تذكرة وعموميات:

تعريف	لتكن لدينا النقطتين A و B من الفراغ نقول عن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ أنّه الانسحاب الذي ينقل A إلى B
نميز	الحالة الأولى: في حالة $A \neq B$ فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يمتلك: * منحى: هو منحى المستقيم (AB) * اتجاه: يتفق مع الانتقال من A إلى B * طولاً أو نظيماً: هو المسافة بين A إلى B ونرمز إلى نظيم الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ ويكون: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$ الحالة الثانية: في حالة $A = B$ فإن الشعاع $\overrightarrow{AA}$ هو الشعاع الصفري ورمزه $\vec{0}$ حيث: الشعاع الصفري: هو شعاع له نفس البداية ونفس النهاية أي بدايته تنطبق على نهايته نتيجة هامة: إذا كان $\overrightarrow{DN} = \vec{0}$ فهذا يعني أن $D = N$ أي D تنطبق على N

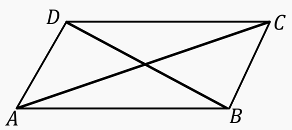
	الشعاعان المتساويان	الشعاعان المتعاكسان
تعريف	الشعاعين المتساويان لهما نفس المنحى ونفس الجهة ونفس الطويلة حيث: نفس المنحى تعني توازي أو انطباق	لهما نفس المنحى ونفس الطويلة ولكن اتجاهين متعاكسين
الفائدة	تفيد في استبدال شعاع بشعاع آخر يساويه	$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

العمليات على الأشعة:

تنويه: ناتج مجموع أشعة هو شعاع

قواعد:

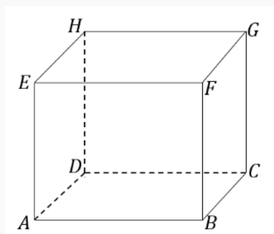
أولاً: مجموع شعاعين

متساويين	متعاكسين	في حالة تعاقب	لهما البداية نفسها
الناتج هو ضعفي أحدهما مثال: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$	الناتج هو الشعاع الصفري مثال: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$	أي نهاية أحد الأشعة هي بداية للشعاع الآخر وهنا نستخدم قاعدة شال في جمع الأشعة وفق: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	نستخدم قاعدة متوازي الأضلاع بحيث يكون مجموع الشعاعين هو قطر متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين والذي له نفس بداية الشعاعين مثال: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$

ثانياً: طرح شعاعين

لطرح شعاعين نجمع الأول مع معاكس الشعاع الثاني وفق: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ ثم نتابع حسب قواعد جمع الأشعة

تمرين 1: $ABCDEFGH$ مكعب فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$ والمطلوب: أكمل ما يلي:



1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$
2. $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{GC}$
3. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$
4. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$
5. $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF}$
6. $\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
7. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$
8. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
9. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
10. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DF}$
11. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AI}$
12. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB}$
13. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
14. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DG}$
15. $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{IA}$
16. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
17. $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{HJ}$
18. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{FJ}$
19. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{EI}$
20. $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{CG}$
21. $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}$

$= \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}$

$= \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

$= 2\overrightarrow{AB}$

22. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

23. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EH}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

24. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BG}$

25. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HB}$

$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HG}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG}$

$= 2\overrightarrow{AB}$

26. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH}$

27. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GJ}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{EJ}$

28. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GI}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GI}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GI}$

$= \overrightarrow{EI}$

29. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AD}$

30. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}$

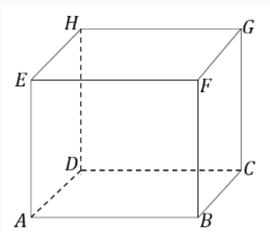
$= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$

$= \overrightarrow{AG}$

تمرين 2 :

$ABCDEFGH$ مكعب والمطلوب:



1. أثبت أنّ $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DF}$

الطريقة الأولى:

$$\underbrace{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}}_{l_1} = \underbrace{2\overrightarrow{DF}}_{l_2}$$

$l_1 = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}$

$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$

$= 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DH}$

$= 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH})$

$= 2(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH})$

$= 2(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF})$

$= 2\overrightarrow{DF} = l_2$

الطريقة الثانية:

$$\underbrace{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}}_{l_1} = \underbrace{2\overrightarrow{DF}}_{l_2}$$

$l_1 = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}$

$= \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FG}$

$= 3\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$

$= 3\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FG}$

$= 3\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD}$

$= 3\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FD}$

$= 3\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DF}$

$= 2\overrightarrow{DF} = l_2$

2. عيّن النقطة M التي تحقق العلاقة الآتية:

$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DG} - \overrightarrow{DH}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}) - \overrightarrow{DH}$

لدينا من الطلب السابق:

$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DF}$

ومنه:

$= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{DF}) - \overrightarrow{DH}$

$= \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DH}$

$= \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{HD}$

$= \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB}$

$= \overrightarrow{DB}$

إذاً لدينا $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB}$

ومنه نجد أنّ النقطة M تنطبق على النقطة B

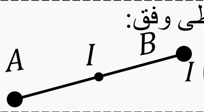
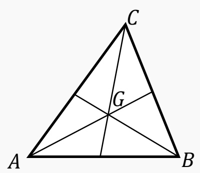
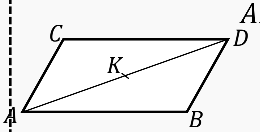
المعلم في الفراغ	اختيار معلم في الفراغ هو إعطاء نقطة O تسمّى مبدأ المعلم. وجملة ثلاثة أشعة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليست مرتبطة خطياً. نرمز إلى هذا المعلم بالرمز $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k},)$. ونسمي الجملة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ أساس أشعة الفراغ.
إحداثيات نقطة في الفراغ	لتكن M نقطة من الفراغ إذاً إحداثيات M وفق: $M(x,y,z)$ حيث: x فاصلة النقطة و y ترتيب النقطة و z راقم النقطة
مركبات شعاع في الفراغ	ليكن $\vec{u}$ في الفراغ مركباته تعطى وفق: $\vec{u}(x,y,z)$ ويمكن أن نكتب $\vec{u}$ بالصيغة: $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ويمكن أيضاً أن نكتب $\vec{u}$ وفق عمود وفق: $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$
إيجاد مركبات شعاع	لتكن لدينا النقطتين: $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ فإن مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ تعطى وفق: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$

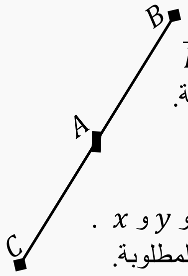
العمليات على الأشعة:

ليكن لدينا $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ فإنّ:

جداء عدد حقيقي بشعاع	مجموع شعاعين	تساوي شعاعين
هو شعاع مركباته تنتج من ضرب هذا العدد بمركبات الشعاع أي: $K\vec{u}=\begin{pmatrix}Kx_1\\Ky_1\\Kz_1\end{pmatrix}$	هو شعاع مركباته تنتج من جمع مركبات الشعاع الأول مع مقابلاتها من الشعاع الثاني أي: $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}$	إذا كان لدينا $\vec{u}=\vec{v}$ فهذا يكافئ أن: $\vec{u}=\vec{v}\rightarrow\begin{pmatrix}x_1=x_2\\y_1=y_2\\z_1=z_2\end{pmatrix}$

إيجاد إحداثيات النقاط:

الفكرة	نص السؤال	فكرة الحل
إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة	ليكن لدينا النقاط: $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ جد إحداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$	إن إحداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ تعطى وفق:  $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
إحداثيات مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات)	ليكن لدينا النقاط: $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ و $C(x_C,y_C,z_C)$ * جد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC * جد إحداثيات G مركز تلاقي المتوسطات	إن إحداثيات G تعطى وفق: $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$ 
إحداثيات مركز متوازي الأضلاع	ليكن لدينا النقاط: $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ و $C(x_C,y_C,z_C)$ و $D(x_D,y_D,z_D)$ جد إحداثيات النقطة K مركز متوازي الأضلاع $ABCD$	إن إحداثيات النقطة K مركز متوازي الأضلاع $ABCD$ نقطة تلاقي قطريه أيّ (منتصف أحد أقطاره) أيّ:  * إمّا الـ K منتصف $[AD]$ * أو الـ K منتصف $[CB]$
إحداثيات نقطة بمعلومية علاقة شعاعية وإحداثيات باقي النقط	جد إحداثيات النقطة التي تحقق العلاقة الشعاعية (بحيث العلاقة الشعاعية معطاة)	* نفرض النقطة المجهولة (x,y,z) . * نعوض في العلاقة الشعاعية المعطاة. * نطبق العمليات على الأشعة. * نحصل على معادلات من الدرجة الأولى بالمجاهيل x و y و z . * نحل المعادلات السابقة فنحصل على إحداثيات النقطة المطلوبة.
إحداثيات النقطة التي تجعل الرباعي متوازي أضلاع	لتكن لدينا النقاط: $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ و $C(x_C,y_C,z_C)$ جد إحداثيات النقطة M التي تجعل الرباعي $ABCM$ متوازي الأضلاع.	* نفرض النقطة المطلوبة $M(x,y,z)$ * نرسم شكل تقريـــبي: * نأخذ علاقة شعاعية من الشكل. * نعوض في العلاقة. * نطبق العمليات على الأشعة. * نحصل على معادلات من الدرجة الأولى بالمجاهيل x و y و z . * نحل المعادلات السابقة فنحصل على إحداثيات النقطة المطلوبة.

إحداثيات نقطة نظيرة نقطة بالنسبة إلى نقطة	أوجد إحداثيات النقطة C نظيرة B بالنسبة إلى A.	* نفرض النقطة المطلوبة $C(x,y,z)$ * نرسم شكل تقريـــبي، حيث النقطة التي تأتي بعد كلمة بالنسبة تكون في المنتصف. * نأخذ علاقة شعاعية من الشكل ولتكن مثلاً: $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}$ * مع الانتباه على أن يكون للشعاعين نفس المنحى والجهة. * نعوض في العلاقة. * نطبق العمليات على الأشعة. * نحصل على معادلات من الدرجة الأولى بالمجاهيل z و y و x . * نحل المعادلات السابقة فنحصل على إحداثيات النقطة المطلوبة. 
إحداثيات نقطة نظيرة نقطة بالنسبة إلى المبدأ	جد إحداثيات النقطة B نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ.	تكون إحداثيات النقطة B هي عكس إحداثيات النقطة A أي أننا نغير الإشارات فقط.

تمرين شامل: لتكن لدينا النقاط:

$A(5,2,1)$	$B(-1,0,2)$
$C(3,1,-2)$	$D(0,-2,2)$
$E(3,-1,-3)$	$F(-1,1,0)$

1. جد مركبات كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}(-6,-2,1)$

$\overrightarrow{CD}(-3,-3,4)$

2. جد مركبات الشعاع $\vec{u}$ الذي يحقق العالقة:

$$\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{ED}$$

$$=2\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-3\\-1\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-12\\-4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-\frac{2}{3}\\\frac{10}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\\-\frac{14}{3}\\\frac{16}{3}\end{pmatrix}$$

3. جد مركبات الشعاع $\vec{v}$ الذي يحقق العلاقة:

$$\vec{v}=\overrightarrow{BA}-\frac{1}{5}\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{EF}$$

$$=\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{27}{5}\\\frac{13}{5}\\\frac{21}{5}\end{pmatrix}$$

4. جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$$

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ ومنهُ:

$$\begin{pmatrix}3-x\\1-y\\-2-z\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}4\\1\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3-x\\1-y\\-2-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-2\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3-x\\1-y\\-2-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-3\\5\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

* $3-x=-10\to x=13$
* $1-y=-3\to y=4$
* $-2-z=5\to z=-7$

$$\Longrightarrow M(13,4,-7)$$

5. جد إحداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

* $x_I=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$
* $y_I=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$
* $z_I=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{2-2}{2}=0$

$$\Longrightarrow I\left(1,\frac{1}{2},0\right)$$

6. جد إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث (DFE)

* $x_G=\frac{x_D+x_F+x_E}{3}=\frac{0-1+3}{3}=\frac{2}{3}$
* $y_G=\frac{y_D+y_F+y_E}{3}=\frac{-2+1-1}{3}=\frac{-2}{3}$
* $z_G=\frac{z_D+z_F+z_E}{3}=\frac{2+0-3}{3}=-\frac{1}{3}$

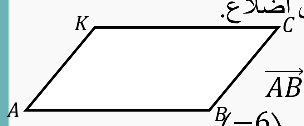
$$\Longrightarrow G\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

7. جد إحداثيات النقطة K التي تجعل $ABCK$ متوازي أضلاع ثم احسب إحداثيات النقطة N مركز متوازي الأضلاع.

* إيجاد إحداثيات النقطة K التي تجعل الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع.

لتكن $K(x,y,z)$

وليكن لدينا: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{KC}$



$$\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-x\\1-y\\-2-z\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

* $-6=3-x\to x=9$
* $-2=1-y\to y=3$
* $1=-2-z\to z=-3$

$$\Longrightarrow K(9,3,-3)$$

* إيجاد إحداثيات النقطة N مركز متوازي الأضلاع هي نقطة تلاقي قطريه (منتصف أحد أقطاره) أيّ أنّ N منتصف $[AC]$ ومنه:

* $x_N = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$
* $y_N = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$
* $z_N = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$

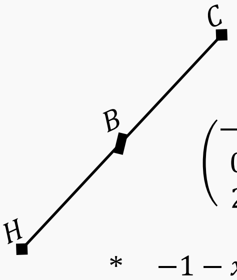
$$\Rightarrow N\left(4, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

أو أنّ N منتصف $[KB]$ وفق:

* $x_N = \frac{x_K+x_B}{2} = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = 4$
* $y_N = \frac{y_K+y_B}{2} = \frac{3-0}{2} = \frac{3}{2}$
* $z_N = \frac{z_K+z_B}{2} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow N\left(4, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

8. جد إحداثيات النقطة H نظيرة C بالنسبة إلى B



لتكن $H(x,y,z)$ وليكن لدينا:

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{BC}$$

$$\begin{pmatrix} -1-x \\ 0-y \\ 2-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

* $-1-x = 4 \rightarrow x = -5$
* $-y = 1 \rightarrow y = -1$
* $2-z = -4 \rightarrow z = 6$

$$\Rightarrow K(-5,-1,6)$$

9. جد إحداثيات النقطة L نظيرة F بالنسبة إلى المبدأ

إن إحداثيات النقطة L هي $L(1,-1,0)$

أنواع المعالم:

المعلم المتجانس	المعلم المتعامد	المعلم الكيفي
نقول بإن المعلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ معلم متجانس إذا تحقق: * $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى * نظيم كل من $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ يساوي واحدة الطول أي: $\lVert\vec{\imath}\rVert = \lVert\vec{\jmath}\rVert = \lVert\vec{k}\rVert = 1$	نقول بإن المعلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ معلم متعامد إذا تحقق: $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى (أي وجود ثلاثية متعامدة) ملاحظة: المعلم المتعامد يمكن تحويله إلى معلم متجانس	نقول إن المعلم كيفي إذا كانت $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ غير متعامدة مثنى مثنى (عدم وجود ثلاثية متعامدة)

☒ متى يمكن وضع معلم متجانس؟

* في حالة المكعب
* في حالة متوازي المستطيلات بشرط أبعاده معلومة
* في حالة الهرم بشرط وجود ثلاثية متعامدة وبشرط أبعاده معلومة
* في حالة رباعي الوجوه بشرط وجود ثلاثية متعامدة وبشرط أبعاده معلومة

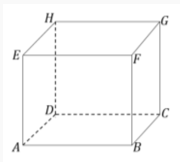
إيجاد إحداثيات النقاط بالاعتماد على معلم متجانس:

أولاً: المكعب: تمهيد:

* عندما يكون الشكل مكعب فهذا يعني وجود ثلاثية متعامدة أي وجود معلم متعامد
* عندما يكون طول حرف المكعب غير معلوم يمكننا أن نأخذ معلم متجانس باعتبار طول حرفه هو 1

نص السؤال:

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه a باختيار معلم متجانس مبدؤه A ، جد إحداثيات النقاط المشكلة لرؤوسه.



فكرة الحل:

لدينا المعلم المتجانس: $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD},\frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$

إيجاد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب تعطى وفق:

بالاعتماد على اسم المعلم نحدد النقاط:

$E(0,0,a)$	$A(0,0,0)$
$D(0,a,0)$	$B(a,0,0)$

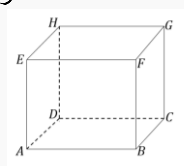
بالاعتماد على المستوي الأرضي نحدد إحداثيات النقطة C حيث يكون لها x و y وليس لها z وفق: $C(a,a,0)$

بالاعتماد على المستوي العلوي نحدد إحداثيات النقاط G و F و H وذلك بأخذ إحداثيات نقاطه من المستوي الأرضي مع تعديل حقل الـ z لأنّ له ارتفاع وفق:

$H(0,a,a)$	$F(a,0,a)$
$G(a,a,a)$	

نص السؤال:

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 3 باختيار معلم متجانس مبدؤه D ، جد إحداثيات النقاط المشكلة لرؤوسه.



فكرة الحل:

لدينا المعلم المتجانس: $\left(D;\frac{1}{3}\overrightarrow{DA},\frac{1}{3}\overrightarrow{DC},\frac{1}{3}\overrightarrow{DH}\right)$

إيجاد إحداثيات رؤوس المكعب تعطى وفق:

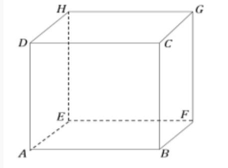
$H(0,0,3)$	$D(0,0,0)$
$E(3,0,3)$	$A(3,0,0)$
$G(0,3,3)$	$C(0,3,0)$
$F(3,3,3)$	$B(3,3,0)$

ثانياً: متوازي مستطيلات أبعاد معلومة:تمهيد:

* في حالة متوازي المستطيلات يوجد ثلاثية متعامدة
* في حالة متوازي المستطيلات الذي أبعاده معلومة يمكن وضع معلم متجانس.
* في حالة متوازي المستطيلات الذي أبعاده غير معلومة لا يمكن وضع معلم متجانس.

نص السؤال:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = a$ و $BF = b$ و $FG = c$ باختيار معلم متجانس مبدؤه A أوجد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب:



فكرة الحل:

لدينا المعلم المتجانس: $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{b}\overrightarrow{AE},\frac{1}{c}\overrightarrow{AD}\right)$

إيجاد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب تعطى وفق:

بالاعتماد على اسم المعلم نحدد النقاط:

$D(0,0,c)$	$A(0,0,0)$
$E(0,b,0)$	$B(a,0,0)$

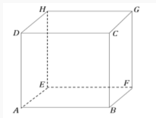
بالاعتماد على المستوي الأرضي نحدد إحداثيات النقطة F حيث يكون لها x و y وليس لها z وفق: $F(a,b,0)$

بالاعتماد على المستوي العلوي نحدد إحداثيات النقاط C و G و H وذلك بأخذ إحداثيات نقاطه من المستوي الأرضي مع تعديل حقل الـ z لأنّ له ارتفاع وفق:

$H(0,b,c)$	$C(a,0,c)$
$G(a,b,c)$	

نص السؤال:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 4$ و $BF = 3$ و $FG = 5$ باختيار معلم متجانس مبدؤه E أوجد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب:



فكرة الحل:

لدينا المعلم المتجانس:$\left(E;\frac{1}{3}\overrightarrow{EA},\frac{1}{4}\overrightarrow{EF},\frac{1}{5}\overrightarrow{EH}\right)$

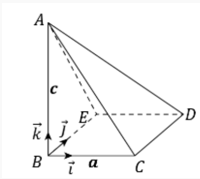
إيجاد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب تعطى وفق:

$H(0,0,5)$	$E(0,0,0)$
$D(3,0,5)$	$A(3,0,0)$
$G(0,4,5)$	$F(0,4,0)$
$C(3,4,5)$	$B(3,4,0)$

ثالثاً: هرم يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة:

نص السؤال:

$ABCDE$ هرم رأسه A وقاعدته $BCDE$ مربع طول ضلعه a ولدينا (AB) عمودي على القاعدة $(BCDE)$ و $BA = c$ باختيار معلم متجانس مناسب أوجد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم.



فكرة الحل:

لدينا المعلم المتجانس:

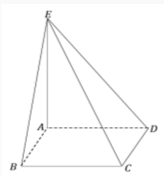
$$\left(B;\frac{1}{a}\overrightarrow{BC},\frac{1}{a}\overrightarrow{BE},\frac{1}{c}\overrightarrow{BA}\right)$$

انتبه: دائماً في هذه الحالة يكون المبدأ هو الحرف المشترك بين المستقيم العمودي على القاعدة والقاعدة ومنهُ تكون إحداثيات النقاط رؤوس الهرم تعطى وفق:

$A(0,0,c)$	$B(0,0,0)$
$E(0,a,0)$	$C(a,0,0)$
$D(a,a,0)$	

نص السؤال:

$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته $ABCD$ مستطيل فيه $BC = 4$ و $CD = 3$ ولدينا (AE) عمودي على القاعدة $(ABCD)$ و $AE = 4\sqrt{2}$ باختيار معلم متجانس مناسب أوجد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم.



فكرة الحل:

لدينا المعلم المتجانس:

$$\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{AE}\right)$$

إيجاد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم تعطى وفق:

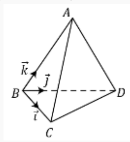
$E(0,0,4\sqrt{2})$	$A(0,0,0)$
$D(0,4,0)$	$B(3,0,0)$
$C(3,4,0)$	

رابعاً: رباعي وجوه يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة:تمهيد:

* رباعي الوجوه هو هرم قاعدته مثلث.
* في حال عدم معرفة الأطوال في حالة رباعي الوجوه فهذا يعني عدم إمكانية وضع معلم متجانس

نص السؤال:

$ABCD$ رباعي وجوه رأسه A وقاعدته BCD مثلث قائم في B وفيه: $BC = a$ و $BD = b$ ولدينا (AB) عمودي على القاعدة (BCD) ويتحقق $AB = c$ باختيار معلم متجانس مناسب أوجد إحداثيات النقاط رؤوس رباعي الوجوه



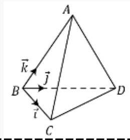
فكرة الحل:

لدينا المعلم المتجانس:$\left(B;\frac{1}{a}\overrightarrow{BC},\frac{1}{b}\overrightarrow{BD},\frac{1}{c}\overrightarrow{BA}\right)$

إحداثيات النقاط رؤوس رباعي الوجوه تعطى وفق:

$C(a,0,0)$	$B(0,0,0)$
$A(0,0,c)$	$D(0,b,0)$

$ABCD$ رباعي وجوه رأسه A وقاعدته BCD مثلث قائم في B وفيه:
$BC = 3$ و $BD = 4$ ولدينا (AB) عمودي على القاعدة (BCD) ويتحقق $AB = 4\sqrt{3}$ باختيار معلم متجانس مناسب أوجد إحداثيات النقاط رؤوس رباعي الوجوه



لدينا المعلم المتجانس:

$$\left(B;\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\frac{1}{4}\overrightarrow{BD},\frac{1}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{BA}\right)$$

إحداثيات النقاط رؤوس رباعي الوجوه تعطى وفق:

$C(3,0,0)$	$B(0,0,0)$
$A(0,0,4\sqrt{3})$	$D(0,4,0)$

نظيم شعاع (المسافة بين نقطتين):

الفكرة	نص السؤال	فكرة الحل
قانون نظيم شعاع	ليكن لدينا الشعاع $\vec{u}(x,y,z)$ ، جد $\lVert\vec{u}\rVert$	$\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
المسافة بين نقطتان	ليكن لدينا النقطتين: $A(x_A,y_A,z_A)$ ، $B(x_B,y_B,z_B)$ جد المسافة AB	$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
انتبه وتذكر	دستور نظيم شعاع ودستور المسافة بين نقطتين لا تطبق إلا في معلم متجانس قيمة نظيم شعاع والمسافة بين نقطتان هي مقدار موجب تماماً	

تطبيقات المسافة بين نقطتين في الفراغ:

التطبيق	نص السؤال	فكرة الحل
تحديد نوع المثلث	ليكن لدينا النقاط: $A(x_A,y_A,z_A)$ $B(x_B,y_B,z_B)$ $C(x_C,y_C,z_C)$ والمطلوب: حدد نوع المثلث ABC	* نوجد أطوال أضلاع المثلث ونحدد نوعه من حيث أطوال أضلاعه. * في حال كان المثلث متساوي الساقين أو مختلف الأضلاع فإننا نختبر كونه قائماً، وفق: - نربع طول الضلع الأطول. - نربع طولي الضلعين الباقيين ونجمعهما ونميز: ☝ الحالة الأولى: إذا تحقق: مجموع مربعي الضلعين الباقيين = مربع طول الضلع الأطول يكون المثلث قائم ووتره الضلع الأطول. ✌ الحالة الثانية: إذا تحقق: مجموع مربعي الضلعين الباقيين ≠ مربع طول الضلع الأطول فإن المثلث غير قائم
انتماء نقطة إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة	هل النقطة M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث: $A(x_A,y_A,z_A)$ $B(x_B,y_B,z_B)$ $C(x_C,y_C,z_C)$	* نوجد المسافة MA . * نوجد المسافة MB . * نميز حالتين: ☝ الحالة الأولى: إذا تحقق: $MA = MB$ فإن النقطة M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ ✌ الحالة الثانية: إذا تحقق: $MA \neq MB$ فإن النقطة M لا تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

التطبيق	نص السؤال	فكرة الحل
انتماء نقطة إلى كرة	النمط الأول: هل النقطة M تنتمي إلى الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها R	* نوجد المسافة بين النقطة ومركز الكرة ولتكن مثلاً $M\Omega$ * نميز حالتين: ☝ الحالة الأولى: إذا كان $R = M\Omega$ فالنقطة M تنتمي إلى الكرة. ✌ الحالة الثانية: إذا كان $R \neq M\Omega$ فالنقطة M لا تنتمي إلى الكرة.
	النمط الثاني: هل النقاط A و B و C و D و E تنتمي إلى الكرة التي مركزها Ω	* نوجد المسافات بين جميع النقاط ومركز الكرة. * نميز حالتين: ☝ الحالة الأولى: إذا كانت جميع المسافات السابقة متساوية فإن جميع النقاط تقع على كرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها هو المسافة بين المركز وإحدى النقاط. ✌ الحالة الثانية: إذا كانت جميع المسافات غير متساوية فالنقاط لا تقع على كرة واحدة.

إحداثيات نقطة تقع على أحد المحاور الإحداثية ومتساوية البعد عن نقطتين	جد علة محور (الفواصل-التراتيب-الرواقم) نقطة C متساوية البعد عن A و B	* نفرض النقطة المطلوب وفق: - إذا كانت واقعة على محور الفواصل: $C(x,0,0)$ - إذا كانت واقعة على محور التراتيب: $C(0,y,0)$ - إذا كانت واقعة على محور الرواقم: $C(0,0,z)$ * بما أنّ C متساوية البعد عن A و B فإنّه يتحقق: $CA = CB \dots (*)$ * نعوض في العلاقة $(*)$ ونصلح وصولاً للمطلوب.

تمرين: نتأمل النقاط:

$A(1,1,\sqrt{2})$	$B(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$

و C نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ O أثبت أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين، بما أنّ C نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ O فإن إحداثيات النقطة C عكس إحداثيات النقطة A

$$C(-1,-1,-\sqrt{2})$$

* $\overrightarrow{AB}(\sqrt{2}-1,-\sqrt{2}-1,-\sqrt{2})$

$$AB = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2,(-\sqrt{2}-1)^2,(-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8}$$

* $\overrightarrow{AC}(-2,-2,-2\sqrt{2})$

$$AC = \sqrt{4+4+8} = \sqrt{16} = 4$$

* $\overrightarrow{BC}(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$$BC = \sqrt{(-1-\sqrt{2})^2,(-1+\sqrt{2})^2,(-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8}$$

ومنهُ المثلث (ABC) متساوي الساقين.

نختبر كونه قائماً وفق:

$$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$$
$$16 = 8 + 8$$
$$16 = 16$$

إذاً المثلث (ABC) قائم في C ومتساوي الساقين.

تمرين: لدينا النقطتان:

$A(5,2,-1)$	$B(3,0,1)$

بين أيّ النقاط $C(-2,5,-2)$ و $E(3,2,1)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

اختبار انتماء النقطة C :

إيجاد المسافة CA وفق:

* $\overrightarrow{CA}(7,-3,1)$

$\rightarrow CA = \sqrt{49+9+1} = \sqrt{59}$

إيجاد المسافة CB وفق:

* $\overrightarrow{CB}(5,-5,3)$

$\rightarrow CA = \sqrt{25+25+9} = \sqrt{59}$

نلاحظ أنّ $CA = CB$ ومنهُ النقطة C تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

اختبار انتماء النقطة E :

إيجاد المسافة EA وفق:

* $\overrightarrow{EA}(2,0,-2)$

$\rightarrow EA = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8}$

إيجاد المسافة EB وفق:

* $\overrightarrow{EB}(0,-2,0)$

$\rightarrow EA = \sqrt{0+4+0} = 2$

نلاحظ أنّ: $EA \neq EB$ ومنهُ النقطة E لا تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

تمرين:

لدينا كرة مركزها $A(2,3,-1)$ ونصف قطرها $r = 5$ هل النقطة $B(2,8,-1)$ تنتمي إلى الكرة السابقة؟

نوجد المسافة AB وفق:

* $\overrightarrow{AB}(0,5,0)$

$\rightarrow AB = \sqrt{0+25+0} = 5$

نلاحظ أنّ $AB = r$ ومنهُ النقطة B تنتمي إلى الكرة التي مركزها A ونصف قطرها $r = 5$

تمرين: نتأمل النقاط:

$A(2,3,-1)$	$B(2,8,-1)$
$C(7,3,-1)$	$D(-1,3,3)$
$E(5,3,3)$	

أثبت أنّ النقاط B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها A .

إيجاد المسافة AB وفق:

* $\overrightarrow{AB}(0,5,0)$

$\rightarrow AB = \sqrt{0+25+0} = 5$

إيجاد المسافة AC وفق:

* $\overrightarrow{AC}(5,0,0)$

$\rightarrow AC = \sqrt{25+0+0} = 5$

إيجاد المسافة AD وفق:

* $\overrightarrow{AD}(-3,0,4)$

$\rightarrow AD = \sqrt{9+0+16} = 5$

إيجاد المسافة AE وفق:

* $\overrightarrow{AE}(3,0,4)$

$\rightarrow AE = \sqrt{9+0+16} = 5$

نلاحظ أنّ:

$$AB = AC = AD = AE = 5$$

إذاً النقاط B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها A ونصف قطرها $r = 5$

تمرين:نتأمل في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين:

$A(1,0,1)$	$B(2,-2,3)$

أوجد نقطة تنتمي لمحور الفواصل متساوية البعد عن A و B .

لتكن النقطة C تنتمي لمحور الفواصل $C(x,0,0)$ وبما أنّ C متساوية البعد عن A و B فإنّه يتحقق: $CA = CB$

$$\sqrt{(1-x)^2+1} = \sqrt{(2-x)^2+4+9}$$

نربع الطرفين:

$$(1-x)^2+1 = (2-x)^2+13$$
$$1-2x+x^2+1 = 4-4x+x^2+13$$
$$x^2-2x+2 = x^2-4x+17$$
$$-2x+4x = 17-2$$
$$2x = 15$$

$x = \frac{15}{2}$

إذاً النقطة $C\left(\frac{15}{2}, 0,0\right)$ تنتمي لمحور الفواصل ومتساوية البعد عن A و B .

تمرين:

ليكن α عدداً حقيقياً ولنتأمل النقاط:

$A(3,1,-3)$	$B(-1,5,-3)$
$C(-1,1,\alpha)$	

أثبت أنّ المثلث (ABC) متساوي الساقين أياً كان α ، أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع؟

إثبات أنّ المثلث (ABC) متساوي الساقين:

لدينا:

* $\overrightarrow{AB}(-4,4,0)$
  $\rightarrow AB = \sqrt{16+16+0} = \sqrt{32}$
* $\overrightarrow{AC}(-4,0,\alpha+3)$
  $\rightarrow AC = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$
* $\overrightarrow{BC}(0,-4,\alpha+3)$
  $\rightarrow BC = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$

ومنهُ المثلث (ABC) متساوي الساقين.

أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع؟

حتى يكون المثلث (ABC) متساوي الأضلاع يجب أن يتحقق: $AC = AB$

$$\sqrt{16+(\alpha+3)^2} = \sqrt{32}$$

نربع الطرفين:

$$16+(\alpha+3)^2 = 32$$
$$16+\alpha^2+6\alpha+9 = 32$$
$$\alpha^2+6\alpha-7 = 0$$
$$(\alpha+7)(\alpha-1) = 0$$

إما $\alpha = -7$

أو $\alpha = 1$

ومنهُ حتى يكون المثلث (ABC) متساوي الأضلاع يجب أن تكون: $\alpha = -7$ أو $\alpha = 1$

الارتباط الخطي لشعاعين:

مبرهنة	يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً إذا وفقط إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي أي إذا وجد عدد حقيقي k يحقق: $\vec{u} = k\vec{v}$ أو إذا وجد عدد حقيقي k' يحقق: $\vec{v} = k'\vec{u}$
المعنى الهندسي للارتباط الخطي لشعاعين	يكون لهما نفس المنحى توازي انطباق
قراءة علاقة	إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{CD}$ نفهم أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{AC}$ نفهم أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطياً والنقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.
الفائدة من مفهوم الارتباط الخطي لشعاعين	معرفة توازي مستقيمان أو نفي ذلك معرف وقوع ثلاثة نقاط على استقامة واحدة أو نفي ذلك
كيفية اختبار الارتباط الخطي لشعاعين	لإختبار الارتباط الخطي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فإننا نميز الحالات: الحالة الأولى: إذا كانت مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ جميعها غير صفرية فإننا نختبر تناسب المركبات ونميز: المركبات متناسبة: يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً. المركبات غير متناسبة: يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً. الحالة الثانية: إذا كانت مركبات أحد الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أو كلاهما تحوي أصفار فإننا نميز:

أولاً	ثانياً	ثالثاً
مركبات كل شعاع تحوي صفراً واحداً فقط والأصفار فوق بعضها فإننا نختبر تناسب المركبات المتبقية ونميز: * المركبات متناسبة إذاً الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً ويكون التعليل بإستخدام المبرهنة * المركبات غير متناسبة إذاً الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً ويكون التعليل بإستخدام المبرهنة	الأصفار ليست فوق بعضها إذاً الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً. ويكون التعليل بإستخدام المبرهنة	مركبات كل شعاع تحوي صفرين والأصفار فوق بعصها إذاً: الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً. ويكون التعليل بإستخدام المبرهنة.

أنماط التمارين:

النمط	نص السؤال	فكرة الحل
الأول	* هل النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة * هل النقطة A تقع على المستقيم (BC) ؟	* نشكل $\overrightarrow{AB}$ * نشكل $\overrightarrow{AC}$ * نختبر الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ * ونميز: ☝ الحالة الأولى: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً إذاً النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة ✌ الحالة الثانية: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً إذاً النقاط A و B و C ليست تقع على استقامة واحدة
الثاني	هل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان؟	* نشكل $\overrightarrow{AB}$ * نشكل $\overrightarrow{CD}$ * نختبر الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ * ونميز: ☝ الحالة الأولى: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً إذاً (AB) و (CD) متوازيان ✌ الحالة الثانية: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطان خطياً إذاً (AB) و (CD) غير متوازيان
الثالث	هل النقاط A و B و C تشكّل مستوي؟	* نشكل $\overrightarrow{AB}$ * نشكل $\overrightarrow{AC}$ * نختبر الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ * ونميز: ☝ الحالة الأولى: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً إذاً النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة فهي لا تشكل مستوي. ✌ الحالة الثانية: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً إذاً النقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي.

التمرين الأول:

في كل من الحالات الآتية هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خيطاً

الحالة الأولى:

$\vec{v}(6,-2,4)$	$\vec{u}(3,-1,2)$

الحل:

نلحظ أنّ المركبات متناسبة ومنه الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً.

الحالة الثانية:

$\vec{v}(6,-2,5)$	$\vec{u}(3,-1,2)$

الحل:

نلحظ أنّ: $\frac{2}{5} \neq \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6}$ أيّ أنّ المركبات غير متناسبة ومنهُ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.

الحالة الثالثة:

$\vec{v}(6,0,-2)$	$\vec{u}(3,0,-1)$

الحل:

نلحظ أنّ: $\frac{-1}{-2} = \frac{3}{6}$ أيّ أنّ المركبات متناسبة ومنهُ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً.

الحالة الرابعة:

$\vec{v}(0,5,2)$	$\vec{u}(0,3,1)$

الحل:

نلحظ أنّ: $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{5}$ أيّ أنّ المركبات غير متناسبة ومنهُ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.

الحالة الخامسة:

$\vec{v}(6,1,0)$	$\vec{u}(3,0,-1)$

الحل:نلحظ أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً لأنّه لم ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد.

الحالة السادسة:

$\vec{v}(0,0,-5)$	$\vec{u}(0,0,-3)$

الحل:نلحظ أنّ: $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{v}$ أيّ أنّ $\vec{u}$ ينتج عن $\vec{v}$ بعد ضربه بعدد ومنه الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً.

التمرين الثاني:

في كل من الحالات بيّن هل النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة؟

الحالة الأولى:

$C(2,0,-3)$	$B(0,2,4)$	$A(3,-1,2)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}(-3,3,2) \quad , \quad \overrightarrow{AC}(-1,1,-5)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي النقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة وبالتالي النقاط A و B و C تشكل مستوي.

الحالة الثانية:

$C(0,-1,7)$	$B(-2,0,5)$	$A(-4,1,3)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}(2,-1,2) \quad , \quad \overrightarrow{AC}(4,-2,4)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطياً وبالتالي: النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة

الحالة الثالثة:

$A(1,-1,0)$	$B(1,-1,4)$	$C(1,-1,-3)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}(0,0,4)\ ,\ \overrightarrow{AC}(0,0,-3)$$

نلاحظ أنّ: $\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ وبالتالي الشعاعين مرتبطين خطياً وبالتالي النقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة

التمرين الثالث:

هل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان:

الحالة الأولى:

$A(3,5,2)$	$B(2,-1,3)$
$C(1,-2,0)$	$D(-1,-14,2)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-6,1)\ ,\ \overrightarrow{CD}(-2,-12,2)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$ إذاً الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً وبالتالي المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان.

الحالة الثانية:

$A(3,0,-1)$	$B(-2,3,2)$
$C(3,5,2)$	$D(0,-2,2)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}(-5,3,3)\ ,\ \overrightarrow{CD}(-3,-7,0)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطان خطياً وبالتالي المستقيمان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير متوازيان.

التمرين الرابع:

هل النقاط:

$A(1,-1,3)$	$B(1,-1,4)$	$C(1,-1,0)$

تعيين مستوي؟

$$\overrightarrow{AB}(0,0,1)\ ,\ \overrightarrow{AC}(0,0,-3)$$

نلاحظ أنّ المركبات متناسبة وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً وبالتالي النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة فهي لا تشكل مستوي.

التمرين الخامس:

أيمكن تعيين a و b لتقع النقاط:

$A(2,3,0)$	$B(3,2,1)$	$M(a,b,2)$

على استقامة واحدة؟

الحل:

حتى تكون النقاط A و B و M على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطياً ويتحقق ذلك إذا وُجد عدد حقيقي λ يحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$$

حيث:

$$\overrightarrow{AM}(a-2,b-3,2)\ ,\ \overrightarrow{AB}(1,-1,1)$$

نعوض في العلاقة السابقة وفق:

$$\begin{pmatrix}a-2\\b-3\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a-2\\b-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\\\lambda\end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$\begin{cases}a-2=\lambda & \dots(1)\\ b-3=-\lambda & \dots(2)\\ 2=\lambda & \dots(3)\end{cases}$$

وهذه جملة ثلاثة معادلات بثلاثة مجاهيل ونحلها وفق:

من (3) نجد أنّ:

$$\lambda=2$$

نعوض في (1) وفق:

$$a-2=2\rightarrow a=4$$

نعوض في (2) وفق:

$$b-3=-2\rightarrow b=1$$

إذاً:

$$\Longrightarrow M(4,1,2)$$

التمرين السادس:

هل يمكن تعيين a ليكون الشعاعين $\vec{u}(2,a,5)$ و $\vec{v}(1,-2,a)$ مرتبطين خطياً؟

الحل:

يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً إذا وُجد عدد حقيقي λ يحقق العلاقة:

$$\vec{u}=\lambda\vec{v}$$

$$\begin{pmatrix}2\\a\\5\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\a\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\-2\lambda\\\lambda a\end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}2=\lambda & \dots(1)\\ a=-2\lambda & \dots(2)\\ 5=\lambda a & \dots(3)\end{cases}$$

وهذه جملة ثلاثة معادلات بمجهولين نحلها وفق:

الخطوة الأولى: نأخذ جملة معادلتين ولتكن:

$$\begin{cases}2=\lambda & \dots(1)\\ a=-2\lambda & \dots(2)\end{cases}$$

وهذه جملة معادلتين بمجهولين نحلها وفق:

من (1) نجد أنّ $\lambda=2$

نعوض في (2) وفق:

$$a=-2\lambda$$

$$a=-2(2)\rightarrow a=-4$$

الخطوة الثانية:

نتحقق من صحة الحل السابق في المعادلة المتبقية:

نتحقق في المعادلة (3) وفق:

$$5=\lambda a$$

$$5=(2)(-4)$$

$$5\neq-8$$

إذاً غير محققة والمعادلة مستحيلة الحل.

إذاً لا يمكن تعيين a ليكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً.

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

تعريف	نقول عن الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد نقطة O تجعل النقاط O, A, B, C المعرفة وفق: $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ و $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ تقع في مستو واحد.
مبرهنة	$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاثة أشعة نفترض أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً عندئذٍ تكون الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان a و b يحققان: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$
المعنى الهندسي للارتباط الخطي لثلاثة أشعة	إذا كان لدينا ثلاثة أشعة مرتبطة خطياً فهذا يعني أن أحد الأشعة الثلاثة يوازي المستوي المنشأ على الشعاعين الباقيين
قراءة علاقة	إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{DE}$ فهذا يعني أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{DE}$ مرتبطة خطياً فالمستقيم (AB) يوازي المستوي (CDE) إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$ فهذا يعني أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً إذاً النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد
الفائدة من مفهوم الارتباط الخطي لثلاثة أشعة	إثبات توازي مستقيم ومستوي إثبات وقوع أربعة نقاط في مستو واحد. إثبات تقاطع مستقيمين.
كيفية اختبار الارتباط الخطي لشعاعين	* نحدد منها شعاعين غير مرتبطين خطياً ولتكن فرضاً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ * نبحث عن عددين حقيقيين a و b يحققان العلاقة $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ * ونميز: ☝ الحالة الأولى: وجود عددان a و b يحققان العلاقة: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ إذاً الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً. ✌ الحالة الثانية: عدم وجود عددان a و b يحققان العلاقة: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ إذاً الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مرتبطة خطياً.

أنماط التمارين:

النمط	نص السؤال	فكرة الحل
الأول	هل النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد؟	* نأخذ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ * نختبر الارتباط الخطي للأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ (كما ورد معنا سابقاً) * ونميز: ☝ الحالة الأولى: إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً إذاً النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد ✌ الحالة الثانية: إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطة خطياً إذاً النقاط A و B و C و D لا تقع في مستو واحد
الثاني	هل المستقيم (AB) يوازي المستوي (CDE)	* نأخذ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ * نختبر الارتباط الخطي للأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ (كما ورد معنا سابقاً) * ونميز: ☝ الحالة الأولى: إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً إذاً المستقيم (AB) يوازي المتسوي (CDE) ✌ الحالة الثانية: إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ غير مرتبطة خطياً إذاً المستقيم (AB) لا يوازي المتسوي (CDE)
الثالث	لدينا المستقيم d المار من A وشعاع توجيهه $\vec{u}$ ولدينا المستقيم d_2 المار من B وشعاع توجيهه $\vec{v}$ والمطلوب هو إثبات أن المستقيمان d_1 و d_2 متقاطعان	* نثبت أن المستقيمان d_1 و d_2 غير متوازيان وذلك بإثبات أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً * نثبت أن d_1 و d_2 يقعان في مستو واحد وذلك بإثبات أنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً وبالتالي يكون d_1 و d_2 متقاطعان. ملاحظة: في حال تقاطع مستقيمان فإن تقاطعهما هو نقطة

التمرين الأول:

نتأمل في المعلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$A(2,0,1)$	$B(1,-2,1)$	$C(5,5,0)$
$D(-3,-5,6)$	$E(3,1,2)$	

أثبت انتماء النقاط A و B و C و D إلى مستوٍ واحد P وتبين إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P .

الحل:

إثبات انتماء النقاط A و B و C و D إلى مستوٍ واحد P :

لدينا:

$\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$	$\overrightarrow{AC}(3,5,-1)$
$\overrightarrow{AD}(-5,-5,5)$	

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن المركبات غير متناسبة.

نبحث عن عددين a و b يحققان:

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+3b\\-2a+5b\\-b\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\begin{cases}-5=-a+3b & \dots(1)\\ -5=-2a+5b & \dots(2)\\ 5=-b & \dots(3)\end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases}-5=-2a+5b & \dots(2)\\ 5=-b & \dots(3)\end{cases}$$

من (3) نجد أنّ:

$$b=-5$$

نعوض في (2) فنجد أنّ:

$$-5=-2a-25\to a=-10$$

نتحقق في (1) وفق:

$$-5=-2(-10)-15$$

$$-5=-5$$

محققة

إذاً للجملة حل وحيد ،

ويوجد عددين $a=-10$ و $b=-5$ يحققان:

$$\overrightarrow{AD}=-10\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}$$

ومنهُ الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً ومنهُ النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد P

تبيّن أنّ النقطة E تنتمي إلى المستوي P :

يقصد:

هل النقاط A و B و C و E تقع في مستوٍ واحد

الحل:

$\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$	$\overrightarrow{AC}(3,5,-1)$
$\overrightarrow{AE}(1,1,1)$	

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن المركبات غير متناسبة ومنهُ نبحث عن عددين a و b يحققان العلاقة.

$$\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+3b\\-2a+5b\\-b\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\begin{cases}1=-a+3b & \dots(1)\\ 1=-2a+5b & \dots(2)\\ 1=-b & \dots(3)\end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases}1=-2a+5b & \dots(2)\\ 1=-b & \dots(3)\end{cases}$$

من (3) نجد أنّ:

$$b=-1$$

نعوض في (2) فنجد أنّ:

$$1=-2a-5\to a=-3$$

نتحقق في (1) وفق:

$$1=3-3$$

$$1\neq 0$$

غير محققة

وهذا غير ممكن ، إذاً لا يوجد عدين a و b يحققان العلاقة $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ ومنهُ الأشعة غير مرتبطة خطياً ومنهُ النقاط A و B و C و E لا تقع في مستوٍ واحد ، ومنهُ النقطة E لا تنتمي إلى المستوي P

التمرين الثاني:

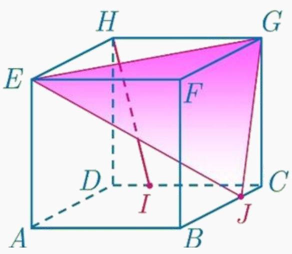
نتأمل المكعب $ABCDEFGH$ النقطة I من الحرف [CD] تحقق المساواة:

$$\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

والنقطة J من $[BC]$ تحقق المساواة:

$$\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

أثبت أن المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ)



الحل:

لدينا المعلم المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ إذاً:

$A(0,0,0)$	$E(0,0,1)$
$B(1,0,0)$	$F(1,0,1)$
$D(0,1,0)$	$H(0,1,1)$
$C(1,1,0)$	$G(1,1,1)$

إيجاد إحداثيات النقطة I وفق:

لتكن $I(x,y,z)$:

$$\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y-1\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y-1\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\0\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$x=\frac{1}{4}\,,y=1\,,z=0$$

إذاً:

$$\Rightarrow I\left(\frac{1}{4},1,0\right)$$

إيجاد إحداثيات النقطة J وفق:
لتكن $J(x,y,z)$:
لدينا:

$$\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{4}\\0\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$x=1\,,y=\frac{3}{4}\,,z=0$$

$$\Rightarrow J\left(1,\frac{3}{4},0\right)$$

فكرة الحل:

يكون المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ) إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً.

$$\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{4},0,-1\right),\overrightarrow{EG}(1,1,0),\overrightarrow{EJ}\left(1,\frac{3}{4},-1\right)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطة خطياً لأن المركبات غير متناسبة ومنهُ نبحث عن عددين a و b يحققان:

$$\overrightarrow{HI}=a\overrightarrow{EG}+b\overrightarrow{EJ}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\-1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{4}\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\a+\frac{3}{4}b\\-b\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\begin{cases}\frac{1}{4}=a+b & ...(1)\\0=a+\frac{3}{4}b & ...(2)\\-1=-b & ...(3)\end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases}0=a+\frac{3}{4}b & ...(2)\\-1=-b & ...(3)\end{cases}$$

من (3) نجد أنّ:

$$b=1$$

نعوض في (2) فنجد أنّ:

$$0=a+\frac{3}{4}\rightarrow a=-\frac{3}{4}$$

نتحقق في (1) وفق:

$$\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}+$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

محققة

إذاً للجملة حل وحيد إذاً يوجد عددين $a=-\frac{3}{4}$ و $b=1$ يحققان العلاقة:

$$\overrightarrow{HI}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EJ}$$

إذاً الأشعة $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً إذاً المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ) .

التمرين الثالث:

في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$ والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$ ولدينا d هو المستقيم المار بالنقطة A والموجه بـ $\vec{u}$
ولدينا d' هو المستقيم المار بالنقطة B والموجه بـ $\vec{v}$ والمطلوب أثبت أن المستقيمان d و d' متقاطعان ثم عين I نقطة تقاطعهما.

الحل:

الخطوة الأولى:

نلاحظ أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي إذاً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً إذاً المستقيان d و d' غير متوازيان.

الخطوة الثانية:

إثبات أنّ d و d' يقعان في مستو واحد:

من أجل ذلك فإننا نثبت أنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً.

$$\vec{u}(1,0,-2)\,,\vec{v}(2,1,-3)\,,\overrightarrow{AB}(0,-2,-2)$$

لدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً ومنهُ نبحث عن عددين a و b يحققان العلاقة الآتية:

$$\overrightarrow{AB}=a\vec{u}+b\vec{v}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\\-2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2b\\b\\-3b\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\begin{cases}0=a+2b & ...(1)\\-2=b & ...(2)\\-2=-2a-3b & ...(3)\end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases}0=a+2b & ...(1)\\-2=b & ...(2)\end{cases}$$

من (2) نجد أنّ:

$$b=-2$$

نعوض في (1) فنجد أنّ:

$$0=a-4\rightarrow a=4$$

نتحقق في (3) وفق:

$$-2=-2(4)-3(-2)$$

$$-2=-8+6$$

$$-2=-2$$

محققة

إذاً للجملة حل وحيد إذاً يوجد عددين $a=4$ و $b=-2$ يحققان العلاقة:

$$\overrightarrow{AB}=4\vec{u}-2\vec{v}$$

إذاً الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطة خطياً وبالتالي المستقيمان d و d' يقعان في مستو واحد ، مما سبق نستنتج أن d و d' متقاطعان.

إيجاد إحداثيات I نقطة تقاطع d و d' وفق:

لتكن: $I(x,y,z)$

وبما أنّ I نقطة تقاطع المستقيمان d و d' إذاً :

* $I\in d$ وبالتالي $\overrightarrow{AI}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطياً
* $I\in d'$ وبالتالي $\overrightarrow{BI}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً

ولدينا:

$$\overrightarrow{AB}=4\vec{u}-2\vec{v}$$

ولدينا حسب علاقة شال:

$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=4\vec{u}-2\vec{v}$$
$$\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=4\vec{u}-2\vec{v}$$

بالمطابقة:

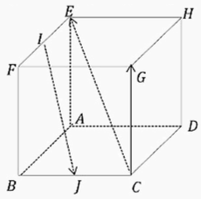
$$\overrightarrow{AI}=4\vec{u}$$
$$\begin{pmatrix}x-3\\y+1\\z-1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x-3\\y+1\\z-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-8\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$x-3=4\rightarrow x=7$$
$$y+1=0\rightarrow y=-1$$
$$z-1=-8\rightarrow z=-7$$

إذاً: $\Longrightarrow I(7,-1,-7)$

التمرين الرابع:



في الشكل المجاور مكعب و I و J منتصفات $[EF]$ و $[BC]$ والمطلوب:

1. أثبت أن:
$$2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$
2. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً

الحل: الطلب الأول:

$$2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$

$$l_1=2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})$$
$$=2\overrightarrow{CJ}+2\overrightarrow{IE}$$
$$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$$
$$=\overrightarrow{CA}$$
$$l_2=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$
$$=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{GC}$$
$$=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CE}$$
$$=\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{CA}$$

إذاً: $l_1=l_2$

الطلب الثاني:

لدينا العلاقة:

$$2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$
$$2(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$
$$2(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{IJ})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$
$$2\overrightarrow{CE}+2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$
$$2\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$
$$\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$$

ومنه:

الأشعة $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CG}$ مرتبطة خطياً.

ماذا تستنتج؟؟

المستقيم (IJ) يوازي المستوي (CEG)

مراكز الأبعاد المتناسبة:

عدد النقاط / الفكرة	لنقطتين	لثلاثة نقاط
مبرهنة الوجود والتعريف	لدينا النّقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنّقطتين (A,α) و (B,β) فإنّ: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta\neq 0$	لدينا النّقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) فإنّ: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$
تجانس مركز الأبعاد (k عدد حقيقي غير معدوم)	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) فإنّ G تكون مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,K\alpha)$ و $(B,k\beta)$ حيث k عدد حقيقي	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) فإنّ G مركز الأبعاد المتناسبة لـ: $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$ و $(C,k\gamma)$ حيث K عدد حقيقي
تساوي الأثقال	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,a) و (B,a) فهذا يعني أنّ G هي منتصف $[AB]$	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,a) و (B,a) و (C,a) تكون G مركز ثقل المثلث (ABC)
إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة	لدينا النّقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) فإنّ إحداثيّات النّقطة G هي: $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$ $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$	لدينا النّقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) فإنّ إحداثيّات النّقطة G هي: $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$
علاقة تفيد في الإنشاء	لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β) فإنّ: $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$	لدينا النّقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) فإنّ: $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$
مبرهنة	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) ولدينا M نقطة من الفراغ فإنّه يتحقّق: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) ولدينا النقطة M من الفراغ فإنّه يتحقّق: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

الفكرة / عدد النقاط	لأربعة نقاط
مبرهنة الوجود والتعريف	لدينا النّقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) فإنّ: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ بحيث: $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$
تجانس مركز الأبعاد (k عدد حقيقي غير معدوم)	لدينا النّقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) فإنّ G مركز الأبعاد المتناسبة لـ: $(A,k\alpha)$ و$(B,k\beta)$ و$(C,k\gamma)$ و$(D,k\delta)$ حيث k عدد حقيقي
تساوي الأثقال	لدينا النّقطةG مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,a) و(B,a) و(C,a) و(D,a) فهذا يعني أنّ النّقطة G مركز ثقل رباعي الوجوه $(ABCD)$
إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة	ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنّقاط (A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) فإنّ إحداثيّات النّقطة G تعطى وفق: $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$
علاقة تفيد في الإنشاء	
مبرهنة	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) ولدينا النقطةM من الفراغ فإنّه يتحقّق: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\gamma\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$

	لثلاثة نقاط	لأربعة نقاط
الخاصة التجميعية	اتجاه اللم	
	* لدينا النّقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) * لدينا النّقطة I مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و (B,β) ☜ فإنّه استناداً إلى الخاصّة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ$(I,\alpha+\beta)$ و (C,γ)	* ليكن لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) * لدينا I مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α)و(B,β) * لدينا J مركز الأبعاد المتناسبة لـ(C,γ)و(D,δ) ☜ فإنّه استناداً إلى الخاصّة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,\alpha+\beta)$ و $(J,\gamma+\delta)$
	اتجاه الفك	
	* لدينا النّقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,\alpha+\beta)$ و (C,γ) * لدينا النّقطة I مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β). ☜ فإنّه استناداً إلى الخاصّة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ)	ليكن لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ$(I,\alpha+\beta)$ و$(J,\gamma+\delta)$. لدينا I مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β). لدينا J مركز الأبعاد المتناسبة لـ(C,γ) و(D,δ) ← فإنّه استناداً إلى الخاصّة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ)

ملاحظة:يتم اختيار اتجاه الفك أو اللم حسب حاجة السؤال.

أنماط التمارين:

النمط الأول	النمط الثاني	النمط الثالث
إيجاد إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة: يتم وفق تطبيق القانون المناسب.	قراءة علاقة: يتم بالاعتماد على علاقة الشّعاع الصّفري أو حسب علاقة الإنشاء.	إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة (إثبات أنّ نقطة تقع على مستقيم): ☜ الخطوات: * بالاعتماد على نص السؤال نضع جميع المعطيات. * نصلح من أجل إثبات أن إحدى النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الباقيتين. * فتكون النّقاط الثّلاثة على استقامة واحدة.

<table>
<tr><th>النمط الرابع</th><th>النمط الخامس</th></tr>
<tr><td>إثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد
(باستخدام مراكز الأبعاد المتناسبة):
☜ الخطوات:
* بالاعتماد على نص السؤال نضع جميع المعطيات.
* نصلح من أجل إثبات أن إحدى النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثلاث المتبقية.
* فتكون النقاط الأربعة في مستوٍ واحد.</td><td>إثبات تلاقي مستقيمات:
☜ الخطوات:
* بالاعتماد على نص السؤال نضع جميع المعطيات.
* نصلح من أجل إثبات وجود نقطة مشتركة بين المستقيمات وبالتالي نثبت تلاقي المستقيمات.</td></tr>
<tr><th>النمط السادس</th><th>النمط السابع</th></tr>
<tr><td>توضيع مراكز الأبعاد المتناسبة في شكل:
* بالاستفادة من المعطيات
نضع علاقة الإنشاء المناسبة.
* بالاعتماد على علاقة الإنشاء
نوضّع النقطة مركز الأبعاد المتناسبة في شكل.
➢ تنويه:
من الممكن أن نستخدم الخاصة التجميعية</td><td>تعيين الثوابت:
☜ الخطوات:
* نضع علاقة تحوي ثوابت وعلاقة لا تحوي ثوابت وذلك بالاعتماد على معطيات المسألة.
* نصلح من أجل أن نجعل العلاقتين متشابهتين.
* بالمقارنة نحصل على المطلوب.</td></tr>
</table>

تمرين 1 :

لتكن لدينا النقاط:

$A(2,-1,3)$	$B(0,1,2)$
$C(-1,1,0)$	$D(-2,1,-3)$

أوجد إحداثيات النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(A,1)$	$(B,2)$	$(C,-1)$

الحل:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

$$x_G=\frac{(1)(2)+(2)(0)+(-1)(-1)+(2)(-2)}{1+2-1+2}$$

$$x_G=\frac{2+0+1-4}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

$$y_G=\frac{(1)(-1)+(2)(1)+(-1)(1)+(2)(1)}{1+2-1+2}$$

$$y_G=\frac{-1+2-1+2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

$$z_G=\frac{(1)(3)+(2)(2)+(-1)(0)+(2)(-3)}{1+2-1+2}$$

$$z_G=\frac{3+4+0-6}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\to G\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

تمرين 2 :

اقرأ العلاقات الآتية:

$$3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

تعني أنّ A مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(D,1)$	$(C,-2)$	$(B,3)$

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DM}=\vec{0}$$

تعني أنّ D مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(A,1)$	$(B,1)$	$(M,-3)$

$$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

تعني أنّ B مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(A,2)$	$(D,1)$

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{a}\overrightarrow{BA}$$

تعني أنّ D مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(B,a-1)$	$(A,1)$

$$\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AD}$$

تعني أنّ C مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(A,-4)$	$(D,5)$

$$\overrightarrow{CA}=a\overrightarrow{CB}$$

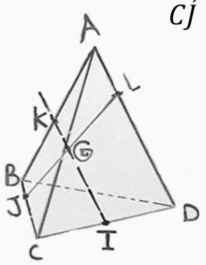
تعني أنّ A مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(C,1-a)$	(B,a)

تمرين 3 :

$ABCD$ رباعي وجوه فيه K منتصف $[AB]$ و I منتصف $[CD]$ و L تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ و J تحقق العلاقة: $\overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ وأخيراً G هي منتصف $[JL]$

أثبت أنّ G و I و K تقع على استقامة واحدة.



الحل:

لدينا:

* النقطة J تحقق العلاقة: $\overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

إذاً J مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(C,1)$	$(B,3)$

* النقطة L تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

إذاً L مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,3)$	$(D,1)$

* النقطة K منتصف $[AB]$:

إذاً K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,3)$	$(B,3)$

* النقطة I منتصف $[CD]$:

إذاً I مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,1)$	$(C,1)$

* النقطة G منتصف $[JL]$:

إذاً G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(L,4)$	$(J,4)$

ومنهُ استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,1)$	$(C,1)$	$(B,3)$	$(A,3)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(I,2)$	$(K,6)$

ومنهُ النقاط G و I و K
تقع على استقامة واحدة.

تمرين 4 :

$ABCD$ رباعي وجوه تتحقق فيه:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$ أثبت أنّ النقاط: M و B و C و D تقع في مستو واحد.

الحل:

لدينا:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{DA}=0$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\left(\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

إذاً:النقطة M مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(B,1)$	$(C,1)$	$(D,1)$

ومنهُ M و B و C و D
تقع في مستو واحد.

تمرين 5 :

$ABCDEFGH$ مكعب

أثبت أنّ النقطة K المعرفة بالعلاقة:

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$$

تقع في المستوي (BCG) .

الحل:

نص السؤال:

أثبت أنّ النقطة K تقع في المستوي (BCG)

يقصد:

أثبت أنّ النقاط K و B و C و G تقع في مستو واحد.

لدينا:

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$$
$$2\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AG}=0$$
$$2\overrightarrow{AK}-\left(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}\right)-\left(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KA}\right)-3\left(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KG}\right)=0$$
$$2\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{AK}-3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$
$$-\overrightarrow{AK}-2\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KC}-\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$
$$-\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}-3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$

ومنهُ:

النقطة K مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(B,-1)$	$(C,2)$	$(G,-3)$

إذاً:

النقاط K و B و C و G تقع في مستو واحد ومنهُ K تقع في المستوي (BCG) .

ملاحظة مهمة:

* إذا كان لدينا $(B,1),(B,2)$
يمكن دمجها بـ $(B,3)$
* إذا كان لدينا مثلاً $(B,3)$
يمكن تفريقها لـ $(B,2)$ و $(B,1)$
ونستخدم هذه الملاحظة عند اللزوم

تمرين 6 :

$ABCDEFGH$ مكعب فيه:

I و J منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[BC]$

ولدينا K مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(H,1)$	$(C,1)$	$(B,2)$	$(A,1)$

أثبت وقوع I و J و K و H في مستو واحد.

الحل:

لدينا:

* النقطة K مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(H,1)$	$(C,1)$	$(B,2)$	$(A,1)$

$(B,1)$ $(B,1)$

* النقطة I منتصف $[AB]$:

إذاً I مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,1)$	$(A,1)$

* النقطة J منتصف $[BC]$:

إذاً J مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,1)$	$(C,1)$

ومنهُ:

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون النقطة K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(J,2)$	$(I,2)$	$(H,1)$

إذاً:

النقاط J و I و K و H تقع في مستو واحد.

تمرين 7 :

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه L. ولنعرف النقاط P و Q و R و S كما يأتي:

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

الطلب الأول: أثبت أنّ P هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(C,1)$	$(B,4)$

وأنّ Q هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(D,3)$	$(A,1)$

ولتكن G مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(D,3)$	$(C,1)$	$(B,4)$	$(A,1)$

بيّن أنّ النقطة G تقع على المستقيم (PQ)

الحل:إثبات أنّ P مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(C,1)$	$(B,4)$

لدينا:

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$$
$$5\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}$$
$$5\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{BP}-\left(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}\right)=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

$$4\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{PC}$$
$$-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$
$$4\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

ومنهُ:

P مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,4)$	$(C,1)$

إثبات أنّ Q مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(D,3)$	$(A,1)$

لدينا: $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

$$4\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AD}$$
$$4\overrightarrow{AQ}-3\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$
$$4\overrightarrow{AQ}-3\left(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QD}\right)=\vec{0}$$
$$4\overrightarrow{AQ}-3\overrightarrow{AQ}-3\overrightarrow{QD}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{AQ}-3\overrightarrow{QD}$$
$$-\overrightarrow{QA}-3\overrightarrow{QD}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{QA}+3\overrightarrow{QD}=\vec{0}$$

ومنهُ:

Q مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,3)$	$(A,1)$

نص السؤال:

بيّن أنّ النقطة G تقع على المستقيم (PQ)

يقصد:

أثبت أنّ النقاط P و Q و G تقع على استقامة واحدة

الحل:

* لدينا: G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,3)$	$(C,1)$	$(B,4)$	$(A,1)$

* لدينا: P مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,4)$	$(C,1)$

* لدينا: Q مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,3)$	$(A,1)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون:

النقطة G مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(Q,4)$	$(P,4)$

ومنهُ النقاط P و Q و G تقع على استقامة واحدة وبالتالي النقطة G تقع على المستقيم (PQ)

الطلب الثاني:

أثبت بإسلوب مماثل:

أنّ النقطة G تقع على المستقيم (RS):

الحل:

* لدينا النقطة G مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(D,3)$	$(C,1)$	$(B,4)$	$(A,1)$

* لدينا: $\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$:

إذاً النقطة S مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(C,1)$	$(D,3)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون:

النقطة G مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(R,5)$	$(S,4)$

ومنهُ النقاط G و R و S تقع على استقامة واحدة وبالتالي G تقع على المستقيم (RS)

الطلب الثالث:

استنتج تلاقي المستقيمان (PQ) و (RS) :

فكرة الحل:

نثبت أنّ المستقيمان يشتركان بنفس النقطة.

الحل:

* من الطلب الأول لدينا:

G تقع على المستقيم (PQ)

* من الطلب الثاني لدينا:

G تقع على المستقيم (RS)

* وبالتالي المستقيمان (PQ) و (RS) يلتقيان بنفس النقطة.

تمرين 8 :

وضع على شكل النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

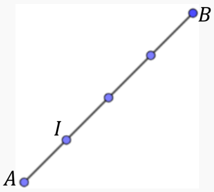
$(B,1)$	$(A,3)$

الحل:

* لدينا:النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,1)$	$(A,3)$

* الإنشاء:



ملاحظة:

* لدينا نقطة مركز أبعاد متناسبة لنقطتين: الشكل هو مستقيم.
* لدينا نقطة مركز أبعاد متناسبة لثلاثة نقاط: الشكل هو مثلث.
* لدينا نقطة مركز أبعاد متناسبة لأربعة نقاط: الشكل هو رباعي وجوه.

تمرين 9 :

ABC مثلث والمطلوب وضع النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$.

الحل:

* لدينا:

النقطة I مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(C,1)$	$(A,1)$

إذاً I منتصف $[AC]$ ولدينا: $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

* النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(C,1)$	$(B,2)$	$(A,1)$

* استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون:

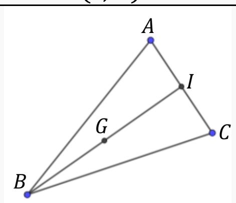
النقطة G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,2)$	$(I,2)$

وبالتالي G منتصف $[BI]$ ولدينا:

$$\overrightarrow{IG}=\frac{2}{4}\overrightarrow{IB}\rightarrow\overrightarrow{IG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$$

* الإنشاء:



تمرين 10 :

$(ABCD)$ رباعي وجوه والمطلوب وضع النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$.

الحل:

* لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(B,2)$	$(A,1)$

إذاً: $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

* لتكن J مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(C,1)$	$(D,1)$

إذاً J منتصف $[CD]$ وبالتالي $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

* لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

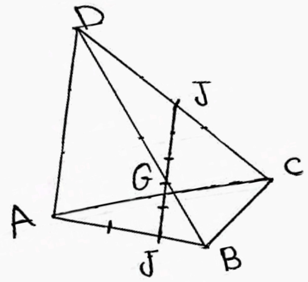
$(D,1)$	$(C,1)$	$(B,2)$	$(A,1)$

* استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(I,3)$	$(J,2)$

ويكون: $\overrightarrow{IG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{IJ}$

* الإنشاء:



تمرين 11 :

النقطتان A و B نقطتان مختلفتان ، عيّن t التي تحقق $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$

علماً أنّ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,3)$	$(A,2)$

الحل:

لدينا: $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \dots (*)$

وبما أنّ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتان:

$(B,3)$	$(A,2)$

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{MA} + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$-5\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB}$$
$$5\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \dots (**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ: $t = \frac{3}{5}$

ومنه: $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

ملاحظة:

يمكن إيجاد قيمة t من علاقة الإنشاء فوراً $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ لكن الطريقة الأولى هي العامة.

تمرين 12 :

عين قيمة α و β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة لـ

(B,β)	(A,α)

حيث يتحقق: $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

الحل:

بما أنّ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتان:

(B,β)	(A,α)

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0} \dots (*)$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$
$$4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0} \dots (**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

$$\alpha = 4 \quad , \quad \beta = -3$$

ومنه M مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,4)$ و $(B,-3)$

تمرين 13 :

نتأمل مثلثاً (ABC) جد عددين x و y بحيث:

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

إذا علمت أنّ M هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(C,2)$	$(B,1)$	$(A,3)$

الحل:

لدينا:

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \dots (*)$$

وبما أنّ النقطة M هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(C,2)$	$(B,1)$	$(A,3)$

فإنّه يتحقق:

$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$$
$$4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$6\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$-6\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$6\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \dots (**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

$$x = \frac{1}{6} \quad , \quad y = \frac{1}{3}$$

ومنه:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

تمرين 14 :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$B(1,4,7)$	$A(1,1,1)$
$D(-2,7,16)$	$C(0,1,2)$

الطلب الأول:

أثبت أنّ النقاط A و B و C

ليست واقعة على استقامة واحدة.

الحل: $\overrightarrow{AB}(0,3,6) \quad , \quad \overrightarrow{AC}(-1,0,1)$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربيه بعدد ومنه النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

الطلب الثاني:

عيّن العددين α و β اللذين يحققان:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

وهل تقع النقاط A و B و C و D في مستو واحد؟

الحل: تعيين α و β :

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$
$$\begin{pmatrix}-3\\6\\15\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-3\\6\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\alpha\\6\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\beta\\0\\\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\6\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta\\3\alpha\\6\alpha+\beta\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\begin{cases}-3=-\beta & \dots(1)\\ 6=3\alpha & \dots(2)\\ 15=6\alpha+\beta & \dots(3)\end{cases}$$

لدينا الجملة:

$$\begin{cases}-3=-\beta & \dots(1)\\ 6=3\alpha & \dots(2)\end{cases}$$

من (1) نجد أنّ:

$$-3=-\beta\to\beta=3$$

من (2) نجد أنّ:

$$6=3\alpha\to\alpha=2$$

نتحقق في (3) :

$$15=6(2)+3$$
$$15=15$$

محققة

ومنه يوجد عددين $\alpha=2$ و $\beta=3$ يحققان:

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

من العلاقة السابقة نجد أنّ الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً ، ومنه النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد.

الطلب الثالث:

استنتج أنّ النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

(A,a)	(B,b)	(C,c)

حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل: لدينا:

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{AD}-2\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)-3\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$
$$-4\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$
$$4\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

ومنه النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(A,4)$	$(B,-2)$	$(C,-3)$

ومنه: $a=4\ ,\ b=-2\ ,\ c=-3$

تمرين 15 :

جد α و β و γ التي تجعل M مركز الأبعاد المتناسبة لـ النقاط المثقلة

(A,α)	(B,β)	(C,γ)

علماً أنه يتحقق: $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$

الحل:

بما أنّ M مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

(A,α)	(B,β)	(C,γ)

فإنّه يتحقق:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}\dots(*)$$

ولدينا:

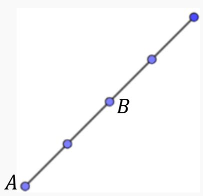
$$\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{CM}-3\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{CM}-3\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}\right)-2\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{CM}-3\overrightarrow{CM}-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{CM}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$-4\overrightarrow{CM}-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\vec{0}\dots(**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

$$\alpha=-3\ \ ,\ \ \beta=-2\ \ ,\ \ \gamma=4$$

تمرين 16 :

في الشكل التالي التدريجات متساوية ، عين قيمة α و β إذا علمت أنّ النقطة C هي مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) :



الحل:

بما أنّ C مركز أبعاد متناسبة لـ: (A,α) و (B,β) فإنّه يتحقق:

$$\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}=\vec{0}\dots(*)$$

ولدينا من الشكل:

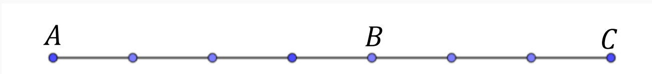
$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{5}{2}$$
$$2\overrightarrow{CA}=5\overrightarrow{CB}$$
$$2\overrightarrow{CA}-5\overrightarrow{CB}=\vec{0}\dots(**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

$$\alpha=2\ \ ,\ \ \beta=-5$$

تمرين 17 :

في الشكل التالي التدريجات متساوية ، عين قيمة α و β إذا علمت أنّ النقطة B هي مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (C,β) :



الحل:

بما أنّ B مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) فإنّه يتحقق:

$$\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BC}=\vec{0}\dots(*)$$

ولدينا من الشكل:

$$\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}}=-\frac{4}{3}$$

انتبه: إشارة الناقص لأن الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ لهما اتجاهين متعاكسين.

$$3\overrightarrow{BA}=-4\overrightarrow{BC}$$
$$3\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{BC}=\vec{0}\dots(**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

$$\alpha=3\ \ ,\ \ \beta=4$$

الجداء السلمي:

تعريف	
	في الفراغ ، الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{v}$
	في الفراغ الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2-\lVert\vec{u}\rVert^2-\lVert\vec{v}\rVert^2\right]$
	إذا كان α قياساً للزاوية الهندسية للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ كان: $\vec{u}.\vec{v}=\lVert\vec{u}\rVert.\lVert\vec{v}\rVert\cos\alpha$

العبارات المختلفة للجداء السلمي	إذا كانت H هي المسقط القائم في المستوي P للنقطة C على المستوي (AB) فإن: $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$
	العبارة التحليلية للجداء السلمي نفترض أن مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في معلم متجانس هي $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ فإنّ: $\vec{u}.\vec{v}=(x_1.x_2)+(y_1.y_2)+(z_1.z_2)$
العبارات الشهيرة للجداء السلمي	الجداء السلمي لشعاعين متساويين: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$
	الجداء السلمي لشعاعين متعاكسين: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}=-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$
	الجداء السلمي لشعاعين متعامدين: في حال $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين فإنّ: $\vec{u}.\vec{v}=0$
تنويه	يتم اختيار العبارة المناسبة للجداء السلمي وفقاً للمعطيات
خواص الجداء السلمي	لدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أشعة ولدينا a و b أعداد حقيقية فإنّ: $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$ $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$ $(a\vec{u}).(b\vec{v})=ab.\vec{u}.\vec{v}$

أنماط التمارين:

النمط	نص السؤال	فكرة الحل	
الأول	أوجد الجداء السلمي لشعاعين	في حال وجود معلم	نطبق القانون المناسب وفقاً للمعطيات
		في حال عدم وجود معلم	* نطبق القانون: $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ * شرط التطبيق: ○ معرفة أطوال الأضلاع. ○ معرفة الزاوية. ○ أن تكون البداية نفسها للشعاعين. * وعند اختلال الشرط فإننا نستخدم إصلاحات مناسبة: (الترتيب / الزرع/ الاستبدال)
الثاني	هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان		* نوجد $\vec{u}.\vec{v}$ (وذلك باستخدام إحدى العبارات المناسبة للمعطيات) * نميز: ① الحالة الأولى: إذا تحقق $\vec{u}.\vec{v}=0$ فإنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين. ② الحالة الثانية: إذا تحقق $\vec{u}.\vec{v}\neq 0$ فإنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متعامدين.
الثالث	عين قيمة الوسيط α ليكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان		* نكتب بما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذاً: $\vec{u}.\vec{v}=0$ * نعوض في العلاقة السابقة فنحصل على معادلة يكون فيها المجهول هو الوسيط وبحل هذه المعادلة نحصل على المطلوب
الرابع	استنتج النسبة المثلثية للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$		* نوجد $\vec{u}.\vec{v}$ * نوجد $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$ * نضع العبارة: $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ * نعزل $\cos(\vec{u},\vec{v})$ وفق: $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$ نعوض
الخامس	أثبت أنّ النقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث		* باستخدام الجداء السّلمي نثبت أنّ: 1. (AM) و (CB) متعامدان أيّ: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB}=0$ 2. (BM) و (AC) متعامدان أيّ: $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0$ 3. (CM) و (AB) متعامدان أيّ: $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=0$ إذاً النقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث (ABC)

التمرين الأول:

أوجد الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في كل من الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

$\|\vec{v}\|=4$	$\|\vec{u}\|=1$
$(\vec{u},\vec{v})=0$	

الحل:

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$=(1)(4)(1)$$
$$=4$$

الحالة الثانية:

الحل:

$\|\vec{v}\|=3$	$\|\vec{u}\|=2$
$(\vec{u},\vec{v})=\pi$	

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$=(2)(3)\cos\pi=6(-1)$$
$$=-6$$

الحالة الثالثة:

$\vec{u}(2,3,-1)$	$\vec{v}(1,-1,2)$

الحل:

$$\vec{u}.\vec{v} = (2)(1) + (3)(-1) + (-1)(2)$$
$$= 2 - 3 - 2$$
$$= -3$$

الحالة الرابعة:

$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$
$\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$

الحل:

$$\vec{u}(2,-3,1) \quad , \quad \vec{v}(3,-1,5)$$
$$\vec{u}.\vec{v} = (2)(3) + (-3)(-1) + (1)(5)$$
$$= 6 + 3 + 5$$
$$= 14$$

الحالة الخامسة:

$\|\vec{u}\| = 2$	$\|\vec{v}\| = 3$
$\|\vec{u}+\vec{v}\| = 3$	

الحل:
$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}[(3)^2 - (2)^2 - (3)^2]$$
$$= \frac{1}{2}[9 - 4 - 9] = -2$$

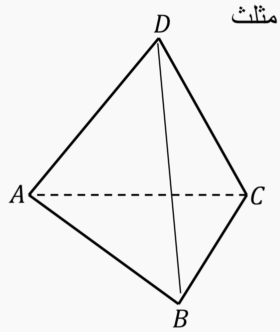
الحالة السادسة:

$\|\vec{u}\| = 3$	$\|\vec{v}\| = -4$
$\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$	

الحل:
$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[25 - 9 - 16] = 0$$

التمرين الثاني:

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم كل وجه فيه مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a والمطلوب:



1. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
3. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

الحل:

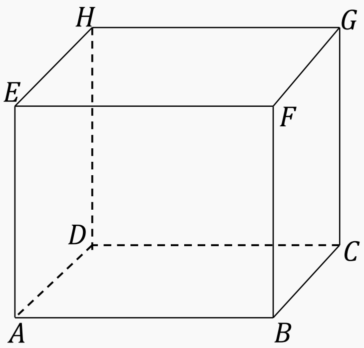
الطلب الأول:
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$$
$$= a.a.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

الطلب الثاني:
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$$
$$= a.a.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

الطلب الثالث:
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})$$
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$
$$= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$
$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

التمرين الثالث:

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a



1. احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$
2. احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH}$
3. احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}$
4. احسب $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC}$

الحل:

الطلب الأول:
$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF})$$
$$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF}$$
$$= a^2 + 0 = a^2$$

الطلب الثاني:
$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH}$$
$$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE}$$
$$= \overrightarrow{AE}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE})$$
$$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}$$
$$= 0 + a^2 = a^2$$

الطلب الثالث:
$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG})$$
$$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FG}$$
$$= a^2 + 0 = a^2$$

الطلب الرابع:
$$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC}$$
$$= \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{EB}$$
$$= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}).(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB})$$
$$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB}$$
$$= 0 - a^2 + a^2 + 0 = 0$$

التمرين الرابع:

إذا علمت أنّ نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأنّ $\vec{u}.\vec{v} = -4$ فاحسب المقادير الآتية:

المقدار الأول:
$$\vec{u}(\vec{u} + \vec{v})$$
$$= \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v}$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u}.\vec{v}$$
$$= 25 - 4 = 21$$

المقدار الثاني:
$$\vec{v}(\vec{u} - \vec{v})$$
$$= \vec{v}.\vec{u} - \vec{v}.\vec{v}$$
$$= \vec{u}.\vec{v} - \|\vec{v}\|^2 +$$
$$= -4 - 9 = -13$$

المقدار الثالث:
$$(2\vec{u})(\vec{v} - 3\vec{u})$$
$$= 2\vec{u}.\vec{v} - 6\vec{u}.\vec{u}$$
$$= 2\vec{u}.\vec{v} - 6\|\vec{u}\|^2$$
$$= 2(-4) - 6(25)$$
$$= -8 - 150 = -158$$

المقدار الرابع:
$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - 3\vec{v})$$
$$= \vec{u}.\vec{u} - 3\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v} - 3\vec{v}.\vec{v}$$
$$= \|\vec{u}\|^2 - 3\|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$$
$$= (5)^2 - 3(3)^2 - 2(-4)$$
$$= 25 - 27 + 8 = 6$$

التمرين الخامس:

هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين في الحالات الآتية؟

الحالة الأولى:

$\vec{u}\left(\frac{5}{4},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\vec{v}\left(-\frac{2}{5},2,3\right)$

الحل: $\vec{u}.\vec{v}=\left(\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)(2)+\left(\frac{1}{2}\right)(3)$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{6}{2}+\frac{3}{2}=-\frac{4}{2}$$
$$=-2\neq 0$$

ومنهُ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متعامدين.

الحالة الثانية:

$\vec{u}(\sqrt{2},1+\sqrt{2},1-\sqrt{2})$
$\vec{v}(-\sqrt{2},1,1)$

الحل:

$$\vec{u}.\vec{v}=(\sqrt{2})(-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1)+(1-\sqrt{2})(1)$$
$$=-2+1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}$$
$$-2+2=0$$

ومنهُ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين.

التمرين السادس:

في الحالات التالية ليكن لدينا الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

عيّن α حتلا يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين.

الحالة الأولى:

$\vec{u}\left(2,-\frac{1}{2},5\right)$
$\vec{v}\left(-\frac{2}{5},3,\alpha\right)$

لدينا الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين ومنهُ:

$$\vec{u}.\vec{v}=0$$
$$(2)\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)(3)+(5)(\alpha)=0$$
$$-\frac{4}{5}-\frac{3}{2}+5\alpha=0$$
$$5\alpha=\frac{23}{10}\to\alpha=\frac{23}{50}$$

الحالة الثانية:

$\vec{u}\left(\sqrt{3},\frac{1}{3},2\right)$
$\vec{v}\left(\alpha+2\alpha,\frac{1}{2}\right)$

لدينا الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين ومنهُ:

$$\vec{u}.\vec{v}=0$$
$$(\sqrt{3})(\alpha)+\left(\frac{1}{3}\right)(2\alpha)+(2)\left(\frac{1}{2}\right)=0$$
$$\sqrt{3}\alpha+\frac{2}{3}\alpha+1=0$$
$$\sqrt{3}\alpha+\frac{2}{3}\alpha=-1\to\alpha=\frac{-1}{\sqrt{3}+\frac{2}{3}}$$

التمرين السابع:

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقاط:

$A(0,1,2)$	$B(2,1,1)$	$D(1,-2,\lambda)$

جد العدد الحقيقي λ بحيث يكون المثلث ABD قائم في A .

الحل:

يكون المثلث ABD قائم في A إذا تحقق:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0\ldots(*)$$

حيث:

$$\overrightarrow{AB}(2,0,-1)\quad,\quad\overrightarrow{AD}(1,-3,\lambda-2)$$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$(2)(1)+(0)(-3)+(-1)(\lambda-2)=0$$
$$2-\lambda+2=0$$
$$\lambda=4$$

التمرين الثامن:

ليكن لدينا $\vec{u}(1,-2,1)$ و $\vec{v}(3,0,1)$

أوجد نسبة مثلثية للزاوية بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$:

الحل: نعلم أنّ:

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})\ldots(*)$$

حيث:

$$\vec{u}.\vec{v}=(3)(1)+(0)(-2)+(1)(1)=4$$
$$\|\vec{u}\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$$
$$\|\vec{v}\|=\sqrt{3^2+0^2+1^2}=\sqrt{10}$$

نعوض في علاقة $(*)$ وفق:

$$4=\sqrt{6}.\sqrt{10}\cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{4}{\sqrt{6}.\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{60}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{4\times15}}=\frac{4}{2\sqrt{15}}=\frac{2}{\sqrt{15}}$$

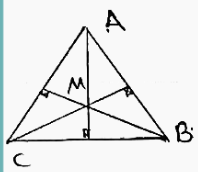
التمرين التاسع:

نتأمل في معلم متجانس النقاط:

$A(1,1,2)$	$B(3,1,-4)$
$C(2,0,-1)$	$M(2,-9,-1)$

أثبت أن M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

الحل:



$$\overrightarrow{AB}(2,0,-6)$$
$$\overrightarrow{BC}(-1,-1,3)$$
$$\overrightarrow{AC}(1,-1,-3)$$
$$\overrightarrow{AM}(1,-10,-3)$$
$$\overrightarrow{BM}(-1,-10,3)$$
$$\overrightarrow{CM}(0,-9,0)$$
$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=(1)(-1)+(-10)(-1)+(-3)(3)$$
$$=-1+10-9=0$$
$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=(-1)(1)+(-10)(-1)+(3)(-3)$$
$$=-1+10-9=0$$
$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=(0)(2)+(-9)(0)+(0)(0)$$
$$=0+0+0=0$$

ومنهُ:

النقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث (ABC)

معادلات المستوي:تمهيد:

الشكل العام	$ax + by + cz + d = 0$ حيث: $\vec{n}(a,b,c)$ هو ناظم المستوي و هو شعاع عمودي على المستوي
كتابة معادلة المستوي	لكتابة معادلة مستوي فإننا نحتاج: * ناظم المستوي: $\vec{n}(a,b,c)$ * نقطة منه: $A(x_A, y_A, z_A)$ * وتكون المعادلة: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

حالات معادلة المستوي:

الحالة	نص السؤال	فكرة الحل
مستوي يوازي مستوي آخر	اكتب معادلة المستوي P المار من A والموازي للمستوي Q .	* تحديد $\vec{n}P$ ناظم للمستوي: بما أن المستوي P والمستوي Q متوازيان فإن: $\vec{n}P = \vec{n}Q$ * تحديد النقطة: (A معطاة) * نكتب المعادلة
مستوي يعامد مستقيم	اكتب معادلة المستوي P المار من A والعمودي على المستقيم d .	* تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P : بما أن المستقيم (d) والمستوي P متعامدان فإن: $\vec{n}_P = \vec{u}_d$ حيث $\vec{u}_d$: شعاع توجيه المستقيم (d) * تحديد النقطة: (A معطاة) * نكتب المعادلة
معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة	اكتب معادلة P المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$	* تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P: بما أن P هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ فإن: $\vec{n}_P = \overrightarrow{AB}$ * تحديد النقطة: بما أن المستوي P هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فإن النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ تنتمي إلى المستوي P لذلك نوجد احداثيات I * نكتب المعادلة
معادلة مستوي مار من نقطة ويحوي شعاعين (يقبل شعاعين توجيه)	اكتب معادلة المستوي P المار من A ويقبل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين موجهين له.	* تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P : ليكن: $\vec{n}_P(a,b,c)$ بما أن $\vec{n}_P$ ناظم للمستوي P وبما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من المستوي P فإنّ $\vec{n}_P$ يكون عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أي: $\vec{n}_P.\vec{u} = 0$ $\vec{n}_P.\vec{v} = 0$ نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل c,b,a وبحل هذه الجملة نحصل على مركبات ناظم المستوي $\vec{n}_P$ * تحديد النقطة: (A المعطاة) * نكتب المعادلة
معادلة مستوي مار من نقطة ويعامد مستويان	اكتب معادلة المستوي P المار من A والعمودي على كل من المستويان R,Q	* تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P : ليكن $\vec{n}_P(a,b,c)$ بما أن المستوي P و Q متعامدان فإن $\vec{n}_p$ و $\vec{n}_Q$ متعامدان، أي : $\vec{n}_p.\vec{n}_Q = 0$ بما أن المستوي P و R متعامدان فإن $\vec{n}_p$ و $\vec{n}_R$ متعامدان، أي : $\vec{n}_p.\vec{n}_R = 0$ مما سبق نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل c,b,a نحلها فنحصل على مركبات $\vec{n}_p$ * تحديد النقطة: (A المعطاة) * نكتب المعادلة
معادلة مستوي مار من نقطتين ويعامد مستوي آخر	اكتب معادلة المستوي P المار من النقطتين A و B ويعامد المستوي Q	* تحديد $\vec{n}_p$ ناظم المستوي P : ليكن $\vec{n}_p(a,b,c)$ بما أن النقطتان A و B من المستوي P فإن $\vec{n}_p$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان أي: $\vec{n}_p.\overrightarrow{AB} = 0$ بما أنّ المستويان P و Q متعامدان فهذا يعني أنّ $\vec{n}_p$ و $\vec{n}_Q$ متعامدان أي: $\vec{n}_p.\vec{n}_Q = 0$ نحصل مما سبق على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل وبحل هذه الجملة نحصل على مركبات $\vec{n}_p$ * تحديد النقطة إما A أو B * نكتب المعادلة

معادلة مستوي مار من ثلاثة نقاط	صيغة أولى: اكتب معادلة المستوي المار من A و B و C صيغة ثانية: اكتب معادلة المستوي (ABC)	* نتحقق من أن $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطياً * نحدد $\vec{n}$ ناظم المستوي (ABC) بما أن النقاط C, B, A من المستوي P فإن $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ أي: $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل c, b, a بحل هذه الجملة نحصل على مركبات $\vec{n}$ * تحديد النقطة: إما A أو B أو C * نكتب المعادلة
معادلة مستوي يحوي مستقيمان متقاطعان	اكتب معادلة المستوي P المحدد بالمستقيمان المتقاطعان d_1 و d_2	* تحديد $\vec{n}_p$ ناظم المستوي P : ليكن $\vec{n}_p(a, b, c)$ بما أنّ المستوي P محدد بالمستقيمان d_1 و d_2 فإن: $\vec{n}_P.\vec{u} = 0$ $\vec{n}_P.\vec{v} = 0$ بالتعويض نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل c, b, a وبحلها نحصل على ناظم المستوي P * تحديد النقطة: نقطة تقاطع المستقيمان d_1 و d_2 هي نقطة تنتمي إلى المستوي ونوجدها * نكتب المعادلة
معادلة مستوي مماس لكرة في نقطة	اكتب معادلة المستوي P المماس للكرة في النقطة A	* تحديد $\vec{n}_p$ ناظم المستوي P : بما أن P هو المستوي المماس للكرة S فهذا يعني أنّ: $\vec{n}_p = \overrightarrow{BA}$ حيث B هي مركز الكرة S * تحديد النقطة: (المعطاة A) * نكتب المعادلة

تمرين:

اكتب معادلة المستوي P في كل من الحالات الآتية:

الطلب الأول:

P مار من $A(1,0,5)$ ويقبل $\vec{n}(1,-1,0)$ ناظماً لهُ:

الحل: النقطة: $A(1,0,5)$

الناظم: $\vec{n}(1,-1,0)$

المعادلة: $P: 1(x-1) - 1(y-0) + 0(z-5) = 0$

$$P: x - 1 - y = 0$$

$$P: x - y - 1 = 0$$

الطلب الثاني:

P مار من $A(1,0,5)$ ويوازي المستوي Q الذي معادلتهُ: $Q: 2x - y + 3z = 4$

الحل: النقطة: $A(1,0,5)$

الناظم:

لدينا المستوي Q ناظمهُ: $\overrightarrow{n_Q}(2,-1,3)$ وبما أنّ المستويان P و Q متوازيان فإنّ $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{n_Q}$ أيّ: $\overrightarrow{n_P}(2,-1,3)$.

المعادلة: $P: 2(x-1) - 1(y-0) + 3(z-5) = 0$

$$P: 2x - 2 - y + 3z - 15 = 0$$

$$P: 2x - y + 3z - 17 = 0$$

الطلب الثالث:

P مار من $A(1,2,-1)$ ويعامد المستقيم (BC) حيث: $B(1,0,1)$ و $C(-3,1,4)$.

الحل: النقطة: $A(1,2,-1)$

الناظم:

لدينا $\overrightarrow{BC}(-4,1,3)$ وبما أنّ المستقيم (BC) والمستوي P متعامدان فإنّ: $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{BC}$ أيّ أنّ: $\overrightarrow{n_P}(-4,1,3)$.

المعادلة: $P: -4(x-1) + 1(y-2) + 3(z+1) = 0$

$$P: -4x + 4 + y - 2 + 3z + 3 = 0$$

$$P: -4x + y + 3z + 5 = 0$$

الطلب الرابع: P المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث: $A(5,2,-1)$ و $B(3,0,1)$.

الحل: النقطة: بما أنّ P هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فإنّ النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ تنتمي إلى المستوي P حيث: $I(4,1,0)$

الناظم:

بما أنّ المستوي P هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فإنّ: $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{AB}$ أيّ: $\overrightarrow{n_P}(-2,-2,2)$

المعادلة:

$$P: -2(x-4) - 2(y-1) + 2(z-0) = 0$$

$$P: -2x + 8 - 2y + 2 + 2z = 0$$

$$P: -2x - 2y + 2z + 10 = 0$$

الطلب الخامس:

P مار بالنقطة $A(2,3,1)$ ويقبل كلاً من $\vec{u}(1,1,3)$ و $\vec{v}(2,-1,4)$ شعاعي توجيه لـ P .

الحل:

النقطة: $A(2,3,1)$

الناظم:

ليكن $\overrightarrow{n_P}(a, b, c)$ وبما أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين موجهين للمستوي P فإنّ $\overrightarrow{n_P}$ يكون عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أيّ أنّ:

$$\overrightarrow{n_P}.\vec{u} = 0$$

$$(a)(1) + (b)(1) + (c)(3) = 0$$

$$a + b + 3c = 0 \ldots (1)$$

$$\overrightarrow{n_P}.\vec{v} = 0$$

$$(a)(2) + (b)(-1) + (c)(4) = 0$$

$$2a - b + 4c = 0 \ldots (2)$$

وهذه جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل a و b و c ولحلها نعطي قيمة اختيارية لأحد المجاهيل ولتكن $c = 1$ ، نعوض في المعادلتين وفق:

$$\begin{cases} a+b+3=0 \\ 2a-b+4=0 \end{cases}$$

وهذه جملة معادلتين بمجهولين

نحلها بالحذف بالجمع وفق: بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$3a+7=0 \to a=-\frac{7}{3}$$

نعوض في (1) لنجد أنّ:

$$-\frac{7}{3}+b+3=0 \to b=-\frac{2}{3}$$

ومنه:

$$\overrightarrow{n_P}\left(-\frac{7}{3},-\frac{2}{3},1\right)$$

$$\overrightarrow{n_P}(-7,-2,3)$$

المعادلة: $P: -7(x-2)-2(y-3)+3(z-1)=0$

$$P: -7x+14-2y+6+3z-3=0$$

$$P: -7x-2y+3z+17=0$$

الطلب السادس:

P مار من $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ وعمودي على المستوي Q حيث: $Q: x-y+3z-4=0$

الحل:

النقطة: $A(1,-1,2)$

الناظم: ليكن $\overrightarrow{n_P}(a,b,c)$

بما أنّ النقطتان A و B من المستوي P فإنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ متعامدان أيّ أنّ:

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AB}=0$$

$$(a)(1)+(b)(1)+(c)(2)=0$$

$$a+b+2c=0 \dots (1)$$

بما أنّ المستويان P و Q متعامدان فهذا يعني أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}(1,-1,3)$ متعامدان أيّ أنّ:

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0$$

$$(a)(1)+(b)(-1)+(c)(3)=0$$

$$a-b+3c=0 \dots (2)$$

وهذه جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل a و b و c ولحلها نعطي قيمة اختيارية لأحد المجاهيل ولتكن $c = 1$ ، نعوض في المعادلتين وفق:

$$\begin{cases} a+b+2=0 \\ a-b+3=0 \end{cases}$$

وهذه جملة معادلتين بمجهولين

نحلها بالحذف بالجمع وفق:

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$2a+5=0 \to a=-\frac{5}{2}$$

نعوض في (1) لنجد أنّ:

$$-\frac{5}{2}+b+2=0 \to b=\frac{1}{2}$$

ومنه:

$$\overrightarrow{n_P}\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2},1\right)$$

$$\overrightarrow{n_P}(-5,1,2)$$

المعادلة:

$$P: -5(x-1)+1(y+1)+2(z-2)=0$$

$$P: -5x+5+y+1+2z-4=0$$

$$P: -5x+y+2z+2=0$$

الطلب السابع:

P مار من $A(0,1,0)$ و $B(-1,1,0)$ و $C(-1,2,3)$

الحل:

الخطوة الأولى:

إثبات أنّ النقاط A و B و C تعيّن مستوي:

لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(-1,0,0)$$

$$\overrightarrow{AC}(-1,1,3)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

إذاً النقاط A و B و C تعيّن مستوي.

الخطوة الثانية:

كتابة معادلة المستوي (ABC) :

النقطة: $A(0,1,0)$

الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$

بما أنّ النقاط A و B و C هي نقاط من المستوي P فإنّ $\overrightarrow{n_P}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AB}=0$$

$$(a)(-1)+(b)(0)+(c)(0)=0$$

$$-a=0 \dots (1)$$

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AC}=0$$

$$(a)(-1)+(b)(1)+(c)(3)=0$$

$$-a+b+3c=0 \dots (2)$$

وهذه جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل a و b و c ولحلها نعطي قيمة اختيارية لأحد المجاهيل ولتكن $c = 1$ ، نعوض في المعادلتين وفق:

$$\begin{cases} -a=0 \\ -a+b+3=0 \end{cases}$$

من (1) نجد أنّ:

$$-a=0 \to a=0$$

نعوض في (2) لنجد أنّ:

$$-(0)+b+3=0 \to b=-3$$

ومنه:

$$\overrightarrow{n_P}(0,-3,1)$$

المعادلة: $P: 0(x-0)-3(y-1)+1(z-0)=0$

$$P: -3y+3+z=0$$

$$P: -3y+z+3=0$$

الطلب الثامن:

P مار من $A(2,5,-2)$ وعمودي على كل من Q و R حيث:

$Q: x-2y+3z-5=0$ و $R: x+y+z+1=0$

الحل:

النقطة: $A(2,5,-2)$

الناظم: ليكن $\overrightarrow{n_P}(a,b,c)$

بما أنّ المستويان P و Q متعامدين فإنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}(1,-2,3)$ متعامدين أيّ أنّ: $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0$

$$(a)(1)+(b)(-2)+(c)(3)=0$$

$$a-2b+3c=0 \dots (1)$$

بما أنّ المستويان P و R متعامدين فإنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_R}(1,1,1)$ متعامدين أيّ أنّ:

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R}=0$$

$$(a)(1)+(b)(1)+(c)(1)=0$$

$$a+b+c=0 \dots (2)$$

وهذه جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل a و b و c ولحلها نعطي قيمة اختيارية لأحد المجاهيل ولتكن $c = 1$ ، نعوض في المعادلتين وفق:

$$\begin{cases} a - 2b + 3 = 0 \\ a + b + 1 = 0 \end{cases}$$

نضرب المعادلة (2) بالعدد (2):

$$\begin{cases} a - 2b + 3 = 0 \\ 2a + 2b + 2 = 0 \end{cases}$$

بجمع (1) و $(2)'$ نجد أنّ:

$$3a + 5 = 0 \to a = -\frac{5}{3}$$

نعوض في (1) لنجد أنّ:

$$-\frac{5}{3} - 2b + 3 = 0 \to b = \frac{4}{6} \to b = \frac{2}{3}$$

ومنه:

$$\overrightarrow{n_P}\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$$
$$\overrightarrow{n_P}(-5,2,3)$$

المعادلة:

$$P: -5(x-2) + 2(y-5) + 3(z+2) = 0$$
$$P: -5x + 10 + 2y - 10 + 3z + 6 = 0$$
$$P: -5x + 2y + 3z + 6 = 0$$

الطلب التاسع:

P المحدد بالمستقيمان d_1 و d_2 حيث:

$$d_1: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \, ; t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases} , \quad d_2: \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = s - 2 \quad ; s \in \mathbb{R} \\ z = 3s - 2 \end{cases}$$

والمستقيمان d_1 و d_2 يتقاطعان في النقطة $A(2,1,0)$

الحل:

النقطة: $A(2,1,0)$ لأنّ نقطة تقاطع المستقيمان d_1 و d_2 هي نقطة تنتمي إلى المستوي.

الناظم: ليكن $\overrightarrow{n_P}(a,b,c)$

بما أن المستوي P محدد بالمستقيمان d_1 الذي شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_1}(1,2,-1)$ و d_2 الذي شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_2}(2,1,3)$ فإنّ $\overrightarrow{n_P}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ أيّ أنّ:

$$\overrightarrow{n_P} . \overrightarrow{u_1} = 0$$
$$(a)(1) + (b)(2) + (c)(-1) = 0$$
$$a + 2b - c = 0 \dots (1)$$
$$\overrightarrow{n_P} . \overrightarrow{u_2} = 0$$
$$(a)(2) + (b)(1) + (c)(3) = 0$$
$$2a + b + 3c = 0 \dots (2)$$

وهذه جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل a و b و c ولحلها نعطي قيمة اختيارية لأحد المجاهيل ولتكن $c = 1$، نعوض في المعادلتين وفق:

$$\begin{cases} a + 2b - 1 = 0 \\ 2a + b + 3 = 0 \end{cases}$$

نضرب المعادلة (2) بالعدد (-2):

$$\begin{cases} a + 2b - 1 = 0 \\ -4a - 2b - 6 = 0 \end{cases}$$

بجمع (1) و $(2)'$ نجد أنّ:

$$-3a - 7 = 0 \to a = -\frac{7}{3}$$

نعوض في (1) لنجد أنّ:

$$-\frac{7}{3} + 2b - 1 = 0 \to b = \frac{5}{3}$$

ومنه:

$$\overrightarrow{n_P}\left(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)$$
$$\overrightarrow{n_P}(-7,5,3)$$

المعادلة:

$$P: -7(x-2) + 5(y-1) + 3(z-0) = 0$$
$$P: -7x + 14 + 5y - 5 + 3z = 0$$
$$P: -7x + 5y + 3z + 9 = 0$$

الطلب العاشر:

P المستوي المماس للكرة S حيث ;

$$S: (x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 3$$

في النقطة $A(2,1,0)$

الحل:

النقطة: $A(2,1,0)$

الناظم:

بما أنّ P هو المستوي المماس للكرة S فهذا يعني أنّ $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{BA}$ حيث; $B(3,0,-1)$ هي مركز الكرة و $\overrightarrow{BA}(-1,1,1)$ ومنهُ

$$\overrightarrow{n_P}(-1,1,1)$$

المعادلة:

$$P: -1(x-2) + 1(y-1) + 1(z-0) = 0$$
$$P: -x + 2 + y - 1 + z = 0$$
$$P: -x + y + z + 1 = 0$$

تطبيقات معادلة المستوي:

التطبيق	نص السؤال	فكرة الحل
انتماء نقطة إلى مستوي	هل النقطة A تنتمي الى المستوي P ؟	* نكتب معادلة المستوي P عند اللزوم * نعوض احداثيات النقطة A في معادلة المستوي P * نميز حالتين: الحالة الأولى: المعادلة محققة إذاً: $A \in P$ الحالة الثانية: المعادلة غير محققة اذاً: $A \notin P$
إثبات معادلة مستوي	أثبت أن معادلة المستوي ABC هي (وتكون معطاة)	الطريقة الأبسط في الإجابة: نعوض إحداثيات النقاط A و B و C في المعادلة المعطاة ونثبت أنها محققة
وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد	هل النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد؟	* نكتب معادلة مستوي مار من ثلاثة نقاط ولتكن (ABC) * نتحقق من انتماء النقطة المتبقية D الى المستوي السابق * نميز: الحالة الأولى: $D \in (ABC)$ بالتالي تكون: النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد الحالة الثانية: $D \notin (ABC)$ وبالتالي تكون: النقاط A و B و C و D لا تقع في مستوٍ واحد

بعد نقطة عن مستوي في الفراغ	ليكن لدينا المستوي P معادلته: $P: ax+by+cz+d=0$ ولدينا النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ والمطلوب: احسب بعد النقطة A عن المستوي P	إنّ بعد النقطة A عن المستوي P يعطى بالقانون: $dist(A,P)=\frac{\lvert ax_A+by_A+cz_A+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ انتبه شرط تطبيق القانون السابق: أن يكون الطرف الأيمن في معادلة المستوي هو الصفر
البعد بين مستويين متوازيين	ليكن لدينا المستويان P و Q احسب البعد بينهما علماً أنهما متوازيان	* نأخذ نقطة A من المستوي P (مثلاً) وفق: نفرض قيم اختيارية لإحداثيتين من النقطة ولتكن مثلاً x و y * نعوض في معادلة المستوي فنحسب z * وبالتالي نحصل على النقطة المطلوبة * نحسب البعد بين النقطة السابقة عن المستوي Q بتطبيق دستور ال $dist$

ملاحظات هامة جداً:

نص السؤال	فكرة الحل
اكتب معادلة المستوي $(ABCD)$	* نكتب معادلة المستوي المار من ثلاثة نقاط ولتكن (ABC) * نتحقق من انتماء النقطة المتبقية ونميز: ☝ الحالة الأولى: $D\in(ABC)$ تكون معادلة المستوي $(ABCD)$ هي ذاتها معادلة المستوي (ABC) ✌ الحالة الثانية: $D\notin(ABC)$ لا يوجد معادلة للمستوي $(ABCD)$
أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}$ ناظم على المستوي (ABC)	نثبت أن $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي

التمرين الأول:

ليكن لدينا المستوي P المعطى وفق: $P: x+y-z-5=0$ والنقاط $C(-2,5,-2)$ و $D(1,1,-3)$ و $E(3,2,1)$ هل النقاط C و D و E تنتمي إلى المستوي P ؟

الحل:

اختبار النقطة C :

$$P: -2+5+2-5=0$$
$$0=0$$
محققة

إذاً: $C\in P$

اختبار النقطة D :

$$P: 1+1+3-5=0$$
$$0=0$$
محققة

إذاً: $D\in P$

اختبار النقطة E :

$$P: 3+2-1-5=0$$
$$-1=0$$
غير محققة

إذاً: $E\neq P$

التمرين الثاني:

لدينا النقاط $A(1,1,0)$ و $B(1,2,1)$ و $C(4,0,0)$ أثبت أنّ معادلة المستوي (ABC) تُعطى بالعلاقة $x+3y-3z-4=0$.

الحل: تعويض A في معادلة المستوي المراد إثباتها:

$$4+3(1)-3(0)-4=0$$
$$4-4=0$$
$$0=0$$
محققة

تعويض B في معادلة المستوي المراد إثباتها:

$$1+3(2)-3(1)-4=0$$
$$7-7=0$$
$$0=0$$
محققة

تعويض C في معادلة المستوي المراد إثباتها:

$$4+3(0)-3(0)-4=0$$
$$4-4=0$$
$$0=0$$
محققة

إذاً: معادلة المستوي (ABC) هي:

$$x+3y-3z-4=0$$

التمرين الثالث:

الطلب الأول:

احسب بُعد النقطة $A(5,-3,4)$ عن المستوي $P: 2x-y+3z-5=0$

الحل:

$$dist(A,P)=\frac{|2(5)-(-3)+3(4)-5|}{\sqrt{4+1+9}}$$
$$=\frac{|10+3+12-5|}{\sqrt{14}}=\frac{|20|}{\sqrt{14}}=\frac{20}{\sqrt{14}}$$

الطلب الثاني:

احسب بُعد النقطة $B(2,2,5)$ عن المستوي $Q: y-z=0$

الحل:

$$dist(B,Q)=\frac{|2-5|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-3|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

التمرين الرابع:

نتأمل في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$B(1,-2,1)$	$A(2,0,1)$
$D(-3,-5,6)$	$C(5,5,0)$
$E(3,1,2)$	

أثبت انتماء النقاط A و B و C و D إلى مستو واحد P وتبيّن إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P

الحل:

الخطوة الأولى نكتب معادلة المستوي (ABC) :

إثبات أنّ النقاط A و B و C تشكل مستو وفق:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)\quad,\quad\overrightarrow{AC}(3,5,-1)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي النقاط A و B و C تشكل مستوي.

كتابة معادلة المستوي (ABC) وفق:

النقطة: $A(2,0,1)$

الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$

بما أنّ النقاط A و B و C هي نقاط من المستوي (ABC) فإنّ $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$$
$$(a)(-1)+(b)(-2)+(c)(0)=0$$
$$-a-2b=0 \ldots (1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$$
$$(a)(3)+(b)(5)+(c)(-1)=0$$
$$3a+5b-c=0 \ldots (2)$$

وهذه جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل a و b و c ولحلها نعطي قيمة اختيارية لأحد المجاهيل ولتكن $b=1$ ، نعوض في المعادلتين وفق:

$$\begin{cases} -a-2=0 \\ 3a-c+5=0 \end{cases}$$

من (1) نجد أنّ:

$$-a-2=0 \rightarrow a=-2$$

نعوض في (2) لنجد أنّ:

$$3(-2)-c+5=0 \rightarrow c=-1$$

ومنه:

$$\vec{n}(-2,1,-1)$$

المعادلة:

$$(ABC): -2(x-2)+1(y-0)-1(z-1)=0$$
$$(ABC): -2x+4+y-z+1=0$$
$$(ABC): -2x+y-z+5=0$$

الخطوة الثانية:

اختبار انتماء النقطة D إلى المستوي (ABC)

$$-2(-3)+(-5)-(6)+5=0$$
$$6-5-6+5=0$$
$$0=0$$

محققة

إذاً: $D \in (ABC)$

وبالتالي النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد معادلته $-2x+y-z+5=0$

اختبار انتماء النقطة E إلى المستوي $(ABCD)$:

$$-2(3)+(1)-(2)+5=0$$
$$-6+1-2+5=0$$
$$-2=0$$

غير محققة

إذاً $E \neq (ABCD)$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا المستويان:

$$P: 2x+y-3z-7=0$$
$$Q: 4x+2y-6z+3=0$$

الطلب الأول:

تحقق أنّ P و Q متوازيان:

الحل:

المستوي P ناظمه $\overrightarrow{n_P}(2,1,-3)$

المستوي Q ناظمه $\overrightarrow{n_Q}(4,2,-6)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان P و Q متوازيان.

الطلب الثاني:

خذ نقطة اختيارية تنتمي إلى المستوي P :

الحل:

لتكن النقطة A تنتمي للمستوي P حيث نأخذ:

$$x_A=0 \quad , \quad y_A=1$$

نعوض في معادلة المستوي P لحساب z_A وفق:

$$P: 2(0)+1-3z_A-7=0$$
$$-3z_A-6=0 \rightarrow z_A=-2$$

ومنه:

$$A(0,1,-2)$$

الطلب الثالث:

احسب البعد بين المستويين P و Q :

الحل:

من الطلب السابق لدينا $A(0,1,-2)$ نقطة تنتمي إلى المستوي P ولحساب البعد بين المستويين P و Q نطبق القانون:

$$dist(A,Q)=\frac{|4(0)+2(1)-6(-2)+3|}{\sqrt{16+4+36}}$$
$$=\frac{|2+12+3|}{\sqrt{56}}=\frac{|17|}{\sqrt{56}}=\frac{17}{56}$$

التمرين السادس:

لتكن لدينا النقاط:

$B(1,1,0)$	$A(1,0,0)$
$D\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$	$C\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$

والمطلوب اكتب معادلة المستوي $(ABCD)$:

الحل:

الخطوة الأولى نكتب معادلة المستوي (ABC) :

إثبات أنّ النقاط A و B و C تشكل مستو وفق:

$$\overrightarrow{AB}(0,1,0) \quad , \quad \overrightarrow{AC}\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنهُ النقاط A و B و C تشكل مستو.

كتابة معادلة المستوي (ABC) وفق:

النقطة: $A(1,0,0)$

الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$

بما أنّ النقاط A و B و C هي نقاط من المستوي (ABC) فإنّ $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$$
$$(a)(0)+(b)(1)+(c)(0)=0$$
$$b=0 \ldots (1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$$
$$(a)(-1)+(b)(1)+(c)\left(\frac{1}{2}\right)=0$$
$$-a+b+\frac{1}{2}c=0 \ldots (2)$$

وهذه جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل a و b و c ولحلها نعطي قيمة اختيارية لأحد المجاهيل ولتكن $c=2$ ، نعوض في المعادلتين وفق:

$$\begin{cases} b=0 \\ -a+b+1=0 \end{cases}$$

من (1) نجد أنّ:

$$b=0$$

نعوض في (2) لنجد أنّ:

$$-a+(0)+1=0 \rightarrow a=1$$

ومنه: $\vec{n}(1,0,2)$

المعادلة:

$$(ABC): 1(x-1)+0(y-0)+2(z-0)=0$$
$$(ABC): x-1+2z=0$$
$$(ABC): x+2z-1=0$$

الخطوة الثانية:

اختبار انتماء النقطة D إلى المستوي (ABC)

نعوّض إحداثيات D في معادلة المستوي:

$$(0)+2\left(\frac{1}{2}\right)-1=0$$
$$1-1=0$$
$$0=0$$

محققة

إذاً: $D\in(ABC)$

ومنهُ تكون معادلة المستوي $(ABCD)$ هي:

$$x+2z-1=0$$

التمثيل الهندسي لمستقيم في الفراغ:تمهيد:

الشكل العام	لدينا المستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}$. التمثيلات الوسيطية لمعادلة المستقيم في الفراغ تعطى وفق: $(d):\begin{cases}x=\alpha t+x_A\\ y=\beta t+y_A\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=\gamma t+z_A\end{cases}$ حيث: شعاع توجيه المستقيم هو: $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$
كتابة التمثيل	لكتابة التمثيل الوسيطي لأيّ مستقيم في الفراغ فإننا نحتاج: * شعاع توجيه المستقيم: $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ * نقطة منهُ: $A(x_A,y_A,z_A)$ * نكتب التمثيل الوسيطي وفق: $(d):\begin{cases}x=\alpha t+x_A\\ y=\beta t+y_A\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=\gamma t+z_A\end{cases}$

حالات إيجاد التمثيل الوسيطي:

الحالة	نص السؤال	فكرة الحل
التمثيل الوسيطي لمستقيم يوازي مستقيم	اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة A والموازي للمستقيم Δ	* تحديد النقطة: (A المعطاة) * تحديد شعاع التوجيه $\vec{u}_d$ للمستقيم d : بما أن المستقيمان d و Δ متوازيان فإن: $\vec{u}_\Delta=\vec{u}_d$ * نكتب التمثيل الوسيطي
التمثيل الوسيطي لمستقيم يعامد مستوي	اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A والعامودي على المستوي P	* تحديد النقطة: (A معلومة) * تحديد شعاع التوجيه $\vec{u}_d$ للمستقيم d : بما أن المستقيم d والمستوي P متعامدان فإن: $\vec{u}_d=\vec{n}_p$ * نكتب التمثيل الوسيطي
التمثيل الوسيطي للمستقيم المار من نقطتين	① صيغة أولى: اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) ② صيغة ثانية: اكتب التمثيل الوسيطي المار من A و B	* تحديد النقطة: إما A أو B * تحديد $\vec{u}$ شعاع توجيه المستقيم: بما أن المستقيم مار بالنقطتين A و B فإن: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ * نكتب التمثيل الوسيطي
التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لمستويان	اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الفصل المشترك للمستويان P و Q	* نأخذ معادلتي المستويان ثم نعطي قيمة اختيارية لأحد المجاهيل بدلالة t ونعوض في معادلتي المستويان فنحصل على جملة معادلتين بمجهولين * بحل هذه الجملة نحصل على جميع المجاهيل بدلالة t فنحصل على التمثيل الوسيطي للفصل المشترك

ملاحظة: في التمثيل الوسيطي لـ:

* مستقيم تكون: $t\in\mathbb{R}$
* نصف مستقيم تكون: $t\in\mathbb{R}_+$
* قطعة مستقيم تكون: $t\in[0,1]$

التمرين الأول: اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) المار من النقطة $A(-1,2,1)$ والذي يوازي المستقيم $\overrightarrow{CD}$ حيث $C(1,0,-3)$ و $D(-1,-2,1)$.

الحل:

النقطة: $A(-1,2,1)$

شعاع التوجيه:

بما أنّ المستقيم (d) و (CD) متوازيان فإنّ:

$$\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{CD}$$
$$\overrightarrow{u_d}(-2,2,3)$$

كتابة التمثيل الوسيطي:
$$d:\begin{cases} x=-2t-1 \\ y=2t+2 \\ z=3t+1 \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا المستوي P الذي معادلتهُ:
$$P: 3x-5z+7=0$$
اكتب معادلة التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة $A(1,-3,2)$ والعمودي على المستوي P .

الحل:

النقطة: $A(1,-3,2)$

شعاع التوجيه:

بما أنّ المستقيم d والمستوي P متعامدان فإنّ:
$$\vec{u}=\overrightarrow{n_P}$$
$$\vec{u}(3,0,-5)$$

المعادلة:
$$d:\begin{cases} x=3t+1 \\ y=-3 \\ z=-5t+2 \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

التمرين الثالث:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) حيث:

$B(3,-1,1)$	$A(2,1,-1)$

الحل:

النقطة: $A(2,1,-1)$

شعاع التوجيه: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ أيّ: $\vec{u}(1,-2,2)$

المعادلة:
$$d:\begin{cases} x=t+2 \\ y=-2t+1 \\ z=2t-1 \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

التمرين الرابع:

أعط تمثيلاً وسيطياً لـ (d) الفصل المشترك للمستويان $P: -x+y+z=3$ و $Q: 2x-y+2z=1$

الحل:
$$\begin{cases} P: -x+y+z=3 \dots (1) \\ Q: 2x-y+2z=1 \dots (2) \end{cases}$$
بجمع (1) و (2) نجد أنّ:
$$x+3z=4$$
$$x=-3z+4 \dots (*)$$
نعوض في (1) وفق:
$$-(-3z+4)+y+z=3$$
$$3z-4+y+z=3$$
$$4z+y=7$$
$$y=-4z+7 \dots (**)$$
لتكن $z=t$ ، نعوض في علاقة $(*)$ و $(**)$:
$$x=-3t+4$$
$$y=-4t+7$$
المعادلة:
$$d:\begin{cases} x=-3t+4 \\ y=-4t+7 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

تطبيقات التمثيل الوسيطي لمستقيم:

التطبيق	نص السؤال	فكرة الحل
إثبات تمثيل وسيطي لمستقيم	أثبت أن معادلة المستقيم d (تمثيله الوسيطي معلوم) هو فصل مشترك للمستويان P و Q حيث (معادلتي P و Q معطاة)	الطريقة الأبسط في الإجابة: نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في كل من معادلتي المستويان P و Q ونثبت أن كل منهما محققة
انتماء نقطة إلى مستقيم في الفراغ	ليكن لدينا المستقيم d تمثيله الوسيطي: $(d):\begin{cases} x=\alpha t+x_A \\ y=\beta t+y_A \\ z=\gamma t+z_A \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$ هل النقطة $B(x_B,y_B,z_B)$ تنتمي الى المستقيم d ؟	* نعوض إحداثيات النقطة في التمثيلات الوسيطية للمستقيم ثم نحدد قيم t * نميز: ☝ الحالة الأولى: قيم t متساوية وبالتالي تكون النقطة B تنتمي إلى المستقيم d ✌ الحالة الثانية: قيم t غير متساوية وبالتالي تكون النقطة B لا تنتمي إلى المستقيم d

التمرين الأول: ليكن لدينا المستويان P و Q حيث:
$$\begin{cases} P: x+2y-z-4=0 \\ Q: 2x+3y-2z-5=0 \end{cases}$$
أثبت أنّ المستويان يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي:
$$d:\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

الحل: نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في P :
$$P: t-2+2(3)-(t)-4=0$$
$$P: t-2+6-t-4=0$$
$$0=0$$
محققة

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في Q :
$$P: 2(t-2)+3(3)-2(t)-5=0$$
$$P: 2t-4+9-2t-5=0$$
$$0=0$$
محققة

إذاً: d هو الفصل المشترك لـ P و Q

التمرين الثاني:

ليكن المستقيم Δ تمثيله الوسيطي:
$$\Delta:\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+1 \\ z=t+2 \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

الطلب الأول:هل النقطة $A(1,0,-1)$ تنتمي إلى Δ :

$1 = 2t - 1 \to t = 1$

$0 = t + 1 \to t = -1$

إذاً $A \notin \Delta$

الطلب الثاني: هل النقطة $B(1,2,-1)$ تنتمي إلى Δ ؟

$1 = 2t - 1 \to t = 1$

$2 = t + 1 \to t = 1$

$-1 = t + 2 \to t = -3$

إذاً $B \notin \Delta$

الطلب الثالث:

هل النقطة $C(1,2,3)$ تنتمي إلى Δ ؟

$1 = 2t - 1 \to t = 1$

$2 = t + 1 \to t = 1$

$3 = t + 2 \to t = 1$

إذاً $C \in \Delta$

الكرة:

تمهيد:

الشكل العام	$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$ حيث: * مركز الكرة: $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ * نصف قطر الكرة: R
كتابة معادلة الكرة	لكتابة معادلة كرة فإنّنا نحتاج: * مركز الكرة: $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ * نصف قطر الكرة: R * تكون معادلة الكرة وفق: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

حالات معادلة الكرة:

الحالة	نص السؤال	فكرة الحل
معادلة كرة مركزها معلوم وتمر من نقطة	اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمرّ من النّقطة A	* تحديد المركز : Ω معلوم * تحديد نصف القطر R: $R = \Omega A$ * نكتب المعادلة
معادلة كرة قطرها $[AB]$	اكتب معادلة الكرة التي قطرها [AB].	* تحديد المركز Ω: النّقطة Ω منتصف [AB] هي مركز هذه الكرة. * تحديد نصف القطر R: - إمّا $R = \Omega A$ - أو $R = \Omega B$ - أو $R = \frac{1}{2}AB$ * نكتب المعادلة.
معادلة كرة مركزها معلوم وتمس مستوي	اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمسّ المستوي P	* تحديد المركز Ω معلوم * تحديد نصف القطر R: بما أنّ الكرة تمسّ المستوي P فإنّ: $R = \mathrm{dist}(\Omega, P)$ * نكتب المعادلة

التمرين الأول:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها r .

الطلب الأول:

$r = 5$	$\Omega(1,2,3)$

الحل:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$$

الطلب الثاني:

$r = \sqrt{3}$	$\Omega(0,5,-1)$

الحل:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$
$$x^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 3$$

التمرين الثاني:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ اكتب معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$

$A(-3,1,2)$	$B(1,0,5)$

الحل:مركز الكرة: منتصف $[AB]$ وفق:

$$\Omega\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

نصف القطر: $\overrightarrow{\Omega A}\left(-2, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$R = \Omega A = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{4 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

نكتب المعادلة وفق:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$
$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$$

التمرين الثالث:

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ نتأمل النقطة $A(2,-2,2)$ والمستو

$P: x+2y+3z=5$

اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي

الحل:

مركز الكرة: $A(2,-2,2)$

نصف القطر:

بما أنّ الكرة وتمس المستوي P فإنّ:

$$R=dist(A,P)=\frac{|2-4+6-3|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{|1|}{\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

نكتب المعادلة وفق:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

$$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$$

معادلات الاسطوانة:

المحور	OX	OY	OZ
مركز قاعدتها الأولى	$A(x_A,0,0)$	$A(0,y_A,0)$	$A(0,0,z_A)$
مركز قاعدتها الثانية	$B(x_B,0,0)$	$B(0,y_B,0)$	$B(0,0,z_B)$
نصف قطر القواعد	r		
شكل المعادلة	$\begin{cases}y^2+z^2=r^2\\ x_A\le x\le x_B\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+z^2=r^2\\ y_A\le y\le y_B\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+y^2=r^2\\ z_A\le z\le z_B\end{cases}$

معادلات المخروط:

المحور	OX	OY	OZ
الرأس	المبدأ O		
مركز قاعدته	$A(x_A,0,0)$	$A(0,y_A,0)$	$A(0,0,z_A)$
نصف قطر القاعدة	r		
شكل المعادلة	$\begin{cases}y^2+z^2=\frac{r^2}{(x_A)^2}x^2\\ 0\le x\le x_A\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+z^2=\frac{r^2}{(y_A)^2}y^2\\ 0\le y\le y_A\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+y^2=\frac{r^2}{(z_A)^2}z^2\\ 0\le z\le z_A\end{cases}$

أنماط التمارين:

الأنماط	الأول	الثاني	الثالث
نص السؤال	اكتب معادلة (الأسطوانة/ المخروط).	صف مجموع النّقاط الّتي تحقّق المعادلة (معطاة).	هل النّقطة A تقع على (الأسطوانة/ المخروط)؟
فكرة الحل	قانون وتعويض.	نحدّد ماذا تمثّل المعادلة حسب ما ورد معنا في المخططات السّابقة.	* نعوّض إحداثيّات النّقطة في المعادلة * ونميز: ☝ الحالة الأولى: تحقق الشرطين إذاً النقطة A تنتمي إلى (الاسطوانة/المخروط) ✌ الحالة الثانية: اختلال أحد الشرطين إذاً النقطة A تنتمي إلى (السطوانة/المخروط)

التمرين الأول:

في كل حالة من الحالات الآتية ، اكتب معادلة الاسطوانة التي محورها $(O,\vec{\imath})$ ومركزي قاعدتها $A(4,0,0)$ و $B(8,0,0)$ ونصف قطرها $2\sqrt{2}$

الحل:

$$\begin{cases}y^2+z^2=r^2\\ x_A\le x\le x_B\end{cases}$$

$$y^2+z^2=8$$

$$4\le x\le 8$$

التمرين الثاني:

في كل حالة من الحالات الآتية ، اكتب معادلة المخروط التي محوره $(O,\vec{\imath})$ ورأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $(4,0,0)$ ونصف قطرها 3

الحل:

$$\begin{cases}y^2+z^2=\frac{r^2}{(x_A)^2}x^2\\ 0\le x\le x_A\end{cases}$$

$$y^2+z^2=\frac{9}{16}x^2$$

$$0\le x\le 4$$

التمرين الثالث:

في كل حالة من الحالات الآتية ، صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي إحداثياتها تحقق العلاقات الآتية:

الطلب الأول:

$$\begin{cases}y^2+z^2=16\\ 3\le x\le 7\end{cases}$$

الحل:

معادلة اسطوانة محورها $(O,\vec{\imath})$ ونصف قطرها $r=4$ ومركزي قاعدتيها $A(3,0,0)$ و $B(7,0,0)$

الطلب الثاني:

$$\begin{cases}x^2+y^2=\frac{9}{25}z^2\\ 0\le z\le 5\end{cases}$$

الحل: تمثل مخروط محوره $\left(O,\vec{k}\right)$ ورأسه المبدأ O ومركز قاعدته $(0,0,5)$ ونصف قطرها $r=3$

التمرين الرابع:

لدينا معادلة الاسطوانة $\begin{cases} x^2+z^2=9 \\ 1\le y\le 5 \end{cases}$ ولدينا النقاط $A(3,2,0)$ و $B(3,9,0)$ و $C(\sqrt{3},2,1)$ هل النقاط A و B و C تقع على الاسطوانة؟

الحل:

اختبار النقطة A:

$$(3)^2+(0)^2=9\to 9=9$$
$$1\le 2\le 5$$
محققة

إذاً النقطة A تقع على الاسطوانة.

اختبار النقطة B:

$$(3)^2+(0)^2=9\to 9=9$$
$$1\le 9\le 5$$
غير محققة

إذاً النقطة B لا تقع على الاسطوانة.

اختبار النقطة C:

$$\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2=9\to 10\ne 9$$
غير محققة

إذاً النقطة C لا تقع على الاسطوانة.

التمرين الخامس:

لدينا معادلة المخروط $\begin{cases} x^2+y^2=3z^2 \\ 0\le z\le 1 \end{cases}$ ولدينا النقاط $A(0,\sqrt{3},1)$ و $B(1,2,3)$ و $C(-1,1,2)$ هل النقاط A و B و C تقع على الاسطوانة؟

الحل:

اختبار النقطة A:

$$(0)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=3(1)^2\to 3=3$$
$$0\le 1\le 1$$
محققة

إذاً النقطة A تقع على المخروط.

اختبار النقطة B:

$$(1)^2+(1)^2=3(3)^2\to 2=27$$
غير محققة

إذاً النقطة B لا تقع على المخروط.

اختبار النقطة C:

$$(-1)^2+(1)^2=3(2)^2\to 2=12$$
غير محققة

إذاً النقطة C لا تقع على المخروط.

الأوضاع النسبية:

الوضع النسبي لمستويان في الفراغ:

نص السؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ P و Q متوازيان	نثبت أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ مرتبطان خطيّاً
أثبت أنّ P و Q متقاطعان	نثبت أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطيّاً
أثبت أنّ P و Q متعامدان	نثبت أنّ: $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0$
أثبت أنّ P و Q منطبقان	نثبت أنّ معادلتي P و Q متكافئتان أيّ: إحدى المعادلتين تنتج عن الاخرى بضربها بعدد حقيقي
في حال تقاطع P و Q ما هو تقاطعهما؟	تقاطعهما هو فصل مشترك (مستقيم)
اكتب التّمثيل الوسيطي للفصل المشترك لـ P و Q	الحالة الرّابعة من حالات كتابة التّمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ

التمرين الأول:

في الحالات الآتية

ادرس الوضع النسبي للمستويين P و Q .

الطلب الأول: $\begin{cases} P: x-4y+7=0 \\ Q: x+2y-z+1=0 \end{cases}$

الحل:

المستوي P ناظمه $\overrightarrow{n_P}(1,-4,0)$

المستوي Q ناظمه $\overrightarrow{n_Q}(1,2,-1)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان P و Q متقاطعان.

الطلب الثاني:

$$\begin{cases} P: x-2y+3z-1=0 \\ Q: 2x-4y+6z=0 \end{cases}$$

الحل:

المستوي P ناظمه $\overrightarrow{n_P}(1,-2,3)$

المستوي Q ناظمه $\overrightarrow{n_Q}(2,-4,6)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان P و Q متوازيان.

الطلب الثالث:

$$\begin{cases} P: x+2y+4z-5=0 \\ Q: 2x+y-z+1=0 \end{cases}$$

الحل:

المستوي P ناظمه $\overrightarrow{n_P}(1,2,4)$

المستوي Q ناظمه $\overrightarrow{n_Q}(2,1,-1)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان P و Q متقاطعان.

التمرين الثاني:

نتأمل المستويان:

$$\begin{cases} P: 2x+y-z+2=0 \\ Q: x+2y-z+1=0 \end{cases}$$

الطلب الأول: أثبت أنّ P و Q متقاطعان

الحل:

المستوي P ناظمه $\overrightarrow{n_P}(2,1,-1)$

المستوي Q ناظمه $\overrightarrow{n_Q}(1,2,-1)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان P و Q متقاطعان.

الطلب الثاني:

جد تمثيل وسيطي لـ d الفصل المشترك للمستويان P و Q .

الحل:

$$\begin{cases} P: 2x + y - z + 2 = 0 \\ Q: x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

نأخذ $y = t$ نعوض في المعادلتين وفق:

$$\begin{cases} 2x + t - z + 2 = 0 \\ x + 2t - z + 1 = 0 \end{cases}$$

نضرب المعادلة (2) بالعدد (-2) وفق:

$$\begin{cases} 2x + t - z + 2 = 0 \\ -2x - 4t + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

بجمع (1) و $(2)'$ نجد أنّ:

$$-3t + z = 0 \to z = 3t$$

نعوض في (2) :

$$x + 2t - 3t + 1 = 0 \to x = t - 1$$

وبالتالي يكون التمثيل الوسيطي للمستقيم d الذي يمثل الفصل المشترك للمستويان P و Q وفق:

$$d: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \qquad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$$

التمرين الثالث:

بيّن في كل من الحالات الآتية

إذا كان المستويان P و Q متعامدان

الطلب الأول:

$$\begin{cases} P: x + 2y - 5z + 7 = 0 \\ Q: x + 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

الحل:

المستوي P ناظمه $\overrightarrow{n_P}(1,2,-5)$

المستوي Q ناظمه $\overrightarrow{n_Q}(1,2,1)$

لدينا:

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = (1)(1) + 2(2) + (-5)(1)$$
$$1 + 4 - 5 = 0$$

ومنه المستويان P و Q متعامدان

الطلب الثاني:

$$\begin{cases} P: x - 3y + 2 = 0 \\ Q: y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

الحل:

المستوي P ناظمه $\overrightarrow{n_P}(1,-3,0)$

المستوي Q ناظمه $\overrightarrow{n_Q}(0,1,-2)$

لدينا:

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = (1)(0) + (-3)(1) + (0)(-2)$$
$$-3 \neq 0$$

ومنه المستويان P و Q متعامدان

الوضع النسبي لمستقيمان في الفراغ:

نص السّؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ d_1 و d_2 متوازيان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ مرتبطان خطّيّاً * d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة
أثبت أنّ d_1 و d_2 منطبقان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ مرتبطان خطّيّاً * d_1 و d_2 يشتركان بعدد لا نهائي من النّقاط
أثبت أنّ d_1 و d_2 متخالفان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطّيّاً * d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة
أثبت أنّ d_1 و d_2 متقاطعان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطّيّاً * d_1 و d_2 يشتركان بنقطة
أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع d_1 و d_2	بالحلّ المشترك لجملة التّمثيلات الوسيطيّة لـ d_1 و d_2
أثبت أنّ d_1 و d_2 متعامدان	نثبت أنّ: $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$
هل d_1 و d_2 يقعان في مستوٍ واحد؟	ندرس الوضع النّسبي لـ d_1 و d_2 ونميّز الحالات: حالة ①: d_1 و d_2 متخالفان، إذاً d_1 و d_2 لا يقعان في مستوٍ واحد حالة ②: باقي الحالات إذاً d_1 و d_2 يقعان في مستوٍ واحد.

التمرين الأول:

ادرس الوضع النسبي للمستقيمان d_1 و d_2 في كل من الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

$$d_1: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t \qquad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

$$d_2: \begin{cases} x = -9t + 4 \\ y = -12t + 4 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$$

الحل:

لدينا المستقيم d_1 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_1}(3,4,-1)$

لدينا المستقيم d_2 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_2}(-9,-12,3)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 إما متوازيان أو منطبقان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d_1 تمثيله الوسيطي:

$$d_1:\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

لدينا المستقيم d_2 تمثيله الوسيطي:

$$d_2:\begin{cases} x = -9s + 4 \\ y = -12s + 4 \,; s \in \mathbb{R} \\ z = 3s \end{cases}$$

فيكون:

$$\begin{cases} 3t + 1 = -9s + 4 \ldots (1) \\ 4t = -12s + 4 \quad \ldots (2) \\ -t + 1 = 3s \quad \ldots (3) \end{cases}$$

والجملة السابقة هي جملة ثلاثة معادلات بمجهولين t و s لذلك نختار جملة معادلتين بمجهولين ولتكن:

$$\begin{cases} 3t + 1 = -9s + 4 \ldots (1) \\ -t + 1 = 3s \quad \ldots (2) \end{cases}$$

وهذه جملة معادلتين بمجهولين (t و s) نحلها إما حذف بالجمع أو الحذف بالتعويض وفق:

نضرب المعادلة (2) بالعدد (3) وفق:

$$\begin{cases} 3t + 1 = -9s + 4 \ldots (1) \\ -3t + 3 = 0s \quad \ldots (2)' \end{cases}$$

بجمع (1) و $(2)'$ نجد أنّ:

$$4 = 4$$

محققة.

وهذه الجملة لها عدد غير منته من الحلول أي يوجد للمعادلة حل وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 يشتركان بنقطة ومنهُ d_1 و d_2 متوازيان.

الحالة الثانية:

$$d_1:\begin{cases} x = t \\ y = -t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

$$d_2:\begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

الحل:

لدينا المستقيم d_1 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_1}(1,-1,2)$

لدينا المستقيم d_2 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_2}(1,-1,2)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 إما متوازيان أو منطبقان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d_1 تمثيله الوسيطي:

$$d_1:\begin{cases} x = t \\ y = -t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

لدينا المستقيم d_2 تمثيله الوسيطي:

$$d_2:\begin{cases} x = s \\ y = -s + 1 \,; s \in \mathbb{R} \\ z = 2s - 1 \end{cases}$$

فيكون:

$$\begin{cases} t = s \quad \ldots (1) \\ -t = -s + 1 \quad \ldots (2) \\ 2t - 1 = 2s - 1 \;\ldots (3) \end{cases}$$

وهذه جملة ثلاثة معادلات بمجهولين نأخذ منها:

$$\begin{cases} t = s \quad \ldots (1) \\ -t = -s + 1 \ldots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$0 = 1$$

غير محققة.

إذاً ليس للجملة السابقة حل وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة ومنهُ المستقيمان d_1 و d_2 متوازيان.

الحالة الثالثة:

$$d_1:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = -3t + 3 \end{cases}$$

$$d_2:\begin{cases} x = t \\ y = -3t - 3 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

الحل:

لدينا المستقيم d_1 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_1}(1,-3,-3)$

لدينا المستقيم d_2 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_2}(1,-3,-1)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d_1 تمثيله الوسيطي:

$$d_1:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = -3t + 3 \end{cases}$$

لدينا المستقيم d_2 تمثيله الوسيطي:

$$d_2:\begin{cases} x = s \\ y = -3s - 3 \,; s \in \mathbb{R} \\ z = -s + 1 \end{cases}$$

فيكون:

$$\begin{cases} t + 1 = s \quad \ldots (1) \\ -3t + 2 = -3s - 3 \ldots (2) \\ -3t + 3 = -s + 1 \quad \ldots (3) \end{cases}$$

وهذه جملة ثلاثة معادلات بمجهولين نأخذ منها:

$$\begin{cases} t + 1 = s \quad \ldots (1) \\ -3t + 2 = -3s - 3 \ldots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد (3) وفق:

$$\begin{cases} 3t + 3 = 3s \quad \ldots (1)' \\ -3t + 2 = -3s - 3 \ldots (2) \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد أنّ:

$$5 = -3$$

غير محققة.

إذاً ليس للجملة السابقة حل وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة ومنهُ المستقيمان d_1 و d_2 متخالفان.

الحالة الرابعة:

الطلب الأول: ادرس الوضع النسبي بين d_1 و d_2:

$$d_1:\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-3\,;t\in\mathbb{R} \\ z = -t+2 \end{cases}$$

$$d_2:\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = -t-1\,;t\in\mathbb{R} \\ z = -t+1 \end{cases}$$

الحل:

لدينا المستقيم d_1 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_1}(1,2,-1)$

لدينا المستقيم d_2 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_2}(3,-1,-1)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d_1 تمثيله الوسيطي:

$$d_1:\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-3\,;t\in\mathbb{R} \\ z = -t+2 \end{cases}$$

لدينا المستقيم d_2 تمثيله الوسيطي:

$$d_2:\begin{cases} x = 3s+2 \\ y = -s-1\,;s\in\mathbb{R} \\ z = -s+1 \end{cases}$$

فيكون:

$$\begin{cases} t+1 = 3s+2 \ldots(1) \\ 2t-3 = -s-1 \ldots(2) \\ -t+2 = -s+1 \ \ldots(3) \end{cases}$$

وهذه جملة ثلاثة معادلات بمجهولين نأخذ منها:

$$\begin{cases} t+1 = 3s+2 \ldots(1) \\ -t+2 = -s+1 \ldots(3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) نجد أنّ:

$$3 = 2s+3 \to 2s = 0 \to s = 0$$

نعوض في (1) وفق:

$$t+1 = 0+2 \to t = 1$$

نتحقق في المعادلة المتبقية (2) وفق:

$$2(1)-3 = 0-1$$

$$-1 = -1$$

محققة

إذاً يوجد للجملة السابقة حل هو $t = 1$ و $s = 0$

وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 يشتركان بنقطة وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 متقاطعان.

الطلب الثاني:

أوجد إحداثيات النقطة I

نقطة تقاطع المستقيمان d_1 و d_2:

الحل:

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمان d_1 و d_2 فإننا نعوض قيمة $(t = 1)$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d_1 وفق:

$$x = t+1 \to x = 2$$

$$y = 2t-3 \to y = -1$$

$$z = -t+2 \to z = 1$$

ومنهُ:

$$I = (2,-1,1)$$

ملاحظة:

من الممكن أيضاً إيجاد احداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيمان d_1 و d_2 وذلك بتعويض قيمة $(s = 0)$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d_2

التمرين الثاني:

لدينا d المستقيم المار من النقطة $A(2,0,5)$ والموجه بالشعاع $\vec{u}(2,5,-1)$ والمستقيم d' المار من النقطة $B(2,2,-1)$ والموجه بالشعاع $\vec{v}(1,2,1)$ ، وهل المستقيمان d و d' متقاطعان؟ وفق حالة الإيجاب عين نقطة تقاطعهما.

الحل:

الجزء الأول من السؤال: إثبات التقاطع:

لدينا المستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}(2,5,-1)$

لدينا المستقيم d' شعاع توجيهه $\vec{v}(1,2,1)$

نلاحظ أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان d و d' إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d تمثيله الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 5t \qquad ;t\in\mathbb{R} \\ z = -t+5 \end{cases}$$

لدينا المستقيم d' تمثيله الوسيطي:

$$d':\begin{cases} x = s+2 \\ y = 2s+2\,;s\in\mathbb{R} \\ z = s-1 \end{cases}$$

فيكون:

$$\begin{cases} 2t+2 = s+2 \ldots(1) \\ 5t = 2s+2 \ \ \ldots(2) \\ -t+5 = s-1 \ldots(3) \end{cases}$$

وهذه جملة ثلاثة معادلات بمجهولين نأخذ منها:

$$\begin{cases} 2t+2 = s+2 \ldots(1) \\ -t+5 = s-1 \ldots(3) \end{cases}$$

نضرب (3) و (2) نجد أنّ:

$$\begin{cases} 2t+2 = s+2 \quad \ldots(1) \\ -2t+10 = 2s-2 \ \ldots(3)' \end{cases}$$

بجمع (1) و $(3)'$ لنجد أنّ:

$$12 = 3s \to s = 4$$

نعوض في (3) وفق:

$$-t+5 = 2(4)-2 \to t = 2$$

نتحقق في المعادلة المتبقية (2) وفق:

$$5(2) = 2(4)+2$$

$$10 = 10$$

محققة

إذاً يوجد للجملة السابقة حل هو $t = 2$ و $s = 4$

وبالتالي المستقيمان d و d' يشتركان بنقطة وبالتالي المستقيمان d و d' متقاطعان.

الجزء الثاني من السؤال: إيجاد نقطة التقاطع:

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمان d و d' فإننا نعوض قيمة $(t = 4)$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d' وفق:

$$x = s+2 \to x = 4$$

$$y = 2s+2 \to y = 6$$

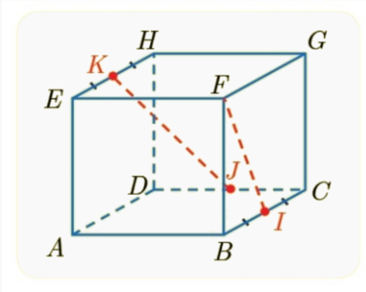
$$z = s-1 \to z = 3$$

ومنهُ:

$$I = (4,6,3)$$

التمرين الثالث:

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه I ، فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منتصف $[EH]$ نتأمل المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$



1. أعط تمثيلاً وسيطياً لكل من (FJ) و (IK)

2. أيتقاطع المستقيمان (IK) و (FJ) ؟ هل النقاط I و J و K و F في مستو واحد؟

التمرين الرابع: دورة 2017 الثانية:

ليكن لدينا المستقيمان d_1 و d_2 حيث:

$$d_1:\begin{cases} x = t+1 \\ y = -3t+2 \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = -3t+3 \end{cases}$$

$$d_2:\begin{cases} x = s \\ y = -3s+3 \ ; s \in \mathbb{R} \\ z = -s+1 \end{cases}$$

الطلب الأول:

اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمان d_1 و d_2

الحل:

لدينا المستقيم d_1 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_1}(1,-3,-3)$

لدينا المستقيم d_2 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_2}(1,-3,-1)$

الطلب الثاني:

هل المستقيمان d_1 و d_2 يقعان في مستو واحد علل إجابتك.

الحل:

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d_1 تمثيله الوسيطي:

$$d_1:\begin{cases} x = t+1 \\ y = -3t+2 \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = -3t+3 \end{cases}$$

لدينا المستقيم d_2 تمثيله الوسيطي:

$$d_2:\begin{cases} x = s \\ y = -3s+3 \ ; s \in \mathbb{R} \\ z = -s+1 \end{cases}$$

فيكون:

$$\begin{cases} t+1 = s \quad \dots(1) \\ -3t+2 = -3s+3 \dots(2) \\ -3t+3 = -s+1 \quad \dots(3) \end{cases}$$

وهذه جملة ثلاثة معادلات بمجهولين نأخذ منها:

$$\begin{cases} t+1 = s \quad \dots(1) \\ -3t+2 = -3s+3 \dots(2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد (3) وفق:

$$\begin{cases} 3t+3 = 3s \quad \dots(1)' \\ -3t+2 = -3s-3 \dots(2) \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد أنّ:

$$5 = 3$$

غير محققة.

إذاً ليس للجملة السابقة حل وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة ومنهُ المستقيمان d_1 و d_2 متخالفان وبالتالي d_1 و d_2 لا يقعان في مستو واحد لأنهما متخالفان.

التمرين الخامس: دورة 2019 الأولى:

لدينا النقطتان $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$ والمطلوب:

الطلب الأول:

اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم d المار من A ويقبل $\vec{u}(2,2,1)$.

الحل:

$$d:\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 2t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = t+1 \end{cases}$$

الطلب الثاني:

أثبت أنّ المستقيمان (AB) و d متعامدان.

الحل:

المستقيم (AB) شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$

المستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}(2,2,1)$ ومنهُ:

$$\overrightarrow{AB}.\vec{u} = -2+2+0 = 0$$

إذاً المستقيمان d_1 و (AB) متعامدان.

دراسة الوضع النسبي بين مستقيم ومستوي في الفراغ:

نص السّؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ P و d متوازيان	نثبت أنّ: $\vec{n}.\vec{u} = 0$
أثبت أنّ P و d متقاطعان	نثبت أنّ: $\vec{n}.\vec{u} \neq 0$
أثبت أنّ P و d متعامدان بحيث $\vec{n}$ معلوم	نثبت أنّ $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطّياً
أثبت أنّ P و d متعامدان بحيث $\vec{n}$ غير معلوم	نثبت أنّ شعاع توجيه المستقيم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطّياً من المستوي
أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي P	بالحلّ المشترك لجملة معادلات المستوي ومعادلات المستقيم نحصل على نقطة التّقاطع
هل المستقيم d محتوى في المستوي P ؟	بالحلّ المشترك لجملة المعادلات الأربعة نلاحظ أن المستقيم والمستوي يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط إذاً المستقيم محتوى في المستوي

التمرين الأول:

نتأمل النقطتين $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$ والمستوى: $P: 2x - y + z - 2 = 0$

الطلب الأول:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) .

الحل:

النقطة: $A(2,1,-2)$

شعاع التوجيه: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ومنهُ: $\vec{u}(-3,1,3)$

$$(AB): \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t + 1 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3t - 2 \end{cases}$$

الطلب الثاني:

تيّقن أنّ (AB) يقطع المستوي P :

الحل:

المستقيم (AB) شعاع توجيه $\vec{u}(-3,1,3)$ والمستوي P ناظمه: $\overrightarrow{n_P}(2,-1,1)$ ومنهُ:

$$\overrightarrow{n_P}.\vec{u} = -6 - 1 + 3 = -4 \neq 0$$

إذا المستقيم d والمستوي P متقاطعان.

الطلب الثالث:

حدد إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي P

الحل:

لتكن الجملة:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \dots (1) \\ x = -3t + 2 \dots (2) \\ y = t + 1 \quad \dots (3) \\ z = 3t - 2 \quad \dots (4) \end{cases}$$

لحل هذه الجملة "دوماً" :

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) :

$$2(-3t + 2) - (t + 1) + (3t - 2) - 2 = 0$$
$$-6t + 4 - t - 1 + 3t - 2 - 2 = 0$$
$$-4t - 1 = 0 \to t = -\frac{1}{4}$$

نعوض قيمة t في (2) و (3) و (4) وفق:

$$(2): x = -3\left(-\frac{1}{4}\right) + 2 \to x = \frac{11}{4}$$
$$(3): y = \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 \to y = \frac{3}{4}$$
$$(4): z = 3\left(-\frac{1}{4}\right) - 2 \to x = -\frac{11}{4}$$

ومنهُ نقطة التقاطع هي:

$$I\left(\frac{11}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{11}{4}\right)$$

ملاحظة: انتبه هنا لا نضرب بالعدد (4) لأنها نقطة.

التمرين الثاني:

نتأمل النقطتان $A(2,5,3)$ و $B(-1,0,-1)$ ولدينا مستوي P يقبل: $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين موجهين لهُ والمطلوب:

أثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي P .

الحل:

هنا لا نعلم ناظم المستوي P لذلك لإثبات أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي P يكفي إثبات أنّ $\overrightarrow{AB}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي P :

نلاحظ أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً (من P) .

نعلم أنّ شعاع توجيه المستقيم (AB) هو $\overrightarrow{AB}(-3,-5,-4)$.

ولدينا:

$$\overrightarrow{AB}.\vec{u} = -3 - 5 + 8 = 0$$

إذاً: $\overrightarrow{AB}$ عمودي على $\vec{u}$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AB}.\vec{v} = -9 + 5 + 4 = 0$$

إذاً: $\overrightarrow{AB}$ عمودي على $\vec{v}$

بما أن $\overrightarrow{AB}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من P فهذا يعني أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي P .

التمرين الثالث:

ليكن المستقيم d المعطى وفق:

$$d: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$$

والمستوي P الذي معادله: $P: x + 2z + 1 = 0$

أثبت أنّ d محتوى في المستوي P .

الحل:

المستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}(0,1,0)$

والمستوي P ناظمه $\vec{n}(1,0,2)$

وبما أنّ:

$$\vec{u}.\vec{n} = 0 + 0 + 0 = 0$$

إذاً المستقيم d والمستوي P متوازيان.

اختبار الاحتواء:

$$\begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \dots (1) \\ x = 1 \quad \dots (2) \\ y = t \quad \dots (3) \\ z = -1 \dots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$1 - 2 + 1 = 0$$
$$0 = 0$$

محققة

للجملة عدد لا نهائي من الحلول

إذاً المستقيم d محتوى في المستوي P

التمرين الرابع:

لتكن لدينا المستويات P و Q و R معادلاتها:

$$P: x + 2y - 2z - 3 = 0$$
$$Q: 2x + y - z - 3 = 0$$
$$R: x - y + z = 0$$

أثبت أنّ المستويات Q و R يتقاطعان بمستقيم فصل مشترك d ثم أثبت أنّ d محتوى في المستوي P .

الحل:

إثبات أنّ Q و R يتقاطعان بمستقيم d :

المستوي Q ناظمه: $\overrightarrow{n_Q}(2,1,-2)$

المستوي R ناظمه: $\overrightarrow{n_R}(1,-1,1)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_Q}$ و $\overrightarrow{n_R}$ غير مرتبطين خطياً

إذاً المستويان Q و R متقاطعان.

إيجاد المستقيم d وفق:

$$\begin{cases} 2x+y-z-3=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

نأخذ $z=t$ ونعوض:

$$\begin{cases} 2x+y-t-3=0 \\ x-y+t=0 \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$3x-3=0 \to x=1$$

نعوض في (1) لنجد أنّ

$$2+y-t-3=0 \to y=t+1$$

وبالتالي يكون التمثيل الوسيطي للمستقيم d الضي يمثل الفصل المشترك للمستويان Q و R وفق:

$$(d):\begin{cases} x=1 \\ y=t+1\,;t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

إثبات أنّ d محتوى في المستوي P:

المستقيم d شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_d}(0,1,1)$

المستوي P ناظمهُ: $\vec{n}(1,2,-2)$

ومنهُ:

$$\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_p}=0+2-2=0$$

إذاً المستوي P والمستقيم d متوازيان.

اختبار الاحتواء:

$$\begin{cases} x+2y-2z-3=0 \;...(1) \\ x=1 \quad ...(2) \\ y=t+1 \quad ...(3) \\ z=t \quad ...(4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$1+2t+2-2t-3=0$$
$$0=0$$

محققة.

ومنهُ للجملة عدد لا نهائي من الحلول.

أو أنّ المستقيم d محتوى في المستوي P

دراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات في الفراغ:

* نصّ السّؤال:

ادرس الوضع النّسبي للمستويات P و Q و R .

* فكرة الحلّ:

☝ الخطوة الأولى:

باستخدام طريقة غاوس نحلّ جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل (معادلات P و Q و R).

✌ الخطوة الثانية:نميّز الحالات:

① الحالة الأولى:

إذا كانت الجملة مستحيلة الحلّ: فهذا يعني أنّ المستويات P و Q و R لا تشترك بأيّة نقطة.

② الحالة الثّانية:

إذا كان للجملة حلّ وحيد: فهذا يعني أنّ المستويات P و Q و R تشترك بنقطة وحيدة وإحداثيّات هذه النّقطة هي حلّ الجملة

③ الحالة الثّالثة:

إذا كان للجملة عدد لا نهائي من الحلول: فهذا يعني أنّ المستويات P و Q و R تشترك بعدد لا نهائي من النّقاط وبالتّالي المستويات تشترك بمستقيم d (فصل مشترك)

ملاحظات هامة جداً:

* الملاحظة الأولى:

إذا كان للجملة عدد لا نهائي من الحلول وطلب منّا إيجاد التّمثيل الوسيطي للمستويات فإنّنا نأخذ المعادلتين L_1 و L_2' ونتابع كما في الحالة الرّابعة من حالات التّمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ.

* الملاحظة الثانية:

نصّ السّؤال:

لدينا ثلاث مستويات P و Q و R والمطلوب:

1. اكتب التّمثيل الوسيطي للمستقيم d الفصل المشترك لـP وQ (تمّ مناقشة الفكرة سابقاً)
2. أثبت أنّ المستقيم d والمستوي R متقاطعان (تمّ مناقشة الفكرة سابقاً)
3. استنتج نقطة تقاطع المستويات P و Q و R، في هذه الحالة نقطة تقاطع المستويات P و Q و R هي ذاتها نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي R

للتنويه:

* في حال عدم تدريج الطلبات فهذا يعني استخدام طريقة غاوس
* في حال كان السؤال حل الجمل الخطيّة الموفقة فهذا يعني استخدام غاوس.

التمرين الأول:

ادرس الوضع النسبي للمستويات في كل من الحالات:

الحالة الأولى:

$$\begin{cases} P_1:5x+y+z=-5 \\ P_2:2x+13y-7z=-1 \\ P_3:x-y+z=1 \end{cases}$$

الحل:

باستخدام طريقة غاوس نحل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} x-y+z=1 \quad ...(\mathrm{L}_1) \\ 2x+13y-7z=-1 \quad ...(\mathrm{L}_2) \\ 5x+y+z=-5 \quad ...(\mathrm{L}_3) \end{cases}$$

المرحلة الأولى:

$$-2\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2 \to (\mathrm{L}_2)'$$
$$-5\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_3 \to (\mathrm{L}_3)'$$

$$\begin{cases} x-y+z=1 \quad ...(\mathrm{L}_1) \\ 15y-9z=-3 \quad ...(\mathrm{L}_2)' \\ 6y-4z=-10 \quad ...(\mathrm{L}_3)' \end{cases}$$

المرحلة الثانية:

$$-\frac{6}{15}\mathrm{L}_2'+\mathrm{L}_3' \to (\mathrm{L}_3)''$$

$$\begin{cases} x-y+z=1 \quad ...(\mathrm{L}_1) \\ 15y-9z=-3 \quad ...(\mathrm{L}_2)' \\ -\frac{2}{5}z=-\frac{44}{5} \quad ...(\mathrm{L}_3)'' \end{cases}$$

ومنهُ:

من $(\mathrm{L}_3)''$ نجد أنّ $z=22$

نعوض في $(\mathrm{L}_2)'$ نجد:

$$15y-9(22)=-3$$
$$15y=-3+198$$
$$15y=195$$
$$y=13$$

نعوض في (L_1) نجد أنّ:

$$x-13+22=1 \to x=-8$$

ومنهُ للجملة حل وحيد

$$x=-8 \;,\; y=13 \;,\; z=22$$

إذاً المستويات P_1 و P_2 و P_3 تشترك بنقطة واحدة هي: $I(-8,13,22)$

الحالة الثانية:

$$\begin{cases} P_1: 2x - y + 3z = 0 \\ P_2: x + 2y + z = 0 \\ P_3: 3x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

الحل:

باستخدام طريقة غاوس نحل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & \dots (L_1) \\ 2x - y + 3z = 0 & \dots (L_2) \\ 3x - 4y + 5z = 0 & \dots (L_3) \end{cases}$$

المرحلة الأولى:

$$-2L_1 + L_2 \to (L_2)'$$
$$-3L_1 + L_3 \to (L_3)'$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & \dots (L_1) \\ -5y + z = 0 & \dots (L_2)' \\ -10y + 2z = 0 & \dots (L_3)' \end{cases}$$

المرحلة الثانية:

$$-2L_2' + L_3' \to (L_3)''$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & \dots (L_1) \\ -5y + z = 0 & \dots (L_2)' \\ 0 = 0 & \dots (L_3)'' \end{cases}$$

إذاً للجملة عدد لا نهائي من الحلول وبالتالي المستويات P_1 و P_2 و P_3 تشترك بفصل مشترك d

إيجاد التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d :

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \dots (1) \\ -5y + z = 0 \quad \dots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد أنّ:

$$z = 5y \dots (*)$$

نعوض في (1) فنجد أنّ:

$$x = -7y \dots (**)$$

بفرض $y = t$ نجد أنّ:

نعوض في $(*)$ و $(**)$:

$$x = -7t \quad , \quad z = 5t$$

ومنهُ:

$$\begin{cases} x = -7t \\ y = t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 5t \end{cases}$$

الحالة الثالثة:

$$\begin{cases} P_1: 2x - y + 3z = 2 \\ P_2: x + 2y + z = 1 \\ P_3: 3x - 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

الحل:

باستخدام طريقة غاوس نحل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 & \dots (L_1) \\ 2x - y + 3z = 2 & \dots (L_2) \\ 3x - 4y + 5z = 4 & \dots (L_3) \end{cases}$$

المرحلة الأولى:

$$-2L_1 + L_2 \to (L_2)'$$
$$-3L_1 + L_3 \to (L_3)'$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 & \dots (L_1) \\ -5y + z = 0 & \dots (L_2)' \\ -10y + 2z = 1 & \dots (L_3)' \end{cases}$$

المرحلة الثانية:

$$-2L_2' + L_3' \to (L_3)''$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 & \dots (L_1) \\ -5y + z = 0 & \dots (L_2)' \\ 0 = 1 & \dots (L_3)'' \end{cases}$$

ومنهُ:

إذاً الجملة مستحيلة الحل وبالتالي المستويات P_1 و P_2 و P_3 لا تشترك بأيّة نقطة.

الوضع النسبي لمستوي وكرة:

الفكرة	نص السؤال	طريقة الإجابة
الوضع النسبي لمستوي وكرة	ليكن لدينا المستوي P والكرة S مركزها Ω، ونصف قطرها R، والمطلوب: إمّا: أثبت أنّ المستوي P مماس للكرة S. أو: أثبت أنّ المستوي P قاطع للكرة S. أو: أثبت أنّ المستوي P خارج للكرة S. أو: ادرس الوضع النّسبي للمستوي P والكرة S.	* نحدّد R نصف قطر الكرة و Ω مركزها. * نوجد بُعد مركز الكرة عن المستوي P، أي نوجد $dist(\Omega, P)$ ونميّز: ▪ $dist(\Omega, P) > R$: فإنّ المستوي P خارج الكرة S. ▪ $dist(\Omega, P) = R$: فإنّ المستوي P مماس للكرة S. ▪ $dist(\Omega, P) < R$: فإنّ المستوي P قاطع للكرة S.
تحديد نقطة تماس المستوي P والكرة S	ليكن لدينا المستوي P والكرة S، أوجد إحداثيات نقطة تماس P و S	تكون نقطة التّماس هي المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي P

تمرين:

ادرس الوضع النسبي بين المستوي $P: x + y - z + 6 = 0$ والكرة التي مركزها $\omega(-1, -2, 6)$ ونصف قطرها $R = 4$

الحل:

$$dist(\omega, P) = \frac{|-1 - 2 - 6 + 6|}{\sqrt{1 + 1 + 1}}$$

$$= \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

بما أنّ:

$$dist(\omega, P) < R$$

فإنّ المستوي P قاطع للكرة S .

الوضع النسبي لمستقيم وكرة:

الفكرة	نص السؤال	طريقة الإجابة
الوضع النسبي لمستقيم وكرة	ليكن لدينا المستقيم d والكرة S مركزها Ω، ونصف قطرها R، والمطلوب: إمّا: أثبت أنّ المستقيم d مماس للكرة S أو: أثبت أنّ المستقيم d قاطع للكرة S. أو: أثبت أنّ المستقيم d خارج للكرة S. أو: ادرس الوضع النّسبي للمستقيم d والكرة S.	* نعوّض التّمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة الكرة فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية * نحل هذه المعادلة ونميز: ▪ للمعادلة حلّان، فالمستقيم قاطع للكرة في نقطتين. ▪ للمعادلة حلّ وحيد، فالمستقيم مماس للكرة في نقطة. ▪ المعادلة مستحيلة الحلّ، فالمستقيم خارج الكرة.
تحديد النقطة المشتركة للمستقيم d والكرة s	ليكن لدينا المستقيم d والكرة S، عيّن إحداثيّات النّقاط المشتركة.	نعوّض قيم الحلول في التّمثيل الوسيطي فنحصل على المطلوب

تمرين:

ليكن لدينا المستقيم:

$$(d):\begin{cases} x=6-3t \\ y=-4+4t\ ;t\in\mathbb{R} \\ z=-5+t \end{cases}$$

ولنتأمل معادلة الكرة:

$$S:(x+1)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=25$$

الطلب الأول:

هل المستقيم d مماس للكرة S ؟

الحل: نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة الكرة S وفق:

$$(7-3t)^2+(-1+4t)^2+(-1-t)^2=25$$
$$26t^2-52t+26=0$$
$$t^2-2t+1=0$$
$$(t-1)^2=0$$
$$t-1=0$$
$$t=1$$

إذاً للمعادلة حل وحيد ومنهُ المستقيم d مماس للكرة S في نقطة واحدة.

الطلب الثاني:

وفي حال المماس حدد إحداثيات نقطة التماس

الحل:

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم d وفق:

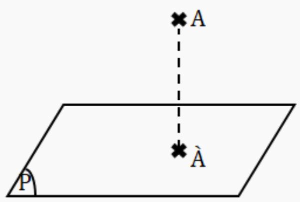
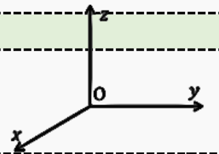
$$x=6-3(1)\rightarrow x=3$$
$$y=-4+4(1)\rightarrow y=0$$
$$z=-5+1\rightarrow z=-4$$

ومنهُ نقطة التقاطع هي:

$$(3,0,-4)$$

المساقط القائمة:

المسقط القائم لنقطة على مستوٍ:

<table>
<tr><th>المستوي عشوائي</th><th colspan="3">المستوي معلم</th></tr>
<tr><td rowspan="3">لا تعتمد فكرته عل الرّسم إنّما تحتاج مهارة
الخطوات:
* نكتب معادلة المستوي P المراد الإسقاط عليه.
* نكتب التّمثيل الوسيطي للمستقيم d المارّ من النّقطة A (المراد إيجاد مسقطها) والعمودي على المستوي السّابق P
* يكون المسقط القائم هو نقطة تقاطع المستقيم والمستوي
</td><td colspan="3">هو المستوي المرسوم على المحاور الإحداثيّة
تعتمد فكرته على الرّسم، ونميّز فيه:
</td></tr>
<tr><td>المستوي (OXY)</td><td>المستوي (OXZ)</td><td>المستوي (OYZ)</td></tr>
<tr><td>نحافظ على فاصلة وترتيب النّقطة ونجعل راقم النّقطة هو صفر، أيّ: $(x,y,0)$</td><td>نحافظ على فاصلة وراقم النّقطة ونجعل ترتيب النّقطة هو صفر، أيّ: $(x,0,z)$</td><td>نحافظ على ترتيب وراقم النّقطة ونجعل فاصلة النّقطة هو صفر أيّ: $(0,y,z)$</td></tr>
</table>

تمرين:

في معلم متجانس نتأمل النقاط:

$C(1,5,5)$	$B(0,0,1)$	$A(1,2,0)$

الطلب الأول:

عيّن إحداثيات النقطة D' المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC) .

الحل:

الخطوة الأولى:

نكتب معادلة المستوي (ABC) وفق:

إيجاد $\vec{n}$ ناظم المستوي (ABC) :

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ولدينا:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-2,1) \quad , \quad \overrightarrow{AC}(0,3,5)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً ولدينا $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ أيّ:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$$

$$-a - 2b + c = 0 \ldots (1)$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$$3b + 5c = 0 \ldots (2)$$

نأخذ $c = 3$ فيكون:

$$\begin{cases} -a - 2b + 3 = 0 \ldots (1) \\ 3b + 15 = 0 \quad \ldots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد أنّ:

$$3b = -15 \to b = -5$$

نعوض في (1) :

$$-a + 10 + 3 = 0 \to a = 13$$

ومنهُ:

$$\vec{n}(13,-5,3)$$

كتابة معادلة المستوي (ABC) حيث:

ناظمهُ: $\vec{n}(13,-5,3)$

نقطة منهُ: $B(0,0,1)$

المعادلة:

$$13(x-0) - 5(y-0) + 3(z-1) = 0$$

$$13x - 5y + 3z - 3 = 0$$

الخطوة الثانية:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC) وفق:

بما أنّ المستقيم d عمودي على المستوي (ABC) فإنّ شعاع توجيه المستقيم هو ذاته ناظم المستوي أيّ أنّ:

$$\vec{u} = \vec{n}$$

$$\vec{u}(13,-5,3)$$

كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم d حيث:

شعاع توجيهه $\vec{u}(13,-5,3)$

نقطة منهُ: $D(-11,9,-4)$

ومنهُ:

$$d: \begin{cases} x = 13t - 11 \\ y = -5t + 9 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3t - 4 \end{cases}$$

الخطوة الثالثة:

النقطة D' هي نقطة تقاطع المستوي (ABC) والمستقيم (d) وفق:

$$\begin{cases} 13x - 5y + 3z - 3 = 0 \ldots (1) \\ x = 13t - 11 \ldots (2) \\ y = -5t + 9 \ \ldots (3) \\ z = 3t - 4 \quad \ldots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$13(13t - 11) - 5(-5t + 9) + 3(3t - 4) - 3 = 0$$

$$169t - 143 + 25t - 45 + 9t - 12 - 3 = 0$$

$$203t - 203 = 0$$

$$203t = 203$$

$$t = 1$$

نعوض قيمة t في (2) و (3) و (4) وفق:

$$x = 13t - 11 \to x = 2$$

$$y = -5t + 9 \to y = 4$$

$$z = 3t - 4 \to z = -1$$

إذاً:

$$D'(2,4,-1)$$

الطلب الثاني:

احسب DD' :

الحل:

$$\overrightarrow{DD'}(13,-5,3)$$

إذاً:

$$DD' = \left\|\overrightarrow{DD'}\right\|$$

$$= \sqrt{169 + 25 + 9} = \sqrt{203}$$

الطلب الثالث:

احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) .

الحل:

$$dist\big(A,(ABC)\big)$$

$$= \frac{|13(-11) - 5(9) + 3(-4) - 3|}{\sqrt{169 + 25 + 9}}$$

$$= \frac{|-143 - 45 - 12 - 3|}{\sqrt{203}}$$

$$= \frac{|-203|}{\sqrt{203}} = \frac{203}{\sqrt{203}}$$

$$= \sqrt{203}$$

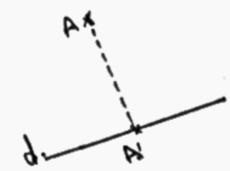
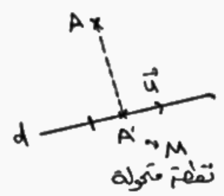
ملاحظة:

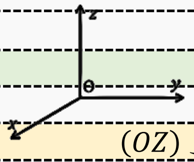
دائماً وأبداً يكون بعد النقطة A عن المستوي P يساوي المسافة بين A ومسقط A على المستوي P

المسقط القائم لنقطة على مستقيم:

مستقيم عشوائي

لا تعتمد فكرته عل الرّسم إنّما تحتاج مهارة، لدينا ثلاثة أساليب، حيث نستخدم دائماً الأسلوب الثّاني إلّا في حال تدريج الطّلبات نستخدم المناسب:
الأساليب الثّلاثة:

الأسلوب الأول	الأسلوب الثاني	الأسلوب الثالث
* نكتب التّمثيل الوسيطي للمستقيم d (المراد الإسقاط عليه) * نكتب معادلة المستوي P المارّ من النّقطة A (المراد إيجاد مسقطها) والعمودي على المستقيم d * يكون المسقط القائم هي نقطة تقاطع المستوي P والمستقيم d 	* نكتب التّمثيل الوسيطي للمستقيم d (المراد الإسقاط عليه) * نأخذ نقطة A' من المستقيم d (بحيث إحداثيّات A' هي نفسها معادلات المستقيم) يتحقّق: $\vec{u}.\overrightarrow{AA'} = 0$ * بالتّعويض نحصل على قيمة الوسيط t نعوّض قيمة t في التّمثيلات الوسيطيّة للمستقيم d فنحصل على إحداثيّات * النّقطة $\acute{A}$ المسقط القائم للنّقطة A على المستقيم d 	* نكتب التّمثيل الوسيطي للمستقيم d (المراد الإسقاط عليه) * نأخذ نقطة A' من المستقيم d (بحيث إحداثيّات A' هي نفسها معادلات المستقيم) * نوجد $(AA')^2$ بدلالة t (الإتمام إلى مربّع كامل) * نحدّد قيمة t التي تجعل $(AA')^2$ أصغر ما يمكن * نعوّض قيمة t في إحداثيّات النّقطة A' * فتكون هي ذاتها إحداثيّات النّقطة A' المطلوبة.



مستقيم معلم

هو المستقيم المرسوم عل أحد المحاور الإحداثيّة تعتمد فكرته على الرّسم، ونميّز فيه:

المحور (OX)	المحور (OY)	المحور (OZ)
نحافظ على فاصلة النّقطة ونجعل كلّ من الترتيب والراقم هي أصفار أيّ: $(x,0,0)$	نحافظ على ترتيب النّقطة ونجعل كلّ من الفاصلة والرّاقم هي أصفار، أيّ: $(0,y,0)$	نحافظ على راقم النّقطة ونجعل كلّ من الفاصلة والتّرتيب هي أصفار أيّ: $(0,0,z)$

التمرين الأول:

لتكن لدينا النقاط:

$A(2,3,0)$	$B(2,3,6)$
$M(4,-1,2)$	

أوجد إحداثيات النقطة M' المسقط القائم لـ M على المستقيم (AB) .

الحل:

الخطوة الأولى:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) .

تحديد شعاع التوجيه:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(0,0,6)$$
$$A(2,3,0)$$

ومنهُ:

$$(AB):\begin{cases} x = 2 \\ y = 3\,; t \in \mathbb{R} \\ z = 6t \end{cases}$$

الخطوة الثانية:

بما أنّ M' نقطة من المستقيم (AB) إذاً:

$$M'(2,3,6t)$$

تكون M' هي المسقط القائم لـ M على المستقيم (AB) إذا تحقق:

$$\overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \ldots (*)$$

حيث: $\overrightarrow{MM'}(-2,4,6t-2)$

$$\vec{u}(0,0,6)$$

نعوض في علاقة $(*)$:

$$\overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0$$
$$(-2)(0) + (4)(0) + (6t-2)(6) = 0$$
$$36t - 12 = 0$$
$$36t = 12$$
$$t = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

فتكون إحداثيات M' هي: $M'(2,3,2)$

التمرين الثاني:

لتكن لدينا النقاط:

$A(0,1,-2)$	$B(1,2,0)$	$C(3,4,7)$

الطلب الأول:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) :

الحل:

تحديد شعاع التوجيه: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(1,1,2)$

تحديد النقطة: $A(0,1,-2)$

ومنهُ:

$$(AB):\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \;; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t - 2 \end{cases}$$

الطلب الثاني:

اكتب معادلة المستوي P المار من C والعمودي على المستقيم (AB) :

الحل:

تحديد الناظم:

بما أنّ المستوي P عمودي على المستقيم (AB) فإنّ: $\vec{n} = \vec{u}(1,1,2)$

تحديد النقطة: $C(3,4,7)$

ومنهُ:

$$P: 1(x-3) + 1(y-4) + 2(z-7) = 0$$
$$P: x - 3 + y - 4 + 2z - 14 = 0$$
$$Px + y + 2z - 21 = 0$$

الطلب الثالث:

استنتج إحداثيات النقطة C' المسقط القائم للنقطة C على المستقيم (AB):

الحل:

تكون C' هي نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي P أيّ:

$$\begin{cases} x+y+2z-21=0 \ldots(1) \\ x=t \quad \ldots(2) \\ y=t+1 \quad \ldots(3) \\ z=2t-2 \ldots(4) \end{cases}$$

نعوض كلاً من (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$t+t+1+2(2t-2)-21=0$$
$$2t+1+4t-4-21=0$$
$$6t-24=0$$
$$6t=24 \to t=4$$

نعوض قيمة t في كل من (2) و (3) و (4) وفق:

$$x=4$$
$$y=t+1 \to y=5$$
$$z=2t-2 \to z=6$$

أيّ: $C'(4,5,6)$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا المستويان P و Q حيث:

$$\begin{cases} P: 2x-y+z-4=0 \\ Q: x+y+2z-5=0 \end{cases}$$

الطلب الأول:

أثبت تقاطع المستويان P و Q :

الحل:

المستوي P ناظمه: $\overrightarrow{n_1}(2,-1,1)$

المستوي Q ناظمه: $\overrightarrow{n_2}(1,1,2)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطان خطياً وبالتالي المستويان P و Q متقاطعان.

الطلب الثاني:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الفصل المشترك للمستويان P و Q :

الحل:

$$\begin{cases} 2x-y+z-4=0 \\ x+y+2z-5=0 \end{cases}$$

نأخذ $z=t$ فيكون:

$$\begin{cases} 2x-y+t-4=0 \ldots(1) \\ x+y+2t-5=0 \ldots(2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$3x+3t-9=0$$
$$3x=-3t+9$$
$$x=-t+3$$

نعوض في (2) وفق:

$$-t+3+y+2t-5=0$$
$$y=-t+2$$

إذاً التمثيل الوسيطي للمستقيم d يعطى بالشكل:

$$(d): \begin{cases} x=-t+3 \\ y=-t+2 \; ; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

الطلب الثالث:

أوجد إحداثيات A' المسقط القائم للنقطة $A(3,-1,2)$ على المستقيم d:

الحل:

الخطوة الأولى:

التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) :

$$(d): \begin{cases} x=-t+3 \\ y=-t+2 \; ; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

شعاع توجيه المستقيم d :

$$\vec{u}(-1,-1,1)$$

نأخذ M من المستقيم d :

$$M(-t+3,-t+2,t)$$

الخطوة الثانية:

باعتبار M هي المسقط القائم لـ A على المستقيم d فيتحقق:

$$\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$$
$$\overrightarrow{AM}(-t,-t+3,t-2)$$

إذاً:

$$t+t-3+t-2=0$$
$$3t-5=0$$
$$t=\frac{5}{3}$$

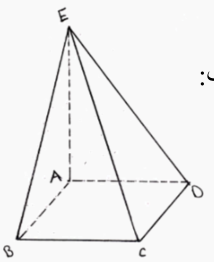
نعوض قيمة t في إحداثيات النقطة M وفق:

$$M\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

فتكون إحداثيات النقطة A' المسقط القائم لـ A على المستقيم d هي:

$$A'\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

التمرين الرابع:



في الشكل المجاور ليكن الهرم $EABCD$ رأسه E فيه: $ABCD$ مربع طول ضلعه 3 و $[EA]$ عمودي على $ABCD$ حيث:

$$EA=4$$

ليكن المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث:

$$\overrightarrow{AB}=3\vec{i} \quad و \quad \overrightarrow{AD}=3\vec{j} \quad و \quad \overrightarrow{AE}=4\vec{k}$$

1. أوجد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم

$B(3,0,0)$	$A(0,0,0)$
$C(3,3,0)$	$D(0,3,0)$
$E(0,0,4)$	

2. أوجد إحداثيات النقطة F التي تحقق العلاقة:

$$3\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CE}$$

الحل: لتكن $F(x,y,z)$:

$$3\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CE}$$

$$3\begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x-9 \\ 3y-9 \\ 3z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$3x-9=-3 \to x=2$$
$$3y-9=-3 \to y=2$$
$$3z=4 \to z=\frac{4}{3}$$

إذاً: $F\left(2,2,\frac{4}{3}\right)$

أوراق الجلسات المكثفة

3. أوجد إحداثيات النقطة N المسقط القائم للنقطة F على المستوي $(ABCD)$

الحل:

$$N(2,2,0)$$

4. أوجد إحداثيات النقطة R المسقط القائم للنقطة N على المستقيم AB

الحل:

$$R(2,0,0)$$

5. احسب المسافة FR

$$\overrightarrow{FR}\left(0,-2,-\frac{4}{3}\right)$$

$$FR=\left\|\overrightarrow{FR}\right\|=\sqrt{0+4+\frac{16}{9}}$$

$$=\sqrt{\frac{52}{9}}=\frac{\sqrt{52}}{3}$$

6. أوجد إحداثيات النقطة G منتصف القطعة المستقيمة $[EC]$

الحل:

G منتصف القطعة المستقيمة $[EC]$ إذاً:

$$G\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)$$

7. أثبت أن النقاط A و B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها G ثم عين نصف قطر هذه الكرة

الحل:

$$\overrightarrow{GA}\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},-2\right)\to GA=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\overrightarrow{GB}\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},-2\right)\to GB=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\overrightarrow{GC}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-2\right)\to GC=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\overrightarrow{GD}\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},-2\right)\to GD=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\overrightarrow{GE}\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},2\right)\to GE=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

نلاحظ أنّ:

$$GA=GB=GC=GD=GE$$

إذاً النقاط A و B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها G ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{34}}{2}$

8. هل النقطة G تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[CD]$

$$\overrightarrow{GC}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-2\right)\to GC=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\overrightarrow{GD}\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},-2\right)\to GD=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

إذاً النقطة G تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[CD]$

بُعد نقطة عن مستقيم في الفراغ (لا يوجد قانون مباشر):

لإيجاد بُعد نقطة A عن مستقيم d في الفراغ فإنّنا:

* نوجد إحداثيّات النّقطة A' (المسقط القائم للنّقطة A على المستقيم d)
* يكون بُعد A عن المستقيم d هو المسافة بين النّقطة A ومسقطها A'
* أيّ: بعد النقطة عن المستقيم يعطى بالعلاقة:
* $dist(\text{المستقيم}\backslash\text{النقطة})=AA'$

تمرين:

لتكن لدينا النقاط:

$B(2,3,6)$	$A(2,3,0)$
$N(4,-1,2)$	

أوجد بُعد النقطة N عن المستقيم (AB) :

الحل:

الخطوة الأولى:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) حيث:

شعاع توجيهه: $\overrightarrow{AB}(0,0,6)$

نقطة منه: $A(2,3,0)$

نكتب التمثيل الوسيطي وفق:

$$(AB):\begin{cases}x=2\\y=3\ ;t\in\mathbb{R}\\z=6t\end{cases}$$

الخطوة الثانية:

لتكن النقطة $M(2,3,6t)$ هي المسقط القائم للنقطة N على المستقيم (AB) وبالتالي:

$$\overrightarrow{NM}(-2,4,6t-2)$$

الخطوة الثالثة:

يكون شعاع توجيه المستقيم $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{NM}$ متعامدين أيّ:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{NM}=0$$

$$0+0+6(6t-2)=0$$

$$36t-12=0$$

$$36t=12\to t=\frac{1}{3}$$

إذاً:

$$\to\overrightarrow{NM}(-2,4,0)$$

وبالتالي بعد النقطة N عن المستقيم (AB) هو:

$$dist(N,(AB))=\left\|\overrightarrow{NM}\right\|$$

$$=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

بعد نقطة عن الفصل المشترك لمستويان متعامدان:

إذا كان لدينا مستويان P و Q متعامدان وكان المطلوب هو إيجاد بُعد نقطة A عن المستقيم d الفصل المشترك لـ P و Q فإنّنا نتّبع الخطوات الآتية:

* نوجد بُعد النّقطة A عن المستوي الأوّل P ويكون: $\text{dist}(A,P)=m_1$
* نوجد بُعد النّقطة A عن المستوي الثّاني Q ويكون: $\text{dist}(A,Q)=m_2$.
* استناداً إلى مبرهنة فيثاغورث يكون بعد A عن المستقيم d مُعطى وفق:

$$\text{dist}(A,d)=\sqrt{{m_1}^2+{m_2}^2}$$

تمرين:

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,1,2)$ والمستويان P و Q حيث:

$$P: x+y-2z-1=0$$
$$Q; x+y+z=0$$

1. أثبت أن المستويان P و Q متعامدان

الحل:

لدينا المستوي P ناظمه $\overrightarrow{n_1}(1,1,-2)$

لدينا المستوي Q ناظمة $\overrightarrow{n_2}(1,1,1)$

وبما أنّ:

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=1+1-2=0$$

فإنّ المستويان P و Q متعامدان.

2. احسب بعد A عن كل من المستويان P و Q

* حساب بعد A عن Q وفق:

$$dist(A,Q)=\frac{|2+1+2|}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

* حساب بعد A عن P وفق:

$$dist(A,P)=\frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

3. استنتج بعد النقطة A عن الفصل المشترك لـ P و Q :

الحل

لدينا المستقيم d هو الفصل المشترك لـ P و Q ويكون بعد النقطة A عن المستقيم d وفق:

$$dist(A,d)=\sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{25}{3}+\frac{4}{6}}=\sqrt{\frac{27}{3}}=\sqrt{9}=3$$

مجموعات النقاط:

	الحالة	التفسير	نفهم
حالات المسافة بين نقطتين	إذا تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}\right\|=k$ $MA=k$	مهما تحولت النقطة M فإن المسافة بين M و A هي قيمة ثابتة k	تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها $R=k$
	إذا تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ $MA=AB$	مهما تحولت النقطة M فإن المسافة بين A و M هي ذاتها المسافة بين A و B	تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها $R=AB$
	إذا تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}\right\|$ $MA=MB$	مهما تحولت النقطة M فإن المسافة بين M و A هي ذاتها المسافة بين M و B	تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$
حالات الجداء السلمي	إذا تحقق: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=0$	مهما تحوّلت النّقطة M فإنّ المستقيمان (MA) و (AB) متعامدان	تمثّل مستوي ناظمه الشّعاع $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$
	إذا تحقق: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$	مهما تحوّلت النّقطة M فإنّ المستقيمان (MA) و (MB) متعامدان	تمثّل كرة قطرها هو $[AB]$

لسهولة الحفظ:

	مسافة	جداء سلمي
M موجودة مرة	كرة	مستوي
M موجودة مرتين	مستوي محوري	كرة

ملاحظة هامة جداً:

أحياناً يكون المعطى هو مساواة من الشكل: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

والمطلوب: ماذا تمثل مجموعة النّقاط $M(x,y,z)$.

الخطوات:

* بالإتمام إلى مربّع كامل نحصل على العلاقة: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=k$
* نميّز:
  - إذا كان $k<0$: تمثل مجموعة خالية.
  - إذا كان $k=0$: تمثل النّقطة $\Omega(x_0,y_0,z_0)$
  - إذا كان $k>0$: تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ ونصف قطرها R

التمرين الأول:

$ABCD$ رباعي وجوه،

G مركز ثقل المثلث (DBC) و M نقطة من الفراغ جد مجموعة النقاط التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

الحل:

نعلم أنّ:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right\| = (1+1+1)\overrightarrow{MG}$$
$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right\| = 3\overrightarrow{MG}$$

لدينا:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right)\right\|$$
$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\right\|$$
$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG}\right)\right\|$$
$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GM}\right)\right\|$$
$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}\right)\right\|$$
$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{GA}\right\|$$
$$3\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{GA}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{GA}\right\|$$

تمثل معادلة كرة

مركزها G ونصف قطرها $R = GA$

التمرين الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ في الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

$$x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$$
$$x^2-2x+y^2+6y+z^2-2=0$$

بالإتمام إلى مربع كامل وفق:

$$x^2-2x+1-1+y^2+6y+9-9+z^2-2=0$$
$$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2-12=0$$
$$(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=12$$

تمثل معادلة كرة

مركزها $\Omega(1,-3,0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{12}$

الحالة الثانية:

$$x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$$
$$x^2-10x+y^2+z^2+2z+26=0$$

بالإتمام إلى مربع كامل:

$$x^2-10x+25-25+y^2+z^2+2z+1-1+26=0$$
$$(x-5)^2+y^2+(z+1)^2=0$$

تمثل نقطة وحيدة إحداثياتها

$$\Omega(5,0,-1)$$

الحالة الثالثة:

$$x^2+y^2+z^2-4x+5=0$$
$$x^2-4x+y^2+z^2+5=0$$

بالإتمام إلى مربع كامل:

$$x^2-4x+4-4+y^2+z^2+5=0$$
$$(x-2)^2+y^2+z^2+1=0$$
$$(x-2)^2+y^2+z^2=-1$$

تمثل مجموعة خالية من النقاط.

التمرين الثالث:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$

1. أعط معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق أن $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$
2. ما طبيعة المجموعة ε

الطلب الأول:

الحل:

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ ومنه:

$$\overrightarrow{MA}(2-x,1-y,2-z)$$
$$\overrightarrow{MB}(-2-x,-y,2-z)$$

لدينا:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$$
$$(2-x)(-2-x)+(1-y)(-y)$$
$$+(2-z)(2-z)=0$$
$$-4-2x+2x+x^2-y+y^2+(z-2)^2=0$$
$$x^2+y^2-y+(z-2)^2-4=0$$

بالإتمام إلى مربع كامل وفق:

$$x^2+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+(z-2)^2-4=0$$
$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2-\frac{17}{4}=0$$
$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{17}{4}$$

الطلب الثاني:

تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega\left(0,\frac{1}{2},2\right)$

ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$

التمرين الرابع:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتان $A(1,1,1)$ و $B(0,-1,-1)$ والمطلوب:

1. أعط معادلة للمجموعة ε مكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $MA=2MB$
2. ما طبيعة المجموعة ε
3. أعط معادلة للمجموعة p المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA=MB$
4. ما طبيعة المجموعة p

الطلب الأول والثاني:

$$MA=2MB \rightarrow MA^2=4MB^2$$
$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=4[(-x)^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2]$$

$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=4[(x)^2+(1+y)^2+(1+z)^2]$$
$$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2=4x^2+4+8y+4y^2+4+8z+4z^2$$
$$3x^2+3y^2+3z^2+2x+10y+10z+5=0$$
$$3x^2+2x+3y^2+10y+3z^2+10z+5=0$$
$$x^2+\frac{2}{3}x+y^2+\frac{10}{3}y+z^2+\frac{10}{3}z+\frac{5}{3}=0$$
$$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+y^2+\frac{10}{3}y+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+z^2+\frac{10}{3}z+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+\frac{5}{3}=0$$
$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2+\left(z+\frac{5}{3}\right)^2=4$$

مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega\left(\frac{-1}{3},\frac{-5}{3},\frac{-5}{3}\right)$ ونصف قطرها $R=2$

الطلب الثالث والرابع:

$$MA=MB\to MA^2=MB^2$$
$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=(-x)^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2$$
$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=(x)^2+(1+y)^2+(1+z)^2$$
$$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2=x^2+1+2y+y^2+1+2z+z^2$$
$$-2x-4y-4z+1=0$$

المجموعة p تمثل معادلة مستو وهو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

التمرين الخامس:

نتأمل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ نضع $r=\frac{1}{2}AB$ ونعرف I منتصف $[AB]$ والمطلوب:

1. أثبت أنه في حالة نقطة ما M من الفراغ تتحقق المساواة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-r^2$
2. أثبت أن مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق أنّ: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r وهي أيضاً الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً فيها.

الحل:

الطلب الأول:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-r^2$$
$$l_1=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$
$$=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$$
$$=\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$$
$$=\left|\left|\overrightarrow{MI}\right|\right|^2+\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA})-\left|\left|\overrightarrow{IA}\right|\right|^2$$
$$=MI^2+0-r^2$$
$$l_2$$

الطلب الثاني:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$$
$$MI^2-r^2=0$$
$$MI=r$$

تمثل معادلة كرة مركزها I ونصف قطرها r .

وبما أنّ $r=\frac{1}{2}AB$ إذاً قطر الكرة هو AB

المساحات:

الشكل	القانون
المثلث	$\frac{1}{2}\times$ طول القاعدة $\times$ طول الارتفاع المتعلق به $=$ مساحة المثلّث
المثلث القائم	$\frac{\text{جداء الضلعين القائمتين}}{2}=$ مساحة المثلّث القائم
المثلث متساوي الأضلاع	$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ وارتفاعه: $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ حيث طول الضلع $=a$
متوازي الأضلاع	طول القاعدة $\times$ طول الارتفاع المتعلق به $=$ مساحة متوازي الأضلاع
المستطيل	العرض $\times$ الطّول $=$ مساحة المستطيل
المربع	$(\text{طول الضلع})^2=$ مساحة المربّع

المعين	$\frac{\text{جداء طولي قطريه}}{2}$ = مساحة المعيّن 2 × جداء الضّلعين القائمتين = مساحة المعيّن
شبه المنحرف	$\frac{1}{2}$ × مجموع طولي القاعدتين × ارتفاع شبه المنحرف = مساحة شبه المنحرف
الدائرة	$S = \pi r^2$; حيث نصف القطر= r

الحجوم:

المجسمات ذات القاعدة الواحدة	
الشكل	**القانون**
(هرم/ رباعي وجوه/ مخروط/ .....)	(مساحة القاعدة) (ارتفاع المجسّم)$\frac{1}{3}$ = حجم المجسّم
المجسمات ذات القاعدتين	
الشكل	**القانون**
(المكعّب/ متوازي المستطيلات/ متوازي السّطوح/ الموشور القائم/ الأسطوانة)	(مساحة القاعدة) (ارتفاع المجسّم) = حجم المجسّم

ملاحظة: لإيجاد حجم الهرم أو رباعي الوجوه:

الخطوة①: نحدّد قاعدة الهرم ونحسب مساحتها (نصيحة: اختر القاعدة الّتي يكون حساب مساحتها سهلاً (ممكناً).

الخطوة② : نحدّد رأس الهرم ونوجد ارتفاع الهرم، حيث: ارتفاع الهرم: هو بُعد رأس الهرم عن مستوي قاعدته،

ولإيجاد ارتفاع الهرم، نميّز حالتين:

الحالة ❶:

قاعدة الهرم هي مستوي معلم، فإنّنا:

نوجد مسقط رأس الهرم على مستوي القاعدة.

ارتفاع الهرم يكون هو المسافة بين رأس الهرم ومسقطه على مستوي القاعدة

الحالة ❷:

قاعدة الهرم هي مستوي عشوائي فإنّنا:

نطبّق دستور الـ $dist$

الخطوة ③: نضع القانون:

$$V = \frac{1}{3}S_b.h$$

الخطوة ④: نعوّض

المسألة الأولى:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$B(2,2,3)$	$A(1,0,-1)$
$D(-4,2,1)$	$C(3,1,-2)$

1. أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته
2. أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)
3. احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $(DABC)$

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أنّ المثلث ABC قائم:

* $\overrightarrow{AB}(1,2,4)$
$AB = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$

* $\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$
$AB = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

* $\overrightarrow{BC}(1,-1,-5)$
$AB = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27}$

لدينا المثلث ABC مختلف الأضلاع.

نختبر كونهُ قائماً وفق:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$27 = 21 + 6$$
$$27 = 27$$

ومنهُ المثلث ABC قائم في A

حساب المساحة:

$$S_{ABC} = \frac{AB.AC}{2} = \frac{\sqrt{21}.\sqrt{6}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{126}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ $\vec{n}$ عمودي على المستوي (ABC): وهنا ناظم المستوي غير معلوم لذلك نثبت أنّ $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي وفق:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2 - 6 + 4 = 0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 4 - 3 - 1 = 0$$

إذاً $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABC) ومنهُ $\vec{n}$ عمودي على المستوي (ABC) وبالتالي $\vec{n}$ ناظم على المستوي (ABC)

استنتاج معادلة المستوي (ABC) وفق:

النقطة: $A(1,0,-1)$

الناظم: $\vec{n}(2,-3,1)$

المعادلة:

$$(ABC): 2(x-1) - 3(y-0) + 1(z+1) = 0$$
$$(ABC): 2x - 2 - 3y + z + 1 = 0$$
$$(ABC): 2x - 3y + z - 1 = 0$$

الطلب الثالث:

حساب بُعد D عن المستوي (ABC) :

$$dist(D,(ABC)) = \frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}$$
$$dist(D,(ABC)) = \sqrt{14}$$

حساب الحجم:

رباعي الوجوه $(D-ABC)$ قاعدتهُ:

الوجه (ABC) مساحته $S_{ABC}=\frac{3\sqrt{14}}{2}$

رأسهُ D وارتفاعهُ:

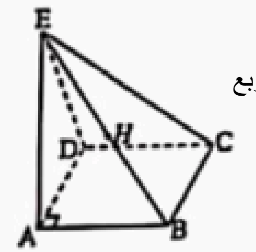
$$h_{DABC}=dist\big(D,(ABC)\big)=\sqrt{14}$$

الحجم:

$$V_{DABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.h_{DABC}$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{14}}{2}.\sqrt{14}=7$$

المسألة الثانية:



$EABCD$ هرم رباعي رأسه E وقاعدته مربع طول ضلعه 3 ولدينا $[AE]$ عمودي على المستوي $ABCD$ و $EA=3$ نختار المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

والمطلوب:

1. عين إحداثيات A و B و C و D و E
2. جد معادلة المستوي EBC
3. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي EBC
4. استنتج أنّ H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC)
5. احسب حجم رباعي الوجوه $AEBC$

الحل:

الطلب الأول:

$A(0,0,0)$	$B(3,0,0)$	$D(0,3,0)$
$E(0,0,3)$	$C(3,3,0)$	

الطلب الثاني:

$$\overrightarrow{EB}(3,0,-3)\quad,\quad\overrightarrow{EC}(3,3,-3)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EC}$ غير مرتبطان خطياً.

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ولدينا:

$$\vec{n}.\overrightarrow{EB}=0$$

$$3a-3c=0\ldots(1)$$

$$\vec{n},\overrightarrow{EC}=0$$

$$3a+3b-3c=0\ldots(2)$$

لدينا:

$$\begin{cases}3a-3c=0 & \ldots(1)\\3a+3b-3c=0 & \ldots(2)\end{cases}$$

من (1) نجد أنّ:

$$3a=3c$$

$$a=c\ldots(*)$$

نعوض في (2) وفق:

$$3c+3b-3c=0$$

$$3b=0\rightarrow b=0$$

ليكن $C=1$ إذاً: $a=1$

ومنهُ:

$$\vec{n}(1,0,1)$$

$$B(3,0,0)$$

$$(EBC):1(x-3)+0(y-0)+1(z-0)=0$$

$$(EBC):x-3+z=0$$

$$(EBC):x+z-3=0$$

الطلب الثالث:

النقطة: $A(0,0,0)$

شعاع التوجيه:

بما أنّ المستقيم d يعامد المستوي (EBC) فإنّ:

$$\vec{u}=\overrightarrow{n_{EBC}}$$

$$\overrightarrow{u_d}(1,0,1)$$

التمثيل الوسيطي:

$$d:\begin{cases}x=t\\y=0\,;t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}$$

الطلب الرابع:

H منتصف القطعة المستقيمة $[EB]$ ومنهُ:

$$H\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$$

إيجاد A' المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC) ومنهُ بالحل المشترك للجملة:

$$\begin{cases}x+z-3=0\ldots(1)\\x=t\ldots(2)\\y=0\ldots(3)\\z=t\ldots(4)\end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$t+t-3=0\rightarrow t=\frac{2}{3}$$

نعوض قيمة t في كل من (2) و (3) و (4) وفق:

$$x=\frac{3}{2}\quad,\quad y=0\quad,\quad y=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow A'\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)\rightarrow A'=H$$

الطلب الخامس:

الطريقة الأولى:

رباعي الوجوه $(AEBC)$ فيه:

قاعدته: الوجه (AEB) وهو مثلث قائم في A مساحته:

$$S_{AEB}=\frac{AB.AE}{2}=\frac{9}{2}$$

رأسهُ: C

ارتفاعه: القاعدة مستوي معلم

لدينا رأس الهرم $C(3,3,0)$ ومسقطه على مستوي القاعدة هو $C'(3,0,0)$ ويكون:

$$h_{AEBC}=CC'$$

$$=\sqrt{0^2+(-3)^2+(0)^2}=\sqrt{9}=3$$

ويكون حجمه:

$$V_{AEBC}=\frac{1}{3}S_{AEB}.h_{AEBC}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right)(3)=\frac{9}{2}$$

الطريقة الثانية:

رباعي الوجوه $(AEBC)$ فيه:

قاعدته: الوجه (ABC) وهو مثلث قائم في B مساحته

$$S_{ABC}=\frac{BA.BC}{2}=\frac{9}{2}$$

رأسهُ: E

ارتفاعه: القاعدة مستوي معلم

لدينا رأس الهرم $E(0,0,3)$ ومسقطه على مستوي القاعدة هو $E'(3,0,0)$ ويكون:

$$h_{AEBC}=EE'$$
$$=\sqrt{0^2+0^2+(9)^2}=\sqrt{9}=3$$

ويكون حجمه:

$$V_{AEBC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.h_{AEBC}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right)(3)=\frac{9}{2}$$

طلب إضافي ضربة الموسم:

استنتج مساحة المثلث (EBC) :

الحل:

لدينا رباعي الوجوه $(AEBC)$ فيه:

قاعدته: الوجه (EBC)

مساحتها: $S_{EBC}=?$

رأسهُ: A

ارتفاعهُ: قاعدته مستوي عشوائي

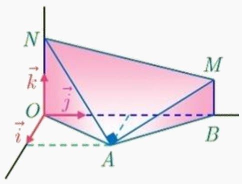
$$h_{AEBC}=dist\big(A,(EBC)\big)=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

حجمهُ: من الطلب السابق $V_{AEBC}=\frac{9}{2}$

إذاً:

$$V_{AEBC}=\frac{1}{3}S_{EBC}.h_{AEBC}$$
$$\frac{9}{2}=\left(\frac{1}{3}\right).S_{EBC}.\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\frac{9}{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)S_{EBC}$$
$$S_{EBC}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{9}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{1}$$
$$\to S_{EBC}=\frac{9}{\sqrt{2}}$$

المسألة الثالثة:



m و n عددان حقيقيان موجبان يحققان $n>m>0$ نتأمل النقاط $A(\sqrt{3},3,0)$ و $\mathrm{B}(0,6,0)$ و $\mathrm{M}(0,6,\mathrm{m})$ و $\mathrm{N}(0,0,\mathrm{n})$ في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ عين n و m ليكون المثلث MAN قائماً في A وحجم المجسم AOBMN يساوي $5\sqrt{3}$

التمرين الأول: نتأمل المستقيمين:

$$d_1:\begin{cases}x=3+t\\ y=2+2t\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=3t+1\end{cases}$$
$$d_2:\begin{cases}x=4-s\\ y=2s\quad ;s\in\mathbb{R}\\ z=2-s\end{cases}$$

1. أثبت أن المستقيمين d_1 و d_2 متعامدان.
2. أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين d_1 و d_2

الحل:

المثلث MAN قائم في A فإنه يتحقق:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}=0\ldots(*)$$
$$\overrightarrow{AM}(-\sqrt{3},3,m)\ \ ,\ \ \overrightarrow{AN}(-\sqrt{3},-3,n)$$

بالتعويض في علاقة $(*)$ نجد أنّ:

$$(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})+(3)(-3)+(m)(n)=0$$
$$3-9+m.n=0$$
$$m.n=6\ldots(1)$$

حجم المجسم $AOBMN$ يساوي $5\sqrt{3}$ أيّ أنّ:

$$V_{AOBMN}=5\sqrt{3}$$

حيث:

$$V_{AOBMN}=\frac{1}{3}S_{OBMN}.h_{\text{هرم}}\ldots(**)$$

ولدينا مساحة القاعدة:

$$S_{OBMN}=\left(\frac{ON+BM}{2}\right).(OB)$$
$$=\left(\frac{n+m}{2}\right)(6)$$
$$S_{OBMN}=3(n+m)$$

ارتفاع الهرم:

مسقط النقطة A على القاعدة $OBMN$ فتكون:

$$\Rightarrow A'(0,3,0)$$
$$h=\left\|\overrightarrow{AA'}\right\|=\sqrt{3}$$

نعوض في علاقة $(**)$:

$$V_{AOBMN}=\frac{1}{3}S_{OBMN}.h$$
$$5\sqrt{3}=\frac{1}{3}.3(m+n)\sqrt{3}$$
$$m+n=5\ldots(2)$$

ومنهُ لدينا الجملة:

$$\begin{cases}m.n=6\\ m+n=5\end{cases}$$

من (2) نجد أنّ:

$$m=5-n\ldots(*)$$

نعوض في (1) وفق:

$$(5-n)n=6$$
$$-n^2+5n-6=0$$
$$n^2-5n+6=0$$
$$(n-3)(n-2)=0$$

إما $n=3\to m=2\ ;n>m$ مقبول لأن

وإ $n=2\to m=3\ ;n<m$ مرفوض لأن

3. اكتب معادلة المستوي P الذي يشمل المستقيمين d_1 و d_2

الحل:

الطلب الأول:

$$\overrightarrow{u_1}(1,2,3)$$
$$\overrightarrow{u_2}(-1,2,-1)$$
$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}$$
$$=(1)(-1)+(2)(2)+(3)(-1)$$
$$=-1+4-3=0$$

ومنه المستقيمان (d_1) و (d_2) متعامدان.

الطلب الثاني:

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمان (d_1) و (d_2) نحل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} 3+t=4-s & \dots(1) \\ 2+2t=2s & \dots(2) \\ 3t+1=2-s & \dots(3) \end{cases}$$

نحل جملة المعادلتين (1) و (2) :

نضرب المعادلة (1) بـ 2 وفق:

$$\begin{cases} 6+2t=8-2s & \dots(1)' \\ 2+2t=2s & \dots(2) \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) :

$$8+4t=8$$
$$4t=0 \to t=0$$

نعوض في (2) :

$$2+2(0)=2s$$
$$2=2s$$
$$s=1$$

نتحقق في المعادلة المتبقية (3) وفق:

$$3(0)+1=2-(1)$$
$$1=1$$

محققة ومنه يوجد للجملة حل وحيد هو:

$$S=1$$
$$t=0$$

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم (d_1)أو نعوض قيمة S في التمثيل الوسيطي للمستقيم (d_2) (طبعاً حتطلع معي ذات النتيجة)

نعوض $t=0$

في التمثيل الوسيطي للمستقيم (d_1) وفق:

$$x=3+0 \quad \to x=3$$
$$y=2+2(0) \to y=2$$
$$z=3(0)+1 \to z=1$$

ومنه إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمان (d_1) و (d_2) هي: $I(3,2,1)$

الطلب الثالث:

تحديد النقطة:

هي ذاتها نقطة تقاطع المستقيمان (d_1) و (d_2) والتي هي: $I(3,2,1)$

تحديد الناظم:

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ وبما أنّ المستوي P يشمل المستقيمان (d_1) و (d_2) فإنّ أشعة التوجيه $\vec{u_1}(1,2,3)$ و $\vec{u_2}(-1,2,-1)$ هما شعاعين موجهين للمستوي P وبالتالي الناظم $\vec{n}$ عمودي على كل منهما أيّ أنّ:

$$\vec{n}.\vec{u_1}=0$$
$$a+2b+3c=0 \dots(1)$$
$$\vec{n}.\vec{u_2}=0$$
$$-a+2b-c=0 \dots(2)$$

نحل جملة المعادلتين:

$$a+2b+3c=0 \dots(1)$$
$$-a+2b-c=0 \dots(2)$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$4b+2c=0$$
$$2c=-4b$$
$$c=-2b \dots(*)$$

نعوض في (1) :

$$a+2b-6b=0$$
$$a=4b \dots(**)$$

بفرض $b=1$:

نعوض في $(*)$ و $(**)$ وفق:

$$c=-2$$
$$a=4$$
$$\to \vec{n}(4,1,-2)$$

نكتب معادلة المستوي وفق:

$$a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$$
$$4(x-3)+1(y-2)-2(z-1)=0$$
$$4x-12+y-2-2z+2=0$$
$$4x+y-2z-12=0$$

التمرين الثاني:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط: $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$ و $B(1,0,-1)$ و $A(2,1,3)$ والمطلوب:

1. أثبت أنّ C و E و D ليست واقعة على استقامة واحدة.
2. أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE)
3. عين إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي (CDE)
4. عند أي قيمة للوسيط m تنتمي النقطة $M(m,1,0)$ للمستوي (CDE)

الحل:

الطلب الأول:

$$\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$$
$$\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه النقاط C و E و D ليست على استقامة واحدة.

الطلب الثاني:

نثبت أنّ شعاع توجيه المستقيم (AB) عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ الغير مرتبطين خطياً من المستوي (CDE) .

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}=0$$
$$(-1)(-3)+(-1)(-1)+(-4)(1)=0$$
$$3+1-4=0$$
$$0=0$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$$
$$(-1)(-4)+(-1)(4)+(-4)(0)=0$$
$$4-4=0$$
$$0=0$$

ومنهُ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE)

الطلب الثالث:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) وفق:

تحديد النقطة: $A(2,1,3)$

تحديد شعاع التوجيه:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$$

$$(AB):\begin{cases} x=-t+2 \\ y=-t+1 \;\; ; t\in\mathbb{R} \\ z=-4t+3 \end{cases}$$

كتابة معادلة المستوي (CDE) :

تحديد النقطة: معلومة $C(4,0,0)$

تحديد الناظم:

بما أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE) فإنّ $\overrightarrow{u_{AB}}=\overrightarrow{n_{CDE}}$ أيّ:

$$\overrightarrow{n_{CDE}}(-1,-1,-4)$$

نكتب المعادلة وفق:

$$a(x-x_C)+b(y-y_C)+c(z-z_C)=0$$
$$-1(x-4)-1(y-0)-4(z-0)=0$$
$$-x+4-y-4z=0$$
$$-x-y-4z+4=0$$

لإيجاد إحداثيات النقطة N نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي (CDE)

فإننا نحل أربعة معادلات وفق:

$$-x-y-4z+4=0 \ldots (1)$$
$$x=-t+2 \ldots (2)$$
$$y=-t+1 \ldots (3)$$
$$z=-4t+3 \ldots (4)$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$-(-t+2)-(-t+1)-4(-4t+3)+4=0$$
$$t-2+t-1+16t-12+4=0$$
$$18t-13=0$$
$$18t=13 \to t=\frac{13}{18}$$

نعوض t في (2) و (3) و (4) وفق:

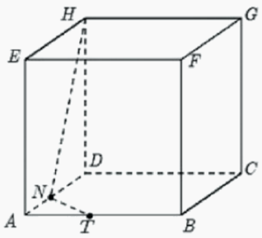
$$x=-\left(\frac{13}{18}\right)+2 \to x=\frac{23}{18}$$
$$y=-\left(\frac{13}{18}\right)+1 \to y=\frac{5}{18}$$
$$z=-4\left(-\frac{13}{18}\right)+3 \to z=\frac{106}{18}$$
$$N\left(\frac{23}{18},\frac{5}{18},\frac{106}{18}\right)$$

الطلب الرابع:

نعوض إحداثيات النقطة M في المستوي (CDE) ثم نعزل m فنحصل على قيمتها وفق:

$$-m-1-0+4=0$$
$$-m+3=0$$
$$m=3$$

التمرين الثالث:



ليكن لدينا $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1 و T نقطة من $[AB]$ تحقق $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

و N نقطة من $[AD]$ تحقق $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ والمطلوب:

1. في المعلم المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ جد إحداثيات النقاط T و N و F و H
2. جد الشعاعين $\overrightarrow{NT}$ و $\overrightarrow{NH}$ ثم جد معادلة للمستوي (HNT)
3. جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EF)
4. استنتج نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT)

الطلب الأول:

إحداثيات رؤوس المكعب:

$A(0,0,0)$	$E(0,0,1)$
$B(1,0,0)$	$F(1,0,1)$
$D(0,1,0)$	$H(0,1,1)$
$C(1,1,0)$	$G(1,1,1)$

إيجاد إحداثيات النقطة T :

لتكن $T(x,y,z)$ ومنه:

$$\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$x=\frac{2}{5}$$
$$y=0$$
$$z=0$$
$$T\left(\frac{2}{5},0,0\right)$$

إيجاد إحداثيات النقطة N :

لتكن $N(x,y,z)$ ومنه:

$$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$x=0$$
$$y=\frac{2}{5}$$
$$z=0$$
$$N\left(0,\frac{2}{5},0\right)$$

الطلب الثاني:

$$\overrightarrow{NT}\left(-\frac{2}{5},\frac{2}{5},0\right) \to \overrightarrow{NT}(-2,2,0)$$

$$\overrightarrow{NH}\left(0,\frac{3}{5},1\right) \to \overrightarrow{NH}(0,3,5)$$

كتابة معادلة المستوي (HNT) وفق:

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{NT}$ و $\overrightarrow{NH}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه النقاط N و T و H تشكل مستوي.

تحديد النقطة: معلومة $H(0,1,1)$

تحديد الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$

بما أن النقاط N و T و H من المستوي فإنّ $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{NT}$ و $\overrightarrow{NH}$ ومنه:

$$\overrightarrow{NT}.\vec{n} = 0$$
$$-2a + 2b = 0$$
$$\overrightarrow{NH}.\vec{n} = 0$$
$$3b + 5c = 0$$

نحل جملة المعادلتين الآتية:

$$\begin{cases} -2a + 2b = 0 \ldots (1) \\ 3b + 5c = 0 \quad \ldots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بـ -3 والمعادلة الثانية بـ 2

$$\begin{cases} 6a - 6b = 0 \quad \ldots (1)' \\ 6b + 10c = 0 \quad \ldots (2)' \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و $(2)'$ نجد أنّ:

$$6a + 10c = 0$$
$$6a = -10c$$
$$a = -\frac{5}{3}c \ldots (*)$$

نعوض في (1) :

$$-2\left(-\frac{5}{3}c\right) + 2b = 0$$
$$-\frac{10}{3}c + 2b = 0$$
$$2b = \frac{10}{3}c$$
$$b = \frac{10}{6}c$$
$$b = \frac{5}{3}c \ldots (**)$$

نفرض $c = 3$ نعوض في $(*)$ و $(**)$ ومنهُ:

$$a = -5$$
$$b = 5$$

ومنهُ $\vec{n}(-5,5,3)$

نكتب المعادلة وفق:

$$a(x - x_H) + b(y - y_H) + c(z - z_H) = 0$$
$$-5(x - 0) + 5(y - 1) + 3(z - 1) = 0$$
$$-5x + 5y - 5 + 3z - 3 = 0$$
$$-5x + 5y + 3z - 8 = 0$$

الطلب الثالث:

تحديد النقطة: معلومة $E(0,0,1)$

تحديد شعاع التوجيه:

$$\vec{u} = \overrightarrow{EF}$$
$$\vec{u}(1,0,0)$$

نكتب التمثيل الوسيطي وفق:

$$(EF): \begin{cases} x = t \\ y = 0 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

الطلب الرابع:

لدينا معادلة المستوي (HNT) :

$$-5x + 5y + 3z - 8 = 0$$

لدينا التمثيل الوسيطي للمستقيم (EF) :

$$(EF): \begin{cases} x = t \\ y = 0 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

نوجد نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT) ولتكن J بحل جملة أربعة معادلات وفق

$$-5x + 5y + 3z - 8 = 0 \ldots (1)$$
$$x = t \ldots (2)$$
$$y = 0 \ldots (3)$$
$$z = 1 \ldots (4)$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) :

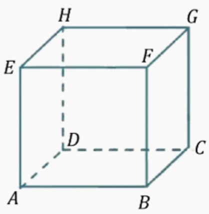
$$-5(t) + 5(0) + 3(1) - 8 = 0$$
$$-5t + 3 - 8 = 0$$
$$-5t - 5 = 0$$
$$-5t = 5$$
$$t = -1$$

نعوض t في (2) و (3) و (4) وفق:

$$x = -1$$
$$y = 0$$
$$z = 1$$

ومنهُ: $J(-1,0,1)$

التمرين الرابع:



$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 1 والنقاط K و J و I منتصفات الأضلاع $[FG]$ و $[BC]$ و $[AD]$ بالترتيب ، نختار المعلم المتجانس $\left(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$ والمطلوب:

1. احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{HJ}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{AK}$
2. أثبت أن النقاط F و H و I تشكل مستوي
3. اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$
4. هل النقطة K تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$
5. هل المستقيمان (ID) و (FE) متعامدان؟

الحل

الطلب الأول:

إحداثيات رؤوس المكعب:

$H(0,0,1)$	$D(0,0,0)$
$E(1,0,1)$	$A(1,0,0)$
$G(0,1,1)$	$C(0,1,0)$
$F(1,1,1)$	$B(1,1,0)$

إحداثيات I و J و K وفق:

$J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$	$K\left(\frac{1}{2},1,1\right)$
$I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$	

حساب مركبات الأشعة:

$$\overrightarrow{HJ}\left(\frac{1}{2},1-1\right)$$
$$\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$$
$$\overrightarrow{AK}\left(-\frac{1}{2},1,1\right)$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ F و H و I تشكل مستوي:

$$\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$$
$$\overrightarrow{HF}(1,1,0)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HF}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه النقاط F و H و I ليست على استقامة واحدة.

الطلب الثالث:

كتابة معادلة المستوي المحوري للقطعة $[BC]$:

تحديد النقطة:

بما أنّ المستوي هو المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ فإنّ النقطة N منتصف القطعة $[BC]$ تنتمي إلى المستوي حيث:

$$N\left(\frac{1}{2},1,0\right)$$

تحديد الناظم:

بما أنّ المستوي هو المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ فإنّ $\vec{n}=\overrightarrow{BC}$

أيّ: $\vec{n}(-1,0,0)$

نكتب المعادلة وفق:

$$-1\left(x-\frac{1}{2}\right)+0(y-1)+0(z-0)=0$$
$$-x+\frac{1}{2}=0$$
$$-2x+1=0 \qquad \times 2$$

الطلب الرابع:

اختبار انتماء النقطة $K\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$ ويتم وفق تعويض إحداثيات النقطة K في معادلة المستوي $[BC]$ وفي حال كانت المعادلة محققة نقول أنّها تنتمي وفي حال كانت المعادلة غير محققة نقول أنّها لا تنتمي.

$$-2x+1=0$$
$$-2\left(\frac{1}{2}\right)+1=0$$
$$-1+1=0$$
$$0=0$$

محققة

إذاً K تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[BC]$

الطلب الخامس:

$$\overrightarrow{ID}\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$$
$$\overrightarrow{FE}(0,-1,0)$$

نوجد $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{FE}=0$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(0)+(0)(-1)+(0)(0)=0$$
$$0=0$$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا المستويان:

$$P: 2x-y+z-4=0$$
$$Q: x+y+2z-5=0$$

المطلوب:

1. أثبت أن P و Q متقاطعان.
2. أوجد تمثيل وسيطي للمستقيم d_1 الفصل المشترك للمستويان P و Q.
3. ادرس الوضع النسبي للمستقيمان d_1 و d_2 حيث:
$$d_2:\begin{cases}x=2s-1\\ y=s \qquad ;s\in\mathbb{R}\\ z=1-3s\end{cases}$$
4. هل المستقيمان d_1 و d_2 يقعان في مستو واحد؟؟ علل إجابتك.
5. أثبت أن المستقيمان d_1 و (AB) متعامدان حيث: $B(1,1,2), A(3,0,3)$
6. ادرس تقاطع المستقيم d_2 والمستوي R حيث: $R: x-y+z=1$ وفي حال التقاطع عيّن إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيم d_2 والمستوي R.
7. هل المستقيم (CD) عمودي على المستوي R حيث: $C(1,1,-1)$ و $D(3,-1,1)$
8. لتكن لدينا النقطة $E(3,-1,2)$، أوجد إحداثيات النقطة E_1 المسقط القائم للنقطة E على المستوي P.
9. احسب بعد النقطة E عن المستوي P بطريقتين مختلفتين.
10. أوجد إحداثيات النقطة E_2 المسقط القائم للنقطة E على المستقيم d_1.
11. احسب بعد النقطة E عن المستقيم d_1.
12. هل النقاط

$G(1,1,-2)$	$F(2,1,1)$

تنتمي للمستوي P؟

13. هل النقاط

$G(1,1,-2)$	$F(2,1,1)$

تنتمي للمستقيم d_2؟

14. ادرس الوضع النسبي للمستويات P و Q و R.
15. اكتب معادلة الكرة S_1 التي مركزها E ونصف قطرها $r=\sqrt{3}$.

الحل:

1. لدينا:

المستوي P ناظمه $\vec{n}_P(2,-1,1)$ والمستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(1,1,2)$

نلاحظ أن $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطان خطياً وبالتالي P و Q متقاطعان.

2. لتكن:

$$z = t$$
$$\begin{cases} 2x - y + t - 4 = 0 \dots\dots (1) \\ x + y + 2t - 5 = 0 \dots\dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$3x + 3t - 9 = 0$$
$$3x = -3t + 9$$
$$x = -t + 3$$

نعوض في (2):

$$-t + 3 + y + 2t - 5 = 0$$
$$y + t - 2 = 0$$
$$y = -t + 2$$

إذاً الفصل المشترك هو:

$$(d_1): \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = -t + 2 \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

3.

المستقيم d_1 شعاع توجيه: $\vec{u}_1(-1, -1, 1)$

المستقيم d_2 شعاع توجيه: $\vec{u}_2(2, 1, -3)$

نلاحظ أن $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطياً

وبالتالي d_1 و d_2 إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

$$\begin{cases} -t + 3 = 2s - 1 \dots (1) \\ -t + 2 = s \dots (2) \\ t = 1 - 3s \dots (3) \end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases} -t + 3 = 2s - 1 \dots (1) \\ t = 1 - 3s \dots (3) \end{cases}$$

بالجمع:

$$3 = -s \Rightarrow s = -3$$

نعوض في (3):

$$t = 1 + 9 \Rightarrow t = 10$$

نتحقق في (2):

$$-10 + 2 = -3$$
$$-8 \neq -3$$

غير محققة،

الجملة مستحيلة الحل إذاً d_1 و d_2

لا يشتركان بأية نقطة فهما متخالفان.

4. d_1 و d_2 متخالفان إذاً لا يقعان في مستوٍ واحد.

5.

المستقيم d_1 شعاع توجيهه: $\vec{u}_1(-1, -1, 1)$

المستقيم (AB) شعاع توجيهه: $\overrightarrow{AB}(-2, 1, -1)$

$$\vec{u}_1 . \overrightarrow{AB} = 2 - 1 - 1 = 0$$

إذاً المستقيمان d_1 و (AB) متعامدان.

6.

المستقيم d_2 شعاع توجيهه: $\vec{u}_2(2, 1, -3)$

المستوي R ناظمه: $\vec{n}_R(1, -1, 1)$

$$\vec{u}_2 . \vec{n}_R = 2 - 1 - 3 = -2$$

إذا المستوي R والمستقيم d_2 متقاطعان.

إيجاد نقطة التقاطع R مع d_2:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \dots (1) \\ x = 2t - 1 \dots (2) \\ y = t \quad \dots (3) \\ z = 1 - 3t \dots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1):

$$2t - 1 - t + 1 - 3t = 1$$
$$-2t = 1 \rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

نعوض قيمة t في $(2), (3), (4)$:

$$x = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \Rightarrow x = -2$$
$$y = -\frac{1}{2}$$
$$z = 1 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow I\left(-2, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

7.

ناظم المستوي R هو: $\vec{n}_R(1, -1, 1)$

المستقيم (CD) شعاع توجيهه: $\overrightarrow{CD}(2, -2, 2)$

نلاحظ أن $\vec{n}_R$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً إذاً:

المستوي R والمستقيم (CD) متعامدان.

8.

الخطوة الأولى:

نكتب معادلة المستوي P:

$$P: 2x - y + z - 4 = 0$$

الخطوة الثانية:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ المار من E والعمودي على المستوي P، بما أن المستقيم Δ والمستوي P متعامدان فإن:

$$\vec{u}_\Delta = \vec{n}_P(2, -1, 1)$$
$$E(3, -1, 2)$$
$$(\Delta): \begin{cases} x = 2k + 3 \\ y = -k - 1 \; ; k \in \mathbb{R} \\ z = k + 2 \end{cases}$$

الخطوة الثالثة:

تكون النقطة E_1 هي نقطة تقاطع المستوي P والمستقيم Δ أي:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \dots (1) \\ x = 2k + 3 \quad \dots (2) \\ y = -k - 1 \dots (3) \\ z = k + 2 \quad \dots (4) \end{cases}$$

نعوض $(2), (3), (4)$ في (1):

$$2(2k + 3) - (-k - 1) + k + 2 - 4 = 0$$
$$4k + 6 + k + 1 + k + 2 - 4 = 0$$
$$6k + 5 = 0$$
$$6k = -5 \rightarrow k = -\frac{5}{6}$$

نعوض قيمة k في $(2), (3), (4)$:

$$x = 2\left(-\frac{5}{6}\right) + 3 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$y=-\left(-\frac{5}{6}\right)-1\Rightarrow y=-\frac{1}{6}$$
$$z=-\frac{5}{6}+2\Rightarrow z=\frac{7}{6}$$
$$\Rightarrow E_1\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{6},\frac{7}{6}\right)$$

.9 الطريقة الأولى:

$$dist(E,P)=\frac{|2(3)-(-1)+2-4|}{\sqrt{4+1+1}}$$
$$=\frac{|6+1+2-4|}{\sqrt{6}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$$

الطريقة الثانية:

$$\overrightarrow{EE_1}\left(-\frac{5}{3},\frac{5}{6},-\frac{5}{6}\right)$$

يكون بعد النقطة E عن المستوي P يساوي المسافة بين E ومسقط E على المستوي P:

$$EE_1=\sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{25}{3}+\frac{25}{36}+\frac{25}{36}}=\sqrt{\frac{150}{36}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$$

.10 الخطوة الأولى:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d_1:

$$(d_1):\begin{cases}x=-t+3\\ y=-t+2\,;t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

الخطوة الثانية:

لدينا النقطة M من المستقيم d_1 حيث:

$$M(-t+3,-t+2,t)$$
$$\vec{u}_1(-1,-1,1)$$
$$\overrightarrow{EM}(-t,-t+3,t-2)$$

لدينا $\vec{u}_1$ و $\overrightarrow{EM}$ متعامدان إذاً:

$$\overrightarrow{EM}.\vec{u}_1=0$$
$$t+t-3+t-2=0$$
$$3t=5\rightarrow t=\frac{5}{3}$$

إذاً:

$$x=-\frac{5}{3}+3=\frac{4}{3}$$
$$y=-\frac{5}{3}+2=\frac{1}{3}$$
$$z=\frac{5}{3}$$
$$\Rightarrow E_2\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

.11

النقطة F:

$$2(2)-1+1-4=0$$
$$4-4-1+1=0$$
$$0=0$$

إذاً النقطة F تنتمي للمستوي P.

النقطة G:

$$2(1)-1+(-2)-4=0$$
$$2-1-2-4=0$$
$$-6\neq 0$$

إذاً النقطة G لا تنتمي للمستوي P.

.12

النقطة F:

$$2=2s-1\Rightarrow s=\frac{3}{2}$$
$$1=t\Rightarrow s=1$$

إذاً F لا تنتمي للمستقيم d_2.

النقطة G:

$$1=2s-1\Rightarrow s=1$$
$$1=s\Rightarrow s=1$$
$$-2=1-3s\Rightarrow s=1$$

إذاً G تنتمي للمستقيم d_2.

.13 الخطوة الأولى:

نوجد إحداثيات E_2 المسقط القائم لـ E على d_1:

$$E_2\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

الخطوة الثانية:

يكون بعد النقطة E عن المستقيم d_1 هو المسافة بين E و E_2 مسقط E على المستقيم d_1 أي:

$$\overrightarrow{EE_2}\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$$
$$dist(E,d_1)=EE_2$$
$$=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{16}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{42}{9}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

.14 لدينا الجملة:

$$\begin{cases}x+y+2z-5=0\ldots(\mathrm{L_1})\\ x-y+z-1=0\ldots(\mathrm{L_2})\\ 2x-y+z-4=0\ldots(\mathrm{L_3})\end{cases}$$
$$-\mathrm{L_1}+\mathrm{L_2}\rightarrow \mathrm{L'_2}$$
$$-2\mathrm{L_1}+\mathrm{L_2}\rightarrow \mathrm{L'_3}$$

$$\begin{cases}x+y+2z-5=0\ldots(\mathrm{L_1})\\ -2y-z+4=0\ldots(\mathrm{L'_2})\\ -3y-3z+6=0\ldots(\mathrm{L'_3})\end{cases}$$
$$-\frac{3}{2}\mathrm{L'_2}+\mathrm{L'_3}\rightarrow \mathrm{L''_3}$$
$$\begin{cases}x+y+2z-5=0\ldots(\mathrm{L_1})\\ -2y-z+4=0\ldots(\mathrm{L'_2})\\ -\frac{3}{2}z=0\ldots(\mathrm{L''_3})\end{cases}$$

من $(\mathrm{L''_3})$ نجد:

$$-\frac{3}{2}z=0\Rightarrow z=0$$

نعوض في $(\mathrm{L'_2})$ نجد:

$$-2y+4=0$$
$$-2y=-4$$
$$y=2$$

نعوض في $(\mathrm{L_1})$ فنجد:

$$x + 2 - 5 = 0$$
$$x = 3$$

إذاً المستويات P و Q و R

تشترك بنقطة بنقطة واحدة هي:

$$I(3,2,0)$$

15. المركز: $E(3,-1,2)$

نصف القطر: $R = \sqrt{3}$

المعادلة:

$$S_1: (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3$$

التمرين السادس:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطة $A(1,1,1)$ والمستويين:

$$P: x + y + z = 6$$
$$Q = 3x + y - z = 2$$

1. أثبت أن المستويين متقاطعان.
2. اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك Δ.
3. أوجد احداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستقيم Δ.
4. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ.
5. اكتب معادلة المستوي R الذي يحوي Δ ويمر بالنقطة A.

الحل:

1. لدينا:

$$\vec{n}_Q(3,1,-1)\,,\vec{n}_P(1,1,1)$$

نلاحظ أن المركبات غير متناسبة وبالتالي $\vec{n}_Q$ و $\vec{n}_P$ غير مرتبطين خطياً، ومنه المستويان P و Q متقاطعان.

2. لدينا:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$4x + 2y = 8$$
$$2y = -4x + 8$$
$$y = -2x + 4$$

نعوض في المعادلة الأولى فنجد:

$$2 - 2x + 4 + z = 6$$
$$z = x + 2$$

وبفرض $x = t$ نجد:

$$\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -2t + 4; t \in \mathbb{R} \\ z = t + 2 \end{cases}$$

3. لدينا المستقيم Δ تمثيله الوسيطي:

$$\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -2t + 4; t \in \mathbb{R} \\ z = t + 2 \end{cases}$$

بما ان A' من المستقيم Δ فإنّ:

$$A'(t, -2t + 4, t + 2)$$

تكون A' هي المسقط القائم لـ A على Δ إذا تحقق:

$$\overrightarrow{AA'}.\vec{u}_\Delta = 0$$

حيث:

$$\overrightarrow{AA'}(t-1, -2t+3, t+1)$$
$$\vec{u}_\Delta(1,-2,1)$$

حيث $\vec{u}_\Delta$ هو شعاع توجيه المستقيم Δ ومنه:

$$\overrightarrow{AA'}.\vec{u}_\Delta = 0$$

$$(t-1)(1) + (-2t+3)(-2) + (t+1)(1) = 0$$
$$t - 1 + 4t - 6 + t + 1 = 0$$
$$6t - 6 = 0$$
$$6t = 6$$
$$t = 1$$

وبالتالي احداثيات A' تكون:

$$A'(1,2,3)$$

4. بُعد A عن Δ يعطى بالعلاقة:

$$dist(A,\Delta) = AA'$$

أي بعد A عن Δ هو المسافة AA'، لدينا:

$$AA' = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$
$$\Rightarrow dist(A,\Delta) = \sqrt{5}$$

5. فكرة:

* المستوي R يحوي Δ

  فهو يحوي شعاع التوجيه $\vec{u}_\Delta$.

* النقطة A' من المستقيم Δ والمستقيم Δ من المستوي R وبالتالي A' محتواة أيضاً في المستوي R.

* المستوي R مار من A.

أي نجد أنّ: المستوي R يقبل الشعاعين

$\overrightarrow{AA'}(0,1,2)\,, \vec{u}_\Delta(1,-2,1)$ كشعاعي توجيه له.

تحديد الناظم: بفرض $\vec{n}(a,b,c)$

- بما أنّ $\vec{n}_R$ ناظم على المستوي R وبما أن $\vec{u}_\Delta$ و $\overrightarrow{AA'}$ من المستوي R فإن $\vec{n}_R$ عمودي عليهما وبالتالي:

$$\vec{n}_R.\overrightarrow{AA'} = 0 \Rightarrow a - 2b + c = 0$$
$$\vec{n}_R.\vec{u}_\Delta = 0 \Rightarrow b + 2c = 0$$

لدينا:

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \ldots(1) \\ b + 2c = 0 \ldots(2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة الثانية بالعدد 2:

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \ldots(1) \\ 2b + 4c = 0 \ldots(2) \end{cases}$$

بالجمع:

$$a + 5c = 0$$
$$a = -5c$$

نعوض في المعادلة الأولى فنجد:

$$-5c - 2b + c = 0$$
$$-2b = 4c$$
$$b = -2c$$

بفرض $c = -1$ تكون:

$$a = 5\,, b = 2$$
$$\Rightarrow \vec{n}_R(5,2,-1)$$

تحديد النقطة:

$$A(1,1,1)$$

كتابة المعادلة:

$$R: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$R: 5(x-1) + 2(y-1) - 1(z-1) = 0$$
$$R: 5x - 5 + 2y - 2 - z + 1 = 0$$
$$R: 5x + 2y - z - 6 = 0$$

التمرين السابع:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي P الذي يشمل النقطة $A(1,-2,1)$ و $\vec{n}(-2,1,5)$ شعاع ناظم له وليكن المستوي Q معادلته:

$$Q: x+2y-7=0$$

1. اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي P.
2. تحقق أن النقطة $B(-1,4,-1)$ مشتركة بين المستويين P و Q.
3. بين أن المستويين P و Q متقاطعان وفق مستقيم Δ يطلب تعيين تمثيله الوسيطي.
4. أثبت أن المستويين P و Q متعامدان.
5. لتكن لدينا النقطة $C(5,-2,-1)$ والمطلوب:
   a) احسب المسافة بين النقطة C والمستوي P ثم المسافة بين النقطة C والمستوي Q.
   b) استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم Δ.

الحل:

1. لدينا:

النقطة: $A(1,-2,1)$

الناظم: $\vec{n}(-2,1,5)$

المعادلة:

$$P: -2(x-1)+1(y+2)+5(z-1)=0$$
$$P: -2x+2+y+2+5z-5=0$$
$$P: -2x+y+5z-1=0$$

2. التحقق أن النقطة B للمستوي P:

$$-2(-1)+4+5(-1)-1=0$$
$$+2+4-5-1=0$$
$$0=0$$

محققة إذاً النقطة B تنتمي للمستوي P.

التحقق من انتماء B للمستوي Q:

$$-1+2(4)-7=0$$
$$-1+8-7=0$$
$$0=0$$

محققة، إذاً B تنتمي للمستوي Q

وعليه فإنّ النقطة B تنتمي للمستوي P و Q.

3. لدينا المستوي P ناظمه $\vec{n}_P(-2,1,5)$.

ولدينا المستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(1,2,0)$

بما أنّ $\vec{n}_P,\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطياً.

فإن المستويين P و Q متقاطعان

التمثيل الوسيطي لـ Δ:

$$-2x+y+5z-1=0$$
$$x+2y-7=0$$

نأخذ $z=t$:

$$\begin{cases}-2x+y+5t-1=0\ ...(1)\\ x+2y-7=0\ ...(2)\end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد -2:

$$\begin{cases}4x-2y-10t+2=0\ ...(1)\\ x+2y-7=0\ ...(2)\end{cases}$$

نجمع المعادلتين:

$$5x-10t-5=0$$
$$5x=10t+5$$
$$x=2t+1$$

نعوض في المعادلة (2):

$$2t+1+2y-7=0$$
$$2y=-2t+6$$
$$y=-t+3$$

ويكون التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ:

$$\Delta: \begin{cases}x=2t+1\\ y=-t+3\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

4. لدينا:

$$\vec{n}_P.\vec{n}_Q=(-2)1+(1)2+(0)5$$
$$=-2+2+0=0$$

إذاً المستويين P و Q متعامدين.

5. لدينا:

a) المسافة بين C و P:

$$dist(C,P)=\frac{|-2(5)-2+5(-1)-1|}{\sqrt{4+1+25}}$$
$$=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{18\sqrt{30}}{30}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$$

المسافة بين C و Q:

$$dist(C,Q)=\frac{|5+2(-2)-7|}{\sqrt{1+4+0}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

a) بما أن المستويين P و Q متعامدان ومتقاطعان وفق المستقيم (Δ)، فإن حسب فيثاغورث:

$$dist(C,\Delta)=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{9\times30}{25}+\frac{36\times5}{25}}=\sqrt{\frac{450}{25}}$$
$$=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

التمرين الثامن:

في الفراغ المنسوب لمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن لدينا النقاط $B(4,0,-2)$ و $C(2,6,0)$ و $A(4,5,3)$ والمستقيم d المعرف بالتمثيل الوسيطي:

$$d: \begin{cases}x=6-2\lambda\\ y=-1+6\lambda\ ;\lambda\in\mathbb{R}\\ z=1+2\lambda\end{cases}$$

1. أثبت أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم D.
2. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (CB).
3. ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (CB).
4. اكتب معادلة المستوي P الذي يمر بالنقطة A ويقبل $\vec{v}(0,-5,-5)$ و $\vec{u}(-2,1,-3)$ شعاعين موجهين له.
5. بفرض G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,2),(B,-1),(A,2)$ ماذا تمثل مجموعة النقاط في الفراغ والتي تحقق العلاقة:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MG}-3\overrightarrow{MA}\right\|$$

الحل:

1. نعوض النقطة A في المستقيم (d):

* $4=6-2\lambda \Rightarrow 2\lambda=2 \Rightarrow \lambda=1$

أوراق الجلسات المكثفة

* $5 = -1 + 6\lambda \Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 1$
* $3 = 1 + 2\lambda \Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1$

إذاً النقطة A تنتمي إلى المستقيم (d).

2. لدينا:

النقطة: $B(4,0,-2)$

شعاع التوجيه: $\vec{u} = \overrightarrow{CB}(2-6,-2)$

التمثيل الوسيطي:

$$(CB): \begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = -6 \\ z = -2t - 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

3.

لدينا المستقيم (d) شعاع توجيهه: $\vec{u}_d = (-2,6,2)$

لدينا المستقيم (CB) شعاع توجيهه: $\vec{u}_{CB}(2,-6,-2)$

نلاحظ أن $\vec{u}_d$ و $\vec{u}_{CB}$ مرتبطان خطياً إذاً (d) و (CB) اما متوازيان أو منطبقان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

$$\begin{cases} 6 - 2\lambda = 2t + 4 \dots (1) \\ -1 + 6\lambda = -6t \dots (2) \\ 1 + 2\lambda = -2t - 2 \dots (3) \end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases} 6 - 2\lambda = 2t + 4 \dots (1) \\ 1 + 2\lambda = -2t - 2 \dots (3) \end{cases}$$

بالجمع نجد:

$$7 \neq 2$$

إذاً الجملة مستحيلة الحل وبالتالي المستقيمان (d) و (CB) لا يشتركان بأية نقطة فهما متوازيان.

4. تحديد النقطة: $A(4,5,3)$

تحديد الناظم $\vec{n}_P$:

ليكن $\vec{n}_P$ ناظم على المستوي P وبما أن $\vec{u}_d$ و $\vec{u}_{CB}$ شعاعين موجهين للمستوي P فإن $\vec{n}_P$ عمودي على كل من $\vec{u}_d$ و $\vec{u}_{CB}$ أي:

$$\vec{n}_P.\vec{u} = 0 \Rightarrow -2a + b - 3c = 0$$
$$\vec{n}_P.\vec{v} = 0 \Rightarrow -5b - 5c = 0$$

لتكن $c = 1$:

$$\begin{cases} -2a + b - 3 = 0 \dots (1) \\ -5b - 5 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد:

$$-5b - 5 = 0$$
$$5b = -5$$
$$b = -1$$

نعوض في (1) فنجد:

$$-2a - 1 - 3 = 0$$
$$2a = -4$$
$$a = -2$$
$$\Rightarrow \vec{n}_P(-2,-1,1)$$

المعادلة:

$$P: -2(x-4) - 1(y-5) + 1(z-3) = 0$$
$$P: -2x + 8 - y + 5 + z - 3 = 0$$
$$P: -2x - y + z + 10 = 0$$

5. نعلم أن:

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (2-1+2)\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG}$$

نعوض:

$$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{MA}\right\|$$
$$\left\|(2-1+2)\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{MA}\right\|$$
$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA})\right\|$$
$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG})\right\|$$
$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{AG}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{AG}\right\|$$

أي أن M نقطة متحركة بالفراغ بحيث يكون بعدها عن النقطة الثانية G يساوي مقداراً ثابتاً هو طول القطعة $[AG]$ أي أن M ترسم سطح الكرة التي مركزها G ونصف $R = AG$.

التمرين التاسع:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(0,1,2)$ و $B(2,1,1)$ و $C(1,0,0)$ و $D(1,-2,\lambda)$ والمستويان:

$$P: 2x - y + 3z = 9$$
$$Q: 3x - 2y + 4z = 11$$

1. جد العدد الحقيقي λ بحيث يكون المثلث ABD قائم في A.
2. أثبت أنّ المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) ثم استنتج معادلة المستوي (ABC).
3. أثبت أنّ المستويان P و Q متقاطعين وجد تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d.
4. أوجد نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC).
5. أثبت ان النقطة $A'\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d ثم استنتج بعد A عن d.

الحل:

1. يكون المثلث ABD قائم في A إذا كان الضلعين القائمين AB و AD متعامدان أي يتحقق:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$$
$$\overrightarrow{AB}(2,0,-1)\, , \overrightarrow{AD}(1,-3,\lambda-2)$$

نعوض:

$$2(1) + 0(-3) - 1(\lambda - 2) = 0$$
$$2 - \lambda + 2 = 0$$
$$\lambda = 4$$

2. حتى يكون (AD) عمودي على (ABC) يجب أن يكون $\overrightarrow{AD}$ شعاع توجيه للمستقيم (AD) عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABC)، لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(2,0,-1)\, , \overrightarrow{AC}(1,-1,-2)$$

شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABC).

ونعلم أن شعاع توجيه المستقيم (AD) هو:

$$\overrightarrow{AD}(1,-3,2)$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = 2 + 0 - 2 = 0$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = 1 + 3 - 4 = 0$$

وبالتالي (AD) عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABD) ، فهذا يعني أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

معادلة المستوي (ABC):

الناظم: بما أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) فإن:

$$\vec{n}_{(ABC)} = \overrightarrow{AD}(1,-3,2)$$

النقطة: $A(0,1,2)$

المعادلة: $1(x-0)-3(y-1)+2(z-2)=0$

$$x-3y+3+2z-4=0$$

$$x-3y+2z-1=0$$

3. لدينا المستوي P ناظمه $\vec{n}_P(2,-1,3)$

لدينا المستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(3,-2,4)$

نلاحظ أن $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات ومنه المستويان P و Q متقاطعان، لتحديد الفصل المشترك d:

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} 2x-y+3z=9 \dots\dots(1) \\ 3x-2y+4z=11 \dots\dots(2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد (-2):

$$\begin{cases} -4x+2y-6z=-18 \dots\dots(1) \\ 3x-2y+4z=11 \dots\dots(2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2):

$$-x-2z=-7$$
$$x=-2z+7$$

نعوض x في (2) نجد:

$$3(-2z+7)-2y+4z=11$$
$$-6z+21-2y+4z=11$$
$$-2z-2y=11-21$$
$$2y=-2z+10$$
$$y=-z+5$$

بفرض $z=t$ نعوض في y و x:

$$x=-2t+7$$
$$y=-t+5$$

ومنه:

$$d:\begin{cases} x=-2t+7 \\ y=-t+5 \, ; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

4. من الطلب السابق أوجدنا أن المستويان P و Q يتقاطعان في الفصل المشترك d ولتحديد نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC) فإننا نوجد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC) وبالتالي تكون نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC) هي نفسها نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC).

الخطوة الأولى:

دراسة الوضع النسبي بين المستقيم d والمستوي (ABC):

لدينا المستقيم d شعاع توجيهه: $\vec{u}_d(-2,-1,1)$

لدينا المستوي (ABC) ناظمه: $\vec{n}(1,-3,2)$

ولدينا:

$$\vec{n}.\vec{u}=-2+3+2=3\neq 0$$

ومنه المستقيم d والمستوي (ABC) متقاطعان.

الخطوة الثانية:

إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC):

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} x-3y+2z-1=0 \dots(1) \\ x=-2t+7 \dots(2) \\ y=-t+5 \quad \dots(3) \\ z=t \qquad \dots(4) \end{cases}$$

نعوض كلاً من $(2),(3),(4)$ في (1):

$$-2t+7-3(-t+5)+2t-1=0$$
$$-2t+7+3t-15+2t-1=0$$
$$3t-9=0$$
$$3t=9$$
$$t=3$$

نعوض قيمة t في $(2),(3),(4)$:

$$x=-2(3)+7 \Rightarrow x=1$$
$$y=-(3)+5 \Rightarrow y=2$$
$$z=3$$

ومنه إحداثيات I نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC) هي:

$$I(1,2,3)$$

الخطوة الثالثة:

نقطة تقاطع المستويات الثلاثة P و Q و (ABC) هي نفسها نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC) وهي: $I(1,2,3)$

5. لدينا المستقيم d شعاع توجيهه:

$$\vec{u}(-2,-1,1)$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AA'}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

نختبر تعامد كلاً من $\overrightarrow{AA'}$ مع شعاع توجيه المستقيم d وفق:

$$\vec{u}.\overrightarrow{AA'}=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=0$$

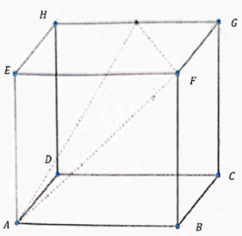
إذاً النقطة A' هي المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d.

لحساب بعد النقطة A عن المستقيم d:

$$dist(A,d)=AA'$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{21}{9}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

التمرين العاشر:



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=4$ و $AE=AD=2$ ولتكن J منتصف $[HG]$ ونتأمل معلماً متجانساً $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

1. أوجد إحداثيات النقاط A و F و C و J.
2. احسب المسافتين $[AJ]$ و $[JF]$.
3. أثبت أن المثلث AFJ قائم في J واحسب مساحته.
4. أثبت أن $\vec{n}(1,1,-2)$ ناظم المستوي (AFJ) ثم اكتب معادلته.
5. احسب بعد C عن المستوي AFJ ثم استنتج حجم الرباعي الوجوه $AFJC$.
6. أوجد إحداثيات النقطة N المسقط القائم للنقطة E على المستقيم (AF).

الحل:

1. إيجاد الإحداثيات:

$A(0,0,0)\,,\quad B(4,0,0)$
$D(0,2,0)\,,\quad E(0,0,2)$
$C(4,2,0)\,,\quad F(4,0,2)$
$H(0,2,2)\,,\quad G(4,2,2)$

$$J\left(\frac{0+4}{2},\frac{2+2}{2},\frac{2+2}{2}\right)$$
$$J(2,2,2)$$

2. لحساب المسافتين:

$$\overrightarrow{AJ}(2,2,2)$$
$$AJ=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$\overrightarrow{JF}(2,-2,0)$$
$$JF=\sqrt{4+4+0}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

3. حتى يكون المثلث AFJ قائم في J يجب أن يكون:

$$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{JF}=0$$
$$4-4+0$$
$$0=0$$

محققة، إذا المثلث AEJ قائم في J.

مساحتهُ:

$$S_{AFJ}=\frac{\text{جداء الضلعين القائمتين}}{2}$$
$$S_{AFJ}=\frac{AJ.JF}{2}=\frac{2\sqrt{3}.2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$$

4. لدينا:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AJ}=2+2-4=0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{JF}=2-2+0=0$$

أي $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AJ}$ و $\overrightarrow{JF}$
وبالتالي $\vec{n}$ ناظم على المستوي (AFJ)

معادلة المستوي حيث:

النقطة $A(0,0,0)$
الناظم $\vec{n}(1,1,-2)$

فتكون المعادلة:

$$1(x-0)+1(y-0)-2(z-0)=0$$
$$x+y-2z=0$$

5. لدينا:

$$dist\big(C,(AFJ)\big)=\frac{|4+2-0|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

حساب الحجم:

$$V_{AFJC}=\frac{1}{3}.S_{AFJ}.h$$

حيث:

$$S_{AFJ}=2\sqrt{6}$$
$$h=dist\big(C,(AFJ)\big)=\sqrt{6}$$
$$\Rightarrow V_{AFJC}=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{6}\times\sqrt{6}=4$$

6. التمثيل الوسيطي للمستقيم (AF):

النقطة: $A(0,0,0)$
شعاع التوجيه: $\overrightarrow{AF}(4,0,2)$
فيكون التمثيل الوسيطي هو:

$$(AF):\begin{cases}x=4t\\ y=0\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=2t\end{cases}$$

7. معادلة المستوي P

المار من E والعمودي على المستقيم AF:

النقطة: $E(0,0,2)$
الناظم: $\vec{u}_{AF}=\vec{n}_P(4,0,2)$
المعادلة: $P:4(x-0)+0(y-0)+2(z-2)=0$

$$P:4x+2z-4=0$$
$$P:2x+z-2=0$$

تكون إحداثيات N المسقط القائم للنقطة E على المستقيم (AF) هي نقطة تقاطع المستوي P والمستقيم AF:

نحل الجملة:

$$\begin{cases}2x+z-2=0\ ...(1)\\ x=4t\ ...(2)\\ y=0\ \ ...(3)\\ z=2t\ ...(4)\end{cases}$$

نعوض $(2),(3),(4)$ في (1):

$$2(4t)+2t-2=0$$
$$8t+2t-2=0$$
$$10t=2$$
$$t=\frac{1}{5}$$

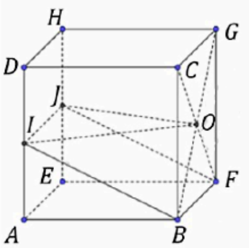
نعوض قيمة t في كل من (2) و (3) و (4):

$$x=\frac{4}{5}\ ,y=0\ ,z=\frac{2}{5}$$

ومنه إحداثيات N هي:

$$N\left(\frac{4}{5},0,\frac{2}{5}\right)$$

التمرين الحادي عشر:



$ABCDEFGH$ مكعب فيه I و J منتصفا $[AD]$ و $[EH]$ و O مركز الوجه $(BCGF)$ نتخذ المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً

والمطلوب:

1. أوجد إحداثيات النقاط $B\ ,F\ ,I$.
2. تأكد أن $\vec{n}(1,0,2)$ ناظم على المستوي $(BFJI)$ ثم اكتب معادلته.
3. احسب بعد O عن المستوي $(BFJI)$ وحجم الهرم $(OBFJI)$.
4. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(BFJI)$ والمار بالنقطة O
5. احسب احداثيات النقطة N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(BFJI)$.
6. أثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,\alpha),(B,\beta),(F,\gamma)$ حيث α و β و γ يطلب تعيينها.

الحل:

1. إحداثيات رؤوس المكعب:

$A(0,0,0)\,,\quad D(0,0,1)$
$B(1,0,0)\,,\quad C(1,0,1)$
$E(0,1,0)\,,\quad H(0,1,1)$
$F(1,1,0)\,,\quad G(1,1,1)$

إحداثيات I منصف $[AD]$:

$$I\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$$

إحداثيات J منتصف $[EH]$:

$$J\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$$

إحداثيات O مركز الوجه $(BCGF)$:

تكون إحداثياتها هي منتصف القطر $[BG]$:

$$O\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

2. لإثبات أن $\vec{n}(1,0,2)$ ناظم على المستوي $(BFJI)$ نثبت أنه عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً فيه وليكن لدينا:

$$\overrightarrow{BF}(1,0,1)\,,\overrightarrow{BI}\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$$

نلاحظ أنهما غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد.

$$\vec{n}.\overrightarrow{BF}=1(0)+0(1)+2(0)=0$$

ومنه $\vec{n}$ و $\overrightarrow{BE}$ متعامدين.

$$\vec{n}.\overrightarrow{BI}=1(-1)+0(0)+2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=-1+1=0$$

ومنه $\vec{n}$ و $\overrightarrow{BI}$ متعامدين.

لكتابة معادلة المستوي نحتاج نقطة وناظم ولدينا:

النقطة: $B(1,0,0)$

الناظم: $\vec{n}(1,0,2)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$1(x-1)+0(y-0)+2(z-0)=0$$

$$x-1+2z=0$$

$$(BFJI):x+2z-1=0$$

3. لحساب بعد O عن المستوي $(BFJI)$:

$$dist(O,(BFJI))=\frac{\left|1+2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

حجم الهرم $(OBFJI)$:

القانون:

$$V_{(OBFJI)}=\frac{1}{3}S_{(BFJI)}.h$$

مساحة القاعدة S:

لدينا:

$$BF=1\,,BI=\sqrt{1+0+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

ومنهُ:

$$S_{(BFJI)}=BF\times BI=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

الارتفاع h:

$$h=dist(O,(BFJI))=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

وبالتالي:

$$V_{(OBFJI)}=\frac{1}{3}S_{(BFJI)}.h$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{6}$$

4. لكتابة التمثيل الوسيطي نحتاج:

نقطة: $O\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

شعاع توجيه:

بما أن d عمودي على المستوي $(BFJI)$ فإن:

$$\vec{u}=\vec{n}(1,0,2)$$

$$\Rightarrow d:\begin{cases}x=t+1\\ y=\frac{1}{2} & ;t\in\mathbb{R}\\ z=2t+\frac{1}{2}\end{cases}$$

5. لتكن الجملة:

$$\begin{cases}x+2z-1=0\ldots\ldots(1)\\ x=t+1\ldots\ldots(2)\\ y=\frac{1}{2}\ldots\ldots(3)\\ z=2t+\frac{1}{2}\ldots\ldots(4)\end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1):

$$t+1+2\left(2t+\frac{1}{2}\right)-1=0$$

$$t+2+4t+1-1=0$$

$$5t+1=0$$

$$5t=-1$$

$$t=-\frac{1}{5}$$

نعوض قيمة t في كل من (2) و (3) و (4):

$$x=-\frac{1}{5}+1=\frac{4}{5}$$

$$y=\frac{1}{2}$$

$$z=2\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow N\left(\frac{4}{5},\frac{1}{2},\frac{1}{10}\right)$$

6. بما أن النقطة N هي نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(BFJI)$ فإن النقاط N و I و J و F و B تقع في مستو واحد وبالتالي الأشعة $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BN}$ مرتبطة خطياً وبالتالي يوجد عددين حقيقيين a و b يحققان:

$$\overrightarrow{BN}=a\overrightarrow{BF}+b\overrightarrow{BI}$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{10}\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b\\0\\ \frac{1}{2}b\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\begin{cases} -\frac{1}{5} = -b \ldots (1) \\ \frac{1}{2} = a \ \ldots (2) \\ \frac{1}{10} = \frac{1}{2} b \ldots (3) \end{cases}$$

من (1) نجد:

$$b = \frac{1}{5}$$

من (2) نجد:

$$a = \frac{1}{2}$$

نعوض في (3) للتحقق:

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

محققة.

ومنه يوجد للجملة حل وحيد بحيث:

$$b = \frac{1}{5} \quad , \quad a = \frac{1}{2}$$

أيّ أنّ:

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BI}$$

$$10\overrightarrow{BN} = 5\overrightarrow{BF} + 2\overrightarrow{BI}$$

$$10\overrightarrow{BN} - 5\overrightarrow{BF} - 2\overrightarrow{BI} = \vec{0}$$

$$10\overrightarrow{BN} - 5\left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NF}\right) - 2\left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NI}\right) = \vec{0}$$

$$10\overrightarrow{BN} - 5\overrightarrow{BN} - 5\overrightarrow{NF} - 2\overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{NI} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{BN} - 5\overrightarrow{NF} - 2\overrightarrow{NI} = \vec{0}$$

$$-3\overrightarrow{NB} - 5\overrightarrow{NF} - 2\overrightarrow{NI} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{NB} + 5\overrightarrow{NF} + 2\overrightarrow{NI} = \vec{0}$$

ومنه النقطة N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(I,2),(F,5),(B,3)$

أيّ أنّ: $\alpha = 2 , \beta = 5 , \gamma = 3$

التمرين الثاني عشر:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط:

$B(1,0,-1)$	$A(-1,1,3)$
$D(2,0,-1)$	$C(2,-1,1)$

والمستوي P الذي معادلته $P: = 2y + z + 1 = 0$ والمستقيم Δ الذي تمثيله الوسيطي:

$$\Delta: \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases}$$

1. اكتب تمثيلاً وسيطاً للمستقيم $[BC]$ ثم تحقق ان المستقيم $[BC]$ محتوى في P.
2. بين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا في نفس المستوي.
3. احسب المسافة بين النقطة A والمستوي P.
4. بين أن النقطة D من المستوي P وأنّ المثلث BCD قائم.
5. احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل:

1. لكتابة التمثيل الوسيطي نحتاج:

النقطة: $B(1,0,-1)$

شعاع التوجيه: $\vec{u} = \overrightarrow{BC}(1,-1,2)$

التمثيل الوسيطي للمستقيم يكون:

$$(BC): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

التحقق من أن المستقيم $[BC]$ محتوى في P:

* لدينا المستقيم (BC) شعاع توجيهه: $\vec{u}(1,-1,2)$
* ولدينا المستوي P ناظمه: $\vec{n}(0,2,1)$
* نختبر أن (BC) و P متوازيان:

$$\vec{n}.\vec{u} = 0 - 2 + 2 = 0$$

ومنه (BC) و P متوازيان

نختبر الاحتواء وفق:

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} 2y + z + 1 = 0 \ldots (1) \\ x = t + 1 \ \ldots (2) \\ y = -t \quad \ldots (3) \\ z = 2t - 1 \ldots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) فنجد:

$$2(-t) + 2t - 1 + 1 = 0$$

$$0 = 0$$

محققة ومنه للجملة عدد لا نهائي من الحلول إذاً المستقيم (BC) محتوى في المستوي P.

2. يقصد في السؤال أن نبين أنّ المستقيمين (Δ) و (BC) متخالفين.

* لدينا المستقيم (Δ) شعاع توجيهه: $\vec{u}_{\Delta}(0,1,-2)$
* لدينا المستقيم (BC) شعاع توجيهه: $\vec{u}_{(BC)}(1,-1,2)$

نلاحظ أن $\vec{u}_{\Delta}$ و $\vec{u}_{(BC)}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه فإنّ المستقيمان (Δ) و (BC) إما متقاطعان أو متخالفان (ليسا من نفس المستوي).

نجري اختبار الاشتراك بنقطة، لدينا الجملة:

$$\begin{cases} -1 = t + 1 \ldots (1) \\ 2 + \beta = -t \ldots (2) \\ 1 - 2\beta = 2t - 1 \ldots (3) \end{cases}$$

من (1) نجد:

$$-1 = t + 1 \Rightarrow t = -2$$

من (2) نجد:

$$2 + \beta = -(-2) \Rightarrow \beta = 0$$

نتحقق في (3):

$$1 - 2(0) = 2(-2) - 1$$

$$1 \neq -5$$

وهذا غير ممكن إذاً الجملة مستحيلة الحل وبالتالي المستقيمان (Δ) و (BC) لا يشتركان بأية نقطة وبالتالي (Δ) و (BC) متخالفان، أي ليسا من نفس المستوي.

3. لحساب المسافة بين P و A:

$$dist(A,P) = \frac{|2(1) + 3 + 1|}{\sqrt{0 + 4 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

4. نعوض إحداثيات النقطة D في المستوي P وفق:

$$2(0)-1+1=0$$
$$0=0$$

محققة.

ومنه D نقطة من المستوي P.

لإثبات أن المثلث قائم، لدينا:

$\overrightarrow{BC}(1,-1,2)$

$BC=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{BD}(1,0,0)$

$BD=\sqrt{1+0+0}=1$

$\overrightarrow{CD}(0,1,-2)$

$CD=\sqrt{0+1+4}=\sqrt{5}$

ومنه المثلث BCD مختلف الأضلاع نختبر كونه قائماً:

$$(BC)^2=(BD)^2+(CD)^2$$
$$\left(\sqrt{6}\right)^2=(1)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$6=1+5$$

$$6=6$$

إذاً المثلث BCD مختلف الأضلاع

وقائم في D ووتره BC

5. حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

* تمهيد:

تحديد قاعدة رباعي الوجوه $ABCD$:

بما أن المستقيم (BC) محتوى في المستوى P.

وبما أن النقطة D من المستوي P ومنه المستوي P معين بالنقاط B و C و D وبالتالي فإن المثلث BCD يمثل قاعدة رباعي الوجوه.

تحديد رأس رباعي الوجوه $ABCD$:

بما أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P فإن A تمثل رأس رباعي الوجوه.

* قانون:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}.h$$

حيث:

مساحة القاعدة S_{BCD} :

بما أن المثلث قائم فإنّ مساحته:

$$S_{BCD}=\frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2}=\frac{BC.CD}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

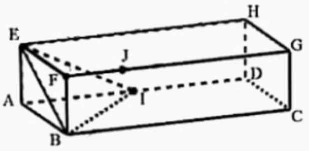
الارتفاع:

$$h=dist(A,P)=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

ومنهُ:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}.S_{BCD}.h$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{6}{\sqrt{5}}=1$$

التمرين الثالث عشر: ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ و $AD=4$ و $AE=1$، ولتكن النقطة I منتصف $[AD]$ والنقطة J تحقق العلاقة $\overrightarrow{FJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$. نتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:



1. جد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات و I و J.
2. أثبت أن معادلة المستوي (EIB) هي: $x+y+2z-2=0$
3. بين نوع المثلث EIB، ثم احسب مساحته.
4. احسب بعد G عن المستوي (EIB) واستنتج حجم رباعي الوجوه $G-EIB$.
5. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J عمودياً على المستوي (EIB).
6. استنتج أن المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$.

الحل:

1. إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات:

$A(0,0,0)$,　$B(2,0,0)$

$D(0,4,0)$,　$E(0,0,1)$

$C(2,4,0)$,　$F(2,0,1)$

$H(0,4,1)$,　$G(2,4,1)$

إحداثيات I منتصف $[AD]$:

$$I\left(\frac{x_A+x_D}{2},\frac{y_A+y_D}{2},\frac{z_A+z_D}{2}\right)$$
$$I\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+4}{2},\frac{0+0}{2}\right)$$
$$I(0,2,0)$$

إحداثيات J التي تحقق:

$$\overrightarrow{FJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$$

لتكن لدينا $J(x,y,z)$ ولدينا:

$$\overrightarrow{FG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$$
$$\begin{pmatrix}x-2\\y-0\\z-1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x-2\\y\\z-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$x-2=0\Rightarrow x=2$$
$$y=1$$
$$z-1=0\Rightarrow z=1$$
$$\Rightarrow J(2,1,1)$$

2. تعويض إحداثيات E في المعادلة:

$$0+0+2-2=0$$
$$0=0$$

محققة.

تعويض إحداثيات I في المعادلة:

$$0+2+0-2=0$$
$$0=0$$

محققة.

تعويض إحداثيات B في المعادلة:

$$2+0+0-2=0$$
$$0=0$$

محققة.

بما أن المعادلات الثلاثة محققة

تكون معادلة المستوي (EIB) هي:

$$x+y+2z-2=0$$

3. نوع المثلث EIB:

لدينا:

$$\overrightarrow{EI}(0,2,-1)$$
$$\Rightarrow EI=\sqrt{0+4+1}=\sqrt{5}$$
$$\overrightarrow{EB}(2,0,-1)$$
$$\Rightarrow EB=\sqrt{4+0+1}=\sqrt{5}$$
$$\overrightarrow{BI}(-2,2,0)$$
$$\Rightarrow BI=\sqrt{4+4+0}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

ومنه المثلث EIB متساوي الساقين.

اختبار كونه قائم:

$$(BI)^2=(EI)^2+(EB)^2$$
$$8=5+5$$
$$8\neq 10$$

إذاً المثلث EIB متساوي الساقين.

مساحة EIB:

$$\text{المساحة}=\frac{1}{2}(\text{طول القاعدة})(\text{الارتفاع})$$

حيث:

طول القاعدة هو: $BI=2\sqrt{2}$

الارتفاع هو: EK

يكون الارتفاع هو:

$$EK=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

منه تكون المساحة:

$$S_{EIB}=\frac{1}{2}(BI)(EK)$$
$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})(\sqrt{3})=\sqrt{6}$$

4. بعد G عن المستوي (EIB):

$$dist(G,(EIB))=\frac{|2+4+2-2|}{\sqrt{1+1+4}}$$
$$=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

حجم رباعي الوجوه $G-EIB$:

الرأس هو: G

القاعدة هي: (EIB)

مساحة القاعدة: $S_{EIB}=\sqrt{6}$

الارتفاع هو: بعد رأس رباعي الوجوه G

عن مستوي القاعدة (EIB)، أي:

$$dist(G,(EIB))=\sqrt{6}$$

ومنه حجم رباعي الوجوه $G-EIB$:

$$V_{G-EIB}=\frac{1}{3}.S_{EIB}.h$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{6}(\sqrt{6})=\frac{6}{3}=2$$

5.

النقطة: $J(2,1,1)$

شعاع التوجيه:

بما ان المستقيم d عمودي على المستوي (EIB) فإنّ، ناظم المستوي هو نفسه شعاع التوجيه:

$$\vec{u}=\vec{n}(1,1,2)$$

التمثيل الوسيطي d:

$$(d):\begin{cases}x=t+2\\ y=t+1\,;t\in\mathbb{R}\\ z=2t+1\end{cases}$$

6. لدينا المستوي (EIB) معادلته:

$$(EIB):x+y+2z-2=0$$

لدينا التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J، العمودي على المستوي (EIB):

$$(d):\begin{cases}x=t+2\\ y=t+1\,;t\in\mathbb{R}\\ z=2t+1\end{cases}$$

تكون إحداثيات J' المسقط القائم لـ J على المستوي (EIB) هي نقطة تقاطع المستقيم d المستوي (EIB) ويتم إيجادها وفق:

$$\begin{cases}x+y+2z-2=0\ldots(1)\\ x=t+2\ldots(2)\\ y=t+1\ldots(3)\\ z=2t+1\ldots(4)\end{cases}$$

نعوض (2), (3), (4) في (1):

$$t+2+t+1+2(2t+1)-2=0$$
$$2t+3+4t+2-2=0$$
$$6t+3=0$$
$$6t=-3$$
$$t=-\frac{1}{2}$$

نعوض قيمة t في كل من (2), (3), (4):

$$x=-\frac{1}{2}+2\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$
$$y=-\frac{1}{2}+1\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$
$$z=2\left(-\frac{1}{2}\right)+1\Rightarrow z=0$$

ومنه تكون إحداثيات J' المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) هي:

$$J'\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

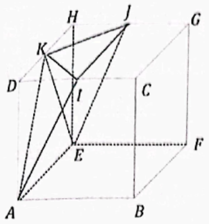
يقصد في الطلب أثبت أن I و J' و B تقع على استقامة واحدة.

لدينا:

$$\overrightarrow{BI}(-2,2,0)\,,\overrightarrow{BJ'}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BJ'}$ مرتبطان خطياً ومنه تكون النقاط B و I و J' تقع على استقامة واحدة وبالتالي النقطة J' تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$.

التمرين الرابع عشر:



نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$ لتكن I و J و K منتصفات الأضلاع $[DC]$ و $[HG]$ و $[DH]$ بالترتيب، نتخذ $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ والمطلوب:

1. أوجد إحداثيات النقاط A و I و E.
2. اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$.
3. احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $KAIJE$
4. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K.
5. احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$.
6. أثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (I,β) و (E,γ) حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل:

1. نلاحظ حسب الرسم أن:

$$E(0,1,0)\ ,I\left(\frac{1}{2},0,1\right)\ ,A(0,0,0)$$

$$\overrightarrow{AE}(0,1,0)\ ,\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2},0,1\right)$$

2. نفرض شعاع ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ للمستوي $(AIJE)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AE}=0 \Rightarrow b=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AI}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}a+c=0$$

نفرض $c=1$ لأن للمستوي أكثر من ناظم:

$$\frac{1}{2}a+1=0 \Rightarrow a=-2$$

وبالتالي يكون $\vec{n}(-2,0,1)$.

معادلة المستوي $(AIJE)$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$-2(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0$$
$$-2x+z=0$$

3. بعد K عن المستوي $(AIJE)$:

نلاحظ حسب الرسم أن $K\left(0,\frac{1}{2},1\right)$:

$$h=dist(K,AIJE)=\frac{|-2(0)+0+1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

حجم الهرم $KAIJE$:

نحسب مساحة قاعدة الهرم $KAIJE$ وهي $AIJE$:

$$S_{AIJE}=IJ.AI=1\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$V_{KAIJE}=\frac{1}{3}.S_{AIJE}.h=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{5}}{2}.\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{6}$$

4. بما أن المستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$:

$$\vec{u}_d=\vec{n}_{AIJE}=(-2,0,1)$$

$$d:\begin{cases}x=-2t\\ y=\dfrac{1}{2}\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=t+1\end{cases}$$

5. لحساب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$ نوجد الحل المشترك لمعادلة المستوي $(AIJE)$ مع المستقيم d:

$$-2(-2t)+0\left(\frac{1}{2}\right)+t+1=0$$

$$4t+t+1=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{5}$$

ومنه إحداثيات N هي $N\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$.

6. $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AI}+y\overrightarrow{AE}$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x\\ 0\\ x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ y\\ 0\end{pmatrix}$$

فتكون:

$$\frac{1}{2}x=\frac{2}{5} \Rightarrow x=\frac{4}{5}$$

$$y=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$
$$\Rightarrow 10\overrightarrow{AN}=8\overrightarrow{AI}+5\overrightarrow{AE}$$
$$\Rightarrow 10\overrightarrow{AN}+8\overrightarrow{AN}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{AN}+5\overrightarrow{NE}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AN}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{NE}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow -3\overrightarrow{NA}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{NE}=\vec{0}$$

إذاً N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-3),(I,8),(E,5)$.