حل اختبار في درس النواس المرن

المعطيات:

$$T_0 = 1\,\text{sec}\ ,X_{max} = 10\times10^{-2} = 10^{-1}m$$
$$,m = 1kg$$

الحل:

١. طريقة أولى:

$$mg = kx_0 \Longrightarrow$$
$$x_0 = \frac{mg}{k} \quad *$$

- نحسب k: $k = m.\omega_0^2$
- نحسب ω_0: $\omega = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1}$

$$\omega_0 = 2\pi\ rad.s^{-1}$$

- نعوض لحساب k:

$$k = 1\times(2\pi)^2 = 4\pi^2$$
$$k = 40Nm^{-1}$$

- نعوض في $*$ نجد:

$$x_0 = \frac{1\times10}{40}$$
$$\boxed{x_0 = \frac{1}{4}\ m}$$

طريقة ثانية:

$$mg = kx_0$$

- نعزل: $\frac{m}{k}$

$$\frac{m}{k} = \frac{x_0}{g}$$

- نعوض في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Longrightarrow$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}$$

- نعزل x_0:

$$T_0^2 = 4\pi^2\frac{x_0}{g} \Longrightarrow$$
$$x_0 = \frac{T_0^2.g}{4\pi^2}$$

- نعوض:

$$x_0 = \frac{1\times10}{4\times10}$$
$$\boxed{x_0 = \frac{1}{4}m}$$

.....

٢. حساب ثابت صلابة النابض:

$$k = m.\omega^2$$
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$$
$$\Longrightarrow k = 1\times4\pi^2$$
$$\boxed{k = 40\ Nm^{-1}}$$

.....

٣. $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

- نعين قيم الثوابت:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1}$$
$$\boxed{\omega_0 = 2\pi\ rad.s^{-1}}$$
$$\boxed{X_{max} = 10^{-1}m}$$

- تعيين قيمة φ من شروط البدء

$t = 0 \quad x = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}} \quad v > 0$ (اتجاه موجب)

نعوض الشروط بتابع المطال:

$$\left.\begin{matrix} x = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}} \\ t = 0 \end{matrix}\right\} \frac{X_{max}}{\sqrt{2}} = X_{max}cos\varphi$$

$$\Longrightarrow cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{cases}\varphi = +\frac{\pi}{4}rad \\ \varphi = -\frac{\pi}{4}rad\end{cases}$$

نعوض φ في تابع السرعة:

$$\left.\begin{matrix} v > 0 \\ t = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} v=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\varphi) \\ v=-\omega_0 X_{max} sin\varphi \end{matrix}$$

$\varphi = +\frac{\pi}{4} \Longrightarrow v = -\omega_0 X_{max}\sin\left(+\frac{\pi}{4}\right) < 0$ مرفوض

$\varphi = -\frac{\pi}{4} \Longrightarrow v = -\omega_0 X_{max}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) > 0$ مقبول

$$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{4}rad}$$

- نعوض قيم الثوابت بالشكل العام:

$$\boxed{x = 0.1\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)(m)}$$

.....

٤. $x = 0\ ,t = ?$

- نعوض في تابع المطال:

$$0 = 0.1\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)=\cos(\frac{\pi}{2}+\pi)$$
$$2\pi t-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

- نقسم على π جميع الأطراف:

$$2t-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+k$$
$$2t=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+k$$
$$2t=\frac{3}{4}+k$$
$$\boxed{t=\frac{3}{8}+\frac{k}{2}}$$

- للمرور الأول: $k=0$
- للمرور الثاني: $k=1$

$$\Rightarrow t_2=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$$
$$t_2=\frac{3}{8}+\frac{4}{8}$$

- زمن المرور الثاني: $t_2=\frac{7}{8}sec$
- للمرور الثالث: $k=2$

$$\Rightarrow t_3=\frac{3}{8}+\frac{2}{2}$$
$$t_3=\frac{3}{8}+\frac{8}{8}$$

- زمن المرور الثالث: $\boxed{t_3=\frac{11}{8}sec}$

.....

٥. $t=\frac{1}{4}sec$ $x=?$ (الموضع)

- نعوض بتابع المطال كما تعلمنا في الملاحظات:

$$x=0.1\cos\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$

- نعوض $t=\frac{1}{4}sec$

$$x=10^{-1}\cos\left(2\pi\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$x=10^{-}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$x=10^{-1}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$x=10^{-1}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\boxed{x=\frac{\sqrt{2}}{20}m}$$

.....

٦. $t=0$ ، $a=?$ ، $F=?$

- قوة الإرجاع: $F=-kx$
- التسارع: $a=-\omega_0^2x$
- يجب حساب المطال x عند بدء الزمن:

$$t=0\Rightarrow x=0.1\cos\left(2\pi(0)-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$x=0.1\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\boxed{x=\frac{\sqrt{2}}{20}(m)}$$

- نعوض لحساب قوة الإرجاع:

$$F=-(40)\left(\frac{\sqrt{2}}{20}\right)$$
$$\boxed{F=-2\sqrt{2}N}$$

- نعوض لحساب التسارع:

$$a=-(2\pi)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{20}\right)$$
$$\boxed{a=-2\sqrt{2}\,m.s^{-2}}$$

.....

٧. من الطلب الخامس:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{20}\Leftarrow t=\frac{1}{4}sec$$ عند الزمن

- نعوض لحساب شدة قوة الإرجاع:

$$\bar{F}=|-k\bar{x}|$$
$$F=\left|-40\times\frac{\sqrt{2}}{20}\right|$$
$$\boxed{F=-2\sqrt{2}N}$$

.....

٨. $|v_{max}|=\omega_0X_{max}$
$$v_{max}=2\pi\times10^{-1}$$
$$v_{max}=\frac{2\pi}{10}$$
$$\boxed{v_{max}=\frac{\pi}{5}m.s^{-1}}$$

.....

٩. $x=8\times10^{-2}(m)$، $v=?$

$$v=\underbrace{-}_{\text{اتجاه سالب}}\omega_0\sqrt{X_{max}^2-x^2}$$
$$v=-2\pi\sqrt{(10\times10^{-2})^2-(8\times10^2)^2}$$
$$v=-2\pi\sqrt{100\times10^{-4}-64\times10^{-4}}$$
$$=-2\pi\sqrt{(100-64)\times10^{-4}}$$
$$=-2\pi\sqrt{36\times10^{-4}}$$
$$\boxed{v=-12\,\pi\times10^{-2}m.s^{-1}}$$

.....

١٠. $\sum F=?$ عندما $x=X_{max}$

$$\sum\bar{F}=m.\bar{a}$$
$$\bar{a}=-\omega_0^2\bar{X}$$
$$x=-X_{max}\Rightarrow a_{max}=\omega_0^2X_{max}$$
$$\sum F_{max}=m\omega_0^2X_{max}$$
$$=1\times4\pi^2\times10^{-1}$$
$$\boxed{\sum F_{max}=4N}$$

.....

١١. $E_{tot} = ?$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 40 \times 10^{-2}$$

$$\boxed{E_{tot} = 2 \times 10^{-1} J}$$

.....

١٢. $x = -6 \times 10^{-2}(m), E_k = ?$

$$E_k = E_{tot} - E_p$$

$$= \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}k(X_{max}^2 - x^2)}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \times 40((10 \times 10^{-2})^2 - (-6 \times 10^{-2})^2)$$

$$E_k = 20[100 \times 10^{-4} - 36 \times 10^{-4}]$$

$$= 20[(100 - 36) \times 10^{-4}]$$

$$= 20(64 \times 10^{-4})$$

$$= 1280 \times 10^{-4}$$

$$\boxed{E_k = 128 \times 10^{-3} J}$$

أو: بطريقة ثانية: نحسب E_p ومن ثم: $E_k = E_{tot} - E_p$

.....

١٣. $t = ?$, $n = ?$ (عدد النوسات)، حيث: $T_0 = 1sec$

$$T_0 = \frac{t}{n} \Rightarrow t = n.T_0$$

$$t = 20 \times 1 \Rightarrow \quad \boxed{t = 20\ sec}$$

.....

١٤. طول القطعة المستقيمة التي يرسمها المتحرك:

$$L = 2X_{max}$$

$$L = 2 \times 10^{-1}$$

$$\boxed{L = 0.2\ m}$$

انتهى الحل.....