث قائم}$$

سؤال إضافي

$$\binom{n}{2} = 66$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 66$$

$$n^2 - n - 132$$

$$n^2 - n - 132 = 0$$

$$\Delta = 1 + (4)(132) = 529$$

$$\sqrt{\Delta} = 23$$

$$n_1 = \frac{1+23}{2} = 12$$ مقبول

$$n_2 = \frac{1-23}{2} = -11$$ مرفوض

سؤال إضافي ثاني:

$$\binom{10}{2} - \binom{3}{2} = 45 - 3 = 42$$

مسائل الاحتمالات – القسم (1)

<table>
<tr><th>تجربة قطعة النقود</th><th>تجربة حجر النرد</th><th>تجربة الولادات</th></tr>
<tr>
<td>- رمي مرة واحدة (أو قطعة واحدة)
$\Omega = \{H, T\}$
- رمي مرتين (أو قطعتين):
$\Omega = \{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$
- رمي 3 مرات (أو 3 قطع نقود):
$\Omega = \begin{Bmatrix} HHH \\ HHT, HTH, THH \\ TTH, THT, HTT \\ TTT \end{Bmatrix}$</td>
<td>- مرة واحدة (حجر واحد):
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- مرتين (أو حجرين):
جدول:
<table>
<tr><th></th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td>
<td>- ولادة واحدة:
$\Omega = \{\mathrm{B}, \mathrm{G}\}$
- ولادتين:
$\Omega = \{BB, BG, GB, GG\}$
- 3 ولادات:
$\Omega = \begin{Bmatrix} BBB \\ BBG.BGB.GBB \\ GGB.GBG.BGG \\ GGG \end{Bmatrix}$
- 4 ولادات:
$\Omega = \begin{Bmatrix} BBBB \\ BBBG, BBGB, BGBB, GBBB \\ GGGB, GGBG, GBGG, BGGG \\ BGBG, GBGB, BBGG, GGBB \\ BGGB, GBBG \\ GGGG \end{Bmatrix}$</td>
</tr>
</table>

- **الحدث:** هو أي مجموعة جزئية من المجموعة التي تحوي جميع العناصر (Ω)
- **الأحداث المميزة:**
  - الحدث البسيط: هو الحدث الذي يحوي عنصر وحيد.
  - الحدث المستحيل: هو الحدث الذي لا يحوي أي عناصر (المجموعة الخالية ϕ)
  - الحدث الأكيد: هو الحدث الذي يحوي جميع العناصر (المجموعة Ω)
  - التقاطع (AوB) : هي العناصر المشتركة بين الحدثين
  - الاجتماع (AأوB) : هي العناصر المشتركة وغير المشتركة بين A و B
  - المعاكس A' هي العناصر غير الموجودة في A
  - الحدثان المتنافيان: هما الحدثان اللذان لا يقعان معاً (لا يوجد بينهما عناصر مشتركة) أي:

$$A \cap B = \phi$$

قوانين هامة:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{عدد الحالات الممكنة}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

كحالة خاصة: إذا كان A و B متنافيان فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{0}_{\text{لأنهم متنافيان}}$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

التمرين (1)

نلقي حجر نرد وليكن A الحدث الدال على ظهور عدد فردي و B الحدث الدال على ظهور عدد أولي و C الحد الدال على ظهور عدد أكبر تماماً من 3

1- احسب احتمال وقوع كلٍ من الأحداث A, B, C
2- احسب احتمال وقوع الأحداث $C \cup B$ ، $A \cup B$ ، $B \cap C$ ، $A \cap C$ ، $A \cap B$
3- احسب احتمال A' بطريقتين

التمرين (2)

في مدرستنا 30% من الطلاب يدرسون اللغة الفرنسية و 40% يدرسون الروسية و 60% يدرسون إحدى اللغتين على الأقل . احسب احتمال أن يكون طالباً مختاراً بشكل عشوائي ممن يدرسون اللغتين في آنٍ معاً

- **شرط الاستقلال الاحتمالي:**

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

1- نحسب احتمال A
2- نحسب احتمال B
3- نحسب احتمال $A \cap B$
4- نختبر الشرط

مثال$_1$: في تجربة القاء حجر نرد متجانس ليكن A حدث ظهور عدد أولي و B حدث ظهور عدد زوجي, أيكون الحدثان A و B مستقلان؟!

- **الاحتمال الشرطي:** رمزه $A|B$ ويقرأ بأحد الأساليب:

1- A علماً أن B قد وقع
2- A بشرط B
3- A بعد B

قانونه:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

"احتمال التقاطع على احتمال الذي وقع"

التمرين (1)

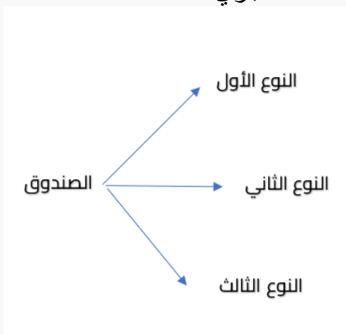
في تجربة مراقبة جنس المولود في عائلة مكونة من 4 ولادات :نعرف الأحداث الآتية :

A : الأطفال الأربعة من نفس الجنس

B : لدى العائلة طفلان وطفلتان

C : المولود الثالث أنثى:

1- احسب $P(A), P(B), P(C)$
2- هل A, C مستقلان احتمالياً
3- هل B, C مستقلان احتمالياً
4- احسب $P(A|C)$, $P(B|C)$
5- دمج متغير عشوائي: ليكن X المتغير العشوائي الدال على عدد الاناث في العائلة, اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

<table>
<tr><th>سحب أو اختيار عنصر واحد</th><th>سحب أو اختيار عنصرين</th><th>سحب أو اختيار 3 عناصر</th></tr>
<tr><td>مخطط شجري

</td><td>جدول:
نضع في السطر الأول
والعمود الأول
محتويات الصندوق كاملة
مع ذكر التكرار مثلاً
$R \quad R \quad R \quad B \quad W \quad W$</td><td>قوانين</td></tr>
<tr><td></td><td>السحب على التتالي مع إعادة:
نضع الجدول كاملاً
محتويات الصندوق مع التكرار
محتويات الصندوق مع التكرار</td><td>السحب على التتالي مع إعادة
القانون n^r
$P(A)=\dfrac{\text{التباديل} \times \text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$</td></tr>
<tr><td></td><td>السحب على التتالي دون إعادة : نحذف القطر الرئيسي:
محتويات الصندوق مع التكرار
محتويات الصندوق مع التكرار</td><td>السحب على التتالي دون إعادة:
القانون P_n^r
$P(A)=\dfrac{\text{التباديل} \times \text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$</td></tr>
<tr><td></td><td>السحب معاً : نحذف القطر الرئيسي و ما تحته :
محتويات الصندوق مع التكرار
محتويات الصندوق مع التكرار</td><td>السحب معاً :
القانون $\binom{n}{r}$
$P(A)=\dfrac{\text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$</td></tr>
</table>

نضع الاحتمالات على الشجرة : $\frac{\text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$	القانون دائماً : $P(A) = \frac{\text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$ و نعد الحالات عداً مباشراً	في كل الحالات : نحسب الحالات الكلية $n(\Omega)$ من القانون و نثبت المقام على كامل المسألة عند حساب $n(\Omega)$ لانضرب بالتباديل عدد التباديل : $\frac{(\text{عدد الكرات المسحوبة})!}{(\text{التكرار})!}$

المسألة (1)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء و كرتين سوداوين : نسحب من الصندوق كرة و نسجل لونها

ثم نعيدها و نضاعف الكرات من لونها ثم نسحب كرة أخرى و المطلوب:

1- احسب احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء
2- احسب احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون
3- احسب احتمال أن تكون الأولى سوداء
4- احسب احتمال أن تكون الكرات متمايزة في اللون
5- دمج مع متحول عشوائي: ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الكرات الحمراء المسحوبة, اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

المسألة (2)

مغلف يحوي بطاقتين حمراوين تحملان الأرقام 0,1 و بطاقتين زرقاوين تحملان الرقمين 1,2 و بطاقة بيضاء تحمل الرقم 1 ,نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع إعادة و المطلوب :

1- احسب احتمال أن تكون الكرتين من نفس اللون
2- احسب احتمال أن تكون الكرتين من لونين مختلفين
3- احسب احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين يساوي 2
4- احسب احتمال أن يكون مجموع الرقمين عدد فردي
5- احسب احتمال أن تكون الكرات من نفس اللون ومجموعها مساوي للعدد 2
6- ليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع الرقمين الظاهرين , اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

المسألة (3)

أعد المسألة السابقة في حالة السحب على التتالي دون إعادة

المسألة (4)

أعد المسألة السابقة في حالة السحب معاً

صندوق يحوي 10 كرات ستة منها حمراء و ثلاثة بيضاء و واحدة سوداء

نسحب من الصندوق 3 كرات معاً

1- ما احتمال ظهور كرات من نفس اللون
2- ما احتمال ظهور كرتين حمراوين فقط
3- ما احتمال ظهور كرات ألوانها مختلفة مثنى مثنى
4- ما احتمال ظهور كرة حمراء واحد على الأقل
5- ما احتمال ظهور كرة سوداء واحدة على الأقل
6- ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الكرات السوداء , اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

المسألة (5)

أعد المسألة السابقة في حال السحب على التتالي دون إعادة

المسألة (6)

أعد المسألة السابقة في حال السحب على التتالي مع إعادة

المسألة (7)

يحتوي صندوق على 5 كرات. ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملان الأرقام 1 و 2. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق والمطلوب:

1- ما احتمال الحدث A "الكرتين المسحوبتين من اللون ذاته".
2- ما احتمال الحدث B "مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3".
3- ما احتمال الحدث B علماً أن A قد وقع؟
4- ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الألوان المختلفة الظاهرة , اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

التمرين (1)

نلقي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية و ليكن X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد مرات ظهور الكتابة (T)

فتكون قيم X هي $X = \{0,1,2,3\}$ (لا نكرر القيمة أكثر من مرة عندما نكتب مجموعة قيم X)

النتائج في فضاء العينة	كيف نعبر عنها وفق X	قيمة X الموافقة
HHH	عدد مرات ظهور T هنا ولا مرة	$X = 0$
HHT	عدد مرات ظهور T هنا مرة واحدة	$X = 1$
HTH	عدد مرات ظهور T هنا مرة واحدة	$X = 1$
THH	عدد مرات ظهور T هنا مرة واحدة	$X = 1$
TTH	عدد مرات ظهور T هنا مرتين	$X = 2$
THT	عدد مرات ظهور T هنا مرتين	$X = 2$
HTT	عدد مرات ظهور T هنا مرتين	$X = 2$
TTT	عدد مرات ظهور T هنا 3 مرات	$X = 3$

القانون الاحتمالي :

$$P(X = 0) = P(\{HHH\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = P(\{HHT, HTH, THH\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=p(\{TTH,THT,HTT\})=\frac{3}{8}\quad ,\quad P(X=3)=P(\{TTT\})=\frac{1}{8}$$

جدول القانون الاحتمالي:

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$x_i p_i$					
$x_i^2 p_i$					

التوقع الرياضي :

$$E(x)=\sum x_i pi$$

$$E(x)=\cdots\ldots\ldots$$

التباين :

$$V(x)=\sum x_i^2 p_i-E^2(x)$$

$$V(x)=\cdots\ldots-(\ldots\ldots)^2=$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x=\sqrt{V(x)}=\cdots$$

التمرين (2)

نلقي قطعة نقود متوازنة 3 مرات و نتأمل لعبةً تقتضي بالحصول على نقطة واحدة كلما ظهر وجه الصورة (H) و خسارة نقطة كلما ظهر وجه الكتابة (T) و ليكن X المتحول العشوائي الذي يدلُّ على مجموع النقاط التي يحصل عليه اللاعب في نهاية اللعبة

النتائج في فضاء العينة	كيف نعبر عنها وفق X	قيمة X الموافقة
HHH	هنا اللاعب سيربح 3 نقاط لأنه قد ظهر الوجه H 3 مرات	$X=3$
HHT	هنا اللاعب سيربح نقطتين مقابل HH ويخسر نقطة مقابل T أي 1-1+1+ فيكون المجموع 1 نقطة	$X=1$
HTH	هنا اللاعب سيربح نقطتين مقابل HH ويخسر نقطة مقابل T أي 1-1+1+ فيكون المجموع 1 نقطة	$X=1$
THH	هنا اللاعب سيربح نقطتين مقابل HH ويخسر نقطة مقابل T أي 1-1+1+ فيكون المجموع 1 نقطة	$X=1$
TTH	هنا اللاعب سيربح نقطة مقابل H ويخسر نقطتين مقابل TT أي 1-1-1+ فيكون المجموع 1 - نقطة	$X=-1$
THT	هنا اللاعب سيربح نقطة مقابل H ويخسر نقطتين مقابل TT أي 1-1-1+ فيكون المجموع 1 - نقطة	$X=-1$
HTT	هنا اللاعب سيربح نقطة مقابل H ويخسر نقطتين مقابل TT أي 1-1-1+ فيكون المجموع 1 - نقطة	$X=-1$
TTT	هنا سيخسر اللاعب ثلاث نقاط مقابل TTT	$X=-3$

فتكون مجموعة قيم X هي $X=\{3,1,-1,-3\}$

القانون الاحتمالي :

$$P(X=3)=P(\{HHH\})=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=P(\{HHT,HTH,THH\})=\frac{3}{8}$$

$$P(X=-1)=p(\{TTH,THT,HTT\})=\frac{3}{8}$$

$$P(X=-3)=P(\{TTT\})=\frac{1}{8}$$

جدول القانون الاحتمالي :

x_i	-3	1	-1	3	$\sum$
p_i					1
$x_i p_i$					
$x_i^2 p_i$					

التوقع الرياضي :

$$E(x) = \sum x_i pi$$

$$E(x) = \cdots \dots \dots$$

التباين :

$$V(x) = \sum x_i^2 p_i - E^2(x)$$

$$V(x) = \cdots \dots - (\dots \dots)^2 =$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \cdots$$

التمرين (3)

نلقي حجري نرد متوازنين وليكن X المتحول العشوائي الدال على أصغر العددين الظاهرين

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1) أصغرهما 1 $X=1$	(1,2) أصغرهما 1 $X=1$	(1,3) أصغرهما 1 $X=1$	(1,4) أصغرهما 1 $X=1$	(1,5) أصغرهما 1 $X=1$	(1,6) أصغرهما 1 $X=1$
2	(2,1) أصغرهما 1 $X=1$	(2,2) أصغرهما 2 $X=2$	(2,3) أصغرهما 2 $X=2$	(2,4) أصغرهما 2 $X=2$	(2,5) أصغرهما 2 $X=2$	(2,6) أصغرهما 2 $X=2$
3	(3,1) أصغرهما 1 $X=1$	(3,2) أصغرهما 2 $X=2$	(3,3) أصغرهما 3 $X=3$	(3,4) أصغرهما 3 $X=3$	(3,5) أصغرهما 3 $X=3$	(3,6) أصغرهما 3 $X=3$
4	(4,1) أصغرهما 1 $X=1$	(4,2) أصغرهما 2 $X=2$	(4,3) أصغرهما 3 $X=3$	(4,4) أصغرهما 4 $X=4$	(4,5) أصغرهما 4 $X=4$	(4,6) أصغرهما 4 $X=4$
5	(5,1) أصغرهما 1 $X=1$	(5,2) أصغرهما 2 $X=2$	(5,3) أصغرهما 3 $X=3$	(5,4) أصغرهما 4 $X=4$	(5,5) أصغرهما 5 $X=5$	(5,6) أصغرهما 5 $X=5$
6	(6,1) أصغرهما 1 $X=1$	(6,2) أصغرهما 2 $X=2$	(6,3) أصغرهما 3 $X=3$	(6,4) أصغرهما 4 $X=4$	(6,5) أصغرهما 5 $X=5$	(6,6) أصغرهما 6 $X=6$

نلاحظ أن مجموعة قيم X هي

$$X = \{1,2,3,4,5,6\}$$

(إذا كان الطلب أكبرهما يُحلُّ بنفس الأسلوب تماماً)

القانون الاحتمالي:

$P(X=1) = \frac{11}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X = 1$ في الجدول

$P(X=2)=\frac{9}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X=2$ في الجدول

$P(X=3)=\frac{7}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X=3$ في الجدول

$P(X=4)=\frac{5}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X=4$ في الجدول

$P(X=5)=\frac{3}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X=5$ في الجدول

$P(X=6)=\frac{1}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X=6$ في الجدول

(مسامح بجدول القانون الاحتمالي و باقي الطلبات)

التمرين (4)

نلقي حجري نرد متوازنين وليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع العددين الظاهرين

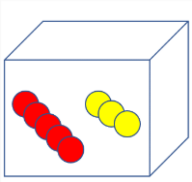
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1) مجموعها2 $X=2$	(1,2) مجموعها3 $X=3$	(1,3) مجموعها 4 $X=4$	(1,4) مجموعها5 $X=5$	(1,5) مجموعها6 $X=6$	(1,6) مجموعها7 $X=7$
2	(2,1) مجموعها3 $X=3$	(2,2) مجموعها 4 $X=4$	(2,3) مجموعها5 $X=5$	(2,4) مجموعها6 $X=6$	(2,5) مجموعها7 $X=7$	(2,6) مجموعها8 $X=8$
3	(3,1) مجموعها 4 $X=4$	(3,2) مجموعها5 $X=5$	(3,3) مجموعها6 $X=6$	(3,4) مجموعها7 $X=7$	(3,5) مجموعها8 $X=8$	(3,6) مجموعها9 $X=9$
4	(4,1) مجموعها5 $X=5$	(4,2) مجموعها6 $X=6$	(4,3) مجموعها7 $X=7$	(4,4) مجموعها8 $X=8$	(4,5) مجموعها9 $X=9$	(4,6) مجموعها 10 $X=10$
5	(5,1) مجموعها6 $X=6$	(5,2) مجموعها7 $X=7$	(5,3) مجموعها8 $X=8$	(5,4) مجموعها9 $X=9$	(5,5) مجموعها 10 $X=10$	(5,6) مجموعها11 $X=11$
6	(6,1) مجموعها7 $X=7$	(6,2) مجموعها8 $X=8$	(6,3) مجموعها9 $X=9$	(6,4) مجموعها 10 $X=10$	(6,5) مجموعها11 $X=11$	(6,6) مجموعها12 $X=12$

فمجموعة قيم X هي $X=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

بشكل مماثل للمسألة السابقة (بالعد المباشر) يمكن إيجاد الاحتمالات

التمرين (5)

صندوق يحوي 5 كرات حمراء و 3 كرات صفراء نسحب من الصندوق 3 كرات معاً و ليكن **X** المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة



☺هنا نحن نسحب 3 كرات (بسسس 3 كرات) و X يراقب عدد الكرات الحمراء المحتمل أن نسحبها

فتكون قيم $X = \{0,1,2,3\}$

الحالات الممكنة للسحب	التفسير	قيمة X الموافقة
3 كرات صفراء	ولا كرة حمراء	$X = 0$
كرتين صفراوين وكرة حمراء	كرة واحدة حمراء	$X = 1$
كرتين حمراوين وكرة صفراء	كرتين حمراء	$X = 2$
ثلاث كرات حمراء	ثلاث كرات حمراء	$X = 3$

القانون الاحتمالي :في مسائل سحب الكرات يجب أولاً حساب عدد الحالات الكلية ليكون مقام لكل المسألة

بما أن السحب 3 كرات معاً : $n(\Omega) = \binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56$

$$P(X = 0) = P(YYY) = \frac{\binom{3}{3}}{56} = \frac{1}{56}$$

$$P(X = 1) = P(YYR) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{56} = \frac{15}{56}$$

$$P(X = 2) = P(RRY) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{56} = \frac{30}{56}$$

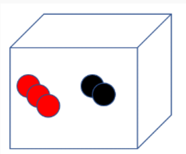
$$P(X = 3) = P(RRR) = \frac{\binom{5}{3}}{56} = \frac{10}{56}$$

أكمل الجدول و التوقع و التباين و الانحراف

التمرين (6)

صندوق يحوي كرتين سوداء و 3 كرات حمراء. نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي دون إعادة

و ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة



الحالات الممكنة للسحب	التفسير	قيمة X الموافقة
3 كرات حمراء	-	$X = 3$
كرتين حمراوين وكرة سوداء	كرتين حمراء	$X = 2$
كرتين سوداوين وكرة حمراء	كرة واحدة حمراء	$X = 1$

فقيم المتحول X هي $X = \{1,2,3\}$

لاحظ هنا انه من المستحيل أن يكون $X = 0$ لأن $X = 0$ تعني عدم ظهور ولا كرة حمراء و هذا مستحيل فأقل ما يمكن أن يحدث أن نحصل على كرتين سوداين و كرة حمراء فأقل قيمة لـ X هي 1 ثم 2 ثم 3

القانون الاحتمالي :

نحسب عدد الحالات الكلي $n(\Omega) = P_5^3 = 5.4.3 = 60$

$$P(X=3) = P(RRR) = \frac{P_3^3}{60} = \frac{6}{60}$$

$$P(X=2) = P(RRB) = \frac{P_3^2 P_2^1 \times \underbrace{3}_{\text{تباديل}}}{60} = \frac{36}{60}$$

$$P(X=1) = P(BBR) = \frac{P_2^2 P_3^1 \times \underbrace{3}_{\text{تباديل}}}{60} = \frac{18}{60}$$

جدول القانون الاحتمالي :

x_i	3	2	1	$\sum$
p_i				1
$x_i p_i$				
$x_i^2 p_i$				

التوقع الرياضي :

$$E(x) = \sum x_i pi$$

$$E(x) = \cdots \ldots \ldots$$

التباين :

$$V(x) = \sum x_i^2 p_i - E^2(x)$$

$$V(x) = \cdots \ldots - (\ldots \ldots)^2 =$$

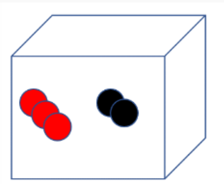
الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \cdots$$

التمرين (7)

صندوق يحوي كرتين سوداء و 3 كرات حمراء. نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي مع إعادة

و ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة



الحالات الممكنة للسحب	التفسير	قيمة X الموافقة
3 كرات حمراء	-	$X = 3$
كرتين حمراوين وكرة سوداء	كرتين حمراء	$X = 2$
كرتين سوداوين وكرة حمراء	كرة واحدة حمراء	$X = 1$
3 كرات سوداء (السحب مع إعادة)	ولا كرة حمراء	$X = 0$

فقيم المتحول X هي $X = \{0,1,2,3\}$

القانون الاحتمالي :

عدد الحالات الكلي $n(\Omega) = 5^3 = 125$

$$P(X=3) = P(RRR) = \frac{3^3}{125} = \frac{27}{125}$$

$$P(X=2) = P(RRB) = \frac{3^2 . 2^1 \times \underbrace{3}_{\text{تباديل}}}{125} = \frac{54}{125}$$

$$P(X=1) = P(RBB) = \frac{3^1 . 2^2 \times \underbrace{3}_{\text{تباديل}}}{125} = \frac{36}{125}$$

$$P(X=0) = P(BBB) = \frac{2^3}{125} = \frac{8}{125}$$

التمرين (8)

صندوق يحوي 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرة صفراء . نسحب من الصندوق 3 كرات معاً و ليكن X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الألوان المختلفة الظاهرة

((((عدد الألوان المختلفة يعني كم لون ممكن يظهر بالسحب.. فمستحيل ما يظهر ولا لون فمستحيل يكون $X = 0$)))))) سنرمز للخضراء G والحمراء R والصفراء Y

الحالات الممكنة للسحب	التفسير	قيمة X الموافقة
GGG	لون واحد الأخضر	$X = 1$
GGR	لونين الأخضر والأحمر	$X = 2$
GGY	لونين الأخضر والأصفر	$X = 2$
GRY	3 ألوان اخضر وأحمر وأصفر	$X = 3$
RRR	لون واحد الأحمر	$X = 1$
RRG	لونين الأحمر والأخضر	$X = 2$
RRY	لونين الأصفر والأحمر	$X = 2$

فقيم X تكون $X = \{1,2,3\}$

القانون الاحتمالي : لنحسب عدد الحالات الكلي : $n(\Omega) = \binom{8}{3} = 56$

$$P(X=1) = P(GGG, RRR) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{3}}{56} = \frac{4}{56} \quad , \quad P(X=3) = P(RGY) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{56} = \frac{12}{56}$$

إن حالة $X = 2$ صعبة الحساب لذا سنستفيد من خاصية الحدث المتمم :

$$P(X=2) = 1 - \big(P(X=1) + P(X=3)\big) = 1 - \left(\frac{4}{56} + \frac{12}{56}\right) = \frac{36}{56}$$

لا يوجد ما هو مستحيل في الرياضيات

إن إبداع الطالب دائماً يمكن استخراجه إذا ما تم عرض المعلومة بطريقة مناسبة وأسلوب محبب
و طالما لدى الطالب الرغبة على بلوغ أسمى المستويات فإن من واجب المدرس الارتقاء بهم لتحقيق أعلى معدلات التميز و النجاح .... نذير تيناوي

#لن_يبلى_الشغف

المسألة (1)

يحتوي صندوق على 5 كرات , اثنتان تحملان الرقم , واثنتان تحملان الرقم , واحدة تحمل الرقم , نسحب من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة , نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع رقمي الوجهين الظاهرين

عين مجموعة قيم X واكتب قانونه الاحتمالي ثم احسب التوقع و التباين و الانحراف المعياري

المسألة (1)

نتأمل التجربة الآتية:

صندوق يحوي ثلاث كرات : واحدة حمراء تحمل الرقم 1 اثنتان زرقاوان تحملان ارقم 2 و 3 نسحب

من الصندوق عشوائياً كرتين على التتالي مع إعادة ولتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة :

- نعرف على Ω المتحول العشوائي X الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد الكرات الزرقاوات المسحوبة
- ونعرف على Ω المتحول العشوائي Y الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموعة رقمي الكرتين المسحوبين

1- اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي
2- اكتب قيم Y و قانونه الاحتمالي
3- اكتب قانون الاحتمال للزوج (X, Y)
4- هل X, Y مستقلان عشوائياً

المسألة (2)

نلقي حجري نرد متوازنين نرمز بالرمز S إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها وليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 2 و Y الذي يمثل باقي قسمة S على 4 والمطلوب:

1- عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S.
2- عين القانونين الاحتماليين للمتحولين العشوائيين X و Y.
3- عين القانون الاحتمالي للزوج (X, Y).
4- هل المتحولان X و Y مستقلان احتمالياً؟!

المسألة (3)

يتطلب انجاز منهاج الرياضيات في جلسة شغف الرياضيات الامتحانية مرحلتين المرحلة A شرح الأفكار النظرية والمرحلة B حل مسائل وتمارين شاملة تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يعطى قانون احتمالها بالجدول الآتي:

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X_A = x)$	0.2	0.5	0.3

x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_B = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

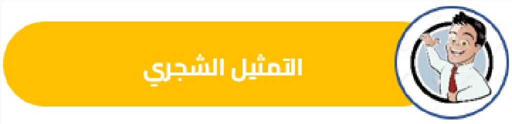
وتستغرف المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B يعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

المتحولان العشوائيان X_B و X_A مستقلان احتمالياً. نرمز بالرمز E للحدث "تستغرق انجاز المنهاج ثلاثة أيام أو أقل". احسب احتمال الحدث E.

المسألة (4)

أكمل الجدول الآتي إذا علمت أن X و Y مستقلان احتمالياً:

X \ Y	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			



■ **قواعد التمثيل الشجري:**

- توافق كل عقدة حالة من حالات التجربة
- قانون العقد: مجموع جميع الاحتمالات المكتوبة على الفروع الصادرة من العقد يساوي 1
- يمثل مسار تام بدءاً من جذر الشجرة إلى نهاية طرف نهائي فيها الحدث الموافق لتقاطع جميع الأحداث التي يمر بها المسار
- إن احتمال مسار يساوي جداء ضرب الاحتمالات المسجلة على الفروع التي تكوّن هذا المسار
- احتمال الحدث D يساوي مجموع احتمالات المسارات المؤدية إلى D

المسألة (1)

يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح الكهربائية , عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح , صنعت الورشة A منها 1200 مصباح وصنعت البقية الورشة B , هناك نسبة 4% من المصابيح التي من صناعة الورشة A معطوبة , في حين تكون نسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة , نسحب عشوائياً مصباحاً من الطلب , نرمز بالرمز A إلى الحدث " المصباح مصنوع في الورشة A " وبالرمز B إلى الحدث " المصباح مصنوع في الورشة B " وبالرمز D إلى الحدث " المصباح معطوب " , المطلوب :

1- أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة
2- احسب احتمال أن يكون المصباح معطوب
3- إذا كان المصباح معطوباً فما احتمال أن يكون مصنوعا في الورشة A

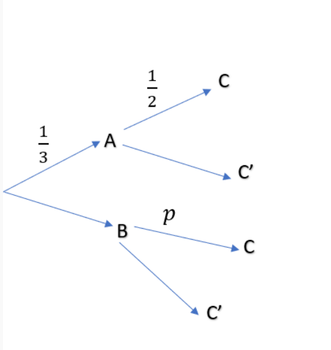
المسألة (2)

في مدرستنا يمارس **30%** من الطلاب لعبة كرة المضرب , ونعلم أن مدرستنا تضم **60%** ذكور وأن **55%** من هؤلاء لا يلعبون كرة المضرب ٬ ما احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين الطالبات لا تمارس كرة المضرب .

المسألة (3)

نتأمل في الشكل المجاور تمثيلاً شجرياً لتجربة عشوائية

احسب p ليكون الحدثان A, C مستقلان احتمالياً .



المسألة (4)

صندوق يحوي ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين نسحب من الصندوق كرة تلو الأخرى حتى لا يتبقى في الصندوق الا كرات من اللون ذاته، وليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد مرات السحب اللازمة، عين مجموعة قيم X واكتب قانونه الاحتمالي ثم احسب التوقع و التباين و الانحراف المعياري

المسألة (5)

نتأمل صندوقاً يحوي على 3 كرات سوداء و أربع كرات حمراء .نسحب من عشوائياً كرة من الصندوق و نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق ثم نحسب مجدداً كرة من الصندوق . لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث (الكرة المحسوبة في المرة الثانية حمراء اللون)

و ليكن R_1 الحدث (الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون)

1- أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة
2- احسب احتمال R_2
3- إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون ما احتمال أن تكون الكرة الأولى في المرة الأولى سوداء اللون ؟

المسألة (6)

تحاول سعاد إدخال الوتد في حلقات تلقيها, تكرر سعاد التجربة عدداً من المرات عندما تنجح سعاد في ادخال الحلقة فإن احتمال نجاحها في ادخال الحلقة اللاحقة هو $\frac{1}{3}$ و عندما تفشل في ادخال الحلقة يصبح احتمال فشلها في ادخال اللاحقة $\frac{4}{5}$ نفترض أن احتمال نجاح سعاد في ادخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها, نتأمل أيا كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n الحدثين الآتيين:

A_n : نجحت سعاد في ادخال الحلقة عند المرة n.

B_n: فشلت سعاد في ادخال الحلقة عند المرة n.

ونعرف $p_n = P(A_n)$:

1- عين p_1 وبرهن أن $p_2 = \frac{4}{15}$.
2- أثبت انه أيا كانت $n \geq 2$ كان $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$.
3- نعرف في حالة $n \geq 1$ المقدار u_n بالعلاقة $u_n = p_n - \frac{3}{13}$ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية وعين حدها الأول u_1 وأساسها q.
4- استنتج قيمة u_n ثم p_n بدلالة n, ثم احسب نهاية p_n.
5- ماذا تستنتج؟

المسألة (7)

لدينا n صندوقاً $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء و كرة واحدة حمراء . و كل صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين و كرة واحدة حمراء .

نسحب كرة من الصندوق الأول u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 و نضعها في الصندوق u_3 و هكذا ... , حتى نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} و نضعها في الصندوق u_n .

يرمز بالرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)

1- قيمة $P(R_1)$ تساوي :

a	$\frac{1}{3}$	b	$\frac{2}{5}$	c	$\frac{1}{4}$	d	$\frac{3}{4}$

2- يكون $P(R_2)$ مساوياً لـ :

a	$\frac{1}{4}P(R_1)-\frac{1}{4}$	b	$\frac{3}{4}P(R_1)+\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{4}P(R_1)+\frac{1}{4}$	d	$\frac{1}{4}P(R_1)+\frac{3}{4}$

3- في حالة $2 \le k \le n$ يكون $P(R_k)$ مساوياًَ لـ :

a	$\frac{1}{4}P(R_{k-1})-\frac{1}{4}$	b	$\frac{3}{4}P(R_{k-1})+\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{4}P(R_{k-1})+\frac{1}{4}$	d	$\frac{1}{4}P(R_{k-1})+\frac{3}{4}$

4- نعرف $x_k = P(R_k) - \frac{1}{3}$ عندئذٍ تكون المتتالية $(x_k)_{k\ge1}$:

a	هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	b	هندسية أساسها $-\frac{1}{4}$	c	هندسية أساسها $\frac{1}{4}$	d	ليست هندسية

5- عبارة x_k بدلالة k :

a	$\left(\frac{1}{4}\right)^k$	b	$\left(-\frac{1}{4}\right)^k$	c	$-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k$	d	$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k$

6- عبارة $P(R_k)$ بدلالة k :

a	$\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{3}$	b	$\left(-\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{3}$	c	$-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{3}$	d	$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{3}$

الأجوبة : كلن C ^_^

التجربة البرنولية

تستخدم في حال عدد مرات التكرار كان أكبر من 3 أو حجم فضاء العينة مجهول و السحب على التتالي مع إعادة أو قطعة نقود غير متجانسة

1- نرمز لاحتمال النجاح في المرة الواحدة p و احتمال الفشل $q = 1 - p$
2- عدد مرات تكرار التجربة n
3- مجموعة قيم المتحول الحداني :

$$X = \{0,1,2,3,\dots,n\}$$

4- القانون الاحتمالي :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

5- التوقع $E(x) = np$
6- التباين $V(x) = npq$
7- الانحراف المعياري $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

التمرين (1)   دورة 2021

تتأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود و ووجهان ملونان بالأحمر . نلقي هذا الحجر خمس مرات متتالية و نعرف المتحول العشوائي X الذي يدل على عدد الوجوه السوداء التي نحصل عليها و المطلوب :

1- اكتب قيم المتحول العشوائي X واحسب $P(X=0)$
2- احسب التوقع الرياضي للمتحول X واحسب تباينه

التمرين (2)

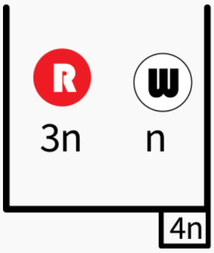
قطعة نقود غير متجانسة فيها احتمال ظهور صورة يساوي مثلي احتمال ظهور كتابة نلقي هذه القطعة ثلاثة مرات وليكن X املتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور كتابة عين قيم المتحول العشوائي X ثم اكتب جدول القانون الاحتمال واحسب كل من: التوقع الرياضي , التباين و الانحراف المعياري.

التمرين (3)

يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء ، عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء

1- نسحب عشوائياً كرة ، ما احتمال أن تكون حمراء اللون
2- نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي و مع إعادة و نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عملية السحب ، ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X
3-

الحل



❶ لنفرض أن عدد الكرات البيضاء هو n عندئذٍ يكون عدد الكرات الحمراء $3n$ و عدد الكرات الكلي في الصندوق $3n + n = 4n$ و بالتالي احتمال أن تكون كرة مسحوبة عشوائياً حمراء اللون يساوي

$$\frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

❷ قيم المتحول العشوائي X :

$$X = \{0,1,2,3\}$$

$\mathrm{P} = \frac{3}{4}$ ((احتمال ظهور كرة حمراء)) و منه

$$\mathrm{q} = 1 - \mathrm{p} = \frac{1}{4}$$

و السحب يتكرر هنا 3 مرات ⇐ $\boxed{\mathrm{n} = 3}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{k}) = \binom{3}{\mathrm{k}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\mathrm{k}}\left(\frac{1}{4}\right)^{3-\mathrm{k}}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{3} = \frac{1}{64}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{2} = \frac{9}{64}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{1} = \frac{27}{64}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{0} = \frac{27}{64}$$

التمرين (4)   سؤال دورة

نتأمل في الجدول الآتي تجربة برنولية

k	0	1	2	3
P_k				$\frac{1}{27}$

1- أوجد وسطاء القانون الاحتمالي n, p, q

2- اكتب القانون الاحتمالي و أكمل الجدول السابق

الحل

لدينا $k = 0,1,2, \dots \dots, n$ إذن $\boxed{n = 3}$ نعلم ان القانون الاحتمالي الحداني

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{k}) = \binom{3}{\mathrm{k}} p^k q^{3-k} \dots \dots (\star)$$

من الجدول لدينا $P(X = k) = \frac{1}{27}$ نعوض في $(\star)$

$$\binom{3}{3} p^3 q^{3-3} = \frac{1}{27}$$

$$p^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{3}}$$

إذن

$$\boxed{q=\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow P(X=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$$

$$P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{12}{27}$$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{6}{27}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{27}$$

k	0	1	2	3	Σ
p_k	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

إضافي : احسب التوقع و الانحراف المعياري

$$E(x)=np=3\times\frac{1}{3}=1$$

$$V(x)=npq=3\times\frac{1}{3}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\sigma_{(x)}=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

اختبار

المسألة (1)

يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء و عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء و المطلوب :

1- نسحب عشوائياً من الصندوق كرة . ما احتمال أن تكون بيضاء اللون
2- نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي مع إعادة . نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاثة . اكتب مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي .

المسألة (2)

يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام 1و2و3و4و5 نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع الإعادة و المطلوب :

1- كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب
2- كم عدد النتائج المختلفة و التي تشتمل على كرتين مجموعهما عدد فردي

المسألة (3)

عين قيمة n التي تحقق المعادلة :

$$P_{n+3}^{3}=16\binom{n+2}{2}$$

المسألة (4)

صندوق يحوي 9 كرات متماثلة منها 4 كرات خضراء و 5 كرات حمراء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً . و نتأمل متحولاً عشوائياً X يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء يأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين و كرة خضراءو يأخذ القيمة 0 عدا ذلك و المطلوب

اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X و احسب توقعه الرياضي

المسألة (5)

في مجتمع للبالغين تبلغ نسبة المصابين بمرض *corona* *30%* وبينت الدراسات أن *70%* من المصابين تظهر عليهم أعراض ارتفاع درجة الحرارة و أن *25%* من غير المصابين تظهر عليهم أعراض ارتفاع درجة الحرارة

1- أعط تمثيلاً شجرياً للمسألة
2- احسب احتمال أن تظهر على شخص ما أعرض ارتفاع درجة الحرارة
3- ما احتمال أن يكون الشخص غير مصاب بـ *corona* علماً أنه يعاني ارتفاع حرارة

المسألة (6)

يحتوي مغلف على 5 بطاقات , اثنتان تحملان الرقم , واثنتان تحملان الرقم , واحدة تحمل الرقم , نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي دون إعادة و المطلوب :

1- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما 4
2- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما عدد فردي

المسألة (7)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء و كرتين بيضاوين و كرة زرقاء

نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً و المطلوب :

1- ما عدد النتائج التي تشتمل على 3 كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى
2- ما عدد النتائج التي تشتمل على كرتين من نفس اللون
3- ما عدد النتائج التي تشتمل على كرات من لون واحد

المسألة (8)

احسب قيمة r إذا علمت :

$$\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$$

المسألة (9)

نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير و نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمس أشخاص . بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

المسألة (10)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء مرقمة بالأرقام 1و2 و3 و كرتين زرقاوين مرقمين بالأرقام 1و2 و كرتين بيضاوين مرقمين بالأرقام 2و3, نسحب من الصندوق 3 كرات معاً

1- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات مختلفة الألوان
2- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات تحمل نفس الرقم
3- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات مختلفة اللون و تحمل نفس الرقم

المسألة (11)

نتأمل في الشكل المجاور 6 خانات يمكن لأي منها أن تُملأ بأحد الرقمين 1+ أو -1

1- بكم طريقة يمكن ملء هذه الخانات
2- بكم طريقة يمكن ملء هذه الخانات حتى يكون مجموع أرقمها مساوياً للصفر
3- ليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع الأرقام في الخانات بعد ملئها . اكتب قيم X

المسألة (VIE 1)

في تجربة القاء حجري نرد متوازنين نعرف X المتحول العشوائي الدال على أكبر العددين الظاهرين, المطلوب:

1- اكتب مجموعة قيم X وجدول قانونه الاحتمالي.
2- احسب توقعه الرياضي $E(x)$.
3- إذا علمت أن اكبر العددين الظاهرين هو 6 فما احتمال ظهور العدد 1؟

المسألة (VIE 2)

نتأمل جانباً جدول القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي X, المطلوب:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{\alpha}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{\beta}{16}$

1- عين العددين α و β إذا علمت أن $E(x)=2$.
2- من أجل $\alpha=6$ و $\beta=1$ ، احسب تباين المتحول العشوائي $V(x)$.

المسألة (VIE 3)

تقدم طالب لامتحان مؤتمت مؤلف من 8 أسئلة لكل سؤال جواب صحيح واحد من أصل 4 ويجيب هذا الطالب بالحزر (التشليف) وليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الأسئلة التي ينجح في الإجابة عنها الطالب:

1- اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي.
2- احسب التوقع الرياضي.
3- ما احتمال أن يجيب الطالب على سؤالين صحيحين فقط؟

المسألة (VIE 4)

لدينا n صندوقاً $I_1, I_2, I_3 \dots, I_n$ يحوي الصندوق I_1 كرتين حمراوين وكرة سوداء أما باقي الصناديق الأخرى فكل منها يحوي كرتين حمراوين وكرتين سوداوين، نسحب من I_1 كرة ونضعها في I_2 ثم نسحب كرة من I_2 ونضعها في I_3 ونكمل التجربة إلى أن نصل إلى I_n , وليكن $P_k=$ $P(R_k)$ ظهور كرة حمراء في المرة k حيث $1\le k\le n$.

1- احسب P_1 و P_2.
2- اكتب P_{n+1} بدلالة P_n.
3- بفرض $P_{n+1}=f(P_n)$.
أ- عين $f(x)$.
ب- جد ℓ حل المعادلة $f(x)=x$
ت- نضع المتتالية $v_n=P_n-\ell$, أثبت أنها هندسية وعين أساسها.

التمرين (1)

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A = \{1,3,5\} \quad ,B = \{2,3,5\} \ ,C = \{4,5,6\}$$

-1 $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ و $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ و $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

-2 سنكتب كل حدث ثم نحسب احتماله :

$$A \cap B = \{3,5\} \ \rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$A \cap C = \{5\} \rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{6}$$

$$B \cap C = \{5\} \rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{6}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,5\} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$C \cup B = \{2,3,4,5,6\} \rightarrow P(c \cup B) = \frac{5}{6}$$

-3 الطريقة الأولى لحساب A' هي استخدام فكرة الحدث المتمم :

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

الطريقة الثانية : هي كتابة A' : (العناصر غير الموجودة في A') :

$$A'\{2,4,6\} \rightarrow P(A') = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

التمرين (2)

المعطيات $P(F \cup R) = \frac{60}{100}$, $P(R) = \frac{40}{100}$, $P(F) = \frac{30}{100}$

المطلوب : $P(F \cap R)$: و يتم إيجاده من القانون :

$$P(F \cup R) = P(F) + P(R) - P(F \cap R)$$

$$\frac{60}{100} = \frac{30}{100} + \frac{40}{100} - P(F \cap R)$$

$$P(F \cap R) = \frac{10}{100}$$

مثال صفحة 46

- نوجد احتمال كل من الحدثين

$$A = \{2,3,5\} \ , \qquad B = \{2,4,6\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad ,P(B) = \frac{1}{2}$$

- نوجد احتمال التقاطع :

$$A \cap B = \{2\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

- نختبر شرط الاستقلال :

$$P(A \cap B) =^{?} P(A).P(B)$$

$$\frac{1}{6} =? \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6} \neq \frac{1}{4}$$

فهما غير مستقلين

التمرين (1) صفحة 47

نكتب فضاء العينة باعتبار B : المولود ذكر و T المولود إنثى

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} BBBB \\ BBBT, BBTB, BTBB, TBBB \\ TTTB, TTBT, TBTT, BTTT \\ BBTT, TTBB, BTBT, TBTB, TBBT, BTTB \\ TTTT \end{array} \right\}$$

1- احتمال A, B, C

$$A = \{BBBB, TTTT\} \to P(A) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$B = \{BBTT, TTBB, BTBT, TBTB, TBBT, BTTB\} \to P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$C = \{BBTB, TTTB, TBTT, BTTT, TBTBT, BBTT, BTTB, TTTT\} \to P(C) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

2- لدراسة استقلال A, C : نوجد أولاً احتمال التقاطع :

$$A \cap C = \{TTTT\} \to P(A \cap C) = \frac{1}{16}$$

نختبر شرط الاستقلال :

$$P(A \cap C) =? P(A).P(C)$$
$$\frac{1}{16} =? \frac{1}{8}.\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{16} = \frac{1}{6}$$

محققة فالحدثان A, C مستقلان

3- دراسة استقلال B, C : نوجد التقاطع :

$$B \cap C = \{BBTT, TBTB, BTTB\} \to P(B \cap C) = \frac{3}{16}$$

نختبر شرط الاستقلال :

$$P(B \cap C) =? P(B).P(C)$$
$$\frac{3}{16} =? \frac{3}{8}.\frac{1}{2}$$
$$\frac{3}{16} = \frac{3}{16}$$

محققة فالحدثان مستقلان .

4- لدينا هنا احتمالات شرطية :

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{8}{16}} = \frac{1}{8}$$

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{8}{16}} = \frac{3}{8}$$

5- لنوجد قيم X :

X	Ω
$X = 0$	$HHHH$
$X = 1$	$HHHT$
$X = 1$	$HHTH$
$X = 1$	$HTHH$
$X = 1$	$THHH$
$X = 3$	$TTTH$

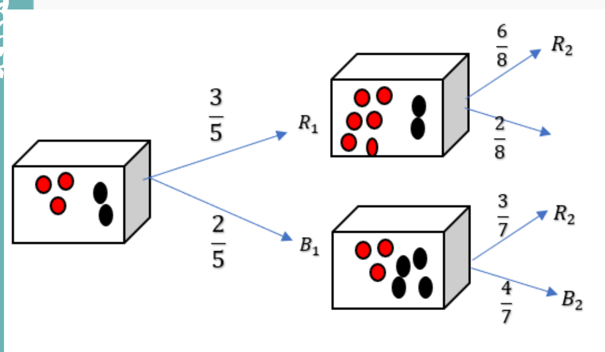
$X = 3$	$TTHT$
$X = 3$	$THTT$
$X = 3$	$HTTT$
$X = 2$	$HHTT$
$X = 2$	$TTHH$
$X = 2$	$THTH$
$X = 2$	$HTHT$
$X = 2$	$HTTH$
$X = 2$	$THHT$
$X = 4$	$TTTT$

قيم X : $X = \{0,1,2,3,4\}$

$$P(X=0) = \frac{1}{16}\ ,\ P(X=1) = \frac{4}{16}\ ,P(X=2) = \frac{6}{16}\ ,P(X=3) = \frac{4}{16}\ ,P(X=4) = \frac{1}{16}$$

كمل الجدول لحالك .

المسألة (1)



-1 $P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2)$

$$P(R_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$$

$$P(R_2) = \frac{9}{20} + \frac{6}{35}$$

$$P(R_2) = \frac{63 + 24}{140} = \frac{87}{140}$$

-2 نرمز بـ A للحدث الكرات من نفس اللون :

$$P(A) = P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7}$$

$$P(A) = \frac{9}{20} + \frac{8}{35} = \frac{95}{140}$$

-3 $P(B_1) = \frac{2}{5}$

-4 الحدث المطلوب هو الحدث المتمم للحدث A : $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{95}{140} = \frac{45}{140}$

-5 $X = \{0,1,2\}$ و عليه يكون :

$$P(X=0) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{32}{140}$$

$$P(X=1) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{20} + \frac{6}{35} = \frac{21}{140} + \frac{24}{140} = \frac{45}{140}$$

$$P(X=2) = P(R_1 \cap R_2) = \frac{63}{140}$$

كمل الجداول لحالك ^_^

المسألة (2)

	R_0	R_1	B_1	B_2	W_1
R_0	A $X = 0$	AC $X = 1$	C $X = 1$	B $X = 2$	C $X = 1$
R_1	AC	AB	B	C	B

	$X=1$	$X=2$	$X=2$	$X=3$	$X=2$
B_1	C $X=1$	B $X=2$	AB $X=2$	AC $X=3$	B $X=2$
B_2	B $X=2$	C $X=3$	AC $X=3$	A $X=4$	C $X=3$
W_1	C $X=1$	B $X=2$	B $X=2$	C $X=3$	AB $X=2$

1- نرمز بالرمز **A** للحدث : الكرتين من نفس اللون $: P(A)=\frac{9}{25}$

2- الحدث المطلوب هنا هو الحدث المتمم للحدث A $: P(A')=1-P(A)=\frac{16}{25}$

3- نرمز بالرمز **B** للحدث : مجموع الرقمين 2: $P(B)=\frac{11}{25}$

4- نرمز بالرمز **C** للحدث : مجموع الرقمين فردي : $P(C)=\frac{11}{25}$

5- الحدث المطلوب هنا $A\cap B$: $P(A\cap B)=\frac{3}{25}$

6- قيم $X=\{0,1,2,3,4\}$:

$$P(X=0)=\frac{1}{25}$$
$$P(X=1)=\frac{6}{25}$$
$$P(X=2)=\frac{11}{25}$$
$$P(X=3)=\frac{6}{25}$$
$$P(X=4)=\frac{1}{25}$$

كمل الجدول لحالك.

المسألة (3)

	R_0	R_1	B_1	B_2	W_1
R_0		AC $X=1$	C $X=1$	B $X=2$	C $X=1$
R_1	AC $X=1$		B $X=2$	C $X=3$	B $X=2$
B_1	C $X=1$	B $X=2$		AC $X=3$	B $X=2$
B_2	B $X=2$	C $X=3$	AC $X=3$		C $X=3$
W_1	C $X=1$	B $X=2$	B $X=2$	C $X=3$	

1- نرمز بالرمز **A** للحدث : الكرتين من نفس اللون $: P(A)=\frac{4}{20}$

2- الحدث المطلوب هنا هو الحدث المتمم للحدث A $: P(A')=1-P(A)=\frac{16}{20}$

3- نرمز بالرمز **B** للحدث : مجموع الرقمين 2: $P(B)=\frac{8}{20}$

4- نرمز بالرمز **C** للحدث : مجموع الرقمين فردي : $P(C)=\frac{11}{20}$

5- الحدث المطلوب هنا $A\cap B$: $P(A\cap B)=0$

6- قيم $X=\{1,2,3\}$:

$$P(X=1)=\frac{6}{20}$$
$$P(X=2)=\frac{8}{20}$$
$$P(X=3)=\frac{6}{20}$$

كمل الجدول لحالك.

المسألة (4)

	R_0	R_1	B_1	B_2	W_1
R_0		AC $X=1$	C $X=1$	B $X=2$	C $X=1$
R_1			B $X=2$	C $X=3$	B $X=2$
B_1				AC $X=3$	B $X=2$
B_2					C $X=3$
W_1					

1- نرمز بالرمز **A** للحدث : الكرتين من نفس اللون $P(A)=\frac{2}{10}$:

2- الحدث المطلوب هنا هو الحدث المتمم للحدث A : $P(A')=1-P(A)=\frac{8}{10}$

3- نرمز بالرمز **B** للحدث : مجموع الرقمين 2: $P(B)=\frac{4}{10}$

4- نرمز بالرمز **C** للحدث : مجموع الرقمين فردي : $P(C)=\frac{11}{20}$

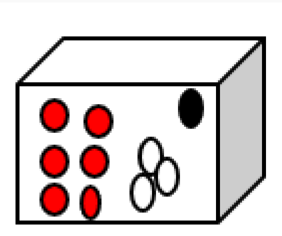
5- الحدث المطلوب هنا $A\cap B$: $P(A\cap B)=0$

6- قيم $X=\{1,2,3\}$:

$$P(X=1)=\frac{3}{10}$$
$$P(X=2)=\frac{4}{10}$$
$$P(X=3)=\frac{3}{10}$$

كمل الجدول لحالك.

المسألة (يلي بدون رقم) صفحة 50



بما أن السحب معاً فيكون $n(\Omega)=\binom{10}{3}=120$

1- نرمز بالرمز A للحدث: الكرات من نفس اللون :

$$A:\quad RRR \quad or \quad WWW$$
$$P(A)=\frac{\binom{6}{3}+\binom{3}{3}}{120}=\frac{21}{120}$$

2- نرمز بالرمز B للحدث : الكرتين حمراوين :

$$B:\quad RRR'$$
$$P(B)=\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{120}=\frac{60}{120}$$

3- نرمز بالرمز C للحدث : الكرات ألوانها مختلفة مثنى مثنى :

$$C: RWB$$
$$P(C)=\frac{\binom{6}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{120}=\frac{18}{120}$$

4- نرمز بالرمز D للحدث : كرة حمراء واحدة على الأقل :

$$D:\quad RR'R' \; or \; RRR' \quad or \; RRR$$
$$P(D)=\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}+\binom{6}{2}\binom{4}{1}+\binom{6}{3}}{120}=\frac{36+60+20}{120}=\frac{116}{120}$$

5- نرمز بالرمز E : كرة سوداء واحدة على الأقل:

$$E: BB'B'$$

$$\mathrm{P(E)} = \frac{\binom{1}{1}\binom{9}{2}}{120} = \frac{36}{120}$$

6- لنوجد قيم X :

قيم X	الحالات
$X = 0$	$B'B'B'$
$X = 1$	$BB'B'$

$$P(X=0) = P(B'B'B') = \frac{\binom{9}{3}}{120} = \frac{84}{120}$$

$$P(X=1) = P(BB'B') = \frac{\binom{1}{1}\binom{9}{2}}{120} = \frac{36}{120}$$

كمل الجدول لحالك.

المسألة (5)

بما أن السحب دون إعادة فيكون $n(\Omega) = P_{10}^3 = 720$

1- نرمز بالرمز A للحدث: الكرات من نفس اللون :

$$A: \quad RRR \quad or \quad WWW$$

$$P(A) = \frac{P_6^3 \frac{3!}{3!} + P_3^3 \frac{3!}{3!}}{720} = \frac{126}{720}$$

2- نرمز بالرمز B للحدث : الكرتين حمراوين :

$$B: \quad RRR'$$

$$P(B) = \frac{P_6^2 P_4^1 \frac{3!}{2!}}{720} = \frac{360}{720}$$

3- نرمز بالرمز C للحدث : الكرات ألوانها مختلفة مثنى مثنى :

$$C: RWB$$

$$P(C) = \frac{P_6^1 P_3^1 P_1^1 .3!}{720} = \frac{108}{720}$$

4- نرمز بالرمز D للحدث : كرة حمراء واحدة على الأقل :

$$D: \quad RR'R' \ or \ RRR' \ \ or \ RRR$$

$$P(D) = \frac{P_6^1 P_4^2 \frac{3!}{2!} + P_6^2 P_4^1 \frac{3!}{2!} + P_6^3 \frac{3!}{3!}}{120} = \frac{216 + 360 + 120}{720} = \frac{696}{720}$$

5- نرمز بالرمز E : كرة سوداء واحدة على الأقل:

$$E: BB'B'$$

$$\mathrm{P(E)} = \frac{P_1^1 P_9^2 \frac{3!}{2!}}{720} = \frac{216}{720}$$

6- لنوجد قيم X :

قيم X	الحالات
$X = 0$	$B'B'B'$
$X = 1$	$BB'B'$

$$P(X=0) = P(B'B'B') = \frac{P_9^3 \frac{3!}{3!}}{720} = \frac{504}{720}$$

$$P(X=1) = P(BB'B') = \frac{P_1^1 p_9^2 . \frac{3!}{2!}}{720} = \frac{216}{720}$$

كمل الجدول لحالك.

المسألة (6)

بما أن السحب مع إعادةً فيكون $n(\Omega) = 10^3 = 1000$

1- نرمز بالرمز A للحدث: الكرات من نفس اللون :

$$A: \quad RRR \quad or \quad WWW \quad or \; BBB$$

$$P(A) = \frac{6^3 + 3^3 + 1^3}{1000} = \frac{334}{1000}$$

2- نرمز بالرمز B للحدث : الكرتين حمراوين :

$$B: \quad RRR'$$

$$P(B) = \frac{6^2 . 4^1 . \frac{3!}{2!}}{1000} = \frac{432}{1000}$$

3- نرمز بالرمز C للحدث : الكرات ألوانها مختلفة مثنى مثنى :

$$C: RWB$$

$$P(C) = \frac{6^1 . 3^1 . 1^1 . 3!}{1000} = \frac{108}{1000}$$

4- نرمز بالرمز D للحدث : كرة حمراء واحدة على الأقل :

$$D: \; RR'R' \; or \; RRR' \; or \; RRR$$

$$P(D) = \frac{6^1 . 4^2 . \frac{3!}{2!} + 6^2 . 4^1 . \frac{3!}{2!} + 6^3}{1000} = \frac{288 + 432 + 216}{1000} = \frac{936}{1000}$$

5- نرمز بالرمز E : كرة سوداء واحدة على الأقل:

$$E: BB'B' or \; BBB' or \; BBB$$

$$\mathrm{P(E)} = \frac{1^1 . 9^2 . \frac{3!}{2!} + 1^2 . 9^1 . \frac{3!}{2!} + 1^3}{120} = \frac{243 + 27 + 1}{1000} = \frac{271}{1000}$$

6- لنوجد قيم X :

قيم X	الحالات
$X = 0$	$B'B'B'$
$X = 1$	$BB'B'$
$X = 2$	BBB'
$X = 3$	BBB

$$P(X = 0) = P(B'B'B') = \frac{9^3}{1000} = \frac{729}{1000}$$

$$P(X = 1) = P(BB'B') = \frac{1^1 . 9^2 . \frac{3!}{2!}}{1000} = \frac{243}{1000}$$

$$P(X = 2) = P(BBB') = \frac{1^2 . 9^1 . \frac{3!}{2!}}{1000} = \frac{27}{1000}$$

$$P(X = 3) = P(BBB) = \frac{1^3}{1000} = \frac{1}{1000}$$

كمل الجدول لحالك.

المسألة (7)

	B_1	B_2	B_3	R_1	R_2
B_1		$A\ B$ $X = 1$	A $X = 1$	$X = 2$	B $X = 2$
B_2			A $X = 1$	B $X = 2$	$X = 2$
B_3				$X = 2$	$X = 2$
R_1					$A\ B$ $X = 1$
R_1					

$$\mathrm{P(A)} = \frac{5}{10}$$

$$P(B) = \frac{4}{10}$$

لنحسب التقاطع :

$$P(A \cap B) = \frac{2}{10}$$

و بالتالي يكون :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{2}{10}$$

قيم X هي : $X = \{1,2,3\}$ والباقي عندك .

المسألة (1) صفحة 61

	R_1	B_1	B_2
R_1	$X = 0$ $Y = 2$	$X = 1$ $Y = 2$	$X = 1$ $Y = 3$
B_1	$X = 1$ $Y = 2$	$X = 2$ $Y = 2$	$X = 2$ $Y = 3$
B_2	$X = 1$ $Y = 3$	$X = 2$ $Y = 3$	$X = 2$ $Y = 4$

$X = \{0,1,2\}$

$Y = \{2,3,4\}$

قانون X الاحتمالي:

$P(X = 0) = \frac{1}{9}$, $P(X = 1) = \frac{4}{9}$, $P(X = 2) = \frac{4}{9}$

x_i	0	1	2	Σ
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

قانون Y:

$$P(Y = 2) = \frac{4}{9} \ , \quad P(Y = 3) = \frac{4}{9} \ , \quad P(Y = 4) = \frac{1}{9}$$

x_i	2	3	4	Σ
p_i	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

جدول قانون الزوج (X, Y):

قيم Y

قيم X	2	3	4	قانون X

0	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
قانون Y	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

استقلال المتحولين العشوائيين:

$$P(X=0)=\frac{1}{9}\ ,P(Y=3)=\frac{4}{9}\Rightarrow P(X=0).P(Y=3)=\frac{4}{81}$$
$$P(X=0\cap Y=3)=0$$

غير مستقلان احتمالياً.

المسألة (2)

	1	2	3	4	5	6
1	$S=2$ $X=0$ $Y=2$	$S=3$ $X=1$ $Y=3$	$S=4$ $X=0$ $Y=0$	$S=5$ $X=1$ $Y=1$	$S=6$ $X=0$ $Y=2$	$S=7$ $X=1$ $Y=3$
2	$S=3$ $X=1$ $Y=2$	$S=4$ $X=0$ $Y=0$	$S=5$ $X=1$ $Y=1$	$S=6$ $X=0$ $Y=2$	$S=7$ $X=1$ $Y=3$	$S=8$ $X=0$ $Y=0$
3	$S=4$ $X=0$ $Y=0$	$S=5$ $X=1$ $Y=1$	$S=6$ $X=0$ $Y=2$	$S=7$ $X=1$ $Y=3$	$S=8$ $X=0$ $Y=0$	$S=9$ $X=1$ $Y=1$
4	$S=5$ $X=1$ $Y=1$	$S=6$ $X=0$ $Y=2$	$S=7$ $X=1$ $Y=3$	$S=8$ $X=0$ $Y=0$	$S=9$ $X=1$ $Y=1$	$S=10$ $X=0$ $Y=2$
5	$S=6$ $X=0$ $Y=2$	$S=7$ $X=1$ $Y=3$	$S=8$ $X=0$ $Y=0$	$S=9$ $X=1$ $Y=1$	$S=10$ $X=0$ $Y=2$	$S=11$ $X=1$ $Y=3$
6	$S=7$ $X=1$ $Y=3$	$S=8$ $X=0$ $Y=0$	$S=9$ $X=1$ $Y=1$	$S=10$ $X=0$ $Y=2$	$S=11$ $X=1$ $Y=3$	$S=12$ $X=0$ $Y=0$

قيم $S=\{2.3.4.5.6.7.8.9.10,11,12\}$

قانون S الاحتمالي :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	1/36

قيم X : $X=\{0,1\}$

x_i	0	1
p_i	$\frac{18}{36}$	$\frac{18}{36}$

قيم Y : $\mathrm{Y}=\{0,1,2,3\}$

y_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{9}{36}$

جدول الزوج الاحتمالي المشترك:

قانون X	3	2	1	0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	0	$\frac{9}{36}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{8}{36}$	0	1
1	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	قانون Y

تحقق من الاستقلال ....

المسألة (3)

نرمز بالرمز A للحدث $X_A + X_B \leq 3$

و لنكتب جدول الزوج المشترك:

قانون X_A	4	3	2	1	
0.2	0.02	0.08	0.06	0.04	1
0.5	0.05	0.20	0.15	0.10	2
0.3	0.03	0.12	0/09	0.06	3
1	0.1	0.4	0.3	0.2	قانون X_B

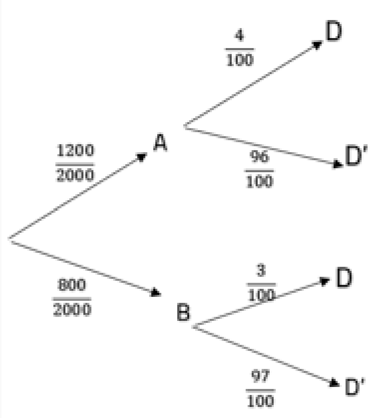
ملاحظة تم ملئ الجدول بالاستفادة من كون المتحولين مستقلين (التقاطع يساوي الجداء)

$$P(X_A + X_B \leq 3) = P(X_A = 1 \cap X_B = 1) + P(X_A = 1 \cap +X_B = 2) + P(X_A = 2 \cap X_B = 1)$$
$$= 0.04 + 0.06 + 0.010 = 0.20$$

المسألة (4)

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	0.12	0.2	0.08	0.4
1	0.06	0.1	0.04	0.2
2	0.12	0.2	0.08	0.4
قانون Y	0.3	0.5	0.2	

المسألة (1) صفحة 63



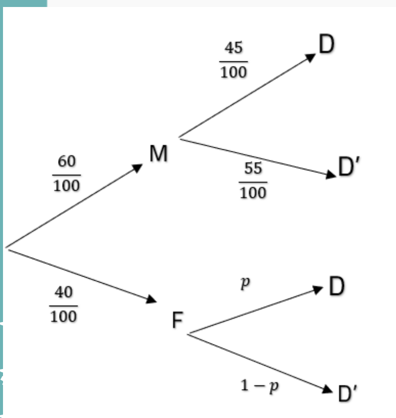
حساب احتمال أن يكون المصباح معطوب :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = \frac{1200}{2000} \cdot \frac{4}{100} + \frac{800}{2000} \cdot \frac{3}{100} = \frac{36}{1000}$$

حساب احتمال أن يكون من انتاج A علماً انه معطوب :

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{24}{1000}}{\frac{36}{1000}} = \frac{24}{36}$$

المسألة (2)



أولاً يجب إكمال المخطط و لأجل ذلك سنستفيد من المعلومة :

$$P(D) = \frac{30}{100} \Rightarrow P(A \cap D) + P(B \cap D) = \frac{30}{100}$$
$$\frac{60}{100}\frac{45}{100} + \frac{40}{100}p = \frac{30}{100}$$

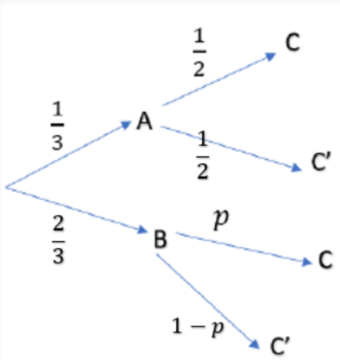
نضرب بـ 100 :

$$\frac{60}{100}.45 + 40p = 30$$
$$27 + 40p = 30$$
$$p = \frac{3}{40} \rightarrow 1 - p = \frac{37}{40}$$

الآن الحدث المطلوب أن تكون لا تمارس كرة المضرب علماً أنها أنثى :

$$P(D'|F) = \frac{P(D' \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{40}{100} \cdot \frac{37}{40}}{\frac{40}{100}} = \frac{37}{40}$$

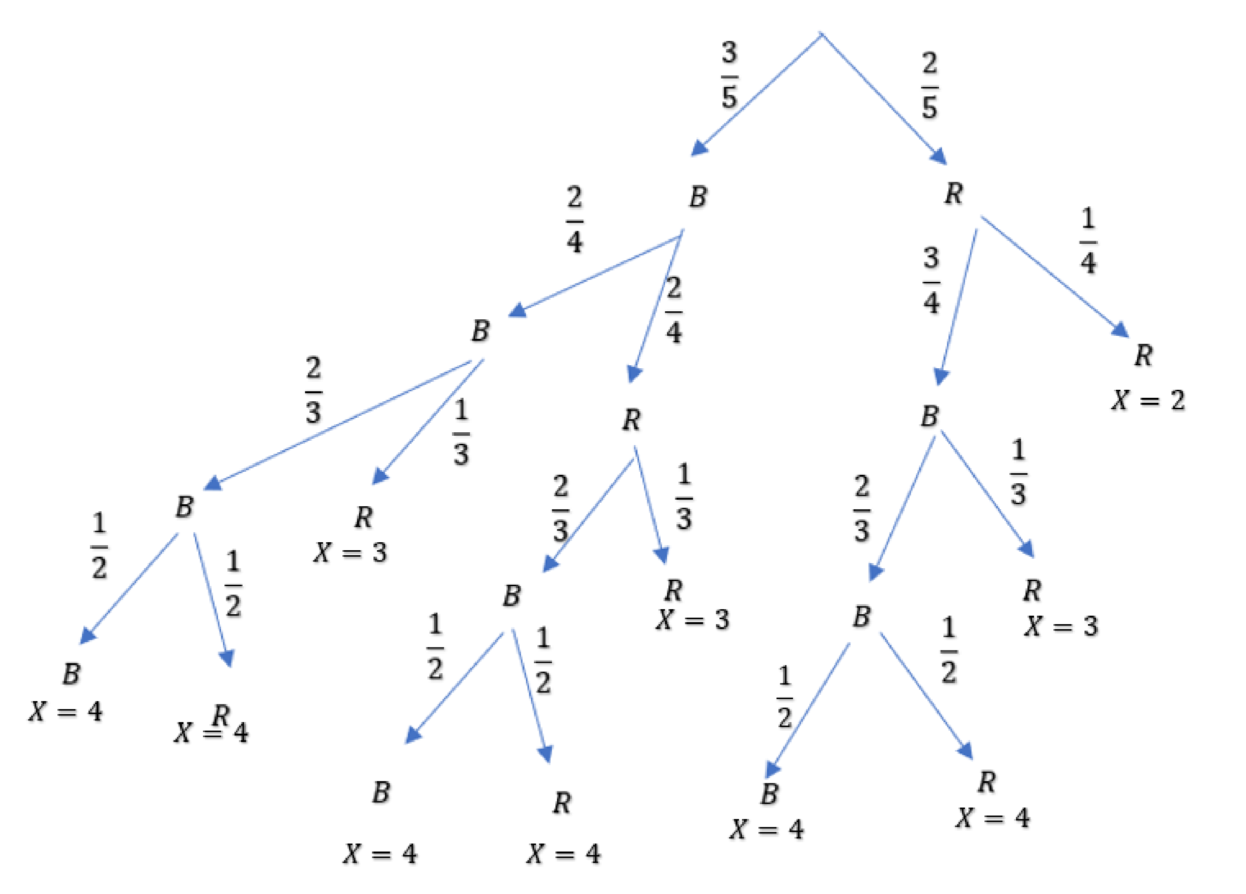
المسألة (3)



شرط الاستقلال :

$$P(A).P(C) = P(A \cap C)$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3}.p\right) = \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{6} + \frac{2}{3}p = \frac{1}{2}$$
$$\frac{2}{3}p = \frac{1}{3}$$
$$p = \frac{1}{2}$$

المسألة (4)



$$X = \{2,3,4\}$$

$$p_1 = P(X=2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

$$p_2 = P(X=3) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{6}{20}$$

$$p_3 = P(X=4) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{12}{20}$$

x_i	2	3	4	المجموع
p_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	**1**
$x_i.p_i$	$\frac{4}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{48}{20}$	$\frac{60}{20} = 3$

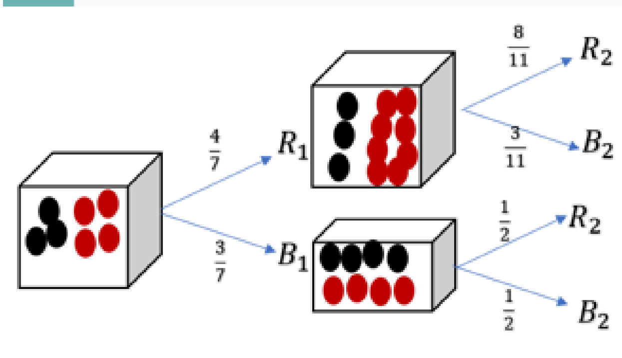
$$E(x) = \sum x_i.p_i = 3$$

يلا يا حبّاب. احسب التباين والانحراف

المسألة (5)

حساب احتمال R_2 :

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{8}{11} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{97}{154}$$



حساب احتمال أن تكون الأولى سوداء علماً أن الثانية حمراء :

$$P(B_1|R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{33}{154}}{\frac{97}{154}} = \frac{33}{97}$$

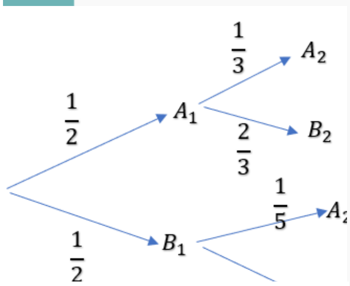
المسألة (6)

لنوضح المعطيات :

احتمال النجاح بعد نجاح $\frac{1}{3}$ و احتمال الفشل بعد الفشل $\frac{4}{5}$

احتمال النجاح في المرة الأولى يساوي احتمال الفشل أي $\frac{1}{2}$ ب $\frac{1}{2}$

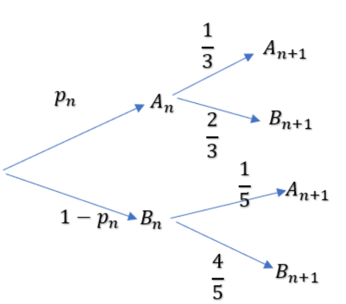
إذن من الواضح أن $p_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}$ (النجاح في المرة الأولى)



أما لمعرفة احتمال النجاح في المرة الثانية p_2 ننظم مخطط شجري يربط بين المرتين الأولى و الثانية :

$$p_2 = P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

لحساب p_{n+1} بدلالة p_n ننظم مخطط يربط بين المرة n و المرة $n+1$



$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n) = \frac{1}{5} + \frac{2}{15}p_n$$

الآن لدينا : $u_n = p_n - \frac{3}{13}$

نوجد $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{13} = \frac{1}{5} + \frac{2}{15}p_n - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_n - \frac{2}{65} = \frac{2}{15}\left(p_n - \frac{3}{13}\right) = \frac{2}{15}u_n$

و بالتالي $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{15}$ فالمتتالية u_n هندسية أساسها $q = \frac{2}{15}$

حدها الأول $u_1 = p_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$

- كتابة u_n بدلالة n :

$$u_n = u_1 q^{n-1}$$
$$u_n = \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$$

- استنتاج p_n :

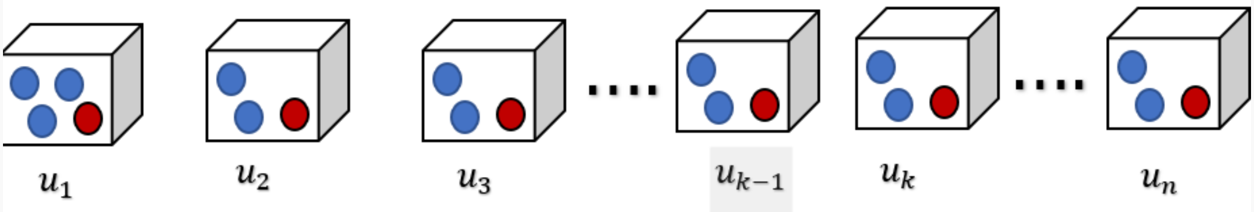
بعزلها من العلاقة المتداخلة $p_n = u_n + \frac{3}{13}$

$$p_n = \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}$$
$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{13}$$

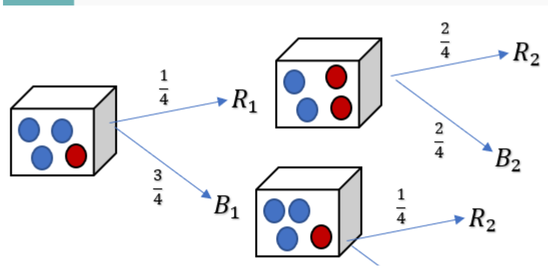
حيث $q = \frac{2}{15} < 1$

- نستنتج أنه إذا كررت سعاد التجربة لانهاية من المرات فانه من كل 13 محاولة ستنجح في ثلاثة منها (غير مطلوب .. فقط للفهم)

المسألة (7)



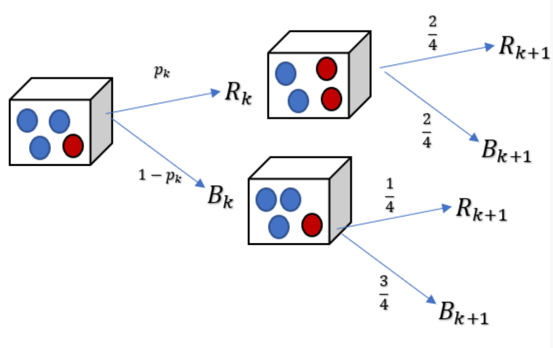
نرسم مخططاً بين الصندوق الأول و الثاني :



$$P(R_1) = \frac{1}{4}$$

$$l_1 = P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2) = \frac{1}{4}.\frac{2}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

نرسم مخطط يربط بين المرة k و المرة $k+1$:



$$P(R_{k+1}) = \frac{1}{2}p_k + \frac{1}{4}(1-p_k) = \frac{1}{4}p_k + \frac{1}{4}$$

- نضع $x_k = p_k - \frac{1}{3}$:

$$x_{k+1} = p_{k+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}p_k + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}p_k - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\left(p_k - \frac{1}{3}\right)$$

$$x_{k+1} = \frac{1}{4}x_k$$

هندسة أساسها $q = \frac{1}{4}$

$$x_k = x_1 q^{k-1}$$

$$x_k = \left(p_1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

و بما أن :

$$x_k = p_k - \frac{1}{3}$$

$$p_k = x_k + \frac{1}{3}$$

$$\boxed{p_k = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + \frac{1}{3}}$$

التمرين (1) صفحة 66

1- لدينا:

$$n = 5$$

احتمال النجاح هو احتمال ظهور وجه أسود:

$$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$P(X=0) = \binom{5}{k} p^k q^{5-k} = \binom{5}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$$

$$X = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$P(X=0) = \binom{5}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

2- لدينا:

$$E(x) = np = \frac{10}{3} \quad , \qquad V(x) = npq = 10$$

التمرين (2)

نرمز لاحتمال ظهور صورة q و احتما ظهور كتابة p و حسب المعطيات : $p = 2q$

و نعلم أن : $p + q = 1$

$$2p + p = 1$$
$$3p = 1$$
$$p = \frac{1}{3}$$
$$\rightarrow q = \frac{2}{3}$$

نحن أمام تجربة برنولية فيها $n = 3$ وقيم المتغير العشوائي الحداني :

$$X = \{0,1,2,3\}$$
$$p = \frac{1}{3} \quad , \qquad q = \frac{2}{3}$$

قانونه الاحتمالي :

$$P(X = k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$
$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$
$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{27}$$
$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

الجدول عليك &_&

$$E(X) = np = 3 . \frac{1}{3} = 1$$
$$V(X) = npq = 3\frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

المسألة (1)

	1	2	3	4	5	6
1	$1B$	$2B$	$3B$	$4B$	$5B$	$6AB$
2	$2B$	2	3	4	5	$6A$
3	$3B$	3	3	4	5	$6A$
4	$4B$	4	4	4	5	$6A$
5	$5B$	5	5	5	5	$6A$
6	$6AB$	$6A$	$6A$	$6A$	$6A$	$6A$

$$X = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 3) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 4) = \frac{7}{36}$$

$$P(X = 5) = \frac{9}{36}$$

$$P(X = 6) = \frac{11}{36}$$

$$E(X) = \Sigma x_i p_i = \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36} + \frac{40}{36} + \frac{66}{36} =$$

A: أكبر للعددين 6

B : ظهور واحد

$$P(A) = P(X = 6) = \frac{11}{36}$$

$$P(B) = \frac{11}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11}$$

المسألة (2)

	1	2	3	4	5
1		محققة		م	
2	م		م		م
3		م		م	
4	م		م		م
5		م		م	

-1

$$5^2 = 25$$

-2 12 طريقة

المسألة (3)

شروط الحل:

- $$n + 3 \geq 3$$
$$n \geq 0$$

- $$n + 2 \geq 2$$
$$n \geq 0$$

إذن $n \geq 0$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 16\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$
$$n + 3 = 8$$
$$n = 5$$

المسألة (4)

قيم X	الحالات
$X = 5$	RRR
$X = 3$	RRG
$X = 0$	غير ذلك

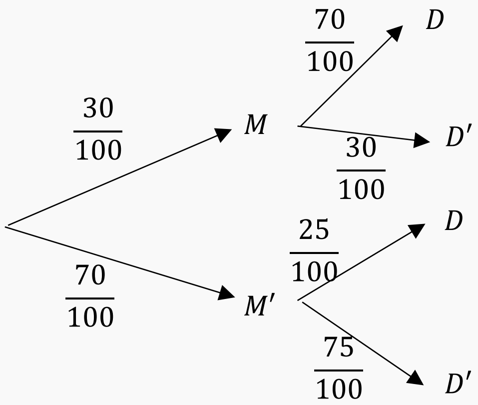
$$n(\Omega) = \binom{9}{3} = \frac{9.8.7}{3.2.1} = 84$$
$$X = \{5,3,0\}$$
$$P(X=5) = P(RRR) = \frac{\binom{5}{3}}{84} = \frac{10}{84}$$
$$P(X=3) = P(RRG) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{84} = \frac{40}{84}$$

$$P(X=0) = 1 - \left(\frac{10}{84} + \frac{40}{84}\right) = \frac{34}{84}$$

x_i	0	3	5	Σ
P_i	$\frac{34}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$	1
x_iP_i	0	$\frac{120}{84}$	$\frac{50}{84}$	$\frac{170}{84}$

$$E(X) = \Sigma x_i P_i = \frac{170}{84}$$

المسألة (5)



المسألة 6 +7+8+9+10 مكررة من مكثفة التوافقي (راجع الحلول)

المسألة (11)

-1

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$$

-2

$$\{1,1,1\}, \{-1,-1,-1\}$$

$$\frac{6!}{3!\,3!} = 20$$

-3

X	الحالات
$X = 6$	$6(+1)$
$X = 4$	$5(+1) + 1(-1)$
$X = 2$	$4(+1) + 2(-1)$
$X = 0$	$3(+1) + 3(-1)$
$X = -2$	$2(+1) + 4(-1)$
$X = -4$	$1(+1) + 5(-1)$
$X = -6$	$6(-1)$

المسألة الأولى VIE

	1	2	3	4	5	6
1	$1B$	$2B$	$3B$	$4B$	$5B$	$6\ AB$
2	2	2	3	4	5	$6\ A$
3	3	3	3	4	5	$6\ A$
4	4	4	4	4	5	$6\ A$
5	5	5	5	5	5	$6\ A$
6	$6\ A$	$6\ A$	$6\ A$	$6\ A$	$6\ A$	$6\ A$

$$X = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{36}, \quad P(X=2) = \frac{3}{36}, \quad P(X=3) = \frac{5}{36}$$
$$P(X=4) = \frac{7}{36}, \quad P(X=5) = \frac{9}{36}, \quad P(X=6) = \frac{11}{36}$$

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$
x_ip_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{45}{36}$	$\frac{66}{36}$

$$E(x) = \sum x_ip_i = \frac{161}{36}$$

نرمز بالرمز A لكون أكبر العددين الظاهرين 6 و B لظهور العدد 1

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}$$

المسألة الثانية VIE

بما أنه لدينا مجهولين فنحتاج لمعلومتين :

المعلومة الأولى :

$$E(X) = 2$$
$$\sum x_ip_i = 2$$
$$\frac{0+4+2\alpha+12+4\beta}{16} = 2$$
$$2\alpha + 4\beta = 16$$
$$\boxed{\alpha + 2\beta = 8} \dots (1)$$

المعلومة الثانية :

$$\sum p_i = 1$$
$$\frac{1+4+\alpha+4+\beta}{16} = 1$$
$$9+\alpha+\beta = 16$$
$$\boxed{\alpha + \beta = 7} \dots . (2)$$

بطرح 1 و 2 :

$$\beta = 1$$

نعوض في 2 فنجد $\alpha = 6$

لحساب التباين ضيف سطر عالجدول و كمل لحالك

المسألة 3 VIE

نحن أمام تجربة برنولية فيها $n = 8$ و احتمال النجاح في الإجابة بشكل صحيح على سؤال ما هو $p = \frac{1}{4}$

و بالتالي احتمال الفشل $q = \frac{3}{4}$

$$X = \{0,1,2,3,\dots,8\}$$

$$P(X = k) = \binom{8}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{8-k}$$

$$E(x) = np = 8\frac{1}{4} = 2$$

$$P(X = 2) = \binom{8}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^6 = \cdots$$

المسألة 4 VIE : مماثلة تماماً للسؤال المؤتمت الوارد في بحث التمثيل الشجري