1– مركز التناظر هو نقطة تقاطع المقاربات:

$x = 1$ مقارب شاقولي بجوار $+\infty$ و $-\infty$

بالقسمة الإقليدية نجد أن:

$$f(x) = x - 1 + \frac{-1}{x-1} \Rightarrow y_\Delta = x - 1$$

وعندما $x = 1$ فإنّ $y = 0$

وبالتالي نقطة تقاطع المقاربات هي $\boxed{b:\ \ A(1,0)}$

2– لدينا:

$$f(x) = 2x + \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\Rightarrow y_\Delta = 2x + \lim_{x\to-\infty}\underbrace{\left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)}_{u(x)}$$

$$u(x) = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{2x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} u(x) = \frac{2}{-\sqrt{4+0}} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\boxed{\Rightarrow c:\ \ y_\Delta = 2x - 1}$$

3– التابع f مستمر على I أي أنه مستمر عند نقاط الإنقطاع، وبالتالي f مستمر عند 2 أي أنّ:

$$f(2) = \lim_{x\to2} f(x)$$
$$f(2) = \sqrt{2k}$$
$$\lim_{x\to2} f(x) = 2$$
$$\Rightarrow \sqrt{2k} = 2 \Rightarrow 2k = 4$$
$$\Rightarrow \boxed{b:k = \frac{4}{2} = 2}$$

4– التابع f مستمر عند الصفر أي أنّ:

$$\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$$
$$f(0) = 2(0) - m = -m$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x(x-2)}{\sin(x)}\right) = (1)(0-2) = -2$$

$$\Rightarrow -m = -2 \ \Rightarrow \boxed{c:\ \ m = 2}$$

5– التابع f مستمر عند الصفر أي أنّ:

$$\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$$

$$f(0) = \frac{1}{6}\ ,\ \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\left(\sqrt{b+x} - \sqrt{b}\right)\right)$$

نضرب بالمرافق:

$$\frac{b+x-b}{x\left(\sqrt{b+x}-\sqrt{b}\right)} = \frac{1}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b}}\right) = \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{b}} = \frac{1}{2\sqrt{b}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{6} \Rightarrow 2\sqrt{b} = 6 \Rightarrow \sqrt{b} = 3 \Rightarrow \boxed{b = 9}$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{1-\cos(ax)}{x+\tan(ax)}\right)$$

$$\boxed{1 - \cos(ax) = \frac{\sin^2(ax)}{1+\cos(ax)}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin^2(ax)}{x(1+\cos(ax)).\tan(ax)}$$
$$= \frac{a\sin(ax).\sin(ax).ax}{ax.ax.\tan(ax)} \times \frac{1}{1+\cos(ax)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to0^-} f(x) = a(1)(1)(1).\frac{1}{1+1} = \frac{a}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow a = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{a^2}$$

6– لدينا:

$$h(x) = \frac{\sin(f(x)-5)}{5\sqrt{2}-\sqrt{2}f(x)}$$

نفرض أنّ $f(x) - 5 = t$ وبالتالي:

$$f(x) = t + 5$$
$$f(x) \to 5 \Rightarrow t \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(t)}{5\sqrt{2}-\sqrt{2}(t+5)} = \frac{\sin(t)}{5\sqrt{2}-\sqrt{2}t-5\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to0}\left(\frac{\sin(t)}{-\sqrt{2}t}\right) = \frac{1}{-\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}\ :b}$$

7– التابع f مستمر عند الصفر أي أنّ:

$$\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$$
$$f(0) = m$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

نضرب بالمرافق، ونطبق القاعدة:

$$\cos(x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}$$

$$= -\frac{2}{4}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = -\frac{2}{4}(1)^2(1+1) = -\frac{4}{4} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{b:\ \ m=-1}$$

8− لدينا:

$$y = ax + b = -x - 1$$
$$\Rightarrow a=-1\ ,\ b=-1$$
$$\Rightarrow \boxed{b:\ \ a = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = -1}$$

9− مقارب y_Δ:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} y_\Delta = +\infty$$

10− لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{3x^2+1}{x^3+x}\right).f(x)\right) =$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{3x^2+1}{x^2+1}\right).\underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{a=-1}\right) = 3(-1) = -3$$
$$\Rightarrow \boxed{b:\ -3}$$

11− $x=2$ مقارب شاقولي أي أن $x=2$ تعدم المقام وبالتالي:

$$2-b=0 \Rightarrow b=2$$

$y=3$ مقارب أفقي أي أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$
$$\Rightarrow \frac{-a}{1} = 3 \Rightarrow a=-3$$

وبالتالي الثنائيّة: $(-3\,,2)$

12−

....

13− بالقسمة الإقليديّة نجد:

$$f(x) = -2x + 3 + \frac{1}{1-x}$$

وبالتالي $\boxed{d:\ \ y_\Delta = 3-2x}$ مقارب مائل لـ C

14− نلاحظ أن:

$$\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t}$$
$$x\to 0\ \Rightarrow t\to+\infty$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+5} = \frac{\frac{\sin(t)}{t}}{\frac{1}{t^2}+5} = \frac{t.\sin(t)}{1+5t^2}$$

حسب مبرهنة الاحاطة نجد:

$$-1 \le \sin(t) \le 1$$

نضرب طرفي المتراجحة بـ t:

$$\Rightarrow -t \le t.\sin(t) \le t$$

نقسم طرفي المتراجحة على $(1+5t^2)$:

$$\Rightarrow \frac{-t}{1+5t^2} \le \frac{t.\sin(t)}{1+5t^2} \le \frac{t}{1+5t^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-t}{1+5t^2}\right) \le \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t.\sin(t)}{1+5t^2}\right)$$
$$\le \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{1+5t^2}\right)$$

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t.\sin(t)}{1+5t^2}\right) \le 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a\ :\ \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t.\sin(t)}{1+5t^2}\right) = 0}$$

15− تابع الجزء الصحيح:

$$E(x):\quad x \in \left]\underbrace{\sqrt{2}}_{\approx1.4}\ ,\underbrace{2}_{}\ ,\underbrace{\pi}_{\approx3.14}\right[$$

16−

$$x \in \left]\underbrace{\pi}_{\approx3.14}\ \ ,\underbrace{\pi+1}_{\approx4.14}\right[$$

17− f معرّف بشرط المقام لا يساوي الصفر

$$1 - E(x) = 0 \Rightarrow E(x) = 1 \Rightarrow x \in [1\,,2[$$
$$\Rightarrow \boxed{c\ :\ D_f = \mathbb{R}\setminus[1\,,2[}$$

18− حسب مبرهنة الاحاطة:

$$f(x) \le 3 \le f(x) + \frac{1}{x}$$

نطرح من طرفي المتراجحة $f(x)$:

$$\Rightarrow 0 \le 3 - f(x) \le \frac{1}{x}$$

نطرح من طرفي المتراجحة 3:

$$\Rightarrow -3 \le -f(x) \le -3 + \frac{1}{x}$$

نضرب طرفي المتراجحة بـ (-1):

$$\Rightarrow 3 \ge f(x) \ge 3 - \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(3) \ge \lim_{x\to+\infty} f(x) \ge \lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow 3 \ge \lim_{x\to+\infty} f(x) \ge 3$$
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3}$$

19- لدينا:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2mx+4}$$

بالإتمام إلى مربّع كامل نجد:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2mx+m^2-m^2+4}$$
$$=\sqrt{(x-m)^2-m^2+x}$$
$$\Rightarrow y_\Delta=|x-m|=x-m \;:\; x\to+\infty$$
$$y_\Delta=x+1\Rightarrow -m=+1\Rightarrow \boxed{m=-1}$$

20- بالقسمة الاقليدية نجد:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x-1}=x-3+\frac{1}{x-1}$$
$$\Rightarrow y_\Delta=x-3$$

21- بالقسمة الاقليدية نجد:

$$f(x)=\frac{x^2-3mx+1}{x-1}=x-3m+1+\frac{-3m+2}{x-1}$$
$$\Rightarrow y_\Delta=x-3m+1=x-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow -3m+1=-\frac{1}{2}\Rightarrow -3m=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{a \;:\; m=\frac{1}{2}}$$

22- لدينا:

$$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9x+1}{4x+5}}$$
$$\Rightarrow y_\Delta=\frac{1}{2}x+\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9x+1}{4x+5}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}x+0+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}x+1$$
$$\Rightarrow \boxed{a \;:\; y_\Delta=\frac{1}{2}x+1}$$

23- لدينا التابع:

$$f(x)=2x-1+\sqrt{x^2+4x}$$

بالإتمام إلى مربّع كامل نجد:

$$f(x)=2x-1+\sqrt{(x+2)^2-4}$$
$$y_\Delta=2x-1+x+2 \;:\; x\to+\infty$$
$$\Rightarrow \boxed{b \;:\; y_\Delta=3x+1}$$

24- $\lim_{x\to0}f(x)=5+\infty=+\infty$

وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي في جوار الـ $+\infty$

25- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{m=3}\right)$$
$$=-1+3=+2$$

26- حسب مبرهنة الاحاطة:

$$\frac{2+x}{x}\le f(x)\le 3$$

نقسم طرفي المتراجحة على x حيث: $x\to+\infty$:

$$\Rightarrow \frac{2+x}{x^2}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{3}{3}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+x}{x^2}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}\right)$$
$$\Rightarrow 0\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)\le 0$$
$$\Rightarrow \boxed{d \;:\; \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=0}$$

27- $: x\to\frac{\pi}{2}^-$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan(x))=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

28- $y=2$ مقارب أفقي:

$$f(x)=\frac{x+b}{cx+d}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{c}=2\Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

$x=-1$ مقارب شاقولي، أي أن $x=-1$ تعدم المقام:

$$\frac{1}{2}(-1)+d=0\Rightarrow d=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=1\Rightarrow\frac{0+b}{0+d}=0$$
$$\Rightarrow b=d=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{c \;:\; b+d+c=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}$$

29- $y_\Delta=x-3$

$$f(x)=x+1+\lambda\,x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$
$$f(x)-y_\Delta=4+\lambda\,x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(4+\lambda\,x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$$
$$\Rightarrow 4+\lambda\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)=0$$
$$\Rightarrow 4+\lambda(1)=0\Rightarrow\boxed{b \;:\; \lambda=-4}$$

30- $c \;:\; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} y_{\Delta} = +\infty$

31- $|f(x)-l| < \varepsilon$

$l = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$

$\varepsilon = b - l = -1.95 + 2 = +0.05$

$\left|\dfrac{2x+3}{1-x} + 2\right| < 0.05$

$\Rightarrow \left|\dfrac{2x-3+2-2x}{1-x}\right| < \dfrac{5}{100}$

$\Rightarrow \dfrac{|-1|}{|1-x|} < \dfrac{5}{100} \Rightarrow \dfrac{1}{1-x} < \dfrac{5}{100}$

$\Rightarrow 5(1-x) > 100$

$\Rightarrow 5 - 5x > 100 \Rightarrow -5x > 95$

$\Rightarrow \boxed{c \;:\; x < -19}$

32- $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

$\varepsilon = b - l = 1.1 - 1 = 0.1$

$|f(x)-l| < \varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - 1\right| < 0.1$

$\Rightarrow \left|\dfrac{2+\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| < \dfrac{1}{10}$

$\Rightarrow \left|\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right| < \dfrac{1}{10} \Rightarrow \sqrt{x}+1 > 10$

$\Rightarrow \sqrt{x} > 9 \Rightarrow \boxed{b \;:\; x > 81}$

33- التقاطع مع محور الفواصل يعني أن $y = 0$:

$\Rightarrow \sqrt{5x^2-1} - x = 0$

$\Rightarrow \sqrt{5x^2-1} = x$

$\Rightarrow 5x^2 - 1 = x^2 \Rightarrow 4x^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \boxed{d \;:\; x = \pm\dfrac{1}{2}}$

34-

....

....

35-

....

....

36- $\boxed{b \;:\; \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -1}$

37- $\boxed{c \;:\; f(1) = 0}$

38- $\boxed{b} : \lim\limits_{x\to0} f(x)$

$= \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5\sin(5x)}{5x}\right) = 5$

39- $\boxed{b} : \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$= (2)^{\frac{5}{2}} - 2(2)^{\frac{3}{2}} = (2)^{\frac{5}{2}} - (2)^{\frac{5}{2}} = 0$

40-

....

....

41- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \dfrac{8}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow \boxed{c \;:\; \lim\limits_{x\to3^+} f(f(x)) = 3}$

42- لدينا التابع:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(-x)}{x} & : \quad x < 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & : \quad x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1$

$\Rightarrow$ d : غير موجودة

43- $f(M) = M'$

$f(x,y) = (x',y')$

$M(9x'-20y' \,,\; 9y'-4x')$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 9x' - 20y' & \ldots.(1) \\ y = 9y' - 4x' & \ldots.(2) \end{cases}$$

من (1) نجد:

$9x' = x + 20y'$

$\Rightarrow x' = \dfrac{1}{9}x + \dfrac{20}{9}y' \;\ldots(*)$

نعوّض في (2) :

$y = 9y' - 4\left(\dfrac{1}{9}x + \dfrac{20}{9}y'\right)$

$= 9y' - \dfrac{4}{9}x - \dfrac{80}{9}y'$

$= \dfrac{1}{9}y' - \dfrac{4}{9}x$

$\Rightarrow \dfrac{1}{9}y' = y + \dfrac{4}{9}x$

$\Rightarrow y' = 9y + 4x$

نعوّض في (*) :

$x' = \dfrac{1}{9}x + \dfrac{20}{9}(9y+4x) = \dfrac{1}{9}x + 20y + \dfrac{80}{9}x$

$= 20y + \dfrac{81}{9}x \Rightarrow x' = 20y + 9x$

$$\Rightarrow \boxed{a\ :\ M(20y+9x\,,9y+4x)}$$

44− $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l = 1$

وبالتالي $y = 1$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

45− $\boxed{c\ :\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

46− بالقسمة الاقليديّة نجد:

$$f(x) = 2 - \frac{11}{2x-3}$$

$$\Rightarrow f(x) - y_\Delta = -\frac{11}{2x-3}$$

البسط سالب

المقام:

$$2x+3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
-11	− − − − − − −		− − − − − − −
$2x+3$	− − − −	0	+ + + +
$f(x)-y_\Delta$	+ + + +	‖	− − − −
الوضع النسبي	Δ فوق C		Δ تحت C

C_f فوق مقاربه على المجال:

$$\left]-\infty\,,-\frac{3}{2}\right[$$

47− $f(x) = 2 + 3\sin(x)$

حسب مبرهنة الاحاطة نجد:

$$-1 \le \sin(x) \le 1$$

نضرب طرفي المتراجحة بـ 3 :

$$\Rightarrow -3 \le 3\sin(x) \le 3$$

نضيف لطرفي المتراجحة 2 :

$$\Rightarrow -1 \le f(x) \le 5\ :\ x \to +\infty$$

وبالتالي النهاية غير موجودة.

48− $\lim_{x\to 0} f(x)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{a\sin(ax)}{ax}\right) = a(1) = a$$

49− $\lim_{x\to 0} f(x)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{a\sin(ax)}{b\,ax}\right) = \frac{a}{b}(1) = \frac{a}{b}$$

50− $\lim_{x\to 0} f(x)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{a\tan(ax)}{b\,ax}\right) = \frac{a}{b}(1) = \frac{a}{b}$$

51− $\lim_{x\to 0} f(x)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{b}\left(\frac{\sin(ax)}{ax}\right)\left(\frac{bx}{\sin(bx)}\right)\right) = \frac{a}{b}(1)(1) = \frac{a}{b}$$

52− $\lim_{x\to 0} f(x)$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{b}\left(\frac{\tan(ax)}{ax}\right)\left(\frac{bx}{\sin(bx)}\right)\right) = \frac{a}{b}(1)(1) = \frac{a}{b}$$

53− $f(x) = x + 2\sin(x)$

حسب مبرهنة الاحاطة نجد:

$$-1 \le \sin(x) \le 1$$

نضرب طرفي المتراجحة بـ 2 :

$$-2 \le 2\sin(x) \le 2$$

نضيف لطرفي المتراجحة x :

$$\Rightarrow \boxed{a\ :\ x-2 \le f(x) \le 2+x}$$

54− $|f(x) - 3| \le g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

نضرب بالمرافق:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) = 0$$

55− $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

نضرب بالمرافق:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

أكبرهم × عددهم ≥ مجموع مقادير موجبة ≥ أصغرهم × عددهم

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} \le \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \le 2\sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \ge \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \ge \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a\ :\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

56− $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{a\ :\ \lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \frac{5}{3}}$$

57− التابع:

$$f(x) = \sqrt{1-\cos(x)}$$

معرّف على:

$\boxed{d \;:\; \mathbb{R}}$

−58 التابع:

$$f(x) = \sqrt{3+\sin(x)}$$

$\boxed{a \;:\; \text{تابع دوري دوره } 2\pi}$

−59 $\boxed{a \;:\; y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x}$

−60 لدينا التابعان:

$$f(x) = \frac{x+2}{x} \quad , \quad g(x) = \frac{2}{x-1}$$

$$f\big(g(x)\big) = \frac{\frac{2}{x-1}+2}{\frac{2}{x-1}} = \frac{\frac{2+2x-2}{x-1}}{\frac{2}{x-1}} = \frac{2x}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a \;:\; f\big(g(x)\big) = x}$$

−61 $f'(x) = 1-\cos(x) \geq 0$

وبالتالي f متزايد على $\mathbb{R}$.

−62 لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1} - \left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{d \;:\; y_\Delta = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}}$$

−63

$$f_0(x) = x^3 - 8x$$
$$f_1(x) = x^3 + x^2 - 8x - 1$$

بالحل المشترك نجد:

$$x^3 - 8x = x^3 + x^2 - 8x - 1$$
$$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$
$$\Rightarrow x = \pm 1$$
$$f(1) = 1 - 8 = -7 \;\Rightarrow (1\,,-7)$$
$$f(-1) = -1 + 8 = 7 \Rightarrow (-1\,,7)$$

−64

....

....

−65 بالإتمام إلى مربّع كامل:

$$f(x) = \sin^2(x) + 4\sin(x) + 4 + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{b \;:\; f(x) = (\sin(x)+2)^2}$$

−66 حسب مبرهنة الاحاطة نجد:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

نضيف 2 لطرفي المتراجحة ونربّع:

$$\Rightarrow 1 \leq (\sin(x)+2)^2 \leq 9$$

نضيف 2 لطرفي المتراجحة:

$$\Rightarrow \boxed{a \;:\; 3 \leq f(x) \leq 11}$$

−67 من الطلب السابق:

$$3x^2 \leq x^2 f(x) \leq 11x^2$$

نضيف لطرفي المتراجحة a حيثُ: $x \to +\infty$

$$\Rightarrow \boxed{b \;:\; \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$$

−68 $\boxed{a \;:\; (g\circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sin(x^2-1)}$

−69 لدينا التابع:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}^{\,5} - 3\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}^{\,3}$$
$$= u^5 - 3(u)^3$$

$$\Rightarrow \boxed{c \;:\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u\to2}(u^5 - 3u^3)}$$

−70

....

−71

....

−72

....

−73

....

−74 تابع الجزء الصحيح:

$$E(\pi) + E(-\pi) = E(3.14) + E(-3.14) = 3 - 4$$
$$= -1$$

انتهت الأسئلة.

x	-1		0		3
$f'(x)$	0	$++$	0	$--$	0
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2

1) الجواب:

$$f([-1\,,3]) = [-2\,,-1]$$
$$;\ f(-1) = -1\ ,\ f(3) = -2$$

2) الجواب:

$$3\quad ;\quad f'(-1) = 0\ ,\ f'(0) = 0\ ,\ f'(3) = 0$$

3) الجواب:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$\Rightarrow y = 0(x-0) + 0 \Rightarrow y = 0$$

4) الجواب:

$$f(D_f) = [-2\,,0]$$

5) الجواب:

لدينا:

$$f(0) = 1 - 1 = 0$$

عند $x = 0$ يكون التابع شكله:

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(0) = -1$$

نعوض في قانون معادلة المماس:

$$y = -1(x-0) + 0$$

$$y = -x$$

6) الجواب:

لدينا:

$$f(g(x))' = f'(g(x)).g'(x)$$

$$1 = \frac{1}{g(x)}.g'(x) \Rightarrow g(x) = g'(x)$$

7) الجواب:

لدينا:

$$f'(1) = 0$$

نوجد المشتق:

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x - 3$$

$$f'(1) = 3a + 6 - 3 = 3a + 3$$

نضع:

$$3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$$

8) الجواب:

لدينا:

$$f'(0) = 4$$

$$f(0) = 3$$

المعلومة الأولى:

$$f'(x) = \frac{(9x^2 + a)(x^2+1) - (2x)(3x^3 + ax + b)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(0) = a$$

وبالتالي:

$$a = 4$$

المعلومة الثانية:

$$f(0) = b$$

وبالتالي:

$$b = 3$$

9) الجواب:

لدينا التابع زوجي وبالتالي خطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب فإذا كان يقبل ثلاث حلول على المجال $]0,+\infty[$ فسيقبل ثلاثة حلول أخرى على المجال $]-\infty,0[$ وبالتالي عدد الحلول على اجتماع المجالين $\mathbb{R}^*$ هو 6 حلول.

10) الجواب:

لدينا:

$$\frac{f(x)-1}{\sqrt{x}-1}.\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{f(x)-1}{x-1}\,(\sqrt{x}+1)$$

نهاية الكسر حسب قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=f'(1)=2\sqrt{3}$$

ونهاية القوس:

$$\lim_{x\to1}(\sqrt{x}+1)=2$$

بالتالي النهاية هي جداء النهايتين:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{\sqrt{x}-1}=2\sqrt{3}.2=4\sqrt{3}$$

11) الجواب:

نلاحظ أن شكل التابع:

$$1-\underbrace{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}_{<1}$$

وبالتالي مضمون التابع $E\big(f(x)\big)$ قيمته تنتمي للمجال $[0,1]$ فيكون:

$$E\big(f(x)\big)=0$$

12) الجواب:

لدينا:

$$g'(x)$$

$$=\frac{3(1+\tan^2 x)(1+\tan(x))-(1+\tan^2 x)(3tanx-1)}{(tanx+1)^2}$$

$$=\frac{(1+\tan^2 x)[3+3\,tan\,x-3\tan x+1]}{(1+tanx)^2}$$

$$=\frac{4+4\tan^2 x}{(1+tanx)^2}$$

13) الجواب:

لدينا:

$$g'(x)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)=\frac{2(x^4-1)}{x^3}$$

14) الجواب:

لدينا:

$$f'(x)=\cos x+a$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0\Rightarrow\frac{1}{2}+a=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

15) الجواب:

لدينا معادلة المماس في النقطة a:

$$f(a)=\frac{a^2+a}{a^2+a+3}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+x+3)-(2x+1)(x^2+x)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$=\frac{3(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$f'(a)=\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}$$

فتكون معادلة المماس:

$$y=\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}(x-a)+\frac{a^2+a}{a^2+a+3}$$

ليكون المماس مار بالمبدأ نعوض النقطة $(0,0)$:

$$0=\frac{3(2a+1)(-a)+(a^2+a)(a^2+a+3)}{(a^2+a+3)^2}$$

ينعدم الكسر اذا نعدم بسطه:

$$-6a^2-3a+a^4+a^3+3a^2+a^3+a^2+3a=0$$

$$-2a^2+a^4+2a^3=0$$

$$a^2(a^2+2a-2)=0$$

إما:

$$a^2=0\Rightarrow a=0$$

أو:

$$a^2+2a-2=0$$

$$\Delta=4-4(-2)(1)=4+8=12$$

للمعادلة حلان:

$$a_1=\frac{-2+\sqrt{12}}{2}\,,a_2=\frac{-2-\sqrt{12}}{2}$$

إذن يوجد ثلاث مماسات تمر من المبدأ (يعني حسسب كم قيمة لـ a بيطلعلي)

16) الجواب:

$$f(1)=5 \Rightarrow \frac{2+a+b}{2}=5$$
$$\Rightarrow a+b=8 \ldots(1)$$

$f(1)=5$ قيمة حديّة محليّاً، وبالتالي:

$$f'(1)=0$$

$$f'(x)=\frac{(4x+a)(x+1)-(1)(2x^2+ax+b)}{(x+1)^2}$$
$$\Rightarrow f'(1)=\frac{2(4+a)-(2a+b)}{4} \ ; \ f'(1)=0$$
$$\Rightarrow \frac{8+2a-2-a-b}{4}=0 \Rightarrow 6+a-b=0$$
$$\Rightarrow a-b=-6 \ \ldots(2)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2a=2 \Rightarrow a=1$$
$$\Rightarrow b=8-1=7$$
$$\Rightarrow (1\,,7)$$

17) الجواب:

$$f(x)=\sqrt{x} \ ; \ 1.01\begin{cases} a=1 \\ h=0.01 \end{cases}$$
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f(1)=1 \ , \ f'(1)=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow f(1.01)=\sqrt{1.01} \approx f(1)+f'(1)h$$
$$\approx 1+\frac{1}{2}(0.01)$$
$$\approx \frac{200}{200}+\frac{1}{200}=1.005$$

18) الجواب:

$$f(x)=\frac{3(x+2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$f(x)=\frac{a}{1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

بتوحيد المقامات نجد:

$$a(x+1)(x-2)+b(x-2)+c(x+1)=3x^2+6x$$

نأخذ $x=-1$ فنجد:

$$-3b=3-6 \Rightarrow -3b=-3 \Rightarrow b=1$$

نأخذ $x=2$ فنجد:

$$3c=24 \Rightarrow c=\frac{24}{3}=8$$

نأخذ $x=0$ فنجد:

$$-2a-2(1)+8=0 \Rightarrow a=3$$

19) الجواب:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-1+1-3x}{x} & ; \ x>0 \\ \dfrac{-2x-1-1+3x}{x} & ; \ x<0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -1 & ; \ x>0 \\ \dfrac{x-2}{x} & ; \ x<0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=1$$

وبالتالي النهاية غير موجودة.

20) الجواب:

لدينا:

$$x-\frac{x^3}{3!} \le \sin x \le x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

نضرب بـ -1:

$$\frac{x^3}{3!}-x \ge -\sin x \ge -x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}$$

نضيف x:

$$\frac{x^3}{3!} \ge x-\sin x \ge \frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}$$

نقسم على x^3:

$$\frac{1}{3!} \ge \frac{x-\sin x}{x^3} \ge \frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}$$

$$\lim\left(\frac{1}{3!}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}\right)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

21) الجواب:

$$y=2x-4$$
$$y=-2x+4$$
$$\Rightarrow 2x-4=-2x+4$$
$$\Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2$$
$$\Rightarrow y=0 \Rightarrow (2\,,0)$$

22) الجواب:

$$f'(1)=0$$

$$f(1)=-1 \Rightarrow f(1)=a+b$$
$$\Rightarrow a+b=1 \quad \ldots(1)$$
$$f'(x)=a+\frac{3}{2}b\sqrt{x} \Rightarrow f'(1)=a+\frac{3}{2}b$$
$$\Rightarrow a+\frac{3}{2}b=0 \ \ldots(2)$$

بطرح (2) من (1) نجد:

$$-\frac{1}{2}b = 1 \Rightarrow b = -2$$
$$\Rightarrow a = 1 + 2 = 3 \Rightarrow a = 3$$

23) الجواب:

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\, f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$= x + \sqrt{1+x^2} = f(x)$$

24) الجواب:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

نضرب بالمرافق:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{x^2 + 1 - x^2} = \sqrt{x^2+1} - x$$
$$= \sqrt{(-x)^2 + 1} + (-x) = f(-x)$$

25) الجواب:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

لدينا:

$$\mathrm{g}'(\mathrm{x}) = f'(x) + f'(-x)(-1) = 0$$

التابع g تابع ثابت صحيحة.

$$\mathrm{g}(-\mathrm{x}) = f(-x) + f(x) = g(x)$$

متناظر لمحور التراتيب صحيحة.

بما أن التابع g ثابت فإن نهايته تساوي قيمة أي عدد منه وبالتالي يمكن القول أن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = g(1) = g(0) = g(2) \ldots$$

سنأخذ $\mathrm{g}(0)$:

$$\mathrm{g}(0) = \mathrm{f}(0) + \mathrm{f}(-0) = 2\mathrm{f}(0)$$

إذن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2g(0)$$

وبالتالي الخيار التالت صحيح فالأخير هو ما تبقى خاطئ.

26) الجواب:

لدينا:

$$\mathrm{g}'(\mathrm{x}) = \mathrm{f}'(\mathrm{x}) + \mathrm{f}'\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right) = f'(x) + f'\left(\frac{1}{x}\right).\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

وبالتالي g تابع ثابت وليس متزايد.. منتهية. الخيار الأول غلط.

27) الجواب:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$g(x) = f(\tan(x)) - x$$
$$\Rightarrow g'(x) = (\tan(x))'.f'(\tan(x)) - 1$$
$$= \left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)\left(\frac{1}{1+\tan^2(x)}\right) - 1$$
$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x).\tan^2(x)} - 1$$
$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x)\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)} - 1$$
$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} - 1$$
$$= \frac{1}{1} - 1 = 0 = a$$

28) الجواب:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0$$

f مستمر على المجال:

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

$$f'(x) = x^4 - x^2$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases} \end{cases}$$

29) الجواب:

$$x(2x+1)^2 = 5 \Rightarrow x(2x+1)^2 - 5 = 0$$
$$\Rightarrow f(x) = x(2x+1)^2 - 5$$
$$\Rightarrow f(x) = x(4x^2 + 4x + 1) - 5$$
$$\Rightarrow f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x - 5$$

f مستمر على $\mathbb{R}$، نشتق:

$$f'(x) = 12x^2 + 8x + 1$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 8x + 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 48 = 16 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

يوجد حلّان:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+4}{24} = -\dfrac{1}{6} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-4}{24} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\left(-\dfrac{1}{6}\right) = \left(-\dfrac{1}{6}\right)\left(-\dfrac{1}{3}+1\right)^2 - 5 \\ \quad = \left(-\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{4}{9}\right) - 5 = -\dfrac{139}{27} \\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)(-1+1)^2 - 5 = -5 \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$++$	0	$--$	0	$++$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\frac{139}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

وبالتالي يوجد حل وحيد في المجال:

$$\left[-\frac{1}{6}\ ,+\infty\right[$$

30) الجواب:

$$f(x) = 2\sin(x) + \tan(x) - 3x$$
$$\Rightarrow I = \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$$

31) الجواب:

$$M(m,0)\ ;\quad 0 \le m \le 3$$
$$N(0,n)\ ;\quad n \ge 0$$
$$MN = 3\ ,\quad MJ = 2$$

$$\overrightarrow{OM} + 2\,\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JM} + 2\,\overrightarrow{OJ} + 2\,\overrightarrow{JN}$$
$$= 3\,\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JM} + 2\,\overrightarrow{JN}$$
$$= 3\,\overrightarrow{OJ} + \vec{0}$$

$\overrightarrow{JM}$ و $2\,\overrightarrow{JN}$ شعاعان متعاكسان.

32) الجواب:

$$(n+m)^2 - 2nm = n^2 + 2nm + m^2 - 2nm$$
$$= n^2 + m^2$$

وكون $MN = 3$ أي أنّ:

$$\sqrt{(0-m)^2 + (n-0)^2} = 3$$
$$\Rightarrow \sqrt{m^2+n^2} = 3$$
$$\Rightarrow m^2 + n^2 = 9$$
$$\Rightarrow (n+m)^2 - 2nm = 9$$

33) الجواب:

لدينا من الطلب السابق أن:

$$\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OJ}$$
$$\binom{m}{0} + \binom{0}{2n} = \binom{3x}{3y}$$
$$3x = m\ , 3y = 2n$$

فتكون:

$$y = \frac{2}{3}n$$

وأيضاً لدينا:

$$m^2 + n^2 = 9 \Rightarrow n = \sqrt{9-m^2}$$
$$= \sqrt{9-(3x)^2} = \sqrt{9-9x^2} = \sqrt{9(1-x^2)}$$
$$= 3\sqrt{1-x^2}$$

نعوض في علاقة y:

$$y = \frac{2}{3}3\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{1-x^2}$$

34) الجواب:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \left(\dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$
$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x)$$
$$= (1+x^2)\left(\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right) + x\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= \frac{1 + x\sqrt{x^2+1} + x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

35) الجواب:

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos(x) \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

36) الجواب:

$$f(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0}}\sin(0)$$ غير معرّفة

37) الجواب:

$$f(x) = \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \quad ; \quad a = \frac{\pi}{4}$$

نفرض:

$$h(x) = \tan(x)$$

وبالتالي:

$$f(x) = \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$h(x)$ معرّف واشتقاقي:

$$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}$$

وبالتالي:

$$h'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$\Rightarrow h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = 2$$

38) الجواب:

$$f(x) = 1 + x + 3x^2 + 4x^5 + 5x^6$$
$$f'(x) = 1 + 6x + 20x^4 + 30x^5$$
$$f''(x) = 6 + 80x^3 + 150x^4$$
$$f^{(3)}(x) = 240x^2 + 600x^3$$
$$f^{(4)}(x) = 480x + 1800x^2$$
$$f^{(5)}(x) = 480 + 3600x$$
$$f^{(6)}(x) = 3600$$
$$f^{(7)}(x) = 0$$

39) الجواب:

بوضع:

$$2a - x = 1 - x \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

ولدينا:

$$f(1 - x) + f(x) = 3$$

نضع:

$$3 = 2b \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

إذن النقطة $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ مركز تناظر للتابع.

40) الجواب:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \Longrightarrow 3 - 2x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$$

41) الجواب:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 9}{x + 1}$$

$$f(2 - x) = \frac{2(2 - x)^2 + 3(2 - x) + 9}{(2 - x) + 1}$$
$$= \frac{2(4 - 4x + x^2) + 6 - 3x + 9}{1 - x}$$
$$= \frac{2x^2 - 11x + 23}{1 - x}$$

$$\Rightarrow f(2 - x) + f(x)$$
$$= \frac{(2x^2 - 11x + 23)(x + 1) + (2x^2 + 3x + 9)(1 - x)}{(1 - x)(x + 1)}$$
$$= \frac{(2x^3 - 11x^2 + 23x + 2x^2 - 11x + 23) + (2x^2 + 3x + 9 - 2x^3 - 3x^2 + 9x)}{1 - x^2}$$
$$= \frac{-10x^2 + 24x + 32}{1 - x^2}$$

42) الجواب:

كون $I(-1, -3)$ مركز تناظر فإنّ:

$x \in D_f \Longrightarrow 2a - x \in D_f \Longrightarrow -2 - x \in D_f$ محققة

$$f(-2 - x) + f(x) = 2b = 2(-3) = -6$$

43) الجواب:

لدينا قابلية الاشتقاق عند 1 من اليمين:

$$\text{g}(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = (x - 1)\sqrt{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = 0$$

ولدينا قابلية الاشتقاق عند 1 من اليسار:

$$h(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(1 - x)\sqrt{1 - x}}{x - 1} = -\sqrt{1 - x}$$

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = 0$$

وبالتالي التابع قابل للاشتقاق عند 1 = a فيكون اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

44) الجواب:

$$f(x)=x+\sqrt{x}$$

$f(x)$ معرّف واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وبالتالي:

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x)=\frac{-2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{4\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{-1}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{-4(3)\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{16\left(\sqrt{x}\right)^6}=\frac{-3}{8\left(\sqrt{x}\right)^5}=\frac{-3}{8x^2\left(\sqrt{x}\right)}$$

45) الجواب:

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow f'(x)=0$$

46) الجواب:

لدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$\vec{u}\left(k,f'(x)\right),\vec{v}\left(x,f(x)\right)$$

$$kf(x)-xf'(x)=0$$

$$kf(x)-x\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$$

$$kf(x)-\frac{1}{x}=0$$

نشتق الطرفين:

$$kf'(x)+\frac{1}{x^2}=0$$

$$k\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\frac{k+1}{x^2}=0$$

$$k+1=0\Rightarrow k=-1$$

47) الجواب:

$$f(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

$$f\left(f(x)\right)=f\left(\frac{x-3}{x+5}\right)=\frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5}$$

$$=\frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}}=\frac{-2x-18}{6x-22}$$

$$=\frac{-2(x+9)}{2(3x-11)}=-\frac{x+9}{3x-11}$$

48) الجواب:

$$f(x)=\left(x+m\,E(x)\right)^2\quad;\ I=[-2\,,0[$$

$$f(x)=\begin{cases}(x-2m)^2 & ;\ -2\le x<-1\\ (x-m)^2 & ;\ -1\le x\le 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$$
$$\lim_{x\to-1}f(x)=(-1-2m)^2$$
$$f(-1)=(-1-m)^2$$
$$\Rightarrow(-1-2m)^2=(-1-m)^2$$
$$\Rightarrow(1+2m)^2=(1+m)^2$$
$$\Rightarrow1+4m+4m^2=1+2m+m^2$$
$$\Rightarrow3m^2+2m=0\Rightarrow m(3m+2)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}m=0\\ m=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

49) الجواب:

$$f(x)=\sqrt{x^2+ax+b}$$

$f(-2)=2$ قيمة حدّية محليّاً وبالتالي:

$$f'(-2)=0$$

$$f(-2)=\sqrt{4-2a+b}$$
$$\Rightarrow2=\sqrt{4-2a+b}$$

نربّع الطرفين:

$$\Rightarrow4=4+2a+b\Rightarrow b=2a\quad\dots(*)$$

$$f'(x)=\frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax+b}}$$

$$\Rightarrow f'(-2)=\frac{-4+a}{2\sqrt{4-2a+b}}$$

$$\Rightarrow0=\frac{-4+a}{2\sqrt{4-2a+b}}$$

$$\Rightarrow0=-4+a\Rightarrow a=4$$

نعوّض في $(*)$:

$$\Rightarrow b=2(4)=8\Rightarrow b=8$$

50) الجواب:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

يقبل مماس أفقي وحيد أي أنّ المشتق ينعدم مرّة واحدة وبالتالي:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$\Delta=b^2-4ac\quad;a=3a\,,b=2b\,,c=c$$

$$\Rightarrow \Delta = 4b^2 - 4(3a)(c) = 4b^2 - 12ac$$

كون المشتق ينعدم مرّة واحدة فإنّ:

$$\Delta = 0$$

$$\Rightarrow 4b^2 - 12ac = 0 \Rightarrow b^4 - 3ac = 0$$

51) الجواب:

لنعيد صياغة شكل التابع $-2x^2 + 4x$

$$-2x^2 + 4x = x(-2x + 4)$$

وهذا جداء تابعين مختلفين بجهة الإطراد فهو تابع

متناقص.. نعود للتابع:

$$f(x) = x(-2x+4) + \sqrt{x(-2x+4)} - \frac{1}{x(-2x+4)}$$

لدينا:

$$\sqrt{x(-2x+4)}$$

هو عبارة عن تركيب التابعين $\sqrt{x}$ و $x(-2x+4)$ وبالتالي

تركيب تابعين مختلفين بجهة الاطراد تابع متناقص.

لدينا:

$$x(-2x+4) + \sqrt{x(-2x+4)}$$

مجموع تابعين متناقصين هو تابع متناقص.

وأخيراً:

$$-\frac{1}{x(-2x+4)}$$

أولاً هو تركيب تابعين $-\frac{1}{x}$ و $x(-2x+4)$ وتركيب تابعين

مختلفين بجهة الاطراد تابع متناقص وبالتالي:

f تابع متناقص لأنه مكون من مجموع تابعين

متناقصين.

52) الجواب:

لدينا:

$$x - 1 \le E(x) \le x$$

$$x^2 + x - 1 \le x^2 + E(x) \le x^2 + x$$

نقسم على $x^2 + 1$:

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+1} \le \frac{x^2+E(x)}{x^2+1} \le \frac{x^2+x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-1}{x^2+1} = 1$$

إذن لا يمكن حساب نهاية التابع f

53) الجواب:

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin(x) + 3\cos^2(x)} - 2$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x) - 6\sin(x)}{2\sqrt{1 + \sin(x) + 3\cos^2(x)}}$$

54) الجواب:

بما أن التابع اشتقاقي وبالتالي التابع مستمر فـ نستفيد

من الشرطين:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

$$a + 4 = 8 + b$$

$$a - b = 4$$

وبما أنه قابل للاشتقاق فإن مشتقه من اليمين يساوي

مشتقه من اليسار:

$$f'(1^+) = f'(1^-)$$

$$2a + 2 = 8$$

$$a = 3$$

نعوض لنجد b:

$$3 - b = 4$$

$$b = -1$$

55) الجواب:

f مستمر على $\mathbb{R}$, ويمكن كتابة التابع بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + (-\sqrt{x})$$

التابع $\frac{1}{x-1}$ تابع متناقص على $]1, +\infty[$

التابع $-\sqrt{x}$ تابع متناقص على $]1, +\infty[$

ومجموع تابعين متناقصين هو تابع متناقص وبالتالي:

$$0 \in f(]1, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]1, +\infty[$.

ملاحظة: يمكن دراسة الاطراد عن طريق جدول التغيرات وتصوير المجال أيضاً عن طريقه ولكن في شغف الرياضيات نحرص على أن تتعلم كل شيء 😉

56) الجواب:

$$g(x) = x\sqrt{x}$$

$g(x)$ اشتقاقي عند الصفر ((جذر مضروب بمضمونه))

$$h(x) = x|x|$$

$h(x)$ اشتقاقي عند الصفر.

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\left(\frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}\right) - 0}{x} = \frac{x^2 + |x|}{(x^2 + 1)x}$$

نميّز حالتين:

الحالة الأولى $x \to 0^-$:

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{(x^2 + 1)x} = \frac{x(x - 1)}{x(x^2 + 1)} = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} g(x) = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

وبالتالي $f(x)$ اشتقاقي من اليسار عند الصفر ومنه:

$$f'(0^-) = -1$$

الحالة الثانية $x \to 0^+$:

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x(x^2 + 1)} = \frac{x(x + 1)}{x(x^2 + 1)} = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} g(x) = \frac{0 + 1}{0 + 1} = 1$$

وبالتالي $f(x)$ اشتقاقي من اليمين عند الصفر ومنه:

$$f'(0^+) = 1$$

و $f(x)$ غير اشتقاقي عند الصفر لأن:

$$f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

57) الجواب:

حسب قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x\sqrt{x} - x^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x\sqrt{x(1 - x)}}{-(1 - x)} = \lim_{x \to 1} -\frac{x\sqrt{x}}{1 - x} = \infty$$

له مماس شاقولي عند $a = 1$ معادلته $x = 1$.

58) الجواب:

$$f(x) = \sin(x) . \cos(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$$

لأنّ:

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos(x + x) \\ &= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

59) الجواب:

$$f(a + h) = h . f'(a) + f(a)$$

60) الجواب:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\cos(x) - 1}{x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{-(1 - \cos(x))}{x}\right)$$
$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{-\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)(x)}{(4x)\left(\frac{x}{4}\right)}\right)$$
$$= \lim_{x \to 0}\left(\left(-\frac{2x}{4}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2\right) = (0)(1) = 0$$

61) الجواب:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\sin^3(x) + 3\cos(x) \\ f'(x) &= 12\sin^2(x) . \cos(x) - 3\sin(x) \\ &= 3\sin(x)\,(4\sin(x) . \cos(x) - 1) \\ &= 3\sin(x)\left(4\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right) - 1\right) \\ &= 3\sin(x)\,(2\sin(2x) - 1) \end{aligned}$$

62) الجواب:

لدينا:

$$g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$$

زوجي.

63) الجواب:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$
$$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - f'(-x)$$
$$= \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

64) الجواب:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Longrightarrow g'(x) = f'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= f'(x) + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$$

$$\Longrightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = 0$$

65) الجواب: مكرر عن 27

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = f(\tan(x)) - x$$

$$\Longrightarrow g'(x) = (\tan(x))'.f'(\tan(x)) - 1$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)\left(\frac{1}{1+\tan^2(x)}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x).\tan^2(x)} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x)\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} - 1 = 1 - 1 = 0$$

66) الجواب:

$$f(x) = \tan(x)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$$

67) الجواب:

$\sin(3x)$ دوري أصغر دور له هو:

$\frac{3\pi}{2}$ لأنّ

$$3x = 2\pi \Longrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

68) الجواب:

$$f(x) = \tan(x)$$

$f(x)$ هو تابع فردي دوره π :

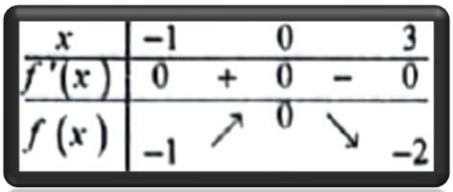
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$$

وبالتالي f متزايد تماماً.

69) الجواب:

$$f(a).f(b) < 0$$

- ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $[-1,3]$ وفق جدول تغيراته



x	-1		0		3
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-1	↗	0	↘	-2

1- إن $f([-1,3])$

a	$[-2,-1]$	b	$[-1,3]$	c	$[-1,0]$	d	$[0,3]$

2- عدد القيم الحدية للتابع f :

a	0	b	1	c	2	d	3

3- معادلة المماس للخط C_f عند المبدأ

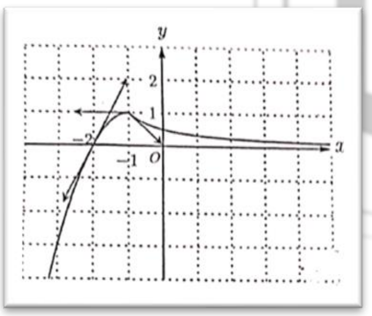
a	$y = x$	b	$y = 0$	c	$y = -2x$	d	$y = 1$

4- المستقر الفعلي للتابع f : أي $f(D_f)$

a	$[-2,-1]$	b	$[-2,0]$	c	$[-1,0]$	d	$[-1,3]$

عن الخطوط البيانية

- لديك جانباً الخط البياني لتابع f أجب عن الأسئلة الآتية :



5- نهاية f(x) عند $+\infty$ هي :

a	$+\infty$	b	0	c	1	d	$-\infty$

6- الخط البياني له :

a	مقارب أفقي	b	مقارب أفقي و مقارب مائل	c	مقاربين أفقيين	d	ليس له مقاربات

7- قيمة النهاية $\lim_{x\to(-1)^+} \frac{f(x)-1}{x+1}$ هي

a	1	b	-1	c	0	d	$+\infty$

8- بفرض $g(x) = f(-3x)$ عندئذٍ قيمة $g'\left(\frac{2}{3}\right)$ تساوي

a	$\frac{2}{3}$	b	0	c	2	d	-2

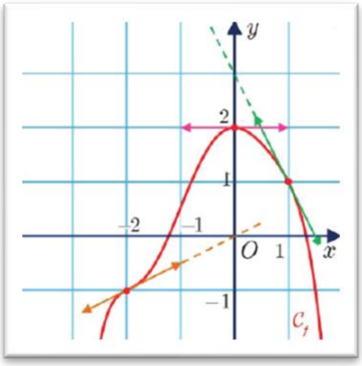
9- مجموعة تعريف التابع $h(x) = \frac{1}{1-f(x)}$

$R\backslash\{1\}$	d	$R\backslash\{-1\}$	c	R^*	b	R	a

10- مجموعة تعريف التابع $k(x) = \sqrt{f'(x)}$

$[-2,+\infty[$	d	$]-\infty,-1]$	c	$]-\infty,-1[$	b	$[0,+\infty[$	a

- الشكل المرافق، C_f هو الخط البياني لتابع f . تأمل الشكل



11- قيمة $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ هي:

1	d	-2	c	-4	b	4	a

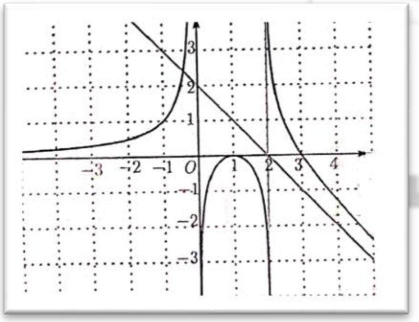
12- قيمة $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)+1}{h}$ هي

2	d	-2	c	$-\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{2}$	a

13- صورة المجال $f([-2,1])$ تساوي :

$[-2,1]$	d	$[0,2]$	c	$[-1,2]$	b	$[-1,1]$	a

- لديك جانباً الخط البياني لتابع f معرف على $R\backslash\{0,2\}$ و d مقارب مائل له عند $+\infty$



14- قيمة $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

1	d	-2	c	2	b	-1	a

15- إذا كان $x\in]2,3[$ فإن قيمة $E(f(x))$

$\frac{5}{2}$	d	-1	c	1	b	0	a

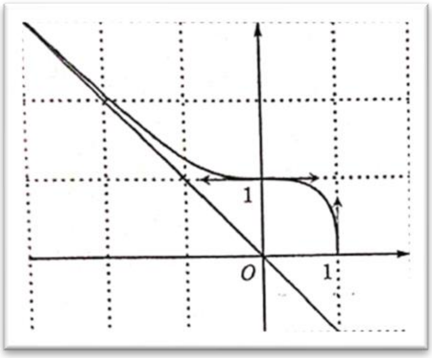
16- قيمة $f(1)$ هي :

2	d	-1	c	1	b	0	a

17- قيمة $f'(1)$ هي

a	0	b	1	c	-1	d	2

- لديك جانباً الخط البياني لتابع f معرف على $]-\infty,1]$ و d مقارب مائل له عند $-\infty$



18- قيمة $f'(1)$ هي :

a	ليس له صورة	b	1	c	-1	d	2

19- قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}$ (بسبب تناقص التابع عند 1 من اليسار)

a	0	**b**	$-\infty$	c	$+\infty$	d	غير موجودة

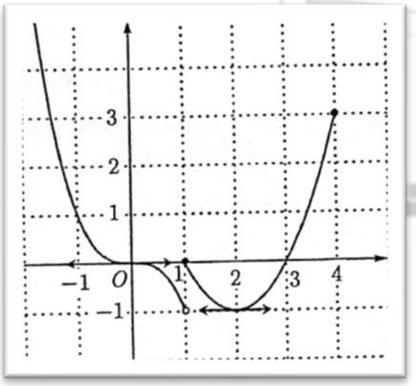
20- معادلة المستقيم d هي :

a	$y = x - 1$	**b**	$y = -x$	c	$y = -2x$	d	$y = -2x + 1$

21- عدد القيم الحدية

a	0	b	1	**c**	2	d	3

- لديك جانباً الخط البياني لتابع f



22- عدد القيم الحدية

a	0	b	1	c	2	**d**	3

23- قيمة $f'(2)$

a	0	b	1	c	-1	d	غير معرفة

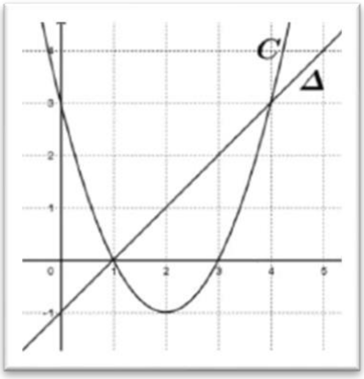
24- قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

A	0	b	1	**c**	-1	d	3

25-قيمة $f(1)$

-2	d	2	c	0	b	-1	a

- لديك جانباً الخط البياني لتابع f



26-حلول المتراجحة $f(x) - y_\Delta < 0$

R	d	$]-\infty,1[\cup]4,+\infty$	c	$]1,4[$	b	$]1,5[$	a

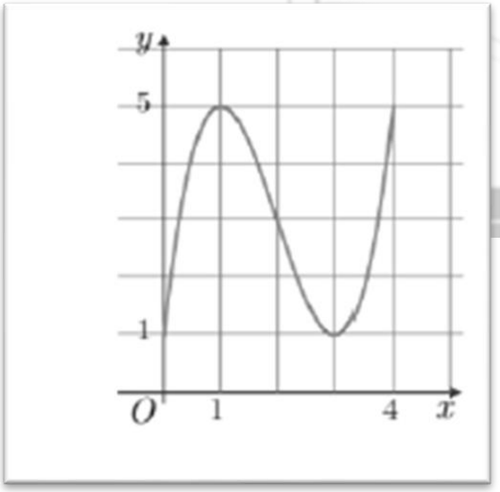
27-معادلة المستقيم Δ

$y = x + 1$	d	$y = x - 1$	c	$y = -x$	b	$y = x$	a

28-الخط البياني للتابع f

متناظر بالنسبة للنقطة $(2,0)$	d	متناظر بالنسبة للمستقيم $x = 2$	c	متناظر بالنسبة لمحور الفواصل	b	متناظر بالنسبة لمحور التراتيب	a

- لديك جانباً الخط البياني لتابع f معرف على $[0,4]$



29-عدد القيم الحدية :

4	d	3	c	2	b	1	a

30-حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

$]0,3[$	d	$]-\infty,0[$	c	$[1,3]$	b	$]1,3[$	a

31-قيمة النهاية $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-5}{h}$

a	0	b	5	c	$+\infty$	d	غير موجودة

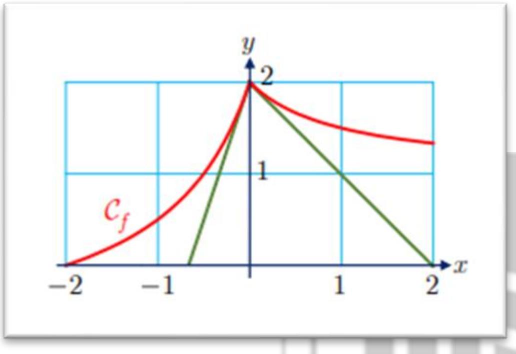
32-صورة المجال $[1,3]$ هي

a	$]1,3[$	b	$[1,5]$	c	$]1,5[$	d	$[0,5]$

33-عدد حلول المعادلة $f(x)-3=0$

a	1	b	2	c	3	d	0

- في الشكل المجاور الخط البياني لتابع f



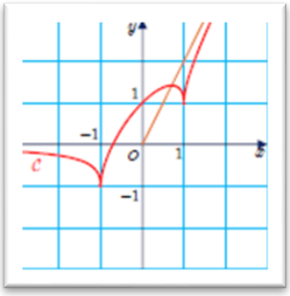
34-قيمة النهاية $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-2}{x}$

a	-1	b	1	c	$\frac{1}{2}$	d	$-\frac{1}{2}$

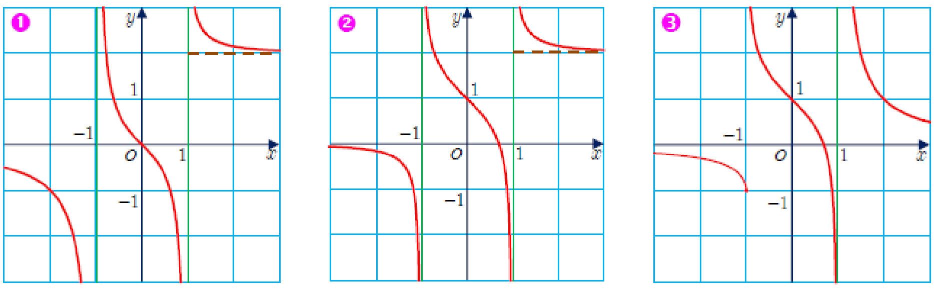
35-واحدة من العبارات الآتية صحيحة

a	f اشتقاقي عند الصفر	b	$f(0)$ قيمة حدية	c	f زوجي	d	f غير اشتقاقي عند 2

- في الشكل المجاور، C الخط البياني لتابع f معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.



أي الخطوط البيانية المرسومة في الأشكال الآتية يمكن أن يمثل الخط البياني للتابع المشتق f'؟



1) بملاحظة أن $E(0): 0 < 1 < 2$ محققة

و أن

$$E(n): 0 < u_n < 2$$
$$0 < u_n^2 < 4$$
$$0 < \frac{1}{2}u_n^2 < 2$$
$$2 < 2 + \frac{1}{2}u_n^2 < 4$$
$$0 < \sqrt{2} < \sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2} < 2$$
$$0 < u_{n+1} < 2$$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة

و بالتالي $E(n)$ صحيحة مهما تكن n

2) الجواب:

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4$$
$$= \left(\sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2}\right)^2 - 4 = 2 + \frac{1}{2}u_n^2 - 4$$
$$= \frac{1}{2}u_n^2 - 2$$
$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n^2 - 2}{u_n^2 - 4} = \frac{\frac{1}{2}u_n^2 - 2}{2\left(\frac{1}{2}u_n^2 - 2\right)} = \frac{1}{2} = q$$

3) الجواب:

$$v_0 = u_0^2 - 4 = 1^2 - 4 = -3$$

4) الجواب:

$$v_n = (q)^n . v_0 \quad \Rightarrow v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5) الجواب:

$$u_n^2 = v_n + 4 = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$$
$$\Rightarrow u_n = \sqrt{4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

6) الجواب:

$$w_0 = v_0 - u_0 = 3 - (-1) = 4$$

7) الجواب:

$$w_{n+1} = 3av_n + (1-3a)u_n - (3au_n + (1-3a)v_n)$$
$$= 3av_n + (1-3a)u_n - 3au_n - (1-3a)v_n$$
$$= 3a(v_n - u_n) + (1-3a)(u_n - v_n)$$
$$= 3aw_n - (1-3a)(v_n - u_n)$$
$$= 3aw_n - (1-3a)w_n$$
$$\Rightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{w_n\big(3a - (1-3a)\big)}{w_n} = 3a - 1 + 3a$$
$$= 6a - 1$$

8) الجواب:

$$w_n = w_0 . q^n = 4(6a-1)^n$$

9) الجواب:

$$a + b + c + c = 27$$
$$\Rightarrow 2b + b + c = 27$$
$$\Rightarrow 3b + c = 27$$

10) الجواب:

$$\left.\begin{matrix} b = 2aq \\ c = 2aq^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2a + 2aq + 2aq^2 = 14$$
$$\Rightarrow 2a + 4a + 8a = 14$$
$$\Rightarrow 14a = 14 \Rightarrow a = 1$$

نختار الحدود المتزايدة:

$$a = 1 \quad , \quad b = 4 \quad , \quad c = 9$$

11) الجواب:

$$X_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 2u_n - 4 - 4 = 2u_n - 8$$

نشكّل النسبة:

$$\frac{X_{n+1}}{X_n} = \frac{2u_n - 8}{u_n - 4} = \frac{2(u_n - 4)}{u_n - 4} = 2$$

وبالتالي المتتالية X_n هندسية أساسها:

$$q = 2$$

12) الجواب:

$$X_n = X_0(q)^n = -3(2)^n$$

13) الجواب:

$$u_n = X_n + 4 = -3(2)^n + 4$$

14) الجواب:

$$v_n = u_{n+1} - 4u_n$$
$$v_{n+1} = u_{n+2} - 4u_{n+1}$$
$$= 7u_{n+1} - 12u_n - 4u_{n+1}$$
$$= 3u_{n+1} - 12u_n$$
$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3(u_{n+1} - 4u_n)}{u_{n+1} - 4u_n} = 3$$

15) الجواب:

$$y_n = u_{n+1} - 3u_n$$
$$y_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1}$$
$$= 7u_{n+1} - 12u_n - 3u_{n+1}$$
$$= 4u_{n+1} - 12u_n$$

$$\Rightarrow \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{4u_{n+1} - 12u_n}{u_{n+1} - 3u_n} = \frac{4(u_{n+1} - 3u_n)}{u_{n+1} - 3u_n} = 4$$

وبالتالي المتتالية y_n هندسية أساسها:

$$q = 4$$

16) الجواب:

الحد العام:

$$v_n = -3^{n+1} \quad , \quad y_n = -4^n$$
$$v_n = u_{n+1} - 4u_n$$
$$\Rightarrow 4u_n = u_{n+1} - v_n$$
$$\Rightarrow 4u_n = y_n + 3u_n - v_n$$
$$\Rightarrow u_n = -4^n + 3^{n+1}$$

17) الجواب :

$$S = 1 + 2 + 4 + .. + 1024$$
$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$$
$$S = 1\frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2047$$
$$\rightarrow 2s = 4094$$
$$\rightarrow 2s + 2000 = \boxed{6094}$$

18) الجواب:

$$t_n = x_n . y_n$$

نشكّل الفرق:

$$t_{n+1} - t_n = x_{n+1} . y_{n+1} - x_n . y_n = \left(\frac{2x_n . y_n}{x_n + y_n}\right)\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) - x_n . y_n = 0$$

وبالتالي المتتالية t_n ثابتة.

19) الجواب:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n . y_n}{x_n + y_n} - x_n$$

$$= \frac{2x_n . y_n - x_n(x_n + y_n)}{x_n + y_n} = \frac{2x_n y_n - x_n^2 - x_n y_n}{x_n + y_n}$$
$$= \frac{x_n y_n - x_n^2}{x_n + y_n} = \frac{x_n(y_n - x_n)}{x_n + y_n} < 0$$
$$; \quad y_n - x_n < 0$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{x_n + y_n}{2} - y_n = \frac{x_n + y_n - 2y_n}{2}$$
$$= \frac{x_n - y_n}{2}$$ متزايدة

20) الجواب :

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a - 1}\right)a^n - \frac{b}{a - 1}$$

$$u_n = 5 \times 10^n + 2$$

21) الجواب :

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a - 1}\right)a^n - \frac{b}{a - 1}$$
$$u_n = \left(0 - \frac{4}{2}\right)3^n + 2$$
$$u_n = -2 . 3^n + 2 = 2(1 - 3^n)$$

22) الجواب:

نحل المعادلة $f(x) = x$

$$2x + 3 = x$$
$$x = -3 = l$$

$$v_n = u_n - l$$
$$v_n = u_n + 3$$

$$a = 3$$

23) الجواب :

$$f(x) = x$$
$$-\frac{1}{3}x + 1 = x$$
$$\frac{4}{3}x = 1$$
$$x = \frac{3}{4} = l$$
$$v_n = u_n - \frac{3}{4}$$
$$a = \frac{3}{4}$$

24) الجواب:

$$k^2 = 1\left(k - \frac{2}{9}\right) = k - \frac{2}{9}$$
$$\Rightarrow k^2 - k + \frac{2}{9} = 0$$
$$\Rightarrow \left(k - \frac{2}{3}\right)\left(k - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

25) الجواب:

$$S = \frac{n(a + l)}{2} = \frac{n(1 + n)}{2}$$

26) الجواب:

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{n^2}{4n^2}\right) = \frac{1}{4}$$

27) الجواب: حسابية مع قفزات

$$n = \frac{2n-2}{2} + 1 = n - 1 + 1 = n$$
$$S = \frac{n(2n+2)}{2} = n(1+n) = n^2 + n$$

28) الجواب:

$$S = \frac{100(1+100)}{2} = 50(101) = 5050$$

29) الجواب:

$$S = \frac{14(15+2)}{2} = 119$$

30) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

31) $u_n = \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{2n^3+1} \to +\infty$

32) $u_n = 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 5^3 = \frac{5^2(6)^2}{4} = 225$

33) $n = 10$

$$S = \frac{10 \times 11 \times 12}{3} = 440$$

34) الجواب:

$$u_{n+1} = \frac{nu_n + 4}{n+1}$$
$$v_n = nu_n$$
$$v_{n+1} = (n+1)(v_n + 1) = (n+1)\left(\frac{nu_n+4}{n+1}\right) = nu_n + 4$$
$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{nu_n+4}{nu_n}$$
$$v_{n+1} - v_n = nu_n + 4 - nu_n = 4$$

وبالتالي المتتالية v_n حسابية أساسها:

$$r = 4$$

35) نعلم أن $a + b + c = 3b$

$$S = 3u_3 + 3u_{11} = 3(u_3 + u_{11}) = 3(60) = 180$$

36) الجواب:

الجواب الصحيح b ذلك أن :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q = \frac{2}{5} < 1$$

لنناقش باقي الخيارات :

الأول حسب معيار الاشتقاق يتضح أنها متزايدة

الثالث : بتشكيل النسبة يتضح أنها متزايدة

الرابع : بما أن الحد الأول سالب لا يجوز استخدام معيار النسبة و بحساب الحدود الأولى .. نجد أنها متزايدة

37) الجواب:

$$\frac{10(6+3k)}{2} = 255$$
$$\Rightarrow 60 + 30k = 510$$
$$\Rightarrow 30k = 510 - 60 = 450$$
$$\Rightarrow k = \frac{450}{30} = 15$$

38) الجواب:

$$S = -3 - \left[\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \cdots + \frac{3}{4^n}\right]$$

متتالية هندسية أساسها:

$$q = \frac{1}{4}$$

وبالتالي:

$$S = \frac{1-q^n}{1-q}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$\Rightarrow$ الكامل $S = -3 - \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = -3 - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$= -4 + \frac{1}{(2^2)^n} = -4 + \frac{1}{2^{2n}}$$

39) الجواب:

$$S = 1 - \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \cdots + \frac{1}{9^n}\right]$$

متتالية هندسية أساسها:

$$q = \frac{1}{9}$$

وبالتالي:

$$S = \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1-\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{\frac{8}{9}}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{8}$$

$$\Rightarrow S = 1 - \left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{8}\right) = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8.9^n} = \frac{7}{8} + \frac{1}{8.9^n}$$

1) الجواب:

$$\vec{v} = \sqrt{2}\,\vec{i} + \sqrt{6}\,\vec{j} - \vec{k}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{2+6+1} = \sqrt{9} = 3$$

2) الجواب:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BG}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN}$$

حيثُ N هي منتصف BG أي مركز الوجه $BCGF$

3) الجواب:

$$\left(F\,;\overrightarrow{FA}\,,\overrightarrow{FB}\,,\overrightarrow{FD}\right)$$

وبالتالي:

$$A(1\,,0\,,0) \quad , \quad B(0\,,1\,,0)$$
$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB}$$

بفرض $N(x\,,y\,,z)$ يكون:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x - 1 = -x \Rightarrow 2x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$
$$y = 1 - y \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$
$$z = -z \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0$$

وبالتالي:

$$N\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,0\right)$$

4) الجواب:

$$A(1\,,2\,,-1)\,,\ B(2\,,1\,,0)$$

C نظيرة A بالنسبة للمبدأ أي أنّ:

$$C(-1\,,-2\,,+1)$$

نشكّل الشعاعين:

$$\overrightarrow{AB}(1,-1,1)\ ,\ \overrightarrow{AC}(-2,-4,2)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين غير مرتبطين خطيّاً لأنّ:

$$\frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{-4} \neq \frac{1}{2}$$

لنفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$a = +(-2+4) = 2$$
$$b = -(2+2) = -4$$
$$c = +(-4-2) = -6$$
$$\Rightarrow \vec{n}(2,-4,-6) \quad , \quad A(1,2,-1)$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$
$$\Rightarrow 2(x-1) - 4(y-2) - 6(z+1) = 0$$
$$\Rightarrow 2x - 4y - 6z + 0 = 0$$

نقسم على 2 :

$$\Rightarrow x - 2y - 3z = 0$$

5) الجواب:

$$A(1,3,-1)\,,\ B(2,5,2)\ ,\ C(3,4,\alpha)$$

ليكون المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B يجب أن يكون:

$$AB = BC$$

ومنه:

$$BA = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$
$$BC = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (\alpha-2)^2}$$
$$= \sqrt{2 + (\alpha-2)^2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{14} = \sqrt{2 + (\alpha-2)^2}$$

نربّع الطرفين:

$$2 + (\alpha-2)^2 = 14$$
$$\Rightarrow (\alpha-2)^2 = 12$$
$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 12$$
$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 8 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(-8) = 48 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{+4-4\sqrt{3}}{2} = 2 - 2\sqrt{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{+4+4\sqrt{3}}{2} = 2 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

6) الجواب:

$$A(3,-2,2)\ ,\ \vec{u}(1,1,0)\ ,\ \vec{v}(-1,1,1)$$

نلاحظ أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطيّاً لأنّ:

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$$

نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$a = +(0-1) = -1$$
$$b = -(0-1) = +1$$
$$c = +(-1-1) = -2$$
$$\Rightarrow \vec{n}(-1,1,-2)$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$-1(x-3)+1(y+2)-2(z-2)=0$$
$$\Rightarrow -x+3+y+2-2z+4=0$$
$$\Rightarrow -x+y-2z+9=0$$

نضرب الطرفين بـ (-1) :

$$\Rightarrow x-y+2z-9=0$$

7) الجواب:

$$(2,0,0)\ ,\ (0,3,0)\ ,\ (0,0,5)$$

المستوي له شكل المعادلة:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$$

نوحّد المقامات:

$$\Rightarrow \frac{15x+10y+6z}{30}=1$$
$$\Rightarrow 15x+10y+6z=30$$

8) الجواب:

$$\overrightarrow{w_1}=2\,\vec{u}-\vec{v}$$
$$\overrightarrow{w_2}=2\,\vec{u}+\vec{v}$$

بما أنّ $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ متعامدان فإنّ:

$$\overrightarrow{w_1}.\overrightarrow{w_2}=0 \Rightarrow 4\,\vec{u}^2-\vec{v}^2=0 \Rightarrow 4\,\vec{u}^2=\vec{v}^2$$

$$||\vec{u}||=\frac{1}{4}||\vec{v}||^2$$

$$\Rightarrow ||\vec{u}||=\frac{1}{2}||\vec{v}||$$

9) الجواب:

$$A(1,2,-3)\ ,\ B(-1,3,3)\ ,\ C(4,-1,2)$$

بفرض $D(x,y,z)$

ليكون $ABCD$ متوازي أضلاع يجب أن يتحقق:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$
$$\begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-x\\-1-y\\2-z\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2=4-x \Rightarrow x=6\\ 1=-1-y \Rightarrow y=-2\\ 6=2-z \Rightarrow z=-4\end{cases}$$
$$\Rightarrow D(6\,,-2\,,-4)$$

10) الجواب:

$$AM^2=3+(x+1)^2$$

أصغر قيمة لـ AM^2 هي التي تحقق:

$$(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$$
$$\Rightarrow AM^2=3 \Rightarrow AM=\sqrt{3}$$

11) الجواب:

$$\vec{u}(1,0,2)\ ,\ \vec{v}(-1,2,0)\ ,\ \vec{w}(-4,m,-2)$$

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$
$$\begin{pmatrix}-4\\m\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\beta\\2\beta\\0\end{pmatrix}$$

$$-4=\alpha-\beta \quad ...(1)$$
$$m=2\beta \quad ...(2)$$
$$-2=2\alpha \Rightarrow \alpha=-1 \quad ...(3)$$

نعوّض في (1) :

$$-4=-1-\beta \Rightarrow \beta=3$$

نعوّض في (2) :

$$\Rightarrow m=6$$

12) الجواب:

$$A(0,1,0)\ ,\ \vec{u}(0,1,2)\ ,\ \vec{v}(0,3,-1)$$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطيّاً لأنّ:

$$\frac{1}{3}\neq\frac{2}{-1}$$

بفرض $\vec{n}(a\,,b\,,c)$:

$$a=+(-1-6)=-7$$
$$b=-(0-0)=0$$
$$c=+(0-0)=0$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$
$$\Rightarrow 7(x-0)+0+0=0 \Rightarrow 7x=0 \Rightarrow x=0$$

13) الجواب:

$$\overrightarrow{n_1}(1\,,2\,,-\lambda)\ ,\ \overrightarrow{n_2}(3\lambda-7\,,4\,,-6)$$

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$$
$$\Rightarrow 3\lambda-7+8+6\lambda=0$$
$$\Rightarrow 9\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{9}$$

14) الجواب:

$$2x+3y-4z+1=0$$
$$\lambda\,x+2y+\frac{\lambda}{2}z-3=0$$

$$\overrightarrow{n_1}(2,3,-4)\ ,\ \overrightarrow{n_2}\left(\lambda\,,2,\frac{\lambda}{2}\right)$$

ليكون المستويين متعامدين يجب أن يتحقق الشرط:

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$$
$$\Rightarrow 2\lambda+6-2\lambda=0$$

$\Rightarrow 6\neq 0$ غير موجودة

15) الجواب:

$$\|\vec{u}\| = 5 \quad , \quad \|\vec{v}\| = 3$$
$$\vec{u}.\vec{v} = -4$$

$$2\,\vec{u}(2\,\vec{v} + 3\,\vec{u})$$
$$= 4\,\vec{u}.\vec{v} + 6\,\vec{u}.\vec{u}$$
$$= 4\,\vec{u}.\vec{v} + 6\,\|\vec{u}\|^2$$
$$= 4(-4) + 6(25) = -16 + 150 = 134$$

16) الجواب:

$$\overrightarrow{n_Q}(1,-2,3) \quad , \quad \overrightarrow{n_R}(1,1,1) \, , \quad A(2,5,-2)$$

كون المستوي P عمودي على المستويين Q و R فإنّ

$\overrightarrow{n_R}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ شعاعي توجيه له.

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_R}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطيّاً لأنّ:

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{3}{1}$$

نفرض ناظم P هو $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\begin{aligned} a &= +(-2-3) = -5 \\ b &= -(1-3) = +2 \\ c &= +(1+2) = +3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \vec{n}(-5,2,3)$$

نعوّض في معادلة المستوي:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$
$$\Rightarrow -5(x-2) + 2(y-5) + 3(z+2) = 0$$
$$\Rightarrow -5x + 2y + 3z + 6 = 0$$

نضرب بـ 2:

$$\Rightarrow -10x + 4y + 6z + 12 = 0$$

17) الجواب:

$$AB = 4 \quad , \quad BC = CG = 2$$

نعرّف المعلم المتجانس:

$$\left(A\,;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\,,\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\,,\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

ونوجد الإحداثيّات:

$$A(0,0,0) \;,\; E(0,0,2) \,,\; B(4,0,0) \;,\; F(4,0,2)$$
$$C(4,2,0) \;,\; G(4,2,2) \;,\; D(0,2,0) \;,\; H(0,2,2)$$

$$J\left(\frac{4+4}{2}\,,\frac{2+2}{2}\,,\frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow J(4,2,1)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{JD}(-4,0,-1) \;,\; \overrightarrow{JH}(-4,0,1)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{JD}.\overrightarrow{JH} = 16 + 0 - 1 = 15$$

18) الجواب:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$$

19) الجواب:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 1$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}).(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = 1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}^2 = 1$$

حيثُ I منتصف $[AB]$ ، وبالتالي:

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{BI}$$

$$\Rightarrow -\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}^2 = 1$$
$$\Rightarrow -\overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{IM}^2 = 1 \Rightarrow \overrightarrow{IM}^2 = 1 + \overrightarrow{AI}^2$$

20) الجواب هو الخيار c .

21) الجواب:

$$A(3,4,1)$$

B هي مسقط A على المستوي (xoz) وبالتالي:

$$B(3,0,1)$$

C هي مسقط B على محور الرواقم oz وبالتالي:

$$C(0,0,1)$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2 + (1-1)^2}$$
$$= \sqrt{9+16+0} = \sqrt{25} = 5$$

22) الجواب:

$$P: x - 2y + 3z - 5 = 0$$
$$Q: x + y + z + 1 = 0 \qquad \times(-1)$$

بحل المعادلتين حل مشترك نجد:

$$x - 2y + 3z - 5 = 0 \quad \ldots(1)$$
$$-x - y - z - 1 = 0 \quad ..(2)$$

بجمع المعادلتين (2) و (1) نجد:

$$-3y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}z - 2$$

نعوّض في Q:

$$\Rightarrow x + \frac{2}{3}z - 2 + z + 1 = 0$$
$$\Rightarrow x = -\frac{5}{3}z + 1$$
$$\Rightarrow M\left(-\frac{5}{3}z + 1\,,\frac{2}{3}z - 2\,,z\right)$$

23) الجواب:

$$2x + 2y + 2z = 0 \quad \ldots(1)$$
$$x + y - 4z = 0 \quad \ldots(2)$$

ندرس الوضع النسبي للنواظم:

$$\overrightarrow{n_1}(2,2,2) \,,\; \overrightarrow{n_2}(1,1,-4)$$

$\frac{2}{1} = \frac{2}{1} \neq \frac{2}{-4}$ غير مرتبطين خطيّاً

وبالتالي المستويين غير متوازيان.

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} \overset{?}{=} 0$$
$$2 + 2 - 8 = -4 \neq 0$$

ومنه فإنّ المستويان متقاطعان دون تعامد.

24) الجواب:

$A(1,2,-1)\ ,\ B(3,0,1)$

النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$:

الناظم $\overrightarrow{AB}(2,-2,2)$

M منتصف $[AB]$ وبالتالي:

$M(2,1,0)$

معادلة المستوي المحوري:

$$2(x-2)-2(y-1)+2(z-0)=0$$
$$\Rightarrow 2x-4-2y+2+2z=0$$
$$\Rightarrow 2x-2y+2z-2=0$$

نقسم على 2 :

$$\Rightarrow x-y+z-1=0$$

بالمقارنة مع

$$x+my+nz-1=0$$

نجد أنّ:

$$m=-1\ ,\ n=1$$

25) بتطبيق فيثاغورث نجد:

$$r^2=dist^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow 9=dist^2+2$$
$$\Rightarrow dist^2=9-2=7$$
$$\Rightarrow dist=\sqrt{7}$$

26) الجواب:

نوجد النقطة M هي : $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

ونشكل الشعاعان $\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE}$:

$$\overrightarrow{CM}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$$

$$\overrightarrow{OE}(1,1,1)$$

نوجد $||CM||$ و $||OE||$:

$$||CM||=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$||OE||=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

من قانون الجداء السلمي نجد :

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{OE}=||CM||.||OE||.\cos\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE}\right)$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2}.\sqrt{3}\cos\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE}\right)=0$$

$$\cos\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE}\right)=0$$

27) الجواب:

28) الجواب:

$A(-1,2,3)\ ,\ B(1,4,-5)$

نوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$:

الناظم $\overrightarrow{AB}(2,2,-8)$

النقطة M منتصف $[AB]$ وبالتالي:

$M(0,3,-1)$

$$\Rightarrow 2(x-0)+2(y-3)-8(z+1)=0$$

$$\Rightarrow P:2x+2y-8z-14=0$$

إيجاد معادلة الكرة:

نصف القطر:

$$dist(A,P)=\frac{|-2+4-24-14|}{\sqrt{4+4+64}}=\frac{|-36|}{\sqrt{72}}=\frac{36}{\sqrt{72}}$$

$$\Rightarrow x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\left(\frac{36}{\sqrt{72}}\right)^2$$

29) الجواب:

$$d:\begin{cases}x=t+1\\ y=t-2\\ z=3t\end{cases}\quad ;t\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{u_d}(1,1,3)$$

$$P:2x+ay-z+b=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}(2,a,-1)$$

كون $d\in P$ فإنّ: $\overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{n_P}$ وبالتالي:

$$\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}=0\Rightarrow 2+a-3=0\Rightarrow a=1$$

وكون $d\in P$ فإنّ d يحقق معادلته:

$$\Rightarrow 2(t+1)+(t-2)-3t+b=0$$
$$\Rightarrow 2t+2+t-2-3t+b=0\Rightarrow b=0$$

30) الجواب:

$A(3,2,1)\ ,\ B(1,2,0)\ ,\ C(3,1,-2)\ ,\ D(x,y,3)$

31) الجواب:

حسب خاصة الاختزال:

$$2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$

نعوض :

$$6\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right| = 6\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$

$$\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$

تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$.

32) الجواب:

$$l_1 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

$$l_2 = 3\overrightarrow{MD} - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$$

$$= 3\overrightarrow{MD} - 3\overrightarrow{MG}$$

$$= 3\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MD}\right)$$

$$= 3\overrightarrow{GD}$$

نعوض:

$$3\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right| = 3\left|\left|\overrightarrow{GD}\right|\right|$$

$$\left|\left|\overrightarrow{MG}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{GD}\right|\right|$$

تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $[DG]$

33) الجواب:

$$x^2 + z^2 = \frac{9}{4}y^2$$

$$r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

مخروط دوراني محوره محور التراتيب ونصف قطر قاعدته 3

34) الجواب:

$$\left(O\,;\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{OC}\right)$$

$$\Rightarrow A(1,0,0)\ ,\ B(0,1,0)\ ,\ C(0,0,1)$$
$$\Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Rightarrow x + y + z - 1 = 0$$

35) الجواب:

$$P_1 :\ 2x + y - z + 2 = 0\ \ ...(1)$$
$$P_2 :\ x + 2y - z + 1 = 0\ \ ...(2)$$

بطرح (2) و (1) نجد:

$$x - y + 1 = 0 \Rightarrow x = y - 1$$

نعوّض في (2) :

$$y - 1 + 2y - z + 1 = 0 \Rightarrow z = 3y$$

وبالتالي:

$$(y - 1\,, y\,, 3y)\ ;\ \ y \in \mathbb{R}$$

36) الجواب:

$$\left.\begin{matrix} A(-1,2,3) \\ B(1,2,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AB}(2,0,-4)$$
$$P : x + y + z - 1 = 0$$

المعادلات الوسيطية للمستقيم d هي:

$$d : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = -4t + 3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

نعوّض d في P :

$$2t - 1 + 2 - 4t + 3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -2t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

نعوّض في d :

$$x = 2\ ,\ y = 2\ ,\ z = -3$$
$$\Rightarrow I(2,2,-3)$$

37) الجواب:

$$A(2,0,0)\ ,\ B(0,1,0)\ ,\ C(0,0,1)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}(-2,1,0) \Rightarrow \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5} \\ \overrightarrow{AC}(-2,0,1) \Rightarrow \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|.\left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|.\cos\left(B\hat{A}C\right)$$
$$\Rightarrow 4 + 0 + 0 = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \cos\left(B\hat{A}C\right)$$
$$\Rightarrow \cos\left(B\hat{A}C\right) = \frac{4}{5}$$

38) الجواب:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 - 8 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$$

وبالتالي M تمثّل كرة مركزها:

$$(0,1,0)$$

ونصف قطرها:

$$r = \sqrt{9} = 3$$

39) الجواب:

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left|\left|\overrightarrow{BA}\right|\right|.\left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right|.\cos\left(\hat{B}\right)$$

حسب فيثاغورث:

$$\left|\left|\overrightarrow{BC}\right|\right| = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

40) الجواب:

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{HJ}$$
$$=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{AJ}$$

41) الجواب:

$$d:\begin{cases}x=0\\ y=-t\\ z=-t+1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{u_d}=(0,-1,-1)$$

42) الجواب:

$A\in d \Leftarrow$ تحقق معادلته

$$\begin{cases}-2=at-1 \quad ...(1)\\ 5=3t+2\\ 2=2t\Rightarrow t=1\end{cases}$$

نعوّض في (1) :

$$-2=a(1)-1\Rightarrow a=-2+1=-1$$

43) الجواب:

$$d:\begin{cases}x=3t+1\\ y=2t\\ z=-t+1\end{cases};\ t\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{u_d}(3,2,-1)$$
$$\Delta:\begin{cases}x=s+2\\ y=1\\ z=3s+1\end{cases};s\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}(1,0,3)$$
$$\frac{1}{3}\neq\frac{0}{2}\neq\frac{3}{-1}$$

وبالتالي شعاعي توجيه Δ و d غير مرتبطين خطيّاً، ومنه فإنّ Δ و d غير متوازيان أي أنهما ((إمّا متقاطعين أو متخالفين))

$$\left.\begin{matrix}x=x\\ y=y\\ z=z\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}3t+1=s+2\ ...(1)\\ 2t=1\ ...(2)\\ -t+1=3s+1\ ...(3)\end{cases}$$

من (2) نجد:

$$t=\frac{1}{2}$$

نعوّض في (1) :

$$\Rightarrow s=3\left(\frac{1}{2}\right)+1-2=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}\Rightarrow s=\frac{1}{2}$$

نعوّض في (3) :

$$-\frac{1}{2}+1\overset{?}{=}3\left(\frac{1}{2}\right)+1$$
$$\frac{1}{2}\neq\frac{5}{2}$$

وبالتالي Δ و d متخالفين.

$$\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta}=(1)(3)+(0)(2)+(3)(-1)=0$$

ومنه فإن المستقيمان Δ و d متخالفين ومتعامدين .

44) الجواب:

$$A(1,2,0)\ ,\ B(0,0,1)\ ,\ C(1,5,5)$$
$$\overrightarrow{BA}(1,2,-1)\ ,\ \overrightarrow{BC}(1,5,4)$$
$$\frac{1}{1}\neq\frac{2}{5}$$

الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$ غير مرتبطان خطيّاً.

نفرض:

$$\vec{n}(a,b,c)$$

$$a=+(8+5)=13$$
$$b=-(4+1)=-5$$
$$c=+(5-2)=3$$
$$\Rightarrow \vec{n}(13,-5,3)$$
$$B(0,0,1)$$

$$(ABC):13(x-0)-5(y-0)+3(z-1)=0$$
$$\Rightarrow (ABC):\ 13x-5y+3z-3=0$$

نكتب معادلة المستقيم d المار بالنقطة $D(-11,9,-4)$ وشعاع توجيهه هو:

$$\overrightarrow{u_d}=\vec{n}=(13,-5,3)$$
$$\Rightarrow d:\begin{cases}x=13t-11\\ y=-5t+9\\ z=+3t-4\end{cases};\ t\in\mathbb{R}$$

نوجد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC) بالحل المشترك:

$$13(13t-11)-5(-5t+9)+3(3t-4)-3=0$$
$$\Rightarrow 203t-203=0\Rightarrow t=1$$

وبالتالي:

$$\begin{cases}x=13(1)-11\\ y=-5(1)+9\\ z=3(1)-4\end{cases}\Rightarrow D'(2,4,-1)$$

45) الجواب:

$$E\in yy'\Rightarrow E(0,y,0)$$
$$B(2,1,0)\ ,\ A(2,0,2)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AE}(-2,y,-2)$$
$$\overrightarrow{BE}(-2,y-1,0)$$
$$\left\|\overrightarrow{AE}\right\|=\left\|\overrightarrow{BE}\right\|$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+y^2+4}=\sqrt{4+(y-1)^2+0}$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$8+y^2=4+(y-1)^2$$
$$\Rightarrow 8+y^2=4+y^2-2y+1$$

$$\Rightarrow 3=-2y \Rightarrow y=-\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow E\left(0\,,-\frac{3}{2}\,,0\right)$$

46) الجواب:

$A(2\,,0\,,0)\;,\;B(0\,,3\,,0)\;,\;C(0\,,0\,,1)$

$$(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1$$

نضرب الطرفين بـ 6 :

$$\Rightarrow (ABC):\;3x+2y+6z=6$$

$$dist(O\,,P)=\frac{|3(0)+2(0)+6(0)-6|}{\sqrt{9+4+36}}=\frac{|-6|}{\sqrt{49}}=\frac{6}{7}$$

47) الجواب:

المستقيم يوازي المستوي أي أنّ:

$$\vec{u}\perp\vec{n}$$

وبالتالي:

$$\vec{n}.\vec{u}=0$$
$$\Rightarrow (2\,,-2\,,a)(1\,,-1\,,2)=0$$
$$\Rightarrow 2(1)+(-2)(-1)+a(2)=0$$
$$\Rightarrow 2+2+2a=0 \Rightarrow 2a=-4 \Rightarrow a=-2$$

48) الجواب:

$$dist(M\,,P)=\frac{|2(3)+3+2(3)-6|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$$

$$dist(M\,,Q)=\frac{|2(3)-2(3)-3+6|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{3}{\sqrt{9}}=1$$

$$dist(M\,,d)=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

49) الجواب:

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DB}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(2\,\overrightarrow{BI}\right)$$

حيثُ I منتصف $[AC]$ وبالتالي:

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BI}$$

ومنه M تنطبق على منتصف $[AC]$

50) الجواب:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{6}\;,\;y=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

51) الجواب:

I مركز ثقل BCD وبالتالي I هو م.أ.م للنقاط:

$$(D\,,2)\;,\;(C\,,2)\;,\;(B\,,2)\;\Rightarrow (I\,,6)$$

K هي نظيرة A بالنسبة لـ I أي أن:

$$\overrightarrow{IK}=\frac{-1}{1}\overrightarrow{IA}$$

وبالتالي K م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,-1)\;,\;(I\,,2)$$

ومنه K م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,-3)\;,\;(I\,,6)$$

ومنه K م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,-3)\;,\;(B\,,2)\;,\;(C\,,2)\;,\;(D\,,2)$$

52) الجواب:

بما أنّ I مركز ثقل المثلث ABC فإنّ I م.أ.م للنقاط:

$$(A\,,1)\;,\;(B\,,1)\;,\;(C\,,1)\Rightarrow (I\,,3)$$

H م.أ.م للنقاط:

$$(I\,,3)\;,\;(D\,,3)$$

وبالتالي H منتصف DI.

53) الجواب:

$$P:x+2y=4\quad ...(1)$$
$$Q:x-y=1\quad ...(2)$$

من (1) نجد:

$$x=-2y+4$$

ومن (2) نجد:

$$x=y+1$$

وبالتالي:

$$-2y+4=y+1\Rightarrow -3y=-3\Rightarrow y=1$$
$$\Rightarrow x=1+1=2\Rightarrow x=2$$

نفرض أن $z=t$:

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\\z=t\end{cases}\;;\;t\in\mathbb{R}$$

54) الجواب:

$$P_1:\;x+2y+z-5=0\quad ...(1)$$
$$P_2:\;2x-y-1=0\quad ...(2)$$
$$P_3:\;3x+y-4=0\quad ...(3)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_{P_1}}(1,2,1)\\\overrightarrow{n_{P_2}}(2,-1,0)\\\overrightarrow{n_{P_3}}(2,1,0)\end{cases}$$

نوجد الفصل المشترك لِـ P_1 و P_3 :

من (2) نجد:

$$y = 2x - 1$$

ومن (3) نجد:

$$y = -3x + 4$$

وبالتالي:

$$2x - 1 = -3x + 4 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$$
$$\Rightarrow y = 2(1) - 1 = 1 \Rightarrow y = 1$$

نفرض $z = t$ ومنه:

$$\Rightarrow d : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

نعوّض في معادلة المستوي P_1 فنجد:

$$1 + 2(1) + t - 5 = 0 \Rightarrow t = 2$$

وبالتالي المستويات P_1 و P_2 و P_3 متقاطعة بنقطة واحدة وهي:

$$(1\,,1\,,2)$$

55) الجواب: كرة

56) الجواب:

$$I(2{,}0{,}1)\ ,\ J(0,-2{,}3) \Rightarrow \overrightarrow{IJ}(-2\,,-2\,,2)$$
$$P\ :\ x + y - z + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}(1\,,1\,,-1)$$

بما أن P هي معادلة المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$

فإنّ $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{n_P}$ مرتبطان خطيّاً:

$$\frac{-2}{1} = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = -2$$
$$\Rightarrow J(0\,,-2\,,3) \quad \text{محققة}$$

57) الجواب:

G_α م.أ.م للنقاط:

$$(A,\alpha)\ ,\ (B, 1 + \alpha^2)\ ,\ (C,-\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{G_\alpha A} + (1 + \alpha^2)\overrightarrow{G_\alpha B} - \alpha\overrightarrow{G_\alpha C} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow -\alpha\left(\overrightarrow{AG_\alpha} + \overrightarrow{G_\alpha C}\right) + (1 + \alpha^2)\overrightarrow{G_\alpha B} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow -\alpha\overrightarrow{AC} = -(1 + \alpha^2)\overrightarrow{G_\alpha B}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{G_\alpha B} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}\overrightarrow{AC}$$

58) الجواب:

$$dist(O,P) = \frac{|2(1) + (0) - 2(1) - 12|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{9}} = 4$$

$$R = \sqrt{r^2 + dist^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$\Rightarrow R = 5$$

59) الجواب:

$$\left.\begin{matrix} x = x \\ y = y \\ z = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = t + 1 \\ 1 = \lambda - 1 \Rightarrow \lambda = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

نعوّض في المعادلة الأولى:

$$2 = 1 + 1 \quad \text{محققة}$$

نعوّض λ في L :

$$\left.\begin{matrix} x = 2 \\ \Rightarrow y = 2 - 1 = 1 \\ z = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (2{,}1{,}1)$$

60) الجواب:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 0$$

وبالتالي M م.أ.م للنقاط:

$$(B,-1)\ ,\ (A,1)\ ,\ (C,1)$$

61) الجواب:

مستوٍ مار من $(1{,}2{,}1)$ وعمودي على:

$$d : \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = -t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{u_d} = (0\,,-1\,,-1) \quad , \quad A(1{,}2{,}1)$$
$$\Rightarrow 0(x - 1) - 1(y - 2) - 1(z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow -y - z + 3 = 0$$
$$\Rightarrow z + y - 3 = 0$$

62) الجواب:

$$\begin{matrix} x + y + z = 1 & \dots L_1 \\ -2y + z = 1 & \dots L_2 \\ -4y + 14z = -2 & \dots L_3 \end{matrix}$$

نجري التحويل السطري:

$$-2L_2 + L_3 \longrightarrow L_3'$$

فنحصل على:

$$\begin{matrix} x + y + z = 1 & \dots L_1 \\ -2y + z = 1 & \dots L_2 \\ 12z = -4 & \dots L_3' \end{matrix}$$

من L_3' نجد:

$$z = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \Rightarrow z = -\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow -2y - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 1 = 2 \Rightarrow x = 2$$

وبالتالي المستويات الثلاث تشترك بنقطة واحدة هي:

$$\left(2\,,-\frac{2}{3}\,,-\frac{1}{3}\right)$$

63) الجواب:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \Longrightarrow x=y-1 \\ x+y-1=0 \Longrightarrow x=-y+1 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow y-1=-y+1 \Longrightarrow 2y=2 \Longrightarrow y=1$$
$$\Longrightarrow x=1-1=0 \Longrightarrow x=0$$

نفرض $z=t$ ومنه:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \quad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

64) الجواب:

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-3\vec{v})=$$
$$||\vec{u}||^2-3\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{v}-3||\vec{v}||^2=$$
$$(5)^2-3(-5)-5-3(3)^2=$$
$$25+15-5-27=$$
$$40-32=8$$

65) الجواب:

دوران الضلع $[BF]$ من المستطيل $BFHD$ حول (DH)

ينتج مخروط محوره:

$$(DH)\longrightarrow(OZ)$$

ومركزه:

$$D(0\,,0\,,0)$$

ونصف قطره $[DB]$:

$$B(2\,,2\,,0)$$

$$DB=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(0-0)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2 \quad ; \quad 0\le z\le 2$$
$$\Longrightarrow x^2+y^2=8 \quad ; \quad 0\le z\le 2$$

66) الجواب:

الاختيار C خاطئ .

67) الجواب:

$$A(1,0)\,,\ B(4,0)\ ,\ C(5,3)\ ,\ D(3,2)\ ,\ E(0,1)$$
$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB}(3,0)\ ,\ \overrightarrow{AC}(4,3)$$
$$\overrightarrow{AD}(2,2)\ ,\ \overrightarrow{AE}(-1,1)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=12+0=12 \\ b=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=6+0=6 \\ c=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=-3+0=-3 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow a+b+c=12+6-3=15$$

1) الجواب:

$$z^3 = 1 + i \quad , \quad r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow z^3 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}$$

نفرض أنّ $z = r.e^{i\theta}$ الجذر التكعيبي للعدد z^3 ونعوّض:

$$\left(r.e^{i\theta}\right)^3 = 27\, e^{\frac{\pi}{4}i}$$
$$\Rightarrow r^3.e^{3\theta i} = 27 e^{\frac{\pi}{4}i}$$

بالمقارنة نجد:

$$r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$
$$3\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

نقسم الطرفين على 3 :

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k = \frac{\pi + 8\pi k}{12}$$

2) لدينا:

$$z = x + 3i \Rightarrow \bar{z} = x - 3i$$

نعوض:

$$(x + 3i - x + 3i)^3 = -216i$$

3) الجواب:

$$\overline{w} = \bar{z} + \frac{4}{\bar{z}}$$

4) الجواب:

$$\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^2 + 2\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right) + \left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^2 - \left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^2$$
$$-2\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right) + \left(e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^2 = 4e^{0i}$$
$$\left|z_1^2 - z_2^2\right| = 4$$

5) الجواب:

$$|u| = 1 \Rightarrow \left|\frac{2}{u}\right| = \left|\frac{2}{1}\right| = 2$$

6) الجواب:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\cos(\theta) - i\sin(\theta)}{1+i} \Rightarrow \text{ربع رابع}$$
$$\Rightarrow r_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$
$$z_1 = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$
$$\frac{1\, e^{-i\theta}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$$

نقسم الطويلات، نطرح الزوايا:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\left(-\theta - \frac{\pi}{4}\right)i}$$

7) الجواب:

تخيّلي بحت: $\overline{w} = -w$

$$w = \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}} \Rightarrow \overline{w} = \frac{\bar{z} - z}{\bar{z} + z} = \frac{-(z - \bar{z})}{z + \bar{z}} = -w$$

8) الجواب:

$$\bar{z} = \alpha - (1 - \beta)i$$
$$|\bar{z}| = \sqrt{\alpha^2 + (1-\beta)^2}$$
$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + (1-\beta)^2}$$
$$\Rightarrow |-z| = \sqrt{\alpha^2 + (1-\beta)^2}$$
$$|\bar{z}| - |-z| = \sqrt{\alpha + (1-\beta)^2} - \sqrt{\alpha + (1-\beta)^2} = 0$$

9) لدينا:

$$\sqrt{z} = 2 - 3i$$
$$z = (2 - 3i)^2 = -5 - 12i$$
$$-z = 5 + 12i$$

نوجد الجذور التربيعية:

$$x^2 + y^2 = 13$$
$$x^2 - y^2 = 5$$
$$2xy = 12$$

بجمع المعادلة الأولى والثانية:

$$2x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm 3$$

بطرح المعادلة الأولى والثانية:

$$2y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm 2$$

من المعادلة الثالثة نجد أن x و y من نفس الإشارة:

$$z_1 = 3 + 2i\,, z_2 = -3 - 2i$$

بالتالي الجواب الصحيح هو B.

10) الجواب:

نكتبه بالشكل المثلّثي:

$$w_1 = \left(1 + \sqrt{3}i\right)^5$$
$$w_2 = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^5$$

$$w_1^5 = 2^5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$
$$w_2^5 = 2^5\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 2^5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$
$$\Longrightarrow w_1^5 + w_2^5 = 2^5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 2^5\left(2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

حقيقي.

11) لدينا:

مجموع متتالية هندسية:

$$a = 1\,, q = z\,, n = n$$
$$S = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-e^{i2\pi}}{1-z} = 0$$

12) لدينا:

$$z = r.e^{i\theta}$$

نعوض:

$$r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$$

بالمقارنة نجد:

$$r = 2$$

و:

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$$
$$k = 0 \Rightarrow z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$
$$k = 1 \Rightarrow z_2 = 2e^{\frac{i5\pi}{6}}$$
$$k = 2 \Rightarrow z_3 = 2e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2e^{\frac{i3\pi}{2}}$$

نرمز:

$$a = z_1\,, b = z_2\,. c = z_3$$
$$a = \sqrt{3} + i\,, b = -\sqrt{3} + i\,, c = -2i$$
$$AB = |b - a| = \sqrt{12}$$
$$AC = \left|-3i - \sqrt{3}\right| = \sqrt{12}$$
$$BC = \left|-3i + \sqrt{3}\right| = \sqrt{12}$$

المثلث متساوي الأضلاع.

13) لدينا:

$$-j^2 = e^{i\pi}.e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{7\pi}{3}\right)}$$

نطرح 2π:

$$e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

14) الجواب:

$$P(-1) = 0$$

إذاً $z = -1$ هو حل للمعادلة.

15) الجواب:

بالقسمة الإقليديّة نجد:

$$Q(z) = z^2 - 2z + 4$$

16) لدينا:

$$z^2 - 2z + 4 = 0$$
$$\Delta = 4 - 4(4) = -12 < 0$$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان:

$$z_1 = \frac{2 + i\sqrt{12}}{2} = 1 + \sqrt{3}i = a$$
$$z_2 = 1 - \sqrt{3}i = b$$
$$z_3 = -1 = c$$
$$AB = |b - a| = \sqrt{12}$$
$$AC = |c - a| = \left|-2 - \sqrt{3}i\right| = \sqrt{13}$$
$$BC = |c - b| = \left|-2 + \sqrt{3}i\,\right| = \sqrt{13}$$

متساوي الساقين

17) الجواب:

في المثمّن المنتظم:

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad , \quad r = 1$$
$$b = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

18) الجواب:

$$d = 1\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

ربع ثاني:

$$d = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

19) الجواب:

$$c = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 + i = i$$

20) الجواب:

$$a = 1(\cos(0) + i\sin(0)) = 1 + 0 = 1$$

21) الجواب:

الزاوية بين OA و OD هي:

$$\frac{3\pi}{4}$$

وبالتالي:

$$(OA\,, OI) = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

22) الجواب:

$$z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{2} = \frac{2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}$$
$$= \frac{2-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

23) لدينا:

$$e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right) = e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{\frac{i\pi}{6}} - e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}} 2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{i\pi}{6}}.e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{i2\pi}{3}}$$

24) الجواب:

$$\sqrt{2} - 2 < 0$$
$$-(2-\sqrt{2}) = (2-\sqrt{2})e^{\pi i}$$

25) الجواب:

$$|w| = \frac{|1|}{|\sqrt{2}|}|\sqrt{2}|.|1| = 1$$

26) الجواب:

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$$

27) الجواب:

$$\arg(z_1.z_2) = \theta_1 + \theta_2$$

28) الجواب:

$$\arg(z^n) = n\theta$$

29) الجواب:

$$\arg(\overline{z_1}) = -\theta$$

30) الجواب:

$$\arg(-z_1) = \theta + \pi$$

31) الجواب:

من خواص المرافق:

$$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w})$$

$$\Rightarrow (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) - (z-w)(\overline{z}-\overline{w})$$
$$= z.\overline{z} + z.\overline{w} + w.\overline{z} + w.\overline{w} - z.\overline{z} + z.\overline{w} + \overline{z}.w - w.\overline{w}$$
$$= 2z.\overline{w} + 2\overline{z}w$$

32) الجواب:

$$z = -2i$$

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = \sqrt{4+0} = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ x.y = -\frac{2}{2} = -1 \ldots (*) \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2 = 2$$
$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1\ ,\ \ x = -1$$

نعوّض في $(*)$:

$$-1.y = -1 \Rightarrow y = 1$$
$$1.y = -1 \Rightarrow y = -1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases}$$

33) الجواب:

$$z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{i}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{6}i \begin{cases} r = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z = \frac{2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}}{1e^{\frac{\pi}{2}i}}$$

$$\Rightarrow z^n = \left(2\sqrt{2}\right)^n . e^{n\left(\frac{\pi}{3}i-\frac{\pi}{6}i\right)} = \left(2\sqrt{2}\right)^n . e^{\frac{n\pi}{6}i}$$

34) الجواب:

$$\overline{w} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1}.\overline{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1.z_2}} = \frac{\frac{z_2 + z_1}{z_1.z_2}}{\frac{z_1.z_2 + 1}{z_1.z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1.z_2}$$

حقيقي لأنّ:

$$w = \overline{w}$$

حيثُ:

$$|z| = 1 \quad , \quad \overline{z} = \frac{1}{z}$$

35) الجواب:

$$\overline{w} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}} = \frac{\frac{z_2 + z_1}{z_1.z_2}}{\frac{z_2 - z_1}{z_1.z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{-(z_1 - z_2)}$$

تخيّلي بحت لأنّ:

$$\overline{w} = -w$$

36) $\boldsymbol{\theta}$

37) $\boldsymbol{\pi + \theta}$