التمرين الأول:

ليك لدينا:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$$

١. احسب S_1 و S_2 و S_3
٢. عبر عن عبارة S_{n+1} بدلالة S_n
٣. أثبت بالتدريج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $S_n = n^2$

التمرين الثاني:

نعتبر المجموع:

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

١. احسب S_0 و S_1 و S_2
٢. أثبت بالتدريج أن $S_n = 2^{n+1} - 1$

التمرين الثالث:

أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي الموجب تماماً كان:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

التمرين الرابع:

أثبت بالتدريج صحة الخاصة الآتية:

« $n^3 - 4n + 6$ يقبل القسمة على 3 »

حيث $n \geq 1$

التمرين الخامس:

ليكن العدد $A_n = 3^{2n} + 2^{6n-5}$

أثبت أن A_n مضاعف للعدد 11 حيث $n \in N^*$

التمرين السادس:

ليكن لدينا $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{n\,u_n}{n+1} + \dfrac{1}{n+1} \;; n \geq 1 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

١. احسب u_2
٢. أثبت بالتدريج أن $u_n < 1$ وذلك أياً كانت $n \in N^*$

التمرين السابع:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2 + \dfrac{u_n^2}{3}} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

١. احسب u_1
٢. أثبت بالتدريج أن لكل n من N

$$0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$$

التمرين الثامن:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 6} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

١. أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً
٢. استنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ مهما يكن $n \in N$

التمرين التاسع:

أثبت أنه أياً كان $n \geq 1$ فإن:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

التمرين الأول:

ليك لدينا: $S_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$

١. احسب S_1 و S_2 و S_3

٢. عبر عن عبارة S_{n+1} بدلالة S_n

٣. أثبت بالتدريج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $S_n = n^2$

الحل:

الطلب الأول:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1+3 = 4$$
$$S_3 = 1+3+5 = 9$$

الطلب الثاني:

$$S_{n+1} = 1+3+5+\cdots+(2n-1)+2n+1$$
$$S_{n+1} = S_n + 2n+1$$

الطلب الثالث:

* لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n) \ll \underbrace{1+3+5+\cdots+(2n-1)}_{L_1} = \underbrace{n^2}_{L_2} \gg$$

* نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$L_1 = 1$$
$$L_2 = 1$$
$$\rightarrow L_1 = L_2$$

القضية $E(1)$ محققة

* نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$:

$$E(n): 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2 \ldots (*)$$

* نثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$ أي نبرهن أن:

$$\underbrace{S_{n+1}}_{L_1} = \underbrace{(n+1)^2}_{L_2}$$

$$L_1 = S_{n+1} = S_n + (2n+1)$$
$$= \underbrace{1+3+5+\cdots+(2n-1)}_{(*)} + (2n+1)$$
$$= n^2 + 2n + 1$$
$$= (n+1)^2$$
$$= L_2$$

إذاً القضية $E(n+1)$ محققة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

التمرين الثاني:

نعتبر المجموع: $S_n = 1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n$

١. احسب S_0 و S_1 و S_2

٢. أثبت بالتدريج أن $S_n = 2^{n+1}-1$

الحل:

الطلب الأول:

$$S_0 = 1$$
$$S_1 = 1+2 = 3$$
$$S_2 = 1+2+4 = 7$$

الطلب الثاني

* لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n) \ll \underbrace{1+2+2^2+\cdots+2^n}_{L_1} = \underbrace{2^{n+1}-1}_{L_2} \gg$$

* نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$L_1 = 1$$
$$L_2 = 1$$
$$\rightarrow L_1 = L_2$$

القضية $E(0)$ محققة

* نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$:

$$E(n): 1+2+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1 \ldots (*)$$

* نثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$ أي نبرهن أن:

$$\underbrace{1+2+2^2+\cdots+2^n+2^{n+1}}_{L_1} = \underbrace{2^{n+2}-1}_{L_2}$$

$$L_1 = \underbrace{1+2+2^2+\cdots+2^n}_{(*)} + 2^{n+1}$$
$$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$
$$= 2.2^{n+1} - 1$$
$$= 2^{n+2} - 1$$
$$= L_2$$

إذاً القضية $E(n+1)$ محققة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

التمرين الثالث:

أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي الموجب تماماً كان:

$$1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

* لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n) \ll \underbrace{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}_{L_1} = \underbrace{\frac{1-r^n}{1-r}}_{L_2} \gg$$

* نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$L_1 = 1$$
$$L_2 = \frac{1-r}{1-r} = 1$$
$$\rightarrow L_1 = L_2$$

القضية $E(1)$ محققة

* نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$:

$$E(n): 1+r+r^2+\cdots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} \ldots (*)$$

* نثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$ أي نبرهن أن:

$$\underbrace{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}+r^n}_{L_1} = \underbrace{\frac{1-r^{n+1}}{1-r}}_{L_2}$$

$$L_1 = \underbrace{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}_{(*)} + r^n$$
$$= \frac{1-r^n}{1-r} + r^n = \frac{1-r^n+r^n-rr^n}{1-r} = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$
$$= L_2$$

إذاً القضية $E(n+1)$ محققة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

التمرين الرابع:

أثبت بالتدريج صحة الخاصة الآتية: « n^3-4n+6 يقبل القسمة على 3 » حيث $n \geq 1$

- لتكن القضية $E(n)$:

$E(n)$ « n^3-4n+6 يقبل على القسمة 3 »

- نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$E(1): 1^3-4(1)+6=3$$

والعدد 3 يقبل القسمة على 3 إذاً القضية $E(1)$ محققة

- نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$:

« n^3-4n+6 يقبل على القسمة 3 » $E(n)$ أي يوجد عدد طبيعي K يحقق: $n^3-4n+6=3k$ ومنه:

$$n^3=3k+4n-6 \dots (*)$$

- نثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$: أي نبرهن أن:

$(n+1)^3-4(n+1)+6$ يقبل القسمة على 3

$$= n^3+3n^2+3n+1-4n-4+6$$
$$= \underbrace{n^3}_{(*)}+3n^2-n+3$$
$$= 3k+4n-6+3n^2-n+3$$
$$= 3k+3n^2+3n-3$$
$$= 3(k+n^2+n-1)$$

إذاً القضية $E(n+1)$ محققة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

التمرين الخامس:

ليكن العدد $A_n=3^{2n}+2^{6n-5}$

أثبت أن A_n مضاعف للعدد 11 حيث $n\in N^*$

- لتكن القضية $E(n)$:

$E(n)$ « $3^{2n}+2^{6n-5}$ مضاعف لـ 11 »

- نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$E(1): 3^2+2^1=11$$

إذاً القضية $E(1)$ محققة

- نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$:

« $3^{2n}+2^{6n-5}$ مضاعف لـ 11 » $E(n)$ أي يوجد عدد طبيعي K يحقق: $3^{2n}+2^{6n-5}=11k$ ومنه:

$$3^{2n}=11k-2^{6n-5} \dots (*)$$

- نثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$: أي نبرهن أن:

$3^{2n+2}+2^{6n+1}$ هو مضاعف للعدد 11

$$\underbrace{3^{2n}}_{(*)}.3^2+2^{6n+1}$$
$$= (11k-2^{6n-5}).9+2^{6n+1}$$
$$= 99k-9.2^{6n-5}+2^{6n+1}$$
$$= 99k-9.2^{6n-5}+2^6.2^{6n-5}$$
$$= 99k+2^{6n-5}(-9+2^6)$$
$$= 99k+2^{6n-5}(-9+64)$$
$$= 99k+2^{6n-5}(55)$$
$$= 99k+55.2^{6n-5}$$
$$= 11(9k+5.2^{6n-5})$$

إذاً القضية $E(n+1)$ محققة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

التمرين السادس:

ليكن لدينا $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية:

$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{n\,u_n}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}\ ; n\geq 1 \\ u_1=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

١. احسب u_2

٢. أثبت بالتدريج أن $u_n<1$ وذلك أياً كانت $n\in N^*$

الطلب الأول:

$$u_2=\frac{1\times u_1}{1+1}+\frac{1}{1+1}$$
$$=\frac{1\times\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{4}$$

الطلب الثاني:

- لتكن القضية $E(n)$:

$E(n)$ « $u_n<1$ »

- نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$E(1): u_1<1 \rightarrow \frac{1}{2}<1$$

إذاً القضية $E(1)$ محققة

- نفرض صحة القضية $E(n)$

$$E(n): u_n<1 \dots (*)$$

- نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$E(n+1): u_{n+1}<1$$

لدينا من علاقة الفرض $(*)$:

$$u_n<1$$

نضرب الطرفين بـ $n>0$

$$n.u_n<n$$

نقسم الطرفين على $n+1>0$

$$\frac{n.u_n}{n+1}<\frac{n}{n+1}$$

نضيف إلى الطرفين $\frac{1}{n+1}$

$$\frac{n.u_n}{n+1}+\frac{1}{n+1}<\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n+1}$$
$$u_{n+1}<\frac{n+1}{n+1}$$
$$u_{n+1}<1$$

ومنه القضية $E(n+1)$ محققة

إذاً مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة أياً كان $n\in N^*$

التمرين السابع:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2 + \dfrac{u_n^2}{3}} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

١. احسب u_1

٢. أثبت بالتدريج أن لكل n من N

$0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$

وذلك أياً كانت $n \in N^*$

الطلب الأول:

$$u_1 = \sqrt{2 + \frac{u_0^2}{3}}$$
$$= \sqrt{2 + \frac{0}{3}}$$
$$= \sqrt{2}$$

الطلب الثاني:

* لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n) \ll \ 0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3} \gg$$

* نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$E(1): 0 \leq u_1 \leq 2\sqrt{3} \rightarrow 0 \leq \sqrt{2} \leq 2\sqrt{3}$$

إذاً القضية $E(1)$ محققة

* نفرض صحة القضية $E(n)$

$$E(n): 0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3} \ldots (*)$$

* نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 2\sqrt{3}$$

لدينا من علاقة الفرض $(*)$:

$$0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$$

نربع الطرفين

$$0 \leq u_n^2 \leq 12$$

نقسم الطرفين على 3

$$0 \leq \frac{u_n^2}{3} \leq 4$$

نضيف إلى الطرفين 2

$$2 \leq 2 + \frac{u_n^2}{3} \leq 6$$

نجذر الطرفين:

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + \frac{u_n^2}{3}} \leq \sqrt{6}$$
$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{6}$$
$$0 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{6} \leq 2\sqrt{3}$$
$$0 \leq u_{n+1} \leq 2\sqrt{3}$$

ومنه القضية $E(n+1)$ محققة

إذاً مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة أياً كان $n \in N^*$

التمرين الثامن:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 6} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

١. أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً

٢. استنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ مهما يكن $n \in N$

الطلب الأول:

$$f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$$
$$f'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2}$$
$$= \frac{6x + 18 - 6x - 4}{(2x+6)^2}$$
$$= \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

إذاً التابع f متزايد تماماً

الطلب الثاني:

* لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n) \ll \frac{1}{2} < u_n \leq 1 \ \gg$$

* نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$E(1): \frac{1}{2} < u_0 \leq 1 \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \leq 1$$

إذاً القضية $E(0)$ محققة

* نفرض صحة القضية $E(n)$

$$E(n): \frac{1}{2} < u_n \leq 1 \ldots (*)$$

* نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$E(n+1): \frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$$

لدينا من علاقة الفرض $(*)$:

$$\frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

بالاستفادة من تزايد f نجد

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(u_n) \leq f(1)$$
$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8}$$
$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8} \leq 1$$
$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$$

ومنه القضية $E(n+1)$ محققة

إذاً مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة أياً كان $n \in N$

التمرين التاسع:

أثبت أنه أياً كان $n \geq 1$ فإن: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$

- لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n) \ll \underbrace{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}_{L_1} \leq \underbrace{2-\frac{1}{n}}_{L_2} \gg$$

- نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$1 \leq 1$$
$$\rightarrow L_1 \leq L_2$$

القضية $E(1)$ محققة

- نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$:

$$E(n): \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n} \ldots (*)$$

- نثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$ أي نبرهن أن:

$$\underbrace{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}_{L_1} \leq \underbrace{2-\frac{1}{n+1}}_{L_2}$$

$$L_1 = \underbrace{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}_{(*)}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\leq 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\leq 2-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\leq 2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{n+1+1}{(n+1)^2}$$

$$\leq 2-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{n+2}{(n+1)^2}$$

$$\leq 2-\frac{1}{n+1}+\frac{-(n+1)^2+n^2+2n}{n(n+1)^2}$$

$$\leq 2-\frac{1}{n+1}+\frac{-n^2-2n-1+n^2+2n}{n(n+1)^2}$$

$$\leq 2-\frac{1}{n+1}+\boxed{\frac{-1}{n(n+1)^2}}$$

$$\leq 2-\frac{1}{n+1}$$

$$-\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

باستخدام أسلوب تكبير الكبير يهمل

إذاً القضية $E(n+1)$ محققة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

بارك الله الخُطى..

دُمتم ودُمنا في توفيقٍ من اللّه..