مجموعة الأعداد العقدية :

1- الشكل الجبري لعدد عقدي :

$$Z = x + iy$$

قسم حقيقي $Re(z) = x$

قسم تخيلي $Im(z) = y$

2- الشكل المثلثي لعدد عقدي :

$$Z = r[\cos\alpha + i\sin\alpha] : r \geq 0$$

3- الشكل الآسي لعدد عقدي :

$$z = r\,e^{i\alpha} :$$

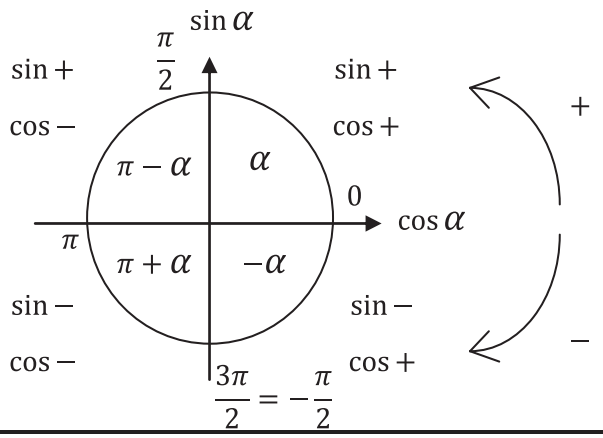
r : حقيقة موجبة .

*** قوانين هامة :**

- $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |Z|$
- $\cos\alpha = \frac{x}{r} , \sin\alpha = \frac{y}{r}$
- $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$
- $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$
- $\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \\ \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \end{cases}$
- $\begin{cases} -\sin(\alpha) = \sin(\pi + \alpha) \\ -\cos(\alpha) = \cos(\pi + \alpha) \end{cases}$
- $\begin{cases} \sin(\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{cases}$

ملاحظات هامة في علم المثلثات :

α	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



خواص مهمة للشكلين المثلثين والآسي :

$$* \; Z_1\,(r_1.\alpha_1) \;,\; Z_2\,(r_2.\alpha_2)$$

جداء $* Z_1.Z_2, (r_1.r_2 , \alpha_1 + \alpha_2)$

قسمة $* \frac{Z_1}{Z_2}(\frac{r_1}{r_2} , \alpha_1 - \alpha_2)$

قوة $* (Z_1)^n(r_1^n , n\,\alpha_1)$

مقلوب $* \frac{1}{Z_1}(\frac{1}{r_1} , -\alpha_1)$

مرافق $* \overline{Z_1}(r_1 , -\alpha_1)$

معاكس $* -Z_1(r_1 , \alpha_1 + \pi)$

------0-------0------0-------0------0-------0------

ملاحظات مهمة : << آسيات شهيرة >>

$* \; e^{2\pi i} = 1$ $* \; e^{\frac{\pi}{2}i} = i$

$* \; e^{\pi i} = -1$ $* \; e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$

السؤال الأول : أعط الشكل الجبري :

$$Z_1 = \left(\frac{4 - 6i}{2 - 3i}\right)\left(\frac{1 + 3i}{3 + 2i}\right)$$

الحل :

$$= 2\left(\frac{2 - 3i}{2 - 3i}\right)\left(\frac{1 + 3i}{3 + 2i}\right)$$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

$$= 2\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right)\left(\frac{3-2i}{3-2i}\right)$$

$$= 2\left(\frac{3-2i+9i+6}{9+4}\right)$$

$$Z_1 = \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i$$

------0-------0------0-------0------0-------0------

$$Z_2 = 3[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}]$$

$$= 3[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i]$$

$$Z_2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)i$$

------0-------0------0-------0------0-------0------

$$Z_3 = 2e^{\frac{-2\pi}{3}i}$$

الحل :

$$= 2\left[\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2[\left(-\frac{1}{2}\right) - (\frac{\sqrt{3}}{2}i]$$

$$Z_3 = -1 - \sqrt{3}\,i$$

------0-------0------0-------0------0-------0------

السؤال الثاني : أعط الشكل المثلثي :

$$Z_1 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$$

الحل:

$$1 + i = \sqrt{2}[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}]$$

$$\sqrt{3} + i = 2[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}]$$

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = (\frac{\sqrt{2}}{2})[\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})]$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$$

$$\Rightarrow Z_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right]^5$$

$$Z_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}]$$

------0-------0------0-------0------0-------0------

السؤال الثالث : أعط الشكل الآسي :

$$Z_1 = (1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= -(\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= e^{i\pi}.(\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_1 = (\sqrt{2}-1)\,e^{(\frac{5\pi}{4})i}$$

------0-------0------0-------0------0-------0------

$$Z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

الحل :

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{i(\frac{\pi}{4})}$$

------0-------0------0-------0------0-------0------

الحل :

$$Z_3 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}}\left[\frac{1}{e^{\frac{\pi}{6}i}} + e^{i\frac{\pi}{6}}\right] = e^{i\frac{\pi}{6}}\left[e^{-\frac{\pi}{6}i} + e^{\frac{\pi}{6}i}\right]$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}}[2\cos\frac{\pi}{6}] = e^{i\frac{\pi}{6}}[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)]$$

$$Z_3 = \sqrt{3}\,e^{\frac{\pi}{6}i}$$

السؤال الرابع : لتكن الأعداد العقدية :

$$Z_1 = 1 - i \, , Z_2 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$

$$Z_3 = -3\, e^{i\frac{\pi}{3}}$$

1- أكتب كلاً من Z_1 , Z_2 , Z_3 بالشكل الآسي .

$$* Z_1 = 1 - i \rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \cos Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin Q = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} Q = \frac{-\pi}{4}$$

$$Z_1 = \sqrt{2}\, e^{\frac{-\pi}{4}i}$$

$$* Z_2 = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right] = 2\, e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

$$* Z_3 = -3\, e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi}.3.e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\, e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$$

2- أوجد $(Z_1.Z_2)$ بالشكل الجبري والمثلثي

واستنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$

الحل:

$$* Z_2 = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$Z_2 = -1 + \sqrt{3}i$$

$$* Z_1.Z_2 = (1 - i)(-1 + \sqrt{3}i)$$

$$= -1 + \sqrt{3}i + i + \sqrt{3}$$

$$Z_1.Z_2 = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i$$

$$* Z_1.Z_2 = [2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))]$$

$$\bullet\ [\sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4}))]$$

$$= (2\sqrt{2})[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4})]$$

$$= (2\sqrt{2})[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin(\frac{5\pi}{12})]$$

استنتاج $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$:

مثلثي $(Z_1.Z_2 = Z_1.Z_2)$ جبري

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - 1$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

3- أثبت أن $\left(\frac{Z_1^4.Z_2}{Z_3^2}\right)$ حقيقي

$$\frac{Z_1^4.Z_2}{Z_3^2} = \frac{\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{-\pi}{4}i}\right)^4.(2\, e^{i\frac{2\pi}{3}})}{\left(3\, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{(4e^{-\pi i}).(2\, e^{\frac{2\pi}{3}i})}{9\, e^{i\left(\frac{8\pi}{3}\right)}}$$

$$= \frac{8}{9}e^{\left(-\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{8\pi}{3}\right)i} = \frac{8}{9}e^{(-\pi)i}$$

$$= -\frac{8}{9} \in R \Rightarrow \text{حقيقي}$$

------0-------0------0-------0------0-------0------

السؤال الخامس : ليكن العدد العقدي :

$$Z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

1- أثبت أن $Z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ثم اكتب Z^2 بالشكل الآسي .

الحل :

$$Z^2 = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 + 2i\left(\frac{\sqrt{(2+\sqrt{3}).(2-\sqrt{3})}}{4}\right) + \left(i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{4-3}}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$Z^2 = \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$Z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

2- تحقق أن $Z = e^{i\frac{\pi}{12}}$ واستنتج :

$$\cos\frac{11\pi}{12} \quad , \quad \cos\frac{\pi}{12}$$

الحل :

$$Z^2 = e^{\frac{\pi}{6}i} \Rightarrow r^2 e^{2Qi} = e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$\Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$\Rightarrow 2Q = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$Q = \frac{\pi}{12} + \pi k$$

من أجل $(k=0) \Leftarrow \frac{\pi}{12} \Leftarrow Z = e^{i\frac{\pi}{12}}$

* الاستنتاج

أسي Z = Z جبري

$$e^{\frac{\pi}{12}i} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

------0-------0------0-------0------0-------0------

* إيجاد الجذور التربيعية لعدد عقدي جبري :

$$\boldsymbol{Z^2 = a + i\,b}$$

- $x^2 + y^2 = r$
- $x^2 - y^2 = a$
- $2\,x\,y = b$

مثال : أوجد الجذور التربيعية للعدد

$Z^2 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ **الحل :**

$$① \; x^2 + y^2 = \sqrt{4+12} = 4$$

$$② \; x^2 - y^2 = 2$$

$$③ \; 2\,x\,y = -2\sqrt{3}$$

لجمع المعادلتين ① و ② نجد :

$$2\,x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

نعوض $(x^2 = 3)$ بالمعادلة ① $\Leftarrow$

$$3 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 = +1 \\ y_2 = -1 \end{bmatrix}$$

* بما أن $(2\,x\,y = -2\sqrt{3} < 0) \Leftarrow$

$$Z_1 = -\sqrt{3} + i$$

$$Z_2 = \sqrt{3} - i$$

------0-------0------0-------0------0-------0------

* حل المعادلات في (c) :

A- حل معادلة تحوي Z و $\bar{Z}$:

مثال : حل في (c) المعادلات بالمجهول Z :

$$① \; 2\,i\,Z + \bar{Z} = 3 + 3\,i$$

الحل : نفرض * : $Z = x + i\,y$

$$\Rightarrow \bar{Z} = x - i\,y$$

نعوض : $2\,i(x+iy) + (x-iy) = 3 + 3i$

$$2\,i\,x-2y+x-iy=3+3i$$

$$(x-2y)+i(2x-y)=3+3i$$

نقارن طرفي المعادلة :

$$x-2y=3\Rightarrow -2x+4y=-6$$

$$2x-y=3\Rightarrow 2x-y=3$$

بالجمع : $3y=-3$

$$\Rightarrow \boxed{y=-1}$$

نعوذ بإحدى المعادلتين $\Leftarrow \boxed{x=1}$

$\Leftarrow$ حل المعادلة : $\boxed{Z=1-i}$

------0-------0------0-------0------0-------0------

B – حل معادلتين بمجهولين :

حل في (c) بجملة المعادلتين بالمجهولين Z_1 و Z_2 :

$$\begin{bmatrix} Z_1-Z_2=-3 \\ 2\overline{Z_1}+\overline{Z_2}=-3+3\sqrt{3}i \end{bmatrix}$$

الحل : نأخذ مرافق الطرفين للمعادلة الثانية :

$$Z_1-Z_2=-3$$

$$2\,Z_1+Z_2=-3-3\sqrt{3}\,i$$

بالجمع $3Z_1=-6-3\sqrt{3}\,i$

$$\Rightarrow Z_1=-2-\sqrt{3}\,i$$

نعوض بالمعادلة الأولى :

$$-2-\sqrt{3}\,i-Z_2=-3$$

$$\Rightarrow Z_2=1-\sqrt{3}\,i$$

------0-------0------0-------0------0-------0------

C – حل معادلات درجة ثانية بأمثال حقيقية أو أمثال تخيلية :

حل في (c) المعادلات التالية :

$$①\ Z^2+4Z+29=0$$

$$\Delta=b^2-4\,a\,c$$

$$=16-4(1)(29)=-100<0$$

$$Z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-4+10\,i}{2}=-2+5\,i$$

$$Z_2=\overline{Z_1}=-2-5\,i$$

<< يوجد حلان عقديان مترافقان في C >>

------0-------0------0-------0------0-------0------

$$②\ Z^2+(1+4\,i)\,Z-5-i=0$$

$$\Delta=b^2-4\,a\,c$$

$$=(1+4\,i)^2-4(1)(-5-i)$$

$$=5+12\,i$$

* لنوجد الجذر التربيعي للعدد $w^2=5+12\,i$

- $x^2+y^2=\sqrt{25+144}=13$
- $x^2-y^2=5$
- $2x\,y=12>0$

مجموع المعادلتين ① و ② نجد :

$$2x^2=18\Rightarrow x^2=9\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{bmatrix}$$

نعوض في المعادلة الأولى :

$$9+y^2=13\Rightarrow y^2=4\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1=2 \\ y_2=-2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w_1=3+2\,i \\ w_2=-3-2\,i \end{bmatrix}$$

$$Z_1=\frac{-b+w_1}{2a}=\frac{-1-4i+3+2i}{2}=1-i$$

$$Z_2=\frac{-b+w_2}{2a}=\frac{-1-4i-3-2i}{2}=-2-3i$$

------0-------0------0-------0------0-------0------

D – حل معادلة أكبر من درجة ثانية :

① - حل في (c) المعادلة :

$$Z^3-(3+4i)Z^2-6(3-2i)Z+72\,i=0$$

إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً

الحل :

كون المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً ومن الدرجة الثالثة يمكن كتابتها بالشكل :

$$(Z-a\,i)(Z^2+b\,Z+c)=0$$

$$Z^3+b\,Z^2+c\,Z-a\,i\,Z^2-a\,i\,b\,Z-a\,i\,c=0$$

$$Z^3+(b-a\,i)Z^2+(c-a\,b\,i\,)Z-a\,i\,c=0$$

بالمقارنة مع الفرض :

$$b-a\,i=-3-4\,i \Rightarrow \boxed{a=4\,|\,b=-3}$$

$$c-a\,i\,b=-18+12\,i \Rightarrow \boxed{c=-18}$$

$$\begin{bmatrix} -a\,b\,i=12\,i \text{ محققة} \\ -a\,c\,i=72\,i \text{ محققة} \end{bmatrix}$$

$$(Z-4i)(Z^2-3Z-18)=0$$

إما : $Z-4i=0 \Rightarrow \boxed{Z_1=4i}$

أو : $Z^2-3\,Z-18=0$

$$(Z-6)(Z+3)=0 \Rightarrow \boxed{Z_2=6 \text{ و } Z_3=-3}$$

------0-------0------0-------0------0-------0------

② **نتأمل كثير الحدود**

$$P\,(Z)=Z^3-3\,Z^2+3\,Z+7$$

❶ أثبت أن $P(-1)=0$

$$L_1: P(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7$$

$$=0 : L_2 \text{ محققة}$$

❷ اكتب $P(Z)$ بالشكل $P(Z)=(Z+1)Q(Z)$

ثم حل المعادلة : $P(Z)=0$

$$\begin{array}{r|l} Z^3-3\,Z^2+3\,Z+7 & Z+1 \\ \hline -(Z^3+Z^2) & Z^2-4\,Z+7 \\ \hline -4\,Z^2+3Z+7 & \\ -(-4\,Z^2-4Z) & \\ \hline 7Z+7 & \\ -(7Z+7) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$P(Z)=(Z+1)(Z^2-4Z+7)$$

حل المعادلة : $\boldsymbol{P(Z)=0}$ *

$$(Z+1)(Z^2-4\,Z+7)=0$$

إما : $Z+1=0 \Rightarrow \boxed{Z_1=-1}$

أو : $Z^2-4\,Z+7=0$

$$\Delta=16-28=-12<0$$

يوجد حلان عقديان مترافقان في (c) :

$$\sqrt{-\Delta}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$Z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{4+2\sqrt{3}\,i}{2}=2+\sqrt{3}i$$

$$Z_3=2-\sqrt{3}i$$

------0-------0------0-------0------0-------0------

حاول أن تحل : تدرب (10)
صفحة (123)

ملاحظات مهمة حول مرافق عدد عقدي :

① Z حقيقي $\Leftrightarrow \bar{Z}=Z$

② Z تخيلي $\Leftrightarrow \bar{Z}=-Z$

③ $|Z|=1 \Leftarrow \bar{Z}=\frac{1}{Z}$

مثال :

نتأمل عددين عقديين Z و W يحققان: $|Z| = 1$ و $|W| = 1$ و $Z\,W \neq -1$ أثبيت أن

❶ $D = \frac{Z+W}{1+Z\,W}$ عدد حقيقي :

الحل : الشرط : $\overline{D} = D$

$$L_1 : \overline{D} = \frac{\overline{Z} + \overline{W}}{1 + \overline{ZW}} = \frac{\frac{1}{Z} + \frac{1}{W}}{1 + \frac{1}{Z.W}}$$

$$= \frac{\frac{W+Z}{ZW}}{\frac{ZW+1}{ZW}} = \frac{W+Z}{1+ZW} = D \quad : L_2$$

$\Leftarrow D$ عدد حقيقي

------0-------0------0-------0------0-------0------

❷ $K = \frac{Z-W}{1+ZW}$ تخيلي بحت :

الحل : الشرط $\overline{K} = -K$

يترك للقارئ كما سبق .

------0-------0------0-------0------0-------0------

ملاحظة حول جذور معادلة من الدرجة الثانية :

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

يوجد لها حلان Z_1 و Z_2 يحققان :

$$* \; Z_1 + Z_2 = -\frac{b}{a} \;,\; Z_1.Z_2 = \frac{c}{a}$$

التحويلات الهندسية وصياغتها العقدية :

1- الانسحاب (T) :

$$\dot{Z} = Z + b$$

$\dot{Z}$: العدد العقدي الممثل لـ $\dot{m}$

Z : العدد العقدي الممثل لـ m

b : العدد العقدي الممثل لشعاع الانسحاب

2- التحاكي (H) :

$$\dot{Z} - w = k(Z - w)$$

$\dot{Z}$: العدد العقدي الممثل للنقطة $\dot{m}$
Z : العدد العقدي الممثل للنقطة m
w : العدد العقدي الممثل لمركز التحاكي
$k \in R$: نسبة التحاكي

3- الدوران (R) :

$$\dot{Z} - w = e^{iQ}(Z - w)$$

$\dot{Z}$: العدد العقدي الممثل للنقطة $\dot{m}$
Z : العدد العقدي الممثل للنقطة m
w : العدد العقدي الممثل لمركز الدوران
Q : زاوية الدوران

4- التناظر (S) :

* بالنسبة لـ (ox) : $\dot{Z} = \bar{Z}$
* بالنسبة لـ (oy) : $\dot{Z} = -\bar{Z}$
* بالنسبة لـ $o\ (o,o)$: $\dot{Z} = -Z$
* بالنسبة لـ $\Omega(w)$: $\dot{Z} = 2w - Z$

السؤال الأول :

ليكن العدد العقدي $Z = 1 + i$ الممثل بالنقطة m
اوجد $\dot{M}(\dot{Z})$ صورة $M(Z)$ وفق :

1- انسحاب شعاع $\vec{k} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$

$$b = -2 + 3i$$
$$\dot{Z} = Z + b = -1 + 4i$$

2- تحاكٍ مركزه (o) ونسبته (3) :

$$\dot{Z} = k\,Z$$
$$\dot{Z} = 3(1 + i) = 3 + 3i$$

3- تناظر (S) مركزه $A(1 - 3i)$

$$\dot{Z} = 2w - Z$$
$$= 2(1 - 3i) - (1 + i)$$
$$= 1 - 7i$$

4- تناظر (S) بالنسبة لـ xx' :

$$\dot{Z} = \bar{Z} = 1 - i$$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

السؤال الثاني : لتكن المعادلة :

$$(c) \text{ في } Z^2 + 2i\,Z - 2 = 0$$

1- أثبت أن $Z_1 = 1 - i$ هو جذر للمعادلة واستنتج الجذر الأخر .

بتعويض نجد

$$(1 - i)^2 + 2i(1 - i) - 2 = 0 \text{ محققة}$$

لاستنتاج الجزر الآخر : نعلم أن :

$$Z_1 + Z_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 1 - i + Z_2 = -\frac{2i}{1}$$

$$\Rightarrow Z_2 = -1 - i$$

2- تحقق أن M_2 نظيرة M_1 بالنسبة لـ $y\dot{y}$

الشرط : $Z_2 = -\overline{Z_1}$

$$\overline{Z_1} = 1 + i \Rightarrow -\overline{Z_1} = -1 - i = Z_2$$

أي أن M_2 نظيرة M_1 بالنسبة لـ $y\dot{y}$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

السؤال الثالث : في مجموعة الأعداد العقدية

1- أثبت أن $[Z_1 = 2i]$ جذراً للمعادلة :

$$i\,Z^2 - 2i\,Z - 4 + 4i = 0$$

ثم أوجد الجذر الآخر :

الحل :

محققة L_2 : $L_1: i(2i)^2 - 2i(2i) - 4 + 4i = 0$

لإيجاد الجذر الآخر :

$$Z_1 + Z_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 2i + Z_2 = \frac{2i}{i}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_2 = 2 - 2i}$$

2- أوجد M صورة M_1 وفق دوران مركزه (o) وزاويته $\frac{\pi}{4}$

$$\grave{Z} = e^{iQ} Z$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) 2i$$

$$\boxed{\grave{Z} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

السؤال الرابع : لتكن النقاط B, A الممثلة للأعداد :

$$A: Z_1 = -2 + \sqrt{3}i \ , \quad B: Z_2 = 1$$

1- أوجد C نظيرة A بالنسبة لـ $x\grave{x}$:

$$C: Z_3 = \overline{Z_1} = -2 - \sqrt{3}i$$

2- أثبت أن ABC مثلث متساوي الأضلاع :

$$AB = |Z_B - Z_A| = |1 + 2 - \sqrt{3}i|$$

$$= |3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |Z_C - Z_A| = |-\sqrt{3}i - \sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |Z_C - Z_B| = |-3 - \sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$$

ABC : مثلث متساوي الأضلاع .

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

السؤال الخامس : في معلم متجانس $o, \vec{u}, \vec{v}$ منسوب لمستوى عقدي نتأمل النقاط :

التي تمثل B, C, D :

$$B: b = 2 \ , C: c = -1 + i \ , D: d = 1 - 3i$$

1- أحسب $\left[\frac{c-b}{d-b}\right]$ واستنتج نوع المثلث (BCD) :

الحل :

$$\frac{c-b}{d-b} = \frac{-1+i-2}{1-3i-2} = \left(\frac{-3+i}{-1-3i}\right) \times \left(\frac{-1+3i}{-1+3i}\right)$$

$$= \frac{-10i}{10} = -i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{c-b}{d-b}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

وكذلك : $\left|\frac{c-b}{d-b}\right| = |-i| \Rightarrow \frac{BC}{BD} = 1$

$\Leftarrow BCD$ قائم في B ومتساوي الساقين .

2- جد العدد العقدي a الممثل للنقطة A بحيث يكون $(ACBD)$ مربعاً .

الحل :

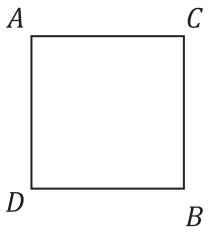
حتى يكون $ACBD$ مربعاً يجب أن يتحقق :

$$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_{\overrightarrow{DB}}$$

$$c - a = b - d$$

$$-1 + i - a = 2 - 1 + 3i$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -2 - 2i}$$



0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

السؤال السادس : لتكن الأعداد العقدية :

$$Z_A = 3 \ , Z_B = 1 + 2i \ , \ Z_Q = -1 + 2i$$

1- مثل النقاط Q, B, A في مستوٍ عقدي .

2- جد Z_N صورة A وفق دوران مركزه (o) وزاويته $\frac{\pi}{2}$

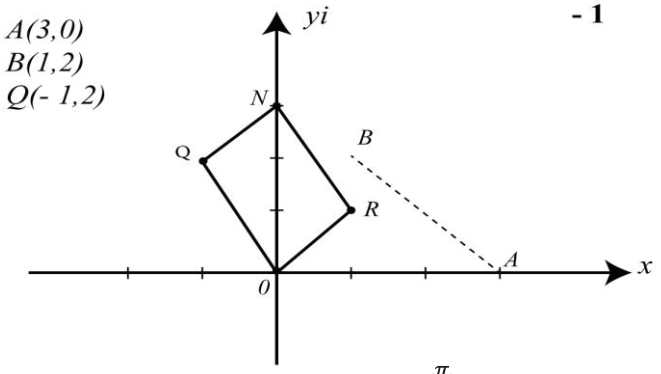
3- جد Z_R ليكون $(OQNR)$ متوازي أضلاع .

4- أثبت تعامد AB و OR وأثبت أن :

$$OR = \frac{1}{2} AB$$

الحل :

- 1



-2 $Z_N - Z_O = e^{i(\frac{\pi}{2})}(Z_A - Z_O)$

$Z_N = i(3) = 3i$

-3 حتى تكون $RNQO$ متوازي أضلاع $\Leftrightarrow$

$Z_{\overrightarrow{OR}} = Z_{\overrightarrow{QN}}$

$r - o = n - q$

$r = 1 + i$

-4 $\frac{Z_{\overrightarrow{OR}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{r-o}{b-a} = \frac{1+i}{-2+2i} \times \frac{-2-2i}{-2-2i} = \frac{-1}{2}i$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = \arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{OR}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{-1}{2}i\right)$

$= -\frac{\pi}{2} \Rightarrow AB \perp OR$

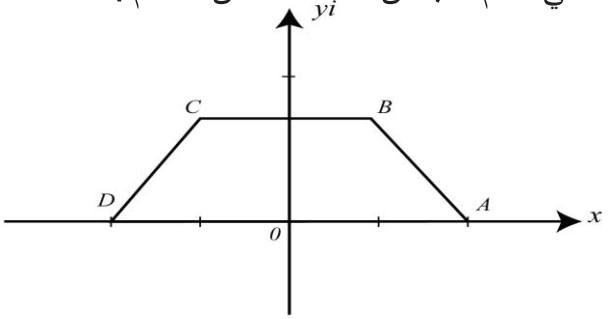
$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{OR}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right| = \left|\frac{-1}{2}i\right| \Rightarrow \frac{OR}{AB} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow OR = \frac{1}{2}AB$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

السؤال السابع : في الشكل المجاور :

مثلثاً في معلم متجانس نصف مسدس منتظم :



1- إذا علمت أن $A: a = 2$ أوجد b, c, d

الحل :

$B\left(2, \frac{\pi}{3}\right): b = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$

$C\left(2, \frac{2\pi}{3}\right): c = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i$

$D(2, \pi): d = 2(-1 + oi) = -2$

2- أحسب $\left[\frac{d-c}{a-c}\right]$ ثم استنتج نوع المثلث ACD

الحل :

$\frac{d-c}{a-c} = \frac{-2+1-\sqrt{3}i}{2+1-\sqrt{3}i} = \left[\frac{-1-\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}\right] \times \left[\frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right]$

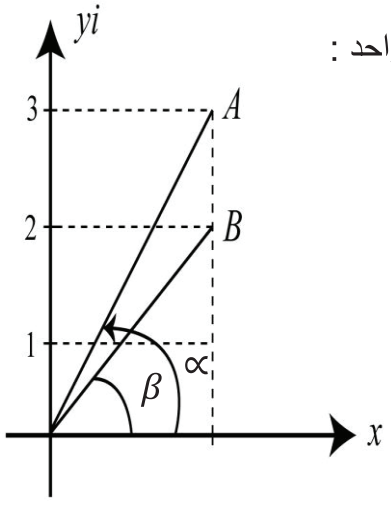
$= \frac{-4\sqrt{3}}{12}i = \frac{-\sqrt{3}}{3}i$

$\arg\left(\frac{d-c}{a-c}\right) = \arg\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}i\right) = \frac{-\pi}{2}$

$\Leftarrow ACD$ مثلث قائم في (C) .

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

السؤال الثامن : في المستوي العقدي نتأمل معلم متجانس $(O, \vec{U}, \vec{V})$ في الشكل المجاور (3) مربعات طول ضلع كل منها يساوي الواحد :



$\arg(Z_A) = \propto$

$arg(Z_B) = \beta$

1- أكتب كلاً من Z_A , Z_B بالشكل الجبري ثم الآسي .

2- جد (Z_A, Z_B) بالشكل الجبري ثم بالشكل الآسي واستنتج قيمة $(\propto + \beta)$

الحل : أكتب

-1

$Z_B = 1 + 2i$ | $Z_A = 1 + 3i$

$r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ | $r = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$Z_B = \sqrt{5}\, e^{i\beta}$ | $Z_A = \sqrt{10}\, e^{i\alpha}$

-2

$* Z_A . Z_B = (1+3i)(1+2i)$

$= 1 + 2i + 3i - 6 = -5 + 5i$

$* Z_A . Z_B = \sqrt{10}.\sqrt{5}\, e^{i(\alpha+\beta)}$

$= 5\sqrt{2}\, e^{i(\alpha+\beta)}$ ①

لاستنتاج $(\alpha + \beta)$:

لدينا $Z_A . Z_B = -5 + 5i$

$\Rightarrow r = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$

$\cos Q = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow Q = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

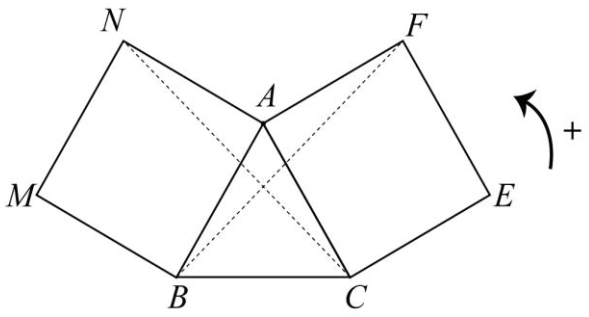
$\Rightarrow Z_A . Z_B = 5\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ ②

بالمقارنة بين ① و ② نجد : $\boxed{\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}}$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

السؤال التاسع : ABC مثلث متساوي الساقين ومباشر التوجيه تنشئ خارجه مربعين $ACEF$ و $ABMN$

نفرض $(A.\vec{U},\vec{V})$ معلماً متجانساً :



نرمز للأعداد العقدية a, b, c, n, f التي تمثل النقاط :

A, B, C, N, F والمطلوب :

-1 أثبت أن $f = i\,c$ و $n = -i\,b$

الحل :

لدينا فرضاً $(A.\vec{U},\vec{V})$ معلماً متجانساً و $ACEF$ مربع

و منه f صورة c وفق دوران مركزه (A) وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f = e^{i\frac{\pi}{2}}\, c \quad \boxed{f = i\,c}$

$ABMN$ مربع ومنه N صورة B وفق دوران مركزه (A) وزاويته $(\frac{-\pi}{2})$

$\Rightarrow n = e^{\frac{-\pi}{2}i}\, b \quad \boxed{n = -ib}$

-2 أثبت أن $b - f = -i(c - n)$

$l_1 : b - f = b - ic$

$l_2 : -i(c - n) = -i(c + ib) = b - ic$

-3 استنتج أن $(CN) \perp (BF)$ وأن $BF = CN$

وجدنا أن : $b - f = -i(c - n)$

$\Rightarrow \frac{b-f}{c-n} = -i \Rightarrow \arg\left[\frac{b-f}{c-n}\right] = \arg(-i)$

$= \frac{-\pi}{2} \Rightarrow FB \perp NC$

$* \left|\frac{b-f}{c-n}\right| = |-i| \Rightarrow \frac{FB}{NC} = 1$

$\Rightarrow FB = NC$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

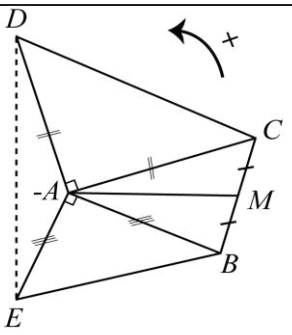
السؤال العاشر : نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر مباشر التوجيه ولتكن (M) منتصف [BC] وليكن

AEB , ACD مثلثين قائمين في A ومتساويا الساقين

نختار معلماً مباشراً مبدؤه النقطة (A)

نرمز بالرمزين c, b إلى العددين العقديين الممثلان للنقطتين

C, B



1- أحسب بدلالة c, b الأعداد العقدية $e\ ,d\ ,m$

الحل : باعتبار A مبدأ المعلم :

- $e = e^{\frac{-\pi}{2}i}b = -i\ b$
- $d = e^{i\frac{\pi}{2}}c = i\ c$
- M : منتصف $[BC] \Leftarrow m = \frac{b+c}{2}$

2- أحسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع للمثلث (AED) وأن : $ED = 2AM$

الحل :

$$\frac{d-e}{m-a} = \frac{\frac{ic+ib}{1}}{\frac{b+c}{2}} = \frac{\frac{i(b+c)}{1}}{\frac{b+c}{2}} = 2i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$$

أي: $AM \perp ED$

$$\frac{ED}{AM} = 2 \Rightarrow ED = 2AM$$

3- A : مركز أبعاد متناسبة للنقاط :

$$(B,1)\ ,(C,1)\ ,(E,3)\ ,(D,2)$$

A – أحسب $\frac{c-a}{b-a}$

$$a = \frac{2d+3e+c+b}{7} \Rightarrow o = \frac{2ic-3ib+c+b}{7}$$

$$\Rightarrow (1+2i)c + (1-3i)b = 0$$

$$(1+2i)c = -(1-3i)b$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{-1+3i}{1+2i} = \frac{c-a}{b-a}$$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{b-a} = \frac{-1+3i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = 1+i$$

B – استنتج قياس الزاوية $(B\hat{A}C)$:

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$$

أسئلة تعيين مجموعة نقاط

السؤال الأول :

لتكن النقطتان A, B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية :

$$A: a = 1 \quad , \quad B: b = 3+2i$$

مثل في كل من الحالتين الآتيتين مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تحقق :

1- $|Z-1| = |Z-3-2\ i|$

الحل :

$$|Z-1| = |Z-(3+2\ i)|$$

$$|Z_{\overrightarrow{AM}}| = |Z_{\overrightarrow{BM}}|$$

$$AM = BM$$

M : تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

* لإيجاد معادلة محور القطعة المستقيمة [مستقيم] :

$$|x+iy-1| = |x+iy-3-2i|$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$$

$$x^2-2x+1+y^2 = x^2-6x+9+y^2-4y+4$$

$$4x+4y-12 = 0$$

$$\Delta: x+y-3 = 0$$

-2 $|Z-3-2i|=3$

$|Z-(3+2i)|=3$

$|Z_{B\vec{M}}|=3$

$BM=3$

M : تمثل دائرة مركزها (a) ونصف قطرها $[R=3]$

* لإيجاد معادلتها

$|x+iy-3-2i|=3$

$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=3$

بتربيع الطرفين :

$(x-3)^2+(y-2)^2=9$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

السؤال الثاني :

نزود المستوي بمعلم متجانس مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$.

نقرن بكل نقطة $m(Z)$ حيث $Z\neq i$ النقطة $m(k)$ حيث

$$k=\frac{Z+2}{Z-i}$$

1- عين Δ مجموعة النقاط (m) التي يكون عندها (k) عدداً حقيقياً :

الحل :

k حقيقي $\Leftrightarrow \overline{k}=k$

$$\frac{\overline{Z}+2}{\overline{Z}+i}=\frac{Z+2}{Z-i}$$

$$\cancel{Z\overline{Z}}+2Z-i\overline{Z}-2i=\cancel{Z\overline{Z}}+iZ+2\overline{Z}+2i$$

$$-i\overline{Z}-iZ+2Z-2\overline{Z}-4i=0$$

$$-i(Z+\overline{Z})+2(Z-\overline{Z})-4i=0$$

$$-i(2x)+2(2iy)-4i=0$$

$\div 2i$ $-x+2y-2=0$

M : تمثل مستقيم ماعدا النقطة $(0,1)$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

2- عين δ مجموعة النقاط (m) التي يكون عندها (k) عدد تخيلي :

الحل :

k تخيلي $\Leftrightarrow \overline{k}=-k$

$$\frac{\overline{Z}+2}{\overline{Z}+i}=\frac{-Z-2}{Z-i}$$

$$-Z\overline{Z}-iZ-2\overline{Z}-\cancel{i2}=Z\overline{Z}+2Z-i\overline{Z}-\cancel{2i}$$

$$2Z\overline{Z}-i\overline{Z}+iZ+2Z+2\overline{Z}=0$$

$$2(Z.\overline{Z})+i(Z-\overline{Z})+2(Z+\overline{Z})=0$$

$$2(x^2+y^2)+i(2iy)+2(2x)=0$$

$\div 2$

$$x^2+y^2-y+2x=0$$

بالإتمام إلى مربع كامل :

$$x^2+2x+1-1+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

δ : هي دائرة مركزها $(-1,\frac{1}{2})$

ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ماعدا النقطة $(0,1)$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

* حل في (c) المعادلة : $Z^3 = 8i$

الحل :

نفرض $Z = re^{i\theta} \Rightarrow \left(re^{i\theta}\right)^3 = 2^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow r^3 = 2^3 \Rightarrow \boxed{r = 2}$

$\Rightarrow 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$

* عندما $k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{Z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}}$

* عندما $k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \boxed{Z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

* عندما $k = 2 \Rightarrow \theta = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{Z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}}$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

ملاحظة :

قد يقول لنا : بفرض A, B, C هي حلول المعادلة السابقة , عين نوع المثلث (ABC) .

التحليل التوافقي :

*** مبادئ العد**

① العاملي $(n!)$: << التباديل >>

$n! = (n)(n-1)(n-2) \dots (1)$

$= (n)(n-1)! \quad : n \geq 0$

$* 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

② القوائم بدون تكرار << التراتيب >> :

$P_n^r = (n)(n-1) \dots (n-r+1)$

$= (n)(n-1) \dots .$ مرة r

حيث : $n \geq r > 0$

$* P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

$* P_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

③ القوائم مع تكرار $<< (n)^r >>$

$(n)^r = n \times n \times n \dots \times n$ مرة r

$* 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

ملاحظة :

r, n دائما أعداد طبيعية

السؤال الأول :

عين قيمة (n) التي تحقق المساواة :

❶ $P_{n+2}^3 = 6P_{n+2}^1$

الحل : شرط الحل :

$n+2\geq 1$ $\quad$ $n+2\geq 3$

$n\geq -1$ $\quad$ $n\geq 1$

$\Leftarrow$ الشرط المشترك $[n\geq 1]$

$$(n+2)(n+1)(n)=6(n+2)$$

$$(n+1)(n)=6$$

$$n^2+n-6=0$$

$$(n+3)(n-2)=0$$

إما: $n=-3$ مرفوض

أو: $n=2$ مقبول

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

❷ $P_n^2=\dfrac{n!}{(n-1)!}$

الحل : شرط الحل :

$[n\geq 1]$ و $[n-1\geq 0]$ و $[n\geq 0]$ و $[n\geq 2]$

$\Leftarrow$ الشرط المشترك $[n\geq 2]$

$$(n)(n-1)=\frac{(n)(n-1)!}{(n-1)!}$$

$n-1=1\Rightarrow \boxed{n=2}$ مقبول

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

❸ $P_n^3=4\dfrac{n!}{(n-2)!}$

الحل : شرط الحل :

$[n\geq 2]$ و $[n-2\geq 0]$ و $[n\geq 0]$ و $[n\geq 3]$

$\Leftarrow$ الشرط المشترك $[n\geq 3]$

$$(n)(n-1)(n-2)=4\frac{(n)(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$$

$n-2=4\Rightarrow \boxed{n=6}$ مقبول

السؤال الثاني : تدريبات مسلية

①- فريق لتسلق الجبال مكون من ثلاث مدربين وستة متدربين ، بكم طريقة يمكن ترتيبهم برتل أحادي في كل من الحالات :

A-: مدرب في بداية الرتل ومدرب في نهاية الرتل والباقي بينهما ؟

الحل :

مدرب /*/ 6 متدربين + مدرب /*/ 3 مدربين

عدد الطرق $=3\times 7!\times 2=30240$

B-: المدربون الثلاثة في بداية الرتل ثم يتبعهم المتدربون ؟

الحل :

متدربين /*/ 3 متدربين

عدد الطرق $=3!\times 6!=4320$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

②- رف يحوي 7 كتب لمؤلفين :

(3 كتب للمؤلف A و 4 كتب للمؤلف B) .

المطلوب :

A-: بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B .

الحل :

$$BBB/BAAA$$

عدد الطرق $=P_4^3\times 4!=576$

B-: بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاب معين للمؤلف B في بداية الرف .

$$B/AAABBB$$

عدد الطرق $=1\times 6!=720$

③- لتكن المجموعة $E = [1,2\ ,4,5]$

A-: كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلف من 3 منازل يمكن تشكيله من عناصر E .

الحل :

عدد الطرق $= P_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

B-: كم عدداً مؤلفاً من 3 منازل يمكن تشكيله من عناصر E مضاعفاً للعدد 5 وأكبر من 500 .

الحل :

5		5

عدد الطرق $= 1 \times 4 \times 1 = 4$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

④- كم عدداً طبيعياً مكون من أربعة أرقام يمكن تشكيله من مجموعة الأرقام $[0,1,2,4,7,8]$ ويكون أصغر تماماً من $[4000]$

الحل :

1 2		

عدد الطرق $= 2 \times 6 \times 6 \times 6 = 432$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

⑤- لتكن المجموعة : $S = [0,2,5,8,9]$

A-: كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلف من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر (S) ؟

الحل :

2 5		
89		

عدد الطرق $= 4 \times 4 = 16$

B-: كم عدداً زوجياً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر (S) ؟

الحل :

258 9	028

عدد الطرق $= 4 \times 3 = 12$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

⑥- مجموعة تضم 5 أشخاص نريد تشكيل لجنة مكونة من (رئيس – نائب رئيس – أمين سر) علماً أن هناك شخصان متخاصمان لا يمكن أن يتواجدا معاً في ذات اللجنة .

الحل :

نرمز للأشخاص $A\ ,B\ ,C\ ,D\ ,E$:

نفرض $A\ ,B$ هما الشخصان المتخاصمان :

* في حال وجود (A) في اللجنة :

$[ACE]\ ,[ADE]\ ,[ACD]$

* في حال وجود (B) في اللجنة :

$[BCE]\ ,[BDE]\ ,[BCD]$

* في حال عدم وجود $(A\ ,B)$ في اللجنة :

$[DCE]$

عدد الطرق $= 7 \times 3! = 42$

حيث $(3!)$ عدد تبديلات كل مجموعة .

<< يوجد طرق إضافية للحل >>

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

ملاحظة مهمة :

يعطى تبديلات عناصر مجموعة ما .

$$\text{عدد التعديلات} = \frac{(\text{عدد السحوبات})!}{(\text{جداء عدد المتشابهات})!}$$

الجلسات المكثفة للعام الدراسي ٢٠٢٢-٢٠٢٣

مثال :

$*\ T\ H\ H$: عدد التبديلات $= \frac{3!}{1! \times 2!} = 3$

$*\ T\ H\ M$: عدد التبديلات $= \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = 6$

$*\ TTT\ H\ H$: عدد التبديلات $= \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

السؤال الثالث : حل المسائل التالية :

1- مغلف يحوي بطاقات تحمل الأرقام :

$[0,0,2,2,2,3,3,3,3]$

* نسحب ثلاث بطاقات على التتالي بدون إعادة :

A-: بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات

عدد الطرق $= P_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

B-: بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات مجموعة أرقامها فردي

$B = [(\text{ف ز ز}) 3 \text{ أو } (\text{ف ف ف})]$

$n(B) = (4 \times 3 \times 2) + 3(5 \times 4 \times 4)$

$= 24 + 240 = 264$

C-: بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات مجموع أرقامها زوجي

$C = [(\text{ف ف ز}) 3 \text{ أو } (\text{ز ز ز})]$

$n(C) = (5 \times 4 \times 3) + 3(5 \times 4 \times 3)$

$= 60 + 180 = 240$

D-: بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات مجموع أرقامها أصغر تماماً من (4)

$D = [3(0,0,2) \text{ أو } 3(0,0,3)]$

$n(C) = 3(2 \times 1 \times 3) + 3(2 \times 1 \times 4) = 42$

E-: بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات مجموع أرقامها أكبر تماماً من (7)

$E = [3(2,3,3) \text{ أو } (3,3,3)]$

$n(E) = 3(3 \times 4 \times 3) + (4 \times 3 \times 2) = 132$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

تدرب :

أعدّ المسألة في حالة سحب ثلاث بطاقات على التتالي مع الإعادة .

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

2- صندوق يحوي (10) كرات ملونة :

6 كرات حمراء ، 3 كرات بيضاء ، كرة سوداء

* نسحب ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة :

① كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟

② كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي كرتين فقط من ذات اللون ؟

③ كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي ثلاث كرات مختلفة الألوان ؟

④ كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي ثلاث كرات ليست من لون واحد ؟

⑤ كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي كرة حمراء على الأقل ؟

⑥ كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي كرة حمراء على الأكثر ؟

الحل :

$1B\ ,3W\ ,6R$

❶ عدد النتائج $= (10)^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

❷ $A = [3(RRR`) \text{ أو } 3(WWW`) \text{ أو } 3(BBB`)]$

$n(A) = (3 \times 6 \times 6 \times 4) +$

$+(3 \times 3 \times 3 \times 7) +$

$+(3 \times 1 \times 1 \times 9) = 648$

❸ $C = [6(R, W, B)]$

$n(C) = 6 \times 6 \times 3 \times 1 = 108$

❹ $n(D) = n(A) + n(C)$ طريقة ①

$= 648 + 108 = 756$

طريقة ②

$n(D) = 1000 - [(RRR) \text{ أو } (WWW) \text{ أو } (BBB)]$

$= 1000 - [(6)^3 + (3)^3 + (1)^3 = 756$

❺ $E = [3(RR`R`) \text{ أو } 3(RRR`) \text{ أو } (RRR)]$

$n(E) = (3 \times 6 \times 4 \times 4)$

$+(3 \times 6 \times 6 \times 4) + (6)^3 = 936$

❻ $F = [3(RR`R`) \text{ أو } (R`R`R`)]$

$n(F) = (3 \times 6 \times 4 \times 4)$

$+(4 \times 4 \times 4) = 352$

0--------0---------0--------0--------0-------0--------0

❸- أعد السؤال السابق في حالة سحب ثلاث كرات على التتالي **بدون** إعادة

الحل :

❶ عدد النتائج $= P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

❷ $A = [3(RRR`) \text{ أو } 3(WWW`)]$

$n(A) = (3 \times 6 \times 5 \times 4)$

$+(3 \times 3 \times 7) = 486$

❸ $C = [6(R, W, B)]$

$n(C) = 6 \times 6 \times 3 \times 1 = 108$

❹ $n(D) = n(A) + n(C)$ طريقة ①

$= 594$

طريقة ②

$n(D) = 720 - [(RRR) \text{ أو } (WWW)]$

$= 720[P_6^3 + P_3^3] = 594$

❺ $E = [3(RR`R`) \text{ أو } 3(RRR`) \text{ أو } (RRR)]$

$n(E) = (3 \times 6 \times 4 \times 3)$

$+(3 \times 6 \times 5 \times 4) + P_6^3 = 696$

❻ $F = [3(RR`R`) \text{ أو } (R`R`R`)]$

$n(F) = (3 \times 6 \times 4 \times 3)$

$+(4 \times 3 \times 2) = 240$

* التوافيق : ((سحب معاً دفعة واحدة))

$$\binom{n}{r} = \frac{p_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} : n \geq r \geq 0$$

مثال 1 : عين قيمة (n) في كل من الحالات التالية :

$$① \; 3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$$

الحل :

شرط الحل :

$$[(n \geq 4)3(n \geq 2)] \Longrightarrow (n \geq 4)$$

$$3\frac{\cancel{n!}}{4!\,(n-4)!} = 14\frac{\cancel{n!}}{2!\,(n-2)!}$$

$$\frac{3}{4!\,(n-4)!} = \frac{7}{(n-2)(n-3)(n-4)!}$$

$$(n-2)(n-3) = 56$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$

$$(n-10)(n+5) = 0$$

إما : $n = 10$ مقبول

أو : $n = -5$ مرفوض

0------0--------0-------0--------0--------0

$$② \; \binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$$

الحل :

شرط الحل :

$10 \geq n+2$	$10 \geq 3n$
$n \leq 8$	$n \leq \frac{10}{3}$
$n = [0,1,\ldots,8]$	$n = [0,1,2,3]$

$$\Longrightarrow n = [0,1,2,3]$$

إما : $3n = n+2 \Longrightarrow \boxed{n=1}$ مقبول

أو : $3n+n+2 = 10 \Longrightarrow \boxed{n=2}$ مقبول

0------0--------0-------0--------0--------0

مثال 2: يتكون مكتب إداري من : (6) رجال و (3) نساء نريد اختيار لجنة من ثلاثة أشخاص :

① بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة ؟

$$\text{عدد الطرق} = \binom{9}{3} = 84$$

② بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة على أن تضم امرأة على الأكثر ؟

$$[(mmm) \text{ أو } (mmf)]$$

$$\text{عدد الطرق} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}\binom{3}{1} = 20 + 45 = 65$$

③ بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من (رئيس – نائب رئيس – أمين سر) .

$$\text{عدد الطرق} = P_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

0------0--------0-------0--------0--------0

مثال 3 : لتكن المجموعة :

$$E = [1,2,3,\ldots,7]$$

① كم عدد المجموعات الجزئية المؤلفة من ثلاثة عناصر من عناصر (E)

$$\text{عدد المجموعات} = \binom{7}{3} = 35$$

② كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من (E) ومجموعهما مضاعف للعدد (2)

الحل : ليكون مجموعهما مضاعف للعدد (2)

يجب أن نختار (ف ، ف) أو (ز ، ز)

عدد المجموعات $= \binom{4}{2} + \binom{3}{2} = 6 + 3 = 9$

0-------0--------0--------0--------0--------0

منشور ثنائي الحد :

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (a)^{n-r}(b)^r$$

ملاحظات :

① $(a-b)^n = [(a) + (-b)]^n$

((الحد العام))

② $T_r = \binom{n}{r} (a)^{n-r}(b)^r$

0-------0--------0--------0--------0--------0

مثال 1 : ليكن المقدار : $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$

① أوجد الحد الذي يحوي (x^2)

② أوجد الحد المستقل عن (x)

③ هل يوجد حد يحوي (x^3)

④ عين أمثال الحد الذي يحوي (x^4)

الحل :

$$T_r = \binom{n}{r} (a)^{n-r}(b)^r$$

$$T_r = \binom{10}{r} (x)^{10-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= \binom{10}{r} (x)^{10-r}(x)^{-r}$$

$$T_r = = \binom{10}{r} (x)^{10-2r}$$

① $x^2 = x^{10-2r} \Rightarrow 10 - 2r = 2 \Rightarrow \boxed{r = 4}$

$$\Rightarrow T_4 = \binom{10}{4} x^2 = 210x^2$$

② $x^0 = x^{10-2r} \Rightarrow 10 - 2r = 0 \Rightarrow \boxed{r = 5}$

$$\Rightarrow T_5 = \binom{10}{5} = 252$$

③ $x^3 = x^{10-2r} \Rightarrow 10 - 2r = 3 \Rightarrow \boxed{r = \frac{7}{2}}$

$\Leftarrow$ لا يوجد حد يحوي (x^3) لان r , n أعداد طبيعية .

④ $x^4 = x^{10-2r} \Rightarrow 10 - 2r = 4 \Rightarrow \boxed{r = 3}$

$$\Rightarrow \text{الأمثال هي} = \binom{10}{3} = 120$$

0-------0--------0--------0--------0--------0

مثال 2 : حدد الشرط : لكي يحوي المنشور $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ على حد مستقل عن (x)

الحل :

$$T_r = \binom{n}{r} (x^2)^{n-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= \binom{n}{r} (x)^{2n-2r}(x)^{-r}$$

$$\binom{n}{r} (x)^{2n-3r}$$

$$\Rightarrow x^0 = x^{2n-3r} \Rightarrow \boxed{r = \frac{2n}{3}}$$

أي يجب أن تكون (n) من مضاعفات العدد (3)

سؤال مهم :

إذا علمت أن : $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

A) اكتب منشور $(e^{ix} + e^{-ix})^3$

الحل :

$$(e^{ix} + e^{-ix})^3 = \binom{3}{0}(e^{ix})^3(e^{-ix})^0 + \binom{3}{1}(e^{ix})^2(e^{-ix})^1 + \binom{3}{2}(e^{ix})^1(e^{-ix})^2 + \binom{3}{3}(e^{ix})^0(e^{-ix})^3$$

$$= e^{3xi} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}$$

$$= (e^{3ix} + e^{-3ix}) + 3(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$(e^{ix} + e^{-ix})^3 = 2\cos(3x) + 6\cos x$$

B) اكتب $\cos^3 x$ *بصيغة عبارة خطية في النسب* المثلثية لمضاعفات الزاوية (x)

ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \; dx$

الحل :

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{2\cos 3x + 6\cos x}{8}$$

$$\Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{12}(-1) + \frac{3}{4}\right) - (0 + 0)\right]$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

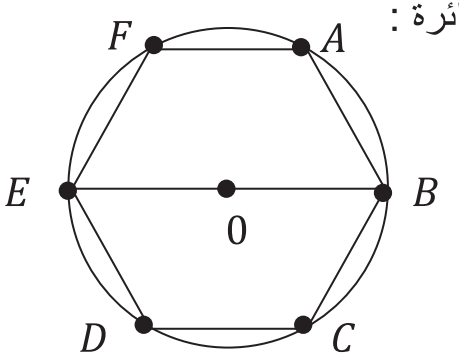
0------0--------0-------0--------0--------0

تدرب أعد السؤال السابق من أجل :

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

تدرب (أشكال هندسية) :

نقاط تشكل مسدس منتظم مرسوم على دائرة : A, B, C, D, E, F



نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلث :

① ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب :

$$\text{عدد المثلثات} = \binom{6}{3} = 20 \text{ مثلث}$$

② ما عدد المثلثات **القائمة** التي يمكن أن نحصل عليها

كل قطر مار من مركز الدائرة يشكل أربعة مثلثات قائمة ولدينا ثلاثة أقطار :

$$\text{عدد المثلثات القائمة} = 4 \times 3 = 12 \text{ قائم}$$

③ ما عدد المثلثات المنفرجة التي يمكن الحصول عليها : ((المثلث منفرج في رأس المسدس))

عدد المثلثات المنفرجة $= 6$ مثلثات

④ ما عدد المثلثات الحادة :

عدد المثلثات الحادة $= 20 - 18 = 2$

⑤ ما عدد الأقطار :

عدد الأقطار $= \frac{n(n-3)}{2} = \frac{6(6-3)}{2} = 9$

⑥ عدد نقاط تقاطع أقطار المضلع :

عدد نقاط التقاطع $= \binom{n}{4} + n = \binom{6}{4} + 6 = 21$

⑦ ما عدد الرباعيات (شكل رباعي) يمكن تشكيله :

عدد الرباعيات $= \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$

⑧ ما عدد القطع المستقيمة الممكن تشكيلها من النقاط الستة :

عدد القطع $= \binom{6}{2} = 15$

⑨ ما عدد الأشعة غير الصفرية الممكن تشكيلها :

عدد الأشعة $= P_6^2 = 6 \times 5 = 30$ شعاع

0-------0--------0--------0--------0--------0

الاحتمالات

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \quad \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

*** قوانين هامة :**

$$P(A) = 1 - P(A`)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- **التقاطع** $(\cap)$: الحدثان A, B يقعان معاً .

- **الاجتماع** $(\cup)$: يقع أحد الحدثين A أو B على الأقل

$$P(A \cap B`) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A` \cap B`) = P(A \cup B)` = 1 - P((A \cup B)$$

$$P(A` \cup B`) = P(A \cap B)` = 1 - P((A \cap B)$$

* الاحتمال الشرطي :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \, , P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

((علماً أن – إذا علمت – إذا كان – مع أنه))

التوقع الرياضي :

$$E(x) = \sum_{i=1}^{m} xi \, P(X = x_i)$$

*** التباين للمتحول العشوائي :**

$$V(x) = \sum_{i=1}^{m} x^2 i \, . P(x = x_i) - [E(x)]^2$$

* الانحراف المعياري لمتحول عشوائي :

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

* الاستقلال الاحتمالي

A, B مستقلان احتمالياً $\Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$$

مسألة 1 : يحتوي صندوق (9) كرات متماثلة وملونة كما يلي :

4 حمراء و 3 بيضاء و 2 سوداء نسحب من الصندوق 3 كرات دون إعادة بالتتالي ،

والمطلوب :

① أحسب احتمال أن تكون الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء .

② أحسب احتمال الحصول على كرة من كل لون

③ أحسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين وكرة بيضاء

④ أحسب احتمال أن تكون الأولى والثانية حمراوين والثالثة بيضاء

⑤ أحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات من ذات اللون .

الحل :

① $A[(س, ب, ح)]$

$$P(A) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$$

② $B[(س, ب, ح) \times 6]$

$$P(B) = P(A) \times 6 = \frac{1}{21} \times 6 = \frac{2}{7}$$

③ $C[(ب, ح, ح)]$

$$P(C) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} \times 3 = \frac{3}{14}$$

④ $D[(ب, ح, ح)]$

$$P(D) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$$

⑤ $E[(ب, ب, ب), (ح, ح, ح)]$

$$P(E) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7}$$

$$= (4+1)\left(\frac{3 \times 2}{9 \times 8 \times 7}\right) = \frac{5}{84}$$

0-------0--------0--------0--------0--------0

مسألة 2 : يحتوي صندوق (5) كرات متماثلة 3 حمراء و 2 بيضاء ، نسحب كرتين بالتتالي مع الإعادة ، **والمطلوب** :

① إذا علمت أن الكرات من نفس اللون ، ما احتمال أن تكون حمراء .

② أحسب احتمال أن تكون الثانية بيضاء علماً أن الأولى بيضاء .

③ أحسب احتمال أن تكون الثانية حمراء مع أنه سحبت كرة حمراء على الأقل .

④ x متغير عشوائي يدل على عدد مرات سحب كرة حمراء ، احسب القانون الاحتمالي والتوقع الرياضي و التباين . الانحراف المعياري

⑤ x متغير عشوائي يأخذ (9) عند سحب كرتين بيضاء ويأخذ $(\propto)$ عند سحب كرتين حمراوين ويأخذ (0) ماعدا ذلك
أحسب القانون الاحتمالي والتوقع الرياضي .

⑥ عين $(\propto)$ إذا علمت $E(x) = 0$

الحل :

$$A = [(R,R),(W,W)]$$

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{13}{25}$$

$$B = [(R,R)]$$

$$A \cap B = [(R,R)] \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{25}}{\frac{13}{25}}=\frac{9}{13}$$

② C : الأولى بيضاء $C=[(W,R),(W,W)]$

$$P(C)=\frac{2}{5}.\frac{3}{5}+\frac{2}{5}.\frac{2}{5}=\frac{10}{25}$$

D : أن تكون الثانية بيضاء

$$D=[(W,W),(R,W)]$$

$$P(C\cap D)=\frac{2}{5}.\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$$

$$P(D|C)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

③ E : أن تكون كرة حمراء على الاقل :

$$E=[2(R,W),(R,R)]$$

$$P(E)=2.\frac{3}{5}.\frac{2}{5}+\frac{3}{5}.\frac{3}{5}=\frac{21}{25}$$

F : أن تكون الثانية حمراء $(W,R)(R,R)$

$$P(E\cap F)=\frac{2}{5}.\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\frac{.3}{5}=\frac{15}{25}$$

$$P(F|E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)}=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$$

④ $\Omega=[(R,R),(R,W),(W,W)]$

$$x=[0,1,2]$$

$$P_0=\frac{2}{5}.\frac{2}{5}=\frac{4}{25} \qquad (W,W)\ x=0$$

$$P_1=2.\frac{2}{5}.\frac{3}{5}=\frac{12}{25} \qquad 2(W,R)\ x=1$$

$$P_3=\frac{3}{5}.\frac{3}{5}=\frac{9}{25} \qquad (R,R)\ x=2$$

القانون الاحتمالي :

x_i	0	1	2	مجموع
$P(x_i)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$	1

التوقع الرياضي :

$$E(x)=\frac{0+12+18}{25}=\frac{30}{25}=\frac{6}{5}$$

التباين : $V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$

$$=\frac{0+12+36}{25}-\frac{36}{25}=\frac{12}{25}$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma(x)=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{12}{25}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

⑤ $\Omega=[(\mathrm{R},\mathrm{R}),(\mathrm{R},\mathrm{W}),(\mathrm{W},\mathrm{W})]$

$$x=[0,9,\propto]$$

$$P_0=2.\frac{3}{5}.\frac{2}{5}=\frac{12}{25} \qquad 2(R,W)\ ,x=0$$

$$P_9=\frac{2}{5}.\frac{2}{5}=\frac{4}{25} \qquad (W,W)\ x=9$$

$$P_\propto=\frac{3}{5}.\frac{3}{5}=\frac{9}{25} \qquad (R,R)\ x=\propto$$

x_i	0	9	$\propto$	مجموع
$P(x_i)$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{25}$	1

$$E(x)=\frac{0+36+9\propto}{25}=\frac{36+9\propto}{25}$$

⑥ $E(x)=0\Longrightarrow 36+9\propto=0$

$$\Rightarrow \boxed{\propto=-4}$$

0-------0--------0--------0--------0--------0

مسألة ❸ : صندوق يحوي 8 كرات 4 زرقاء ، 3 خضراء ، 1 صفراء

نسحب ثلاث كرات معاً ، x متغير عشوائي يدل على الألوان المختلفة أحسب $E(x)$

الحل :

$$x(\Omega)=[1,2,3]$$

$$1=[(خ,خ,خ),(ز,ز,ز)]$$

$$P(x=1)=\frac{\binom{3}{3}+\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$$

$$=\frac{1+\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}}{\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}}=\frac{1+4}{56}=\frac{5}{56}$$

$$2=[(خ,ز,ز),(ص,ز,ز)]$$

$$[(خ,ز,خ),(ص,خ,خ)]$$

$$P(x=2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{2}\binom{1}{1}+\binom{3}{2}\binom{4}{1}+\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}}$$

$$=\frac{6\times3+6\times1+3\times4+3\times1}{56}=\frac{39}{56}$$

$$3=[(ز,خ,ص)]$$

$$P(x=3)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{12}{56}$$

x_i	1	2	3	
$P(x_i)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$	1

$$E(x)=\frac{5+78+36}{56}=\frac{119}{56}$$

0-------0--------0--------0--------0--------0

مسألة ❹ : صندوق يحوي على كرات حمراء وكرات بيضاء بحيث يكون الكرات الحمراء ثلاثة أضعاف الكرات البيضاء

① أحسب احتمال سحب كرة حمراء

② أحسب احتمال سحب كرة بيضاء

③ x : متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة احسب القانون الاحتمالي

((اسحب ثلاث كرات مع إعادة)) .

الحل :

$4n\begin{cases}n & \text{بفرض عدد الكرات البيضاء}\\ 3n & \text{بفرض عدد الكرات الحمراء}\end{cases}$

① $P(R)=\frac{3n}{4n}=\frac{3}{4}$

② $P(W)=\frac{n}{4n}=\frac{1}{4}$

③

$$\Omega=[(R,R,R),(R,R,W),(R,W,W),(W,W,W]$$

$$P_0 = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{64}(W,W,W)\ x=0$$

$$P_1 = 3.\frac{3}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{9}{64}\ 3(R,W,W)x=1$$

$$P_2 = 3.\frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{1}{4} = \frac{27}{64}3(R,R,W)\ \ x=2$$

$$P_3 = \frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{4} = \frac{27}{64} \qquad (R,R,R)\ \ x=3$$

x_i	0	1	2	3	مجموع
$P(x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	1

0------0--------0-------0--------0--------0

مسألة 5 : ضُنعت قطعة نقود بحيث احتمال ظهور الشعار = ضعفي ظهور الكتابة .

* A : حدث ظهور الشعار (H) .

* B : حدث ظهور الكتابة (T) .

① أحسب احتمال ظهور كل من الشعار والكتابة

② عند إلقاء القطعة مرتين x : متغير عشوائي يدل على عدد ظهور الشعار أحسب $E(x)$

③ عند إلقاء القطعة 5 مرات ، ما احتمال الحصول على ثلاث شعارات .

الحل :

① $$P(A) = 2P(B)$$

$$P(A)+P(B)=1 \Rightarrow 2P(B)+P(B)=1$$

$$\Rightarrow 3P(B)=1$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{1}{3}, \qquad P(A)=\frac{2}{3}$$

② $$x(\Omega)=[0,1,2]$$

$$P(x=0)=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}\times=\frac{1}{9} \quad [T,T], x=0$$

$$P(x=1)=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}\times 2=\frac{4}{9}[T,H], x=1$$

$$P(x=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9} \quad [H,H], x=2$$

x_i	0	1	2	مجموع
$P(x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

$$E(x)=0+\frac{4}{9}+\frac{8}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

③ التجربة برنولية :

$$P(x=k)=\binom{n}{k}P^k\,q^{n-k}$$

$n=5$ عدد الرميات

$k=3$ عدد مرات ظهور الشعار

$P=\frac{2}{3}$ احتمال ظهور الشعار

$q=\frac{1}{3}$ احتمال ظهور الكتابة $[q=1-p]$

$$P(x=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}.\frac{8}{27}.\frac{1}{9}=\frac{80}{243}$$

مسألة 6 : يحوي مغلف (6) بطاقات متماثلة ومرقمة : 4 , 3 , 3 , 3 , 0 , 0 نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي دون إعادة .

① إذا علمت أن المجموع أولياً واحتمال احدهما 4

② x : متغير يدل على جداء رقمي البطاقتين أحسب $E(x)$ عين القانون الاحتمالي والتوقع الرياضي والتباين .

الحل :

① A : مجموع أولي

$$A = [(0,3) \times 2, (3,4) \times 2]$$

B : أحدهما (4)

$$A \cap B = [(3,4) \times 2]$$

$$P(A) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times 2 + \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{1}{5}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$$

	0	0	3	3	3	4
0		0	0	0	0	0
0	0		0	0	0	0
3	0	0		9	9	12
3	0	0	9		9	12
3	0	0	9	9		12
4	0	0	12	12	12	

$$n(\Omega) = [0,9,12]$$

$$P(x = 0) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

$$P(x = 9) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

$$P(x = 12) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

x_i	0	9	12
$P(x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$E(x) = 0 + \frac{9}{5} + \frac{12}{5} = \frac{21}{5}$$

0-------0--------0--------0--------0--------0

مسألة 7 : يحوي صندوق 10 كرات n كرة حمراء ، والباقي سوداء $(10 - n)$ نسحب كرتين معاً

① عين n ليكون احتمال سحب كرتين مختلفتين باللون يساوي $\left(\frac{5}{9}\right)$

② من أجل $n = 5$, x : متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الكرات الحمراء .

الحل : ①

سحب كرتين مختلفتين $A = [(\text{س}, \text{ح})]$

$$① \; P(A) = \frac{\binom{n}{1} \cdot \binom{10-n}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{n(10-n)}{\frac{10 \times 9}{2 \times 1}}$$

$$= \frac{10n - n^2}{45}$$

$$P(A) = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{10n - n^2}{45} = \frac{5}{9}$$

$$10n - n^2 = 25 \Rightarrow n^2 - 10n + 25 = 0$$

$$\Rightarrow (n-5)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

② (5 ح) و (5 س) .

$$x(\Omega) = [0,1,2]$$

$$P(x=0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9} \quad x = 0 \text{ س , س}$$

$$P(x=1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{9} \quad x = 1 \text{ س , ح}$$

$$P(x=2) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9} \quad x = 2 \text{ ح , ح}$$

x_i	0	1	2
$P(x_i)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$E(x) = 0 + \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1$$

$$V(x) = [(0)^2\left(\frac{2}{9}\right) + (1)^2\left(\frac{5}{9}\right)$$

$$+(2)^2(\frac{2}{9})] - [1^2] = \frac{4}{9}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{v(x)} = \frac{2}{3}$$

0-------0--------0--------0--------0--------0

مسألة 8 : صندوقان يحوي الأول 1 , 2 , 3

ويحوي الثاني 2 , 3 , 4 , 5

نسحب كرة من الصندوق الأول وكرة من الصندوق الثاني

① A : حدث إحدى الكرتين على الأقل تحمل (3)

B : حدث مجموع الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من (5)

هل A , B مستقلان احتمالياً

② x متغير عشوائي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبين أحسب $E(x)$

الحل :

①

	2	3	4	5
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)

$$A = [(1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,4)$$

$$, (3,5)]$$

$$B = [(1,5), (2,4), (1,5), (3,5), (3,3)$$

$$, (3,4)]$$

$$A \cap B = [(3,3),(3,4),(3,5)]$$

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \ , P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) \ ?= \ P(A)\,P(B)$$

$$\frac{1}{4} ?= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$\Leftarrow A , B$ مستقلات احتمالياً

② $(\Omega) = [3,4,5,6,7,8]$

$$P(x=3) = \frac{1}{12} \ , P(x=4) = \frac{2}{12}$$

$$P(x=5) = \frac{3}{12} \ , P(x=6) = \frac{3}{12}$$

$$P(x=7) = \frac{2}{12} \ , P(x=8) = \frac{1}{12}$$

r_1	3	4	5	6	7	8
$P(x_1)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$E(x) = \frac{3+8+15+18+14+8}{12} = \frac{11}{2}$$

مسألة ⑨ :

صندوق يحوي كرتين حمراء وثلاثة بيضاء
* نسحب كرة نسجل لونها ثم نعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها ثم نسحب كرة أخرى .

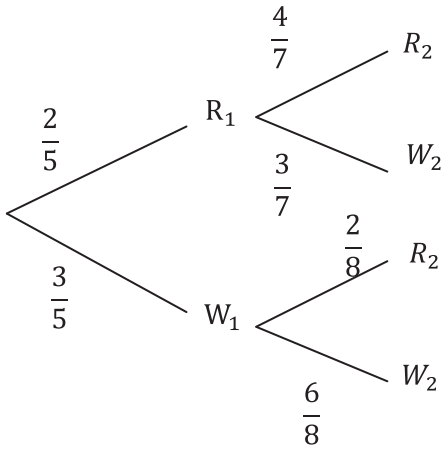
① أوجد المخطط الشجري للتجربة

② أحسب احتمال (R_2) حدث سحب كرة حمراء في المرة الثانية .

③ إذا علمت أن الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون ، ما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء اللون .

الحل :

①



② $P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(W_1 \cap R_2)$

$$= \left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{8}\right) = \frac{106}{280}$$

③

$$P(R_1|R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{64}{280}}{\frac{106}{280}}$$

$$= \frac{64}{106} = \frac{32}{53}$$

حيث :

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{35} = \frac{64}{280}$$

مسألة 10 :

يشتري محل (400) مصباح من المصنع (A) نسبة المصابيح المعطوبة منها (4%)

ويشتري ذات المحل من مصنع (B) (200) مصباح نسبة المصابيح المعطوبة (10%) .

* نسحب عشوائياً مصباحاً من المحل .

① ما احتمال أن يكون المصباح معطوب

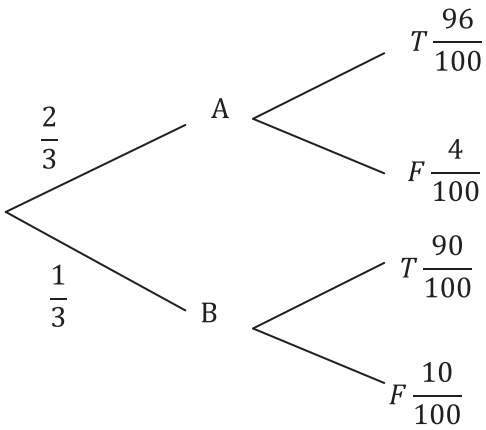
② إذا علمت أن المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من المصنع (B)

③ نسحب عشوائياً معاً مصباحين من مصابيح المصنع (A) وليكن x : متحول عشوائي يدل على عدد المصابيح الصالحة للاستعمال ,

والمطلوب : أحسب $P(x=0)$

الحل :

① T : مصباح صالح ، F : مصباح معطوب



$$P(F)=P(A\cap F)+P(B\cap F)$$
$$=\left(\frac{2}{3}.\frac{4}{100}\right)+\left(\frac{1}{3}.\frac{10}{100}\right)=\frac{18}{300}$$

②
$$P(B|F)=\frac{P(B\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{10}{300}}{\frac{18}{300}}=\frac{5}{9}$$

③ عدد المصابيح المعطوبة في الورشة A :
$$\frac{4\times 400}{100}=16$$
$$P(x=0)=\frac{\binom{16}{2}}{\binom{400}{2}}=\frac{1}{665}$$

تدريب على استقلال متحولين عشوائيين :

الجدول الآتي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (x,y) :

① أكمله علماً أن x,y مستقلين احتمالياً .

x \ Y	0	1	2	قانون x
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون y	0.3			

الحل :

x \ Y	0	1	2	قانون x
0	0.12	0.2	0.08	0.4
1	0.06	0.1	0.04	0.2
2	0.12	0.2	0.08	0.4
قانون y	0.3	0.5	0.2	1

② أحسب : $P(x=2)$, $P(y=0)$

$$P[(x=2)\cap(y=2)]$$

الحل :

$$P(x=2)=0.4\ ,P(y=0)=0.3$$

$$P[(x=2)\cap(y=2)]=0.08$$

③ اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي y ثم أحسب $E(y)$ و $V(y)$ و $\sigma(y)$

الحل :

y	0	1	2
$P(y=y_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$
$P_i \cdot y_i$	0	$\frac{5}{10}$	$\frac{4}{10}$
$P_i \cdot y_i^2$	0	$\frac{5}{10}$	$\frac{8}{10}$

$$* E(x) = \sum_{i=1}^{3} y_i\, p_i = \left[0 + \frac{5}{10} + \frac{4}{10}\right] = \frac{9}{10}$$

$$* = \sum_{i=1}^{3} y_i^2\, p_i - [E(x)]^2$$

$$= \left[0 + \frac{5}{10} + \frac{8}{10}\right] - \left[\frac{9}{10}\right]^2$$

$$= \frac{13}{10} - \frac{81}{100} = \frac{130-81}{100} = \frac{49}{100}$$

$$* \sigma y = \sqrt{V(y)} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10}$$

0------0--------0-------0--------0--------0

تدرب : ((**مسألة برنولي**)) :

يتواجه فريقان A, B في لعبة كرة طائرة مكونة من (5) أشواط يكسب الفريق B الشوط الواحد باحتمال يساوي (0.6) ويربح المباراة الفريق الذي يكسب أكبر عدد من الأشواط ، ما احتمال أن يربح الفرق (A) ؟؟

الحل :

نفرض : x : متحول يدل على عدد مرات ربح الفريق (B)

$$n = 5\,, P = 0.6\,, q = 0.4$$

حتى يربح الفريق (A) المباراة يجب أن يربح الفريق (B) شوطان على **الأكثر** :

$$P(x \le 2) = P(x=0) + p(x=1) + P(x=2)$$

$$P(x=0) = \binom{5}{0}\left(\frac{6}{10}\right)^0\left(\frac{4}{10}\right)^5 = \left(\frac{4}{10}\right)^5$$

$$P(x=1) = \binom{5}{1}\left(\frac{6}{10}\right)^1\left(\frac{4}{10}\right)^4 = 3\left(\frac{4}{10}\right)^4$$

$$P(x=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{6}{10}\right)^2\left(\frac{4}{10}\right)^3 = \frac{36}{10}\left(\frac{4}{10}\right)^3$$

$$P(x \le 2) = \left(\frac{4}{10}\right)^5 + 3\left(\frac{4}{10}\right)^4 + \frac{36}{10}\left(\frac{4}{10}\right)^3$$

$$\left(\frac{4}{10}\right)^3\left[\left(\frac{4}{10}\right)^2 + 3\left(\frac{4}{10}\right) + \frac{36}{10}\right]$$

$$= \left(\frac{64}{1000}\right)\left(\frac{496}{100}\right) = 0.31744$$

0------0--------0-------0--------0--------0

مسألة متتاليات واحتمالات :

يوجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء :

* إذا صد ضربة الجزاء (n) فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $(n+1)$ (0.8)

* إذا لم يصد ضربة الجزاء (n) : فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $(n+1)$ يساوي (0.6)

* نفترض أن احتمال أن يصد **أول** ضربة جزاء يساوي (0.7) .

ليكن (A_n) : الحدث يصد حارس المرمى ضربة الجزاء (n) والمطلوب :

① أحسب $P(A_2|A_1)$ و $P(A_2|\bar{A_1})$

② استنتج أن : $P(A_2) = 0.74$

③ نعرف $P(A_n) = P_n$

برهن أن : $P_{n+1} = (0.2)P_n + 0.6$

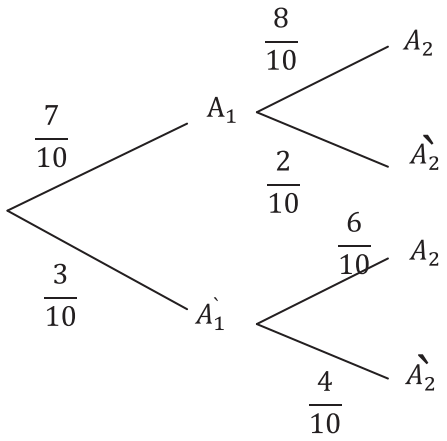
لنعرف المتتالية : $(U_n)_{n\geq 1}$ بالصيغة :

$$U_n = P_n - 0.75$$

* بين أن المتتالية هندسية أساسها (0.2)

استنتج عبارة P_n بدلالة (n) ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

الحل : ①



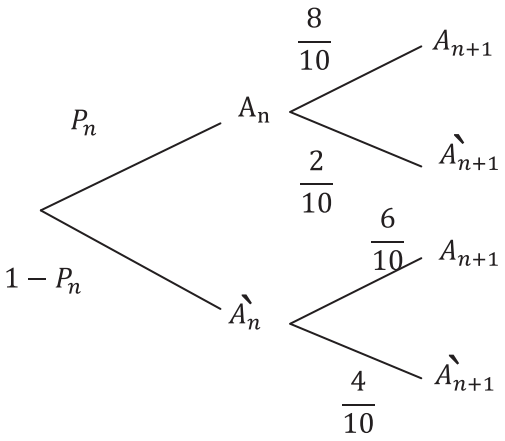
$$P(A_2|A_1) = \frac{8}{10}$$

$$P(A_2|\acute{A_1}) = \frac{6}{10}$$

$$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\acute{A_1} \cap A_2) \quad ②$$

$$= \left(\frac{7}{10} \cdot \frac{8}{10}\right) + \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{6}{10}\right) = 0.74$$

$$P_n = P(A_n) \quad ③$$



$$P_{n+1} = P(A_{n+1}) = \frac{8}{10}P_n + \frac{6}{10}(1 - P_n)$$

$$= 0.2\,P_n + 0.6$$

$$U_{n+1} = P_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{2}{10}P_n + \frac{6}{10} - \frac{3}{4} \quad ④$$

$$= \frac{2}{10}P_n - \frac{3}{20} = \frac{2}{10}\left(P_n - \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{10}U_n$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2}{10} = q$$

ومنه U_n متتالية هندسية أساسها $(q = 0.2)$.

$$U_n = U_1\,q^{n-1} \qquad : U_1 = P_1 - \frac{3}{4} = \frac{-1}{20}$$

$$U_n = \left(\frac{-1}{20}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$P_n = U_n + \frac{3}{4} \Rightarrow P_n = \left(\frac{-1}{20}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{3}{4} \qquad : -1 < 9 = \frac{1}{5} < 1$$