في قسم الأشعة ستتعامل مع الأفكار التالية:

١. تذكرة وعموميات:
- تعريف الشعاع
- تعريف الشعاع الصفري
- تعريف الشعاعين المتساويين
- تعريف الشعاعين المتعاكسين

٢. العمليات على لأشعة(شعاعياً):
- مجموع شعاعين متساوين
- مجموع شعاعين متعاكسين
- مجموع شعاعين في حالة تعاقب
- مجموع شعاعين لهما نفس البداية
- طرح شعاعين

٣. تمهيد تحليلي:
- المعلم في الفراغ
- إحداثيات نقطة في الفراغ
- مركبات شعاع في الفراغ
- إيجاد مركبات شعاع

٤. العمليات على لأشعة (تحليلياً):
- جداء عدد حقيقي بشعاع
- مجموع شعاعين
- تساوي شعاعين

٥. إيجاد إحداثيات النقاط:
- إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة
- إحداثيات مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات)
- إحداثيات مركز متوازي أضلاع
- إحداثيات نقطة بمعلومية علاقة شعاعية وإحداثيات باقي النقاط
- إحداثيات النقطة التي تجعل الرباعي متوازي أضلاع
- إحداثيات نقطة نظيرة نقطة بالنسبة إلى نقطة
- إحداثيات نقطة نظيرة نقطة بالنسبة إلى المبدأ

٦. أنواع المعالم:
المعلم (المتجانس – المتعامد - الكيفي)

٧. إيجاد إحداثيات النقاط بالاعتماد على معلم متجانس في:
- المكعب
- متوازي مستطيلات أبعاده معلومة
- هرم يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة
- رباعي وجوه يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة

٨. نظيم شعاع (المسافة بين نقطتين في الفراغ):
- قانون نظيم شعاع
- قانون المسافة في الفراغ

٩. تطبيقات المسافة بين نقطتين في الفراغ:
- تحديد نوع المثلث
- انتماء نقطة إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة
- وقوع نقطة على كرة

- إحداثيات نقطة تقع على أحد المحاور الإحداثية ومتساوية البعد عن نقطتين

١٠. الارتباط الخطي لشعاعين:
- إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة "إثبات أن نقطة تقع على مستقيم"
- إثبات أنّ ثلاثة نقاط تشكل مستوي

١١. الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:
- إثبات وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد
- إثبات أن مستقيم يوازي مستوي
- إثبات تقاطع مستقيمان

١٢. مركز الأبعاد المتناسبة (لنقطتين / لثلاثة نقاط/ لأربعة نقاط):
- إيجاد إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة
- قراءة علاقة
- إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة "إثبات أن نقطة تقع على مستقيم"
- إثبات وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد
- إثبات تلاقي مستقيمات
- توضيع مركز الأبعاد المتناسبة في شكل
- تعين ثوابت

١٣. الجداء السلمي في الفراغ:
- أوجد الجداء السلمي للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{u}$
- هل $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متعامدين
- عين قيمة الوسيط α ليكون $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متعامدين
- استنتج النسبة المثلثية للشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{u}$
- أثبت أن النقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث (ABC)

١٤. معادلات المستوي:
- معادلة مستوي يوازي مستوي آخر
- معادلة مستوي يُعامد مستقيم
- معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة
- معادلة مستوي مار من نقطة ويحوي شعاعين موجهين
- معادلة مستوي مار من نقطة ويُعامد مستويان
- معادلة مستوي مار من نقطتين ويُعامد مستوي آخر
- معادلة مستوي مار من ثلاثة نقاط
- معادلة مستوي يحوي مستقيمان متقاطعان
- معادلة مستوي مماس لكرة في نقطة

١٥. تطبيقات معادلة المستوي:
- انتماء نقطة إلى مستوي
- إثبات معدلة مستوي (معطاة)
- وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد
- بعد نقطة عن مستوي في الفراغ
- البعد بين مستويين متوازيين
- كتابة معادلة مستوي مار من أربعة نقاط
- إثبات أن شعاع (معطى) ناظم على المستوي

١٦. التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ:
- التمثيل الوسيطي لمستقيم يوازي مستقيم
- التمثيل الوسيطي لمستقيم يُعامد مستوي
- التمثيل الوسيطي لمستقيم مار من نقطتين
- التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لمستويان

١٧. تطبيقات التمثيل الوسيطي:
- إثبات تمثيل وسيطي لمستقيم
- انتماء نقطة إلى مستقيم في الفراغ

١٨. الكرة:
- معادلة كرة مركزها معلوم وتمر من نقطة
- معادلة كرة قطرها $[AB]$
- معادلة كرة مركزها معلوم وتمس مستوي

١٩. معادلة المخروط:
- اكتب معادلة المخروط
- صف مجموعة النقاط التي تحقق المعادلة.
- وقوع نقطة على مخروط

٢٠. معادلة لأسطوانة:
- اكتب معادلة لأسطوانة
- صف مجموعة النقاط التي تحقق معادلة (معطاة)
- وقوع نقطة على اسطوانة.

٢١. الأوضاع النسبية:
- الوضع النسبي لمستويان في الفراغ:
  - إثبات أن مستويان متوازيان
  - إثبات أن مستويان متقاطعان
  - إثبات أن مستويان متعامدان
  - إثبات أن مستويان منطبقان
  - كيفية إيجاد الفصل المشترك لمستقيمان متقاطعان
- الوضع النسبي لمستقيمان في الفراغ:
  - إثبات أن مستقيمان متوازيان
  - إثبات أن مستقيمان منطبقان
  - إثبات أن مستقيمان متخالفان
  - إثبات أن مستقيمان متقاطعان
  - إثبات أن مستقيمان متعامدان
  - كيفية إيجاد إحداثيات نقطة تقاطع مستقيمان
  - هل المستقيمان d_1, d_2 يقعان في مستوٍ واحد؟
- الوضع النسبي بين مستقيم ومستوي في الفراغ:
  - إثبات أن مستقيم ومستوي متوازيان
  - إثبات أن مستقيم ومستوي متقاطعان
  - إثبات أن مستقيم ومستوي متعامدان بحيث ناظم المستوي معلوم
  - إثبات أن مستقيم ومستوي متعامدان بحيث ناظم المستوي غير معلوم
  - ايجاد إحداثيات نقطة تقاطع مستقيم ومستوي
  - إثبات أنّ مستقيم محتوى في مستوي.

- الوضع النسبي لثلاث مستويات في الفراغ
- الوضع النسبي لمستوي وكرة:
  - إثبات أن مستوي مماس لكرة
  - إثبات أن مستوي قاطع لكرة
  - إثبات أن مستوي خارج الكرة
  - تحديد نقطة تماس المستوي والكرة
- الوضع النسبي لمستقيم وكرة:
  - إثبات أن مستقيم مماس لكرة
  - إثبات أن مستقيم قاطع لكرة
  - إثبات أن مستقيم خارج الكرة
  - تحديد النقطة المشتركة للمستقيم والكرة

٢٢. المساقط القائمة:
- المسقط القائم لنقطة على مستوي (عشوائي/معلم)
- المسقط القائم لنقطة على مستقيم (عشوائي/معلم)

٢٣. بُعد نقطة عن مستقيم في الفراغ.

٢٤. مجموعات النقاط.

٢٥. المساحات – الحجوم.

التمرين الأول: إحداثيات النقاط:

إحداثيات النقاط:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط

$A(3,5,2)$	$B(2,-1,3)$	$D(-2,5,1)$

١. جد مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}(-1,-6,1)$$

٢. جد مركبات الشعاع $\vec{u}$ الذي يحقق العلاقة:

$$\vec{u} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{DC} \quad (*)$$

لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-6,1)$$
$$\overrightarrow{DC}(2,-7,1)$$

نعوض في العلاقة $(*)$ وفق:

$$\vec{u} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$$
$$= -2\begin{pmatrix}-1\\-6\\1\end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix}9\\-7\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2\\12\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\-\frac{35}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2+\frac{10}{3}\\12-\frac{35}{3}\\-2+\frac{5}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{16}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

٣. جد احداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

$$\left.\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{2+0}{2} = 1\\ y_I &= \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{-1-2}{2} = \frac{-3}{2}\\ z_I &= \frac{z_B+z_C}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}\end{aligned}\right\} I\left(1,\frac{-3}{2},\frac{5}{2}\right)$$

٤. جد احداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

$$x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} = \frac{3+2+0}{3} = \frac{5}{3}$$
$$y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3} = \frac{5-1-2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} = \frac{2+3+2}{3} = \frac{7}{3}$$
$$\to G\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$$

٥. جد احداثيات النقطة N التي تجعل الرباعي $ABCN$ متوازي أضلاع

ليكن $N(x,y,z)$

وليكن لدينا:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NC}$$
$$\begin{pmatrix}-1\\-6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-x\\-2-y\\2-z\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ

$$\left.\begin{aligned} -1 &= -x \Rightarrow x = 1\\ -6 &= -2-y \Rightarrow y = 4\\ 1 &= 2-z \Rightarrow z = 1\end{aligned}\right\} N(1,4,1)$$

٦. جد احداثيات النقطة K مركز متوازي الأضلاع $ABCN$

K مركز متوازي الأضلاع في نقطة تلاقي قطريه إما K منتصف $[AC]$ أو K منتصف $[NB]$:

$$\left.\begin{aligned} x_K &= \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}\\ y_K &= \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}\\ z_K &= \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{2+2}{2} = 2\end{aligned}\right\} K\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)$$

٧. جد احداثيات M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

لتكن $M(x,y,z)$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$
$$\begin{pmatrix}x-2\\y+1\\z-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-6\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-3\\-7\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x-2\\y+1\\x-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-6\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-9\\-21\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x-2\\y+1\\z-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-27\\1\end{pmatrix}$$
$$\left.\begin{aligned} x-2 &= -10 \Rightarrow x = -8\\ y+1 &= -27 \Rightarrow y = -28\\ z-3 &= 1 \Rightarrow z = -4\end{aligned}\right\} M(-8,-28,-4)$$

٨. جد احداثيات L نظيرة B بالنسبة إلى C

ليكن $L(x,y,z)$ وليكن لدينا:

$$\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{CB}$$
$$\begin{pmatrix}0-x\\-2-4\\2-z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ

$$\left.\begin{aligned} -x &= 2 \Rightarrow x = -2\\ -2-y &= 1 \Rightarrow y = -3\\ 2+z &= 1 \Rightarrow z = 1\end{aligned}\right\} L(-2,-3,1)$$

٩. جد احداثيات النقطة H نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ.

$$H(-3,-5,-2)$$

التمرين الثاني: المسافة في الفراغ:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا الأشعة: $\vec{u}(3,-1,\sqrt{6})$ و $\vec{v} = \sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{6}\vec{j} - \vec{k}$ والنقاط:

$B(2,2,3)$	$A(1,0,-1)$
$D(1,1,2)$	$C(3,1,-2)$
$F(2,0,-1)$	$E(3,1,-4)$
$H(1,0,1)$	$G(2,1,-1)$
$L(0,1,3)$	

١. جد نظيم كل من الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (\sqrt{6})^2}$$
$$= \sqrt{9+1+6} = \sqrt{16} = 4$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{2+6+1} = \sqrt{9} = 3$$

٢. جد كلاً من المسافتين AB و GE :

$$\overrightarrow{AB}(1,2,4) \Rightarrow AB = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$
$$\overrightarrow{GE}(1,0,-3) \Rightarrow GE = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$$

٣. حدد نوع المثلث ABC

لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(1,2,4) \Rightarrow AB = \sqrt{21}$$
$$\overrightarrow{AC}(2,1,-1) \Rightarrow AC = \sqrt{6}$$
$$\overrightarrow{BC}(1,-1,-5) \Rightarrow BC = \sqrt{27}$$

ومنه المثلث ABC مختلف الأضلاع نختبر كونه قائماً وفق:

$$(BC)^2=(AB)^2+(AC)^2$$
$$27=21+6$$
$$27=27$$

محققة , ومنه المثلث ABC مختلف الأضلاع وقائم في A ووتره $[BC]$

٤. هل النقطة G تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[DE]$ ؟

لدينا:

$$\overrightarrow{GD}(-1,0,3)\Rightarrow GD=\sqrt{10}$$
$$\overrightarrow{GE}(1,0,-3)\Rightarrow GE=\sqrt{10}$$

بما أن $GD=GE$ فإنّ النقطة G تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[DE]$

٥. هل النقطة A تنتمي إلى الكرة التي مركزها F ونصف قطرها $R=1$؟

لدينا:

$$\overrightarrow{AF}(1,0,0)\Rightarrow AF=1$$

وبما أنّ $AF=R$ فإنّ النقطة A تنتمي إلى الكرة التي مركزها F ونصف قطرها $R=1$

٦. حد نقطة M على محور الرواقم متساوية البعد عن L و H

لتكن $M(0,y,0)$ تنتمي إلى محور الرواقم وبما أنّ M متساوية البعد عن L و H فإنه يتحقق:

$$(ML)^2=(MH)^2$$
$$(0)^2+(1-y)^2+(3)^2=(1)^2+(0-y)^2+(1)^2$$
$$(1-y)^2+9=y^2+2$$
$$1-2y+y^2+9=y^2+2$$
$$2y=8\to y=4$$

ومنه:

$$M(0,4,0)$$

التمرين الثالث:

نتأمل في معلم متجانس النقاط:

$A(1,1,1)$	$B(0,2,1)$
$C(2,1,2)$	$D(2,3,4)$

١. أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)\ ,\ \overrightarrow{AC}(1,0,1)$$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً ومنه النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

٢. عين الأعداد الحقيقة α و β اللذين يحققان:

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

واستنتج أن النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

تعيين α و β :

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\0\\\beta\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha+\beta\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}1=-\alpha+\beta\ \dots(1)\\ 2=\alpha\ \ \dots(2)\\ 3=\beta\ \ \dots(3)\end{cases}$$

من (2) نجد: $\alpha=2$

من (3) نجد: $\beta=3$

نعوض في (1) فنجد:

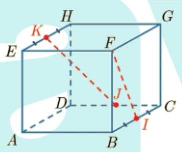
$$1=-2+3$$

$1=1\to$ محققة

ومنه يوجد $\alpha=2$ و $\beta=3$ تحقق العلاقة

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

ومنه: النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.



التمرين الرابع:

مكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه I , فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منتصف $[EH]$ نتأمل $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

١. أعط تمثيلاً وسيطياً لكل من (IK) و (FJ)

٢. أيتقاطع المستقيمان (IK) و (FJ) ؟
هل النقاط I و J و K و F في مستوٍ واحد؟

٣. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d' وبين إذا كان المستقيمان d و d' متوازيان أو كان d منطبقاً على d حيث:

$$d:\begin{cases}x=2t-1\\ y=2\\ z=t+1\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$$
$$d':\begin{cases}x+y-2z=3\\ x-y-2z=5\end{cases}$$

الحل:

الطلب الأول:

$E(0,0,1)$	$A(0,0,0)$
$F(1,0,1)$	$B(1,0,0)$
$H(0,1,1)$	$D(0,1,0)$
$G(1,1,1)$	$C(1,1,0)$
$J\left(\frac12,1,0\right)$	$I\left(1,\frac12,0\right)$
$K\left(0,\frac12,1\right)$	

كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (IK) :

$$\vec{u}=\overrightarrow{IK}\Rightarrow\vec{u}(-1,0,1)$$
$$(IK)\begin{cases}x=-t+1\\ y=\dfrac12\\ z=t\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$$

كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (FJ) :

$$\vec{u}=\overrightarrow{FJ}\to\vec{u}\left(-\frac12,1,-1\right)$$
$$(FJ)\begin{cases}x=-\dfrac12 s+1\\ y=s\\ z=-s+1\end{cases}\ ;s\in\mathbb{R}$$

الطلب الثاني:

نلاحظ أن $\overrightarrow{IK}$ و $\overrightarrow{FJ}$ غير مرتبطاً خطياً وبالتالي المستقيمان (IK) و (FJ) إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

$$\begin{cases}-t+1=-\dfrac12 s+1\dots(1)\\ \dfrac12=s\dots(2)\\ t=-s+1\dots(3)\end{cases}$$

من (2) و (3) :

$$\frac12=s\quad\dots(2)$$
$$t=-s+1\quad\dots(3)$$

من (2) نجد أنّ:

$$s=\frac12$$

نعوض في (3):

$$t=-\frac12+1\Rightarrow t=\frac12$$

نتحقق في (1):

$$-\frac12+1=-\frac12\left(\frac12\right)+1$$
$$\frac12\neq\frac34$$

وهذا غير ممكن إذاً الجملة مستحيلة الحل. والمستقيمان (IK) و (FJ) لا يشتركان بأية نقطة فهما متخالفان وبالتالي (IK) و (FJ) لا يقعان في مستوٍ واحد وبالتالي النقاط I و K و F و J لا تقع في مستوٍ واحد.

الطلب الثالث:

التمثيل الوسطي لـ d'

$$\begin{cases}x+y-2z=3\ \dots(1)\\ x-y-2z=5\ \dots(2)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$2x-4z=8$$
$$2x=4z+8$$

$x = 2z + 4$

نعوض قيمة x في (1) وفق:

$$2z + 4 + y - 2z = 3$$
$$y = -1$$

بفرض $z = s$ نجد أنّ:

$$x = 2S + 4 \quad , \quad y = -1$$

ومنهُ:

$$d' : \begin{cases} x = 2s + 4 \\ y = -1 \\ z = s \end{cases} \quad ; s \in \mathbb{R}$$

إثبات توازي أو انطباق المستقيمان d و d'

لدينا:

$$\begin{cases} 2t - 1 = 2S + 4 \dots (1) \\ 2 = -1 \quad \dots (2) \\ t + 1 = S \quad \dots (3) \end{cases}$$

من (2) نجد أن المعادلة غير محققة أي أنه ليس للجملة حل وبالتالي المستقيمان d و d' لا يشتركان بأية نقطة فهما متوازيان.

التمرين الخامس: معادلات المستوي:

اكتب معادلة المستوي في كل حالة من الحالات الآتية:

1. P مار من $A(1,0,5)$ ويقبل $\vec{n}(1,-1,0)$ ناظماً له.

$$P: a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$
$$(1)(x - 1) + (-1)(y - 0) + (0)(z - 5) = 0$$
$$x - 1 - y = 0$$
$$P: x - y - 1 = 0$$

2. P مار من $A(-1,2,-3)$ ويوازي المستوي Q الذي معادلته: $Q: 5x - 3y + 4z = 8$

تحديد النقطة: $A(-1,2,-3)$

تحديد الناظم:

لدينا المستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(5,-3,4)$

وبما أن المستويان Q, P متوازيان فإن:

$$\vec{n}_P = \vec{n}_Q$$

أي: $\vec{n}_P(5,-3,4)$

كتابة معادلة المستوي:

$$P: a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$
$$5(x + 1) - 3(y - 2) + 4(z + 3) = 0$$
$$5x + 5 - 3y + 6 + 4z + 12 = 0$$
$$P: 5x - 3y + 4z + 23 = 0$$

3. P مار من $A(3,-1,5)$ ويعامد من المستقيم d الذي شعاع توجيهه $\vec{u}(-1,2,1)$

تحديد النقطة: $A(3,-1,5)$

تحديد الناظم:

لدينا المستقيم d والمستوي P متعامدان فإن: $\overrightarrow{n_P} = \vec{u}$ أيّ أنّ: $\vec{n}_P(-1,2,1)$

ومنه المعادلة:

$$P: (-1)(x - 3) + (2)(y + 1) + (1)(z - 5) = 0$$
$$-x + 3 + 2y + 2 + z - 5 = 0$$
$$P: -x + 2y + z = 0$$

4. P المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(2,-2,3)$ و $B(1,0,1)$

تحديد النقطة:

بما أن P هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فإن النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ تنتمي إلى المستوي P حيث:

$$I\left(\frac{3}{2}, -1, 2\right)$$

تحديد الناظم:

بما أن المستوي P هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فإنّ: $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{AB}$ أيّ أنّ:

$$\overrightarrow{n_P}(-1,2,-2)$$

كتابة معادلة المستوي:

$$P: (-1)\left(x - \frac{3}{2}\right) + (2)(y + 1) + (-2)(z - 2) = 0$$
$$-x + \frac{3}{2} + 2y + 2 - 2z + 4 = 0$$
$$P: -x + 2y - 2z + \frac{15}{2} = 0$$

5. P مار بالنقطة $A(2,-3,1)$ ويقبل كلاً من $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(2,-1,-1)$ شعاعي توجيه لـ P

الحل:

تحديد النقطة:

$$A(2,-3,1)$$

تحديد الناظم:

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ وبما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين موجهين للمستوي P فإنّ $\overrightarrow{n_P}$ يكون عمودي على كلاً من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أيّ:

$$\overrightarrow{n_P}.\vec{u} = 0$$
$$(a)(1) + (b)(1) + (c)(-2) = 0$$
$$a + b - 2c = 0 \quad \dots.(1)$$

$$\overrightarrow{n_P}.\vec{v} = 0$$
$$(a)(3) + (b)(-1) + (c)(-1) = 0$$
$$3a - b - c = 0 \quad \dots(2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$a + b - 2c = 0 \dots (1)$$
$$3a - b - c = 0 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$4a - 3c = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}c \dots (*)$$

نعوض في (1) :

$$\frac{3}{4}c + b - 2c = 0$$
$$b - \frac{5}{4}c = 0 \Rightarrow b = \frac{5}{4}c \dots (**)$$

لتكن $c = 4$ نعوض في $(*)$ و $(**)$ فنجد:

$$a = 3 \ , \ b = 5$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{n_P}(3,5,4)$$

كتابة معادلة المستوي:

$$P: (3)(x - 2) + (5)(y + 3) + (4)(z - 1) = 0$$
$$3x - 6 + 5y + 15 + 4z - 4 = 0$$
$$P: 3x + 5y + 4z + 5 = 0$$

6. P مار من $A(0,1,-2)$ وعمودي على كل من المستويان Q و R حيث:

$$Q: x + 2x + 2y - z + 3 = 0$$
$$R: 2x - y + z - 1 = 0$$

تحديد النقطة: $A(0,1,-2)$

تحديد الناظم:

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$

بما أن المستويان P و Q متعامدان فإنّ: $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}(1,2,-1)$ متعامدان أيّ أنّ:

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0$$
$$a + 2b - c = 0 \dots (1)$$

بما أن المستويان P و R متعامدان فإن $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_R}(2,-1,1)$ متعامدان أيّ أنّ:

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R} = 0$$
$$2a - b + c = 0 \dots (2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$a + 2b - c = 0 \dots (1)$$
$$2a - b + c = 0 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$3a + b = 0$$
$$b = -3a \dots (*)$$

نعوض في (1) :

$$a - 6a - c = 0$$
$$-5a - c = 0$$
$$c = -5a \dots (**)$$

بفرض $a = -1$ نعوض في $(*)$ و $(**)$:

$$\Rightarrow b = 3 \ , \ c = 5$$
$$\overrightarrow{n_P}(-1,3,5)$$

كتابة معادلة المستوي:

$$P: (-1)(x - 0) + (3)(y - 1) + (5)(z + 2) = 0$$
$$P: -x + 3y - 3 + 5z + 10 = 0$$
$$P: -x + 3y + 5z + 7 = 0$$

٧. P مار من $A(2,3,-1)$ و $B(1,1,1)$
وعمودي على المستوى Q حيث:
$$Q: 2x + z - 4 = 0$$
تحديد النقطة: $B(1,1,1)$
تحديد الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$
بما أنّ النقطتان A و B من المستوى P فإنّ
$\vec{n}_P$ و $\overrightarrow{AB}(-1,-2,2)$ متعامدان أيّ أنّ:
$$\vec{n}_p.\overrightarrow{AB} = 0$$
$$-a - 2b + 2c = 0 \ldots (1)$$
بما أن المستويان P و Q متعامدان فهذا
يعني أن $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ متعامدان أيّ أنّ:
$$\vec{n}_P.\vec{n}_Q = 0$$
$$2a + c = 0 \ldots (2)$$
لدينا جملة المعادلتين:
$$-a - 2b + 2c = 0 \ldots (1)$$
$$2a + c = 0 \ldots (2)$$
نضرب المعادلة (1) بالعدد (2) :
$$-2a - 4b + 4c = 0 \ldots (1)'$$
$$2a + c = 0 \ \ldots (2)$$
بجمع $(1)'$ و (2) نجد:
$$-4b + 5c = 0 \to b = \frac{5}{4}c \ldots (*)$$
نعوض في (1) :
$$-a - \frac{5}{2}c + 2c = 0$$
$$-a - \frac{1}{2}c = 0 \to a = -\frac{1}{2}c \ldots (**)$$
بفرض $c = 4$ نعوض في $(*)$ و $(**)$:
$$a = -2 \ , \ b = 5$$
$$\Rightarrow \vec{n}_P(-2,5,4)$$
كتابة معادلة المستوى P:
$$P: (-2)(x-1) + (5)(y-1) + (4)(z-1) = 0$$
$$-2x + 2 + 5y + 4z - 4 = 0$$
$$P: -2x + 5y + 4z - 7 = 0$$

٨. P مار من: $A(-1,1,0)$ و $B(0,1,0)$
و $C(-1,-2-3)$
الخطوة الأولى:
إثبات أن النقاط A و B و C تعين مستوي:
$$\overrightarrow{AB}(1,0,0) \ , \ \overrightarrow{AC}(0,-3,-3)$$
نلاحظ أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً إذاً
النقاط A و B و C تعيين مستوي.

الخطوة الثانية:
كتابة معادلة المستوي (ABC)
تحديد النقطة $A(-1,1,0)$
تحديد الناظم:
ليكن $\vec{n}(a,b,c)$

بما أن النقاط A و B و C هي نقاط من
المستوي P فإنّ: $\vec{n}_P$ عمودي على كل من
$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ومنهُ:
$$\vec{n}_P.\overrightarrow{AB} = 0$$
$$a = 0 \ldots (1)$$
$$\vec{n}_P.\overrightarrow{AC} = 0$$
$$-3b - 3c = 0 \ldots (2)$$
لدينا جملة المعادلتين:
$$a = 0 \ldots (1)$$
$$-3b - 3c = 0 \ldots (2)$$
من (1) نجد: $a = 0$
لدينا من (2) :
$$-3b = 3c \to b = -c \ldots (*)$$
بفرض $c = -1$ نعوض في $(*)$:
$$b = 1$$
$$\Rightarrow \vec{n}_P(0,1,-1)$$
كتابة معادلة المستوي:
$$P: (0)(x+1) + (1)(y-1) + (-1)(z-0) = 0$$
$$P: y - 1 - z = 0$$
$$P: y - z - 1 = 0$$

P المحدد بالمستقيمان d_1 و d_2 المعرفين
وسيطياً وفق:
$$d_1: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 2 \end{cases}$$
$$d_2: \begin{cases} x = 3s + 2 \\ y = -s - 1 \ ; s \in \mathbb{R} \\ z = s + 1 \end{cases}$$
يتقاطعان في النقطة $A(2,1,1)$
تحديد النقطة:
هي نقطة التقاطع $A(2,1,1)$
تحديد الناظم: ليكن $\vec{n}_P(a,b,c)$
بما أن المستوي P محدد بالمستقيمان
d_1 الذي شعاع توجيهه $\vec{u_1}(1,2,-1)$
و d_2 الذي شعاع توجيهه $\vec{u_2}(3,-1,1)$
فإنّ $\vec{n}_P$ عمودي على كل من $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ أيّ أنّ:
$$\vec{n}_P.\vec{u}_1 = 0$$
$$a + 2b - c = 0 \ \ldots (1)$$
$$\vec{n}_P.\vec{u}_2 = 0$$
$$3a - b + c = 0 \ \ldots (2)$$
لدينا جملة معادلتين (1) و (2) :
$$a + 2b - c = 0 \ \ldots (1)$$
$$3a - b + c = 0 \ \ldots (2)$$
بجمع (1) و (2) :
$$4a + b = 0$$
$$b = -4a \ldots (*)$$

نعوض في (2) نجد:
$$3a + 4a + c = 0$$
$$7a + c = 0$$
$$c = -7a \ldots (**)$$
بفرض: $a = -1$ نعوض في $(*)$ و $(**)$:
$$b = 4 \ , \ c = 7$$
$$\Rightarrow \vec{n}_P(-1,4,7)$$
كتابة معادلة المستوي:
$$P: (-1)(x-2) + (4)(y-1) + (7)(z-1) = 0$$
$$P: -x + 24y - 4 + 7z - 7 = 0$$
$$P: -x + 4y + 7z - 9 = 0$$

٩. P المستوي المماس للكرة S التي معادلتها
$$S: x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$$
في النقطة $A(-1,1,0)$:
تحديد النقطة: $A(-1,1,0)$
تحديد الناظم:
بما أنّ P هو المستوي المماس للكرة S
فهذا يعني أن $\vec{n}_P = \overrightarrow{\Omega A}$
حيث:
مركز الكرة: $\Omega(0,2,1)$
النقطة: $A(-1,1,-1)$
إذاً: $\overrightarrow{\Omega A}(-1,-1,-1)$
ومنهُ: $\vec{n}_P(-1,-1,-1)$
كتابة معادلة المستوي:
$$P: (-1)(x+1) + (-1)(y-1) + (-1)(z-0) = 0$$
$$P: -x - 1 - y + 1 - z = 0$$
$$P: -x - y - z = 0$$

التمرين السادس:
أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) الذي
يمر بالنقطة $A(-1,2,0)$ ويقبل
$\vec{u}(0,1,-1)$ شعاعاً موجهاً
$$d: \begin{cases} x = -1 \\ y = t + 2 \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$$

التمرين السابع:
اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)
المار من النقطة $B(1,0,-1)$ والموازي
للمستقيم (d) الذي يقبل $\vec{u}(2,3,-1)$
شعاعاً موجهاً له.
تحديد النقطة: $B(1,0,-1)$
تحديد شعاع التوجيه: بما أنّ المستقيم (d)
و (Δ) متوازيان فإنّ: $\vec{u}_d = \vec{u}_\Delta$
ومنهُ: $\vec{u}_\Delta(2,3,-1)$
كتابة التمثيل الوسيطي:
$$(\Delta): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \ \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = -t - 1 \end{cases}$$

التمرين الثامن:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة $A(-1,3,2)$ عمودياً على المستوي P المعطى بالعلاقة:

$$P: 2x - y + z + 1 = 0$$

تحديد النقطة: $A(-1,3,2)$

تحديد شعاع التوجيه:

بما أن المستقيم d والمستوي P متعامدان فإن: $\vec{u}_d = \vec{n}_P \Rightarrow \vec{u}_d(2,-1,1)$

كتابة التمثيل الوسيطي:

$$d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 3 \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = t + 2 \end{cases}$$

التمرين التاسع:

أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطتين $A(2,1,3)$ و $B(-2,0,1)$

تحديد النقطة: $A(2,1,4)$

تحديد شعاع التوجيه:

بما أن المستقيم d مار من A و B فإنّ:

$$\vec{u}_d = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{u}_d(-4,-1,-2)$$

$$d: \begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = -t + 1 \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = -2t + 3 \end{cases}$$

التمرين العاشر:

ليكن لدينا المستويان Q و P حيث:

$$P: 2x - y + z - 4 = 0$$
$$Q: x + y + 2z - 5 = 0$$

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الذي يمثل الفصل المشترك للمستقيمان Q و P

لدينا:

$$\begin{cases} P: 2x - y + z - 4 = 0 \dots (1) \\ Q: x + y + 2z - 5 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$3x + 3z - 9 = 0$$
$$3z = -3z + 9$$
$$x = -z + 3 \dots (*)$$

نعوض في (2) وفق:

$$-z + 3 + y + 2z - 5 = 0$$
$$y + z - 2 = 0$$
$$y = -z + 2 \dots (**)$$

لتكن $z = t$ نعوض في $(*)$ و$(**)$

$x = -t + 3$ و $y = -t + 2$

تكون المعادلة:

$$d: \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = -t + 2 \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

التمرين الحادي عشر:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ اكتب معادلة الكرة في كل حالة من الحالات الآتية:

1. كرة مركزها $\Omega(1,2,3)$ ونصف قطرها $r = 2$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$$

2. كرة مركزها $\Omega(1,2,3)$ وتمر بالنقطة $A(1,-2,3)$

تحديد المركز: $\Omega(0,5,-1)$

تحديد نصف القطر:

$$R = \Omega A = \sqrt{(1)^2 + (-7)^2 + (4)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 49 + 16} = \sqrt{66}$$

كتابة معادلة الكرة:

$$(x - 0)^2 + (y - 5)^2 + (z + 1)^2 = (\sqrt{66})^2$$
$$x^2 + (y - 0)^2 + (z + 1)^2 = 66$$

3. كرة قطرها $[AB]$ حيث:

$$A(1,2,-2) \quad , \quad B(0,-1,1)$$

تحديد المركز: Ω منتصف $[AB]$

$$\omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

تحديد نصف القطر:

$$\overrightarrow{\Omega A}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$$

$$R = \Omega A = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1} = \sqrt{\frac{10}{4} + 1}$$
$$= \sqrt{\frac{14}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

كتابة معادلة الكرة:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z - 0)^2 = \frac{14}{4}$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{14}{4}$$

4. كرة مركزها $A(1,1,2)$ وتمس المستوي P حيث: $P: 2x + y + z + 1 = 0$

تحديد المركز: $A(1,1,2)$

تحديد نصف القطر:

بما أن الكرة تمس المستوي P

$$R = dis\,(A, P) = \frac{|(2)(1) + (1)(1) + (1)(2) + 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}}$$
$$= \frac{|2 + 1 + 2 + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{|6|}{\sqrt{6}}$$
$$= \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

كتابة معادلة الكرة:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = (\sqrt{6})^2$$
$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$$

التمرين الثاني عشر:

اكتب معادلة الأسطوانة في كل حالة من الحالات الآتية:

1. أسطوانة محورها $(o, \vec{i})$ ومركزي قاعدتها $A(3,0,0)$ و $B(4,0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = r^2 \\ x_A \le x \le x_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 2 \\ 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

2. أسطوانة محورها $(o, \vec{j})$ ومركزي قاعدتها $A(0,6,0)$ و $B(0,3,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ y_B \le y \le y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = 6 \\ 3 \le x \le 6 \end{cases}$$

3. أسطوانة محورها $(o, \vec{k})$ ومركزي قاعدتها $A(0,0,5)$ و $B(0,0,3)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ z_B \le z \le z_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + y^2 = 6 \\ 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

التمرين الثالث عشر:

اكتب معادلة المخروط في كل حالة من الحالات الآتية:

1. مخروط محوره $(o, \vec{i})$ ورأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $A(3,0,0)$ ونصف قطرها 2

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = \dfrac{r^2}{(x_A)^2} x^2 \\ 0 \le x \le x_A \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = \dfrac{4}{9} x^2 \\ 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

2. مخروط محوره $(o, \vec{j})$ ورأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $A(0,2,0)$ ونصف قطرها 4

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = \dfrac{r^2}{(y_A)^2} y^2 \\ 0 \le y \le y_A \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = \dfrac{16}{4} y^2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

٣. مخروط محوره $(o,\vec{k})$ ورأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $A(0,0,3)$ ونصف قطرها 5

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{r^2}{(z_A)^2}z^2 \\ 0\le z\le z_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{25}{9}z^2 \\ 0\le z\le 3 \end{cases}$$

التمرين الرابع عشر:

في كل حالة من الحالات الآتية صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي احداثيتها تحقق العلاقة الآتية:

$$(1)\quad \begin{cases} x^2+z^2=9 \\ 3\le y<5 \end{cases}$$

معادلة أسطوانة محورها $(o,\vec{\imath})$ ونصف قطرها $r=3$ ومركزي قاعدتيها $A(0,3,0)$ و $B(0,5,0)$

$$(2)\quad \begin{cases} x^2+z^2=9 \\ 1\le z<7 \end{cases}$$

معادلة أسطوانة محورها $(o,\vec{k})$ ونصف قطرها $r=3$ ومركزي قاعدتيها $A(0,0,1)$ و $B(0,0,7)$

$$(3)\quad \begin{cases} y^2+z^2=25 \\ 4\le x<8 \end{cases}$$

معادلة أسطوانة محورها $(o,\vec{\imath})$ ونصف قطرها $r=5$ ومركزي قاعدتيها $A(4,0,0)$ و $B(8,0,0)$

$$(4)\quad \begin{cases} y^2+z^2=36x^2 \\ 0\le x<1 \end{cases}$$

معادلة مخروط محورها $(o,\vec{\imath})$ ورأسه o ومركز قاعدته $(1,0,0)$ ونصف قطرها $r=6$

$$(5)\quad \begin{cases} x^2+z^2=\dfrac{5}{3}y^2 \\ 0\le y<\sqrt{3} \end{cases}$$

معادلة مخروط محورها $(o,\vec{\jmath})$ ورأسه المبدأ o ومركز قاعدته $(0,\sqrt{3},0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{5}$

$$(6)\quad \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{16}{25}z^2 \\ 0\le z<5 \end{cases}$$

معادلة مخروط محورها $(o,\vec{k})$ ورأسه o ومركز قاعدته $(0,0,5)$ ونصف قطرها $r=4$

التمرين الخامس عشر: لدينا معادلة الأسطوانة:

$$\begin{cases} y^2+z^2=4 \\ 1\le x\le 2 \end{cases}$$

ولدينا النقاط $A(1,2,0)$ و $B(0,1,2)$ و $C\left(\frac{3}{2},0,-2\right)$ هل النقاط A و B و C تقع على الأسطوانة؟

الحل:

اختبار النقطة A:

$$(2)^2+(0)^2=4$$
$$4=4$$

محققة إذا النقطة A تقع على الأسطوانة.

اختبار النقطة B:

$$(1)^2+(2)^2=4$$
$$1+4=4$$
$$5\neq 4$$

غير محققة إذا النقطة B لا تقع على الأسطوانة

اختبار النقطة C

$$(0)^2+(-2)^2=4$$
$$4=4$$

محققة إذاً النقطة C تقع على الأسطوانة

التمرين السادس عشر:

لدينا معادلة المخروط

$$\begin{cases} y^2+z^2=\dfrac{6}{4}x^2 \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$$

ولدينا النقاط $D\left(2,1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $C(10,0,0)$ و $B\left(1,0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

هل النقاط C و B و D تقع على المخروط؟

اختبار النقطة D:

$$(1)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{6}{4}(2)^2$$
$$1+\frac{1}{2}=6\rightarrow\frac{3}{2}\neq 6$$

غير محققة ومنهُ D لا تقع على المخروط

اختبار النقطة C:

$$(0)^2+(0)=\frac{6}{4}(10)^2$$
$$0\neq 150$$

غير محققة ومنهُ C لا تقع على المخروط.

اختبار النقطة B:

$$(0)^2+\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{6}{4}(1)^2$$
$$\frac{6}{4}=\frac{6}{4}$$

محققة إذا B تقع على المخروط.

التمرين السابع عشر:

ليكن لدينا المستويين:

$$P: 2x+y-z=3$$
$$Q: 4x+2y-2z=1$$

١. أثبت أن المستويين P و Q متوازيين

٢. احسب البعد بين المستويين P و Q

الحل:

الطلب الأول:

المستوي P ناظمه $\vec{n}_p(2,1,-1)$

المستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(4,2,-2)$

نلاحظ أن $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان P و Q متوازيان.

الطلب الثاني:

نأخذ نقطة اختيارية تنتمي للمستوي P ولتكن النقطة A تنتمي للمستوي P حيث $x_A=0$ و $y_A=1$ نعوض في معادلة المستوي P لحساب z_A وفق:

$$2(0)+1-z=3$$
$$1-z=3$$
$$z_A=-2$$

ومنه: $A(0,1,-2)$

لحساب البعد بين المستويين P و Q :

لدينا $A(0,1,-2)$ نقطة تنتمي إلى المستوي P ومنه لحساب البعد بين P و Q نطبق القانون

$$dist\,(A,Q)=\frac{|4(0)+2(1)-2(-2)-1|}{\sqrt{16+4+4}}$$
$$=\frac{|0+2+4-1|}{\sqrt{24}}$$
$$=\frac{|5|}{\sqrt{24}}=\frac{5}{\sqrt{24}}$$

التمرين الثامن عشر:

نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط الآتية

$$A(2,1,0),B(1,2,2),C(3,3,1),D(1,1,4)$$

١. تحقق أن النقاط A و B و C تعين مستوياً أوجد معادلته

٢. أثبت أن المثلث ABC متساوي الأضلاع احسب مساحته

٣. عين تمثيلاً وسيطاً للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) ويمر بالنقطة D

٤. a) أوجد إحداثيات E المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC)

b) استنتج بعد النقطة D عن المستوي (ABC)

٥. احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

٦. عين الأعداد الحقيقة α و β و γ لتكون E مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

اكتب عادلة الكرة التي مركزها D وتمس المستوي (ABC)

الحل:

الطلب الأول: لدينا الشعاعين:

$$\overrightarrow{AC}(1,2,1)\quad,\quad \overrightarrow{AB}(-1,1,2)$$

نلاحظ أنهما غير مرتبطين خطياً لأن المركبات غير مناسبة ومنه النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة ومنه فهي تعين مستوي (ABC)

كتابة معادلة المستوي (ABC):

تحديد الناظم:

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$

وبما أن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ من المستوي فإن الناظم $\vec{n}$ عمودي على كل منهما ومنه يتحقق:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -a+b+2c=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow a+2b+c=0$$

$$\begin{cases}-a+b+2c=0\ ...(1)\\ a+2b+c=0\ ...(2)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$3b+3c=0$$

$$3b=-3c \rightarrow b=-c\ ...(*)$$

نعوض في (1) :

$$-a-c+2c=0$$

$$a=c\ ...(2)$$

بفرض $c=1$ نعوض في $(*)$ و $(**)$:

$$a=1\quad,\quad b=-1$$

أيّ أنّ: $\vec{n}(1,-1,1)$

تحديد النقطة: $A(2,1,0)$

تحديد المعادلة:

$$(ABC): 1(x-2)-1(y-1)+1(z-0)=0$$

$$(ABC): x-2-y+1+z=0$$

$$(ABC): x-y+z-1=0$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ (ABC) متساوي الأضلاع:

لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(-1,1,2) \Rightarrow AB=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{AC}(1,2,1) \Rightarrow AC=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{BC}(2,1,-1) \Rightarrow BC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

ومنه المثلث (ABC) متساوي الأضلاع

مساحة المثلث (ABC) متساوي الأضلاع

$$S_{(ABC)}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

حيث a يمثل طول الضلع أيّ:

$$a=\sqrt{6}$$

$$S_{(ABC)}=\frac{(\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4}=\frac{6\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

الطلب الثالث:

التمثيل الوسيطي Δ :

تحديد شعاع التوجيه:

بما أنّ Δ عمودي على (ABC) فإن:

$$\vec{u}_{\Delta}=\vec{n}_{(ABC)}(1,-1,1)$$

تحديد النقطة $D(1,1,4)$

التمثيل الوسطي Δ

$$\Delta: \begin{cases}x=t+1\\ y=-t+1\ ; t\in\mathbb{R}\\ z=t+4\end{cases}$$

الطلب الرابع:

a) إيجاد إحداثيات النقطة E :

كتابة معادلة المستوي (ABC) :

$$(ABC): x-y+z-1=0$$

كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ المار من D والعمودي على (ABC)

$$\Delta: \begin{cases}x=t+1\\ y=-t+1\ ; t\in\mathbb{R}\\ z=t+4\end{cases}$$

إنّ احداثيات النقطة E هي نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (ABC) أيّ:

$$\begin{cases}x-y+z-1=0 & ...(1)\\ x=t+1 & ...(2)\\ y=-t+1 & ...(3)\\ z=t+4 & ...(4)\end{cases}$$

نعوض كلاً من (2) و (3) و (4) في (1) :

$$t+1+t-1+t+4-1=0$$

$$3t+3=0$$

$$3t=-3$$

$$t=-1$$

نعوض قيمة t في كل من (2) و (3) و (4) :

$$x=0\quad,\quad y=2\quad,\quad z=3$$

$$E(0,2,3)$$

b)

$$dist\left(D,(ABC)\right)=\frac{|1-1+4-1|}{\sqrt{1+1+1}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

الطلب الخامس:

$$\text{حجم الهرم}=\frac{1}{3}(\text{مساحة القاعدة})(\text{الارتفاع})$$

$$V_{(ABC)}=\frac{1}{3}S_{(ABC)}.h$$

حيث:

$$S_{(ABC)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$h=dist\left(D,(ABC)\right)=\sqrt{3}$$

ومنه:

$$V_{(ABC\,D)}=\frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\frac{3}{2}$$

الطلب السادس:

بما أنّ النقطة E نقطة من المستوي (ABC)فإن النقاط A و B و C و E تقع في مستو واحد

ولدينا:

$$\overrightarrow{EA}(2,-1,-3)\quad,\quad \overrightarrow{EB}(1,0,-1)$$

$$\overrightarrow{EC}(3,1,-2)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EC}$ غير مرتبطين خطياً

ومنه يوجد عددين a و b يحققان:

$$\overrightarrow{EA}=a\overrightarrow{EB}+b\overrightarrow{EC}$$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\begin{cases}2=a+3b\ ...(1)\\ -1=b\ ...(2)\\ -3=-a-2b\ ...(3)\end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases}2=a+3b\ ...(1)\\ -1=b\ \ ...(2)\end{cases}$$

من (2) نجد: $b=-1$

نعوض في (1) فنجد:

$$2=a-3 \Rightarrow a=5$$

نتحقق في (3) :

$$-3=-5+2$$

$$-3=-3$$

محققة ومنه للجملة حل وحيد

$$b=-1\ ,\ a=5$$

ويتحقق:

$$\overrightarrow{EA}=5\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EC}$$

ومنه:

$$\overrightarrow{EA}-5\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$$

وبالتالي E مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(C,1),(B,-5),(A,1)$

الطلب السابع:

تحديد المركز: $D(1,1,4)$

تحديد نصف القطر:

بما أن الكرة تمس المستوي (ABC) فإن:

$$R = dist(D,(ABC)) = \sqrt{3}$$

المعادلة

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 3$$

التمرين التاسع عشر:

تأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$C(1,1,3)$ و $B(0,-2,2)$ و $A(2,2,0)$

1. اكتب معادلة المستوي P الذي يعامد المستقيم (BC) ويمر بالنقطة A
2. اكتب معادلة المستوي Q المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$
3. أثبت أن المستويين Q,P متقاطعان واكتب المعادلة الوسيطية للمستقيم (Δ) الفصل المشترك لتقاطع المستويين.
4. أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالشكل $5x-2y+z=6$
5. عين احداثيات G نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي (ABC)
6. أثبت أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,1),(C,-12)$
7. عين مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}-12\overrightarrow{MC}\right\| = 10\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$

الحل:

الطلب الأول: معادلة المستوي P

تحديد الناظم:

بما أن المستوي P يعامد المستقيم (BC)

فإن: $\vec{n}_P = \overrightarrow{BC}(1,3,1)$

تحديد النقطة $A(2,2,0)$

المعادلة:

$$P: (x-2) + 3(y-2) + 1(z-0) = 0$$
$$P: x - 2 + 3y - 6 + z = 0$$
$$P: x + 3y + z - 8 = 0$$

الطلب الثاني: معادلة المستوي Q

تحديد الناظم:

بما أنّ Q هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة$[AB]$ فإن

$$\vec{n}_Q = \overrightarrow{AB}(-2,-4,2)$$

تحديد النقطة:

بما أنّ Q هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ فإن النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ تنتمي إلى المستوي Q ومنه: $I(1,0,1)$

المعادلة:

$$Q: -2(x-1) - 4(y-0) + 2(z-1) = 0$$
$$Q: -2x + 2 - 4y + 2z - 2 = 0$$
$$Q: -2x - 4y + 2z = 0$$
$$Q: x + 2y - z = 0$$

الطلب الثالث:

لدينا:

المستوي P ناظمه: $\vec{n}_P(1,3,1)$

المستوي Q ناظمه: $\vec{n}_Q(-2,-4,2)$

نلاحظ أن المركبات غير متناسبة ومنه فإن $\vec{n}_Q,\vec{n}_P$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان Q,P يتقاطعان بفصل مشترك Δ

كتابة الفصل المشترك Δ

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} x + 3y + z - 8 = 0 \dots (1) \\ x + 2y - z = 0 \dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$5x + 5y - 8 = 0$$
$$2x = -5y + 8$$
$$x = -\frac{5}{2}y + 4 \dots (*)$$

نعوض في (1)

$$-\frac{5}{2}y + 4 + 3y + z - 8 = 0$$
$$z = -\frac{1}{2}y + 4 \dots (**)$$

بفرض $y = 2t$ نعوض في $(*)$ و $(**)$:

$$x = 5t + 4$$
$$z = t + 4$$

وبالتالي:

$$\Delta: \begin{cases} x = 5t + 4 \\ y = -2t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = t + 4 \end{cases}$$

الطلب الرابع:

إثبات معادلة المستوي (ABC)

تعويض النقطة A:

$$10 - 4 - 0 = 6$$
$$6 = 6$$

محققة ومنه A من المستوي (ABC)

تعويض النقطة B:

$$0 + 4 + 2 = 6$$
$$6 = 6$$

محققة ومنه B من المستوي (ABC)

تعويض النقطة C:

$$5 - 2 + 3 = 6$$
$$6 = 6$$

محققة ومنه C من المستوي (ABC)

ومنه النقاط C,B,A تحقق معادلة المستوي (ABC)

الطلب الخامس: تحديد إحداثيات G

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = 6 & \dots (1) \\ x = 5t + 4 & \dots (2) \\ y = -2t & \dots (3) \\ z = t + 4 & \dots (4) \end{cases}$$

نعوض كلاً من (2) و (3) و (4) في (1):

$$5(5t+4) - 2(-2t) + (t+4) = 6$$
$$25t + 20 + 4t + t + 4 = 6$$
$$30t = -18$$
$$t = -\frac{18}{30} = -\frac{3}{5}$$

نعوض قيمة t في كل من (2) و (3) و (4):

$$x = 5\left(-\frac{3}{5}\right) + 4 = 1$$
$$y = -2\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5}$$
$$z = -\frac{3}{5} + 4 = \frac{17}{5}$$
$$\Rightarrow G\left(1,\frac{6}{5},\frac{17}{5}\right)$$

الطلب السادس:

$$\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{(1)(2) + (1)(0) + (-12)(1)}{1 + 1 - 12}$$
$$= \frac{-10}{-10} = 1 = x_G$$
$$= \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{(1)(2) + (1)(-2) + (-12)(1)}{1 + 1 - 12}$$
$$= \frac{-12}{-10} = \frac{6}{5} = y_G$$
$$= \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{(1)(0) + (1)(-2) + (-12)(1)}{1 + 1 - 12}$$
$$= \frac{-10}{-10} = \frac{-34}{-10} = z_G$$

ومنه $G\left(1,\frac{6}{5},\frac{17}{5}\right)$ مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$و $(B,1)$و $(C,-12)$

الطلب السابع:

بما أنّ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$و $(B,1)$و $(C,-12)$

فإن:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 12\overrightarrow{MC} = -10\overrightarrow{MG}$$

وبالتالي العلاقة:

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} - 12\overrightarrow{MC}\right\| = 10\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$$

تكافئ:

$$\left\|-10\overrightarrow{MG}\right\| = 10\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$$
$$|-10|.\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 10\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{OA}\right\|$$

بعد M عن G يساوي OA (طول ثابت)

وبالتالي مجموعة نقاط الفراغ M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها OA

التمرين العشرون:

تتأمل في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(2,3,1)$ و $B(1,2,-2)$

وليكن d المستقيم الذي تمثيله الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \ ; t\in\mathbb{R} \\ z=3+2t \end{cases}$$

1. $a)$ **عيّن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة A ويقبل $\vec{u}(1,2,-2)$ شعاع توجيه له.**
   $b)$ **عيّن إحداثيات النقطة C نقطة تقاطع المستقيمن (Δ) و(d)**
2. **ليكن P المستوي المعين بالمستقيمن (Δ) و(d) أثبت أن $\vec{n}(2,-2,-1)$ ناظم المستوي P ثم اكتب معادلته**
3. $a)$ **اكتب معادلة المستوي Q المار بالنقطة B ويعامد المستقيم (Δ)**
   $b)$ **عين احداثيات النقطة E المسقط القائم للنقطة B على المستقيم (Δ)**
   $C)$ **احسب بعد النقطة B عن المستقيم (Δ)**
4. $a)$ **تأكد أن المستويين P و Q متعامدين.**
   $b)$ **احسب بعد النقطة $M(1,4,5)$ عن المستويين P و Q**
   $c)$ **استنتج بعد M عن الفصل المشترك لتقاطع المستويين P و Q**

الحل:

الطلب الأول:

$a)$ **التمثيل الوسيطي Δ**

شعاع التوجيه: $\vec{u}(1,2,-2)$

النقطة: $A(2,3,1)$

التمثيل الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases} x=s+2 \\ y=2s+3 \ ; s\in\mathbb{R} \\ z=-2s+1 \end{cases}$$

$b)$ **لدينا:**

المستقيم Δ شعاع توجيهه

$$\vec{u}_\Delta(1,2,-2)$$

المستقيم d شعاع توجيهه

$$\vec{u}_d(0,-1,2)$$

نلاحظ أنهما غير مرتبطين خطياً لأنّ المركبات غير متناسبة ومنه المستقيمان d و Δ إما متقاطعان أو متخالفين

إحداثيات C

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} 1=s+2 & \dots(1) \\ 1-t=2s+3 & \dots(2) \\ 3+2t=-2s+1 & \dots(3) \end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases} 1=s+2 & \dots(1) \\ 1-t=2s+3 & \dots(2) \end{cases}$$

من (1) نجد: $S=-1$

نعوض في (2) وفق:

$$1-t=-2+3$$
$$1-t=1$$
$$t=0$$

نتحقق في (3) وفق:

$$1-0=-2+3$$
$$1=1 \rightarrow \text{محققة}$$

ومنه للجملة حل وحيد $s=-1\,,t=0$

وبالتالي المستقيمان Δ و d يشتركان بنقطة واحدة فهما متقاطعان.

ولتحديد احداثيات C نقطة تقاطع d و Δ نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم d وفق:

$$x=1\,,y=1\,,z=3$$

ومنه: $C(1,1,3)$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ $\vec{n}$ ناظم المستوي P :

حتى يكون $\vec{n}$ ناظم على المستوي P يجب أن يعامد كل من شعاع توجيه المستقيم d وΔ أي يجب أن يتحقق:

$$\vec{n}.\vec{u}_\Delta=2-4+2=0$$
$$\vec{n}.\vec{u}_d=0+2-2=0$$

وبالتالي $\vec{n}$ ناظم على المستوي P

معادلة المستوي P

ناظم المستوي: $\vec{n}_P(2,-2,-1)$

النقطة:

بما أن المستوي P محدد بالمستقيمين (Δ) و(d) فإن C نقطة تقاطعهما هي نقطة من المستوي أي: $C(1,1,3)$

المعادلة:

$$P:2(x-1)-2(y-1)-1(z-3)=0$$
$$P:2x-2-2y+2-z+3=0$$
$$P:2x-2y-z+3=0$$

الطلب الثالث:

$a)$ **معادلة Q**

تحديد النقطة: $B(1,2,-2)$

تحديد الناظم:

بما أن Q يعامد Δ فإنّ:

$$\vec{n}_a=\vec{u}_\Delta(1,2,-2)$$

المعادلة:

$$Q:1(x-1)+2(y-2)-2(z+2)=0$$
$$Q:x-1+2y-4-2z-4=0$$
$$Q:x+2y-2z-9=0$$

$b)$ **إحداثيات E**

بما أنّ E نقطة من المستقيم فإنّ احداثيتها تعطى وفق:

$$(*)E(t+2,2t+3,-2t+1)$$

وبما أن E مسقط النقطة B على المستقيم Δ فإنه يتحقق:

$$\overrightarrow{BE}.\vec{u}_\Delta=0 \quad (**)$$

حيث:

$$\overrightarrow{BE}(t+1,2t+1,-2t+3)$$
$$\vec{u}_\Delta(1,2,-2)$$

نعوض في $(**)$ وفق:

$$t+1+4t+2+4t-6=0$$
$$9t-3=0$$
$$9t=3\rightarrow t=\frac{1}{3}$$

نعوض قيمة t في $(*)$ وفق:

$$E\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$c)$

$$dist\,(B,\Delta)=EB$$

حيث: $\overrightarrow{EB}\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$

ومنه:

$$dist\,(B,\Delta)=EB=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{25}{9}+\frac{49}{9}}=\sqrt{\frac{90}{9}}=\sqrt{10}$$

الطلب الرابع:

$a)$ **لدينا:**

المستوي P ناظمه $\vec{n}_P(2,-2,-1)$

المستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(1,2,-2)$

ولدينا:

$$\vec{n}_P.\vec{n}_Q=2-4+2=0$$

ومنه المستويين P و Q متعامدين.

$b)$

$$dis(M,P)=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2-8-5+3|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{8}{3}$$
$$dis(M,Q)=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1+8-10-9|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{10}{3}$$

$c)$ **إنّ بعد النقطة M عن الفصل المشترك T لتقاطع المستويين P و Q يعطى وفق:**

$$dist(M,T)=\sqrt{(dist(M,P))^2+(dist(M,Q))^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{10}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{100}{9}}$$
$$=\sqrt{\frac{164}{9}}=\frac{2\sqrt{41}}{3}$$

التمرين الواحد والعشرون:

لتكن لدينا النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(1,3,5)$ والمطلوب:

1. أعطِ معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$, ما طبيعة المجموعة ε ؟
2. أعطِ معادلة للمجموعة P المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA=MB$, ما طبيعة المجموعة P ؟

الحل:

الطلب الأول:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$$
$$(1-x,1-y,1-z).(1-x,3-y,5-z)=0$$
$$(1-x)(1-x)+(1-y)(3-y)+(1-z)(5-z)=0$$
$$x^2-2x+1+y^2-4y+3+z^2-6z+5=0$$
$$x^2-2x+1-1+1+y^2-4y+4-4+3+z^2-6z+9-9+5=0$$
$$\varepsilon: (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$$

المجموعة ε تمثل كرة مركزها $(1,2,3)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{5}$ أو ε تمثل كرة قطرها $[AB]$

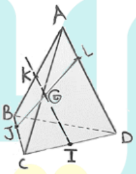
الطلب الثاني:

$$MA=MB$$
$$MA^2=MB^2$$
$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=(1-x)^2+(3-y)^2+(5-z)^2$$
$$y^2-2y+1+z^2-2z+1=y^2-6y+9+z^2-10z+25$$
$$-2y+1-2z+1=-6y+9-10z+25$$
$$4y+8z-32=0$$

تكافئ: $P: y+2z-8=0$

المجموعة P تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

التمرين الثاني والعشرون:



$ABCD$ رباعي وجوه فيه K منتصف $[AB]$ و I منتصف $[CD]$ و L تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ و J تحقق العلاقة: $\overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ وأخيراً G هي منتصف $[JL]$

أثبت أنّ G و I و K تقع على استقامة واحدة.

الحل:

لدينا:

* النقطة J تحقق العلاقة: $\overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

إذاً J مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,3)$	$(C,1)$

* النقطة L تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

إذاً L مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,1)$	$(A,3)$

* النقطة K منتصف $[AB]$:

إذاً K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,3)$	$(A,3)$

* النقطة I منتصف $[CD]$:

إذاً I مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(C,1)$	$(D,1)$

* النقطة G منتصف $[JL]$:

إذاً G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(L,4)$	$(J,4)$

ومنهُ استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,1)$	$(C,1)$	$(B,3)$	$(A,3)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(I,2)$	$(K,6)$

ومنهُ النقاط G و I و K تقع على استقامة واحدة.

التمرين الثالث والعشرون:

$ABCDEFGH$ مكعب

أثبت أنّ النقطة K المعرفة بالعلاقة:

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$$

تقع في المستوي (BCG) .

الحل:

نص السؤال:

أثبت أنّ النقطة K تقع في المستوي (BCG)

يقصد:

أثبت أنّ النقاط K و B و C و G تقع في مستوٍ واحد.

لدينا:

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$$
$$2\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AG}=0$$
$$2\overrightarrow{AK}-(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB})-(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KA})-3(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KG})=0$$
$$2\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{AK}-3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$
$$-\overrightarrow{AK}-2\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KC}-\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$
$$-\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}-3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$

ومنهُ:

النقطة K مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(B,-1)$	$(C,2)$	$(G,-3)$

إذاً:

النقاط K و B و C و G تقع في مستوٍ واحد ومنهُ K تقع في المستوي (BCG) .

التمرين الرابع والعشرون:

$ABCDEFGH$ مكعب فيه:

I و J منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[BC]$

ولدينا K مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(H,1)$	$(C,1)$	$(B,2)$	$(A,1)$

أثبت وقوع I و J و K و H في مستوٍ واحد.

الحل:

لدينا:

* النقطة K مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(H,1)$	$(C,1)$	$(B,2)$	$(A,1)$

$(B,1)$ $(B,1)$

* النقطة I منتصف $[AB]$:

إذاً I مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,1)$	$(B,1)$

* النقطة J منتصف $[BC]$:

إذاً J مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(C,1)$	$(B,1)$

ومنه:

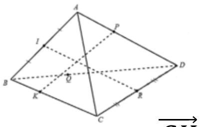
استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون النقطة K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(H,1)$	$(I,2)$	$(J,2)$

إذاً:

النقاط J و I و K و H تقع في مستوٍ واحد.

التمرين الخامس والعشرون:



$ABCD$ رباعي وجوه,

النقاط I و K و R

و Q و P تحقق: $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

و $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

ولدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,1)$ و $(C,1)$ و $(B,2)$ و $(A,2)$ و R منتصف $[AB]$ والمطلوب:

1. أثبت أنّ G تقع على المستقيم (PK)
2. أثبت أنّ G تقع على المستقيم (IR)
3. استنتج أنّ المستقيمان (IR) و (PK) متقاطعان
4. عين موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(C,1)$
5. عين مجموعة النقاط M التي تحقق:

$$\left\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DM}\right\|$$

الحل:

الطلب الأول:

* النقطة K تحقق العلاقة: $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

إذاً K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(C,1)$	$(B,2)$

* النقطة P تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

إذاً P مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,1)$	$(A,2)$

* ولتكن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,1)$	$(A,2)$	$(B,2)$	$(C,1)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(K,3)$ و $(P,3)$

ومنه النقطة G تقع على المستقيم (PK)

الطلب الثاني:

G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(A,2)$	$(B,2)$	$(C,1)$	$(D,1)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(R,2)$ و $(I,4)$

ومنه النقطة G تقع على المستقيم (IR)

الطلب الثالث:

لدينا من الطلب الأول والثاني:

النقطة G تقع على كل من المستقيمين (PK) و (IR) ومنه نستنتج أنّ المستقيمين (IR) و (PK) متقاطعان.

الطلب الرابع:

$$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

الطلب الخامس:

Q مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,2)$ و $(D,1)$

$$2\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{DQ}=\vec{0}$$

$$2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DM}=3\overrightarrow{QM}\ ...(1)$$

J مركز أبعاد متناسبة لـ $(C,1)$ و $(A,2)$:

$$2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{JM}\ ...(2)$$

$$\left\|3\overrightarrow{JM}\right\|=\left\|3\overrightarrow{QM}\right\|$$

$$JM=QM$$

M تتحرك على المستوي المحوري للقطعة $[JQ]$

التمرين السادس والعشرون:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$A(1,1,1)$	$B(1,4,7)$
$C(0,1,2)$	$D(-2,7,16)$

الطلب الأول:

أثبت أنّ النقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.

الحل:

$$\overrightarrow{AC}(-1,0,1)\quad,\quad\overrightarrow{AB}(0,3,6)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأنّه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

الطلب الثاني:

عيّن العددين α و β اللذين يحققان:

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

وهل تقع النقاط A و B و C و D في مستوٍ واحد؟

الحل:

تعيين α و β :

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\6\\15\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\6\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\alpha\\6\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\beta\\0\\\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\6\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta\\3\alpha\\6\alpha+\beta\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\begin{cases}-3=-\beta & ...(1)\\ 6=3\alpha & ...(2)\\ 15=6\alpha+\beta & ...(3)\end{cases}$$

لدينا الجملة:

$$\begin{cases}-3=-\beta & ...(1)\\ 6=3\alpha & ...(2)\end{cases}$$

من (1) نجد أنّ:

$$-3=-\beta\rightarrow\beta=3$$

من (2) نجد أنّ:

$$6=3\alpha\rightarrow\alpha=2$$

نتحقق في (3) :

$$15=6(2)+3$$

$$15=15$$

محققة

ومنه يوجد عددين $\alpha=2$ و $\beta=3$ يحققان:

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

من العلاقة السابقة نجد أنّ الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً , ومنه النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

الطلب الثالث:

استنتج أنّ النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

(A,a)	(B,b)	(C,c)

حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل:

بما أنّ D مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة (A,a) و (B,b) و (C,c) فإنّه يتحقق:

$$a\overrightarrow{DA}+b\overrightarrow{DB}+c\overrightarrow{DC}=\vec{0}\ ...(*)$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{AD}-2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})-3(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

$$-4\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

$$4\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

ومنه النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(A,4)$	$(B,-2)$	$(C,-3)$

ومنه:

$$a=4\quad,\quad b=-2\quad,\quad c=-3$$

التمرين السابع والعشرون:

ليكن لدينا المستويان:

$$P: 2x - y + z - 4 = 0$$
$$Q: x + y + 2z - 5 = 0$$

المطلوب:

1. أثبت أن P و Q متقاطعان.
2. أوجد تمثيل وسيطي للمستقيم d_1 الفصل المشترك للمستويان P و Q.
3. ادرس الوضع النسبي للمستقيمان d_1 و d_2

$$d_2: \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = s \quad ; s \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 3s \end{cases}$$

4. هل المستقيمان d_1 وd_2 يقعان في مستو واحد؟؟ علل إجابتك.
5. أثبت أن المستقيمان d_1 و (AB) متعامدان حيث:

$$B(1,1,2), A(3,0,3)$$

6. ادرس تقاطع المستقيم d_2 والمستوي R حيث: $R: x - y + z = 1$ وفي حال التقاطع عيّن إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيم d_2 والمستوي R.
7. هل المستقيم (CD) عمودي على المستوي R حيث: $C(1,1,-1)$ و $D(3,-1,1)$
8. لتكن لدينا النقطة $E(3,-1,2)$, أوجد إحداثيات النقطة E_1 المسقط القائم للنقطة E على المستوي P.
9. احسب بعد النقطة E عن المستوي P بطريقتين مختلفتين.
10. أوجد إحداثيات النقطة E_2 المسقط القائم للنقطة E على المستقيم d_1.
11. احسب بعد النقطة E عن المستقيم d_1.
12. هل النقاط

$G(1,1,-2)$	$F(2,1,1)$

تنتمي للمستوي P؟

13. هل النقاط

$G(1,1,-2)$	$F(2,1,1)$

تنتمي للمستقيم d_2؟

14. ادرس الوضع النسبي للمستويات P و Q و R.
15. اكتب معادلة الكرة S_1 التي مركزها E ونصف قطرها $r = \sqrt{3}$.

الحل:

1. لدينا:

المستوي P ناظمه $\vec{n}_P(2,-1,1)$

والمستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(1,1,2)$ نلاحظ أن $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطان خطياً وبالتالي P و Q متقاطعان.

2. لتكن:

$$\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \dots\dots (1) \\ x + y + 2z - 5 = 0 \dots\dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$3x + 3z - 9 = 0$$
$$3x = -3z + 9$$
$$x = -z + 3$$

نعوض في (2):

$$-z + 3 + y + 2z - 5 = 0$$
$$y + z - 2 = 0$$
$$y = -z + 2$$

لتكن $z = t$ ومنه:

$$(d_1): \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = -t + 2 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

3.

المستقيم d_1 شعاع توجيه: $\vec{u}_1(-1,-1,1)$

المستقيم d_2 شعاع توجيه: $\vec{u}_2(2,1,-3)$

نلاحظ أن $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطياً

وبالتالي d_1 و d_2 إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

$$\begin{cases} -t + 3 = 2s - 1 \dots (1) \\ -t + 2 = s \dots (2) \\ t = 1 - 3s \dots (3) \end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases} -t + 3 = 2s - 1 \dots (1) \\ t = 1 - 3s \dots (3) \end{cases}$$

بالجمع:

$$3 = -s \Rightarrow s = -3$$

نعوض في (3):

$$t = 1 + 9 \Rightarrow t = 10$$

نتحقق في (2):

$$-10 + 2 = -3$$
$$-8 \neq -3$$

غير محققة

الجملة مستحيلة الحل إذاً d_1 و d_2 لا يشتركان بأية نقطة فهما متخالفان.

4. d_1 و d_2 متخالفان إذاً لا يقعان في مستو واحد.

5.

المستقيم d_1 شعاع توجيهه: $\vec{u}_1(-1,-1,1)$

المستقيم (AB) شعاع توجيهه:

$$\overrightarrow{AB}(-2,1,-1)$$
$$\vec{u}_1.\overrightarrow{AB} = 2 - 1 - 1 = 0$$

إذاً المستقيمان d_1 و (AB) متعامدان.

6.

المستقيم d_2 شعاع توجيهه: $\vec{u}_2(2,1,-3)$

المستوي R ناظمه: $\vec{n}_R(1,-1,1)$

$$\vec{u}_2.\vec{n}_R = 2 - 1 - 3 = -2$$

إذا المستوي R والمستقيم d_2 متقاطعان.

إيجاد نقطة التقاطع R مع d_2:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \dots (1) \\ x = 2t - 1 \dots (2) \\ y = t \qquad \dots (3) \\ z = 1 - 3t \dots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1):

$$2t - 1 - t + 1 - 3t = 1$$
$$-2t = 1 \to t = -\frac{1}{2}$$

نعوض قيمة t في $(2), (3), (4)$:

$$x = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \Rightarrow x = -2$$
$$y = -\frac{1}{2}$$
$$z = 1 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow I\left(-2, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

7.

ناظم المستوي R هو: $\vec{n}_R(1,-1,1)$

المستقيم (CD) شعاع توجيهه: $\overrightarrow{CD}(2,-2,2)$

نلاحظ أن $\vec{n}_R$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً إذاً:

المستوي R والمستقيم (CD) متعامدان.

8.

الخطوة الأولى:

نكتب معادلة المستوي P:

$$P: 2x - y + z - 4 = 0$$

الخطوة الثانية:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ المار من E والعمودي على المستوي P, بما أن المستقيم Δ والمستوي P متعامدان فإن:

$$\vec{u}_\Delta = \vec{n}_P(2,-1,1)$$
$$E(3,-1,2)$$
$$(\Delta): \begin{cases} x = 2k + 3 \\ y = -k - 1 \,; k \in \mathbb{R} \\ z = k + 2 \end{cases}$$

الخطوة الثالثة:

تكون النقطة E_1 هي نقطة تقاطع المستوي P والمستقيم Δ أي:

$$\begin{cases} 2x-y+z-4=0 \ldots(1) \\ x=2k+3 \quad \ldots(2) \\ y=-k-1 \ldots(3) \\ z=k+2 \quad \ldots(4) \end{cases}$$

نعوض $(2),(3),(4)$ في (1):

$$2(2k+3)-(-k-1)+k+2-4=0$$
$$4k+6+k+1+k+2-4=0$$
$$6k+5=0$$
$$6k=-5 \to k=-\frac{5}{6}$$

نعوض قيمة k في $(2),(3),(4)$:

$$x=2\left(-\frac{5}{6}\right)+3 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$
$$y=-\left(-\frac{5}{6}\right)-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{6}$$
$$z=-\frac{5}{6}+2 \Rightarrow z=\frac{7}{6}$$
$$\Rightarrow E_1\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{6},\frac{7}{6}\right)$$

٩. الطريقة الأولى:

$$dist(E,P)=\frac{|2(3)-(-1)+2-4|}{\sqrt{4+1+1}}$$
$$=\frac{|6+1+2-4|}{\sqrt{6}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$$

الطريقة الثانية:

$$\overrightarrow{EE_1}\left(-\frac{5}{3},\frac{5}{6},-\frac{5}{6}\right)$$

يكون بعد النقطة E عن المستوي P يساوي المسافة بين E ومسقط E على المستوي P:

$$EE_1=\sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{25}{3}+\frac{25}{36}+\frac{25}{36}}=\sqrt{\frac{150}{36}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$$

١٠. الخطوة الأولى:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d_1:

$$(d_1):\begin{cases} x=-t+3 \\ y=-t+2\,; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

الخطوة الثانية:

لدينا النقطة M من المستقيم d_1 حيث:

$$M(-t+3,-t+2,t)$$
$$\vec{u}_1(-1,-1,1)$$
$$\overrightarrow{EM}(-t,-t+3,t-2)$$

لدينا $\vec{u}_1$ و $\overrightarrow{EM}$ متعامدان إذاً:

$$\overrightarrow{EM}.\vec{u}_1=0$$
$$t+t-3+t-2=0$$

$$3t=5 \to t=\frac{5}{3}$$

إذاً:

$$x=-\frac{5}{3}+3=\frac{4}{3}$$
$$y=-\frac{5}{3}+2=\frac{1}{3}$$
$$z=\frac{5}{3}$$
$$\Rightarrow E_2\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

١١.

الخطوة الأولى:

نوجد إحداثيات E_2 المسقط القائم لـ E على d_1:

$$E_2\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

الخطوة الثانية:

يكون بعد النقطة E عن المستقيم d_1 هو المسافة بين E و E_2 مسقط E على المستقيم d_1 أي:

$$\overrightarrow{EE_2}\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$$
$$dist(E,d_1)=EE_2$$
$$=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{16}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{42}{9}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

١٢. النقطة F:

$$2(2)-1+1-4=0$$
$$4-4-1+1=0$$
$$0=0$$

إذاً النقطة F تنتمي للمستوي P.

النقطة G:

$$2(1)-1+(-2)-4=0$$
$$2-1-2-4=0$$
$$-6\neq 0$$

إذاً النقطة G لا تنتمي للمستوي P.

١٣.

النقطة F:

$$2=2s-1 \Rightarrow s=\frac{3}{2}$$
$$1=t \Rightarrow s=1$$

إذاً F لا تنتمي للمستقيم d_2.

النقطة G:

$$1=2s-1 \Rightarrow s=1$$
$$1=s \Rightarrow s=1$$
$$-2=1-3s \Rightarrow s=1$$

إذاً G تنتمي للمستقيم d_2.

١٤. لدينا الجملة:

$$\begin{cases} x+y+2z-5=0 \ldots(L_1) \\ x-y+z-1=0 \ldots(L_2) \\ 2x-y+z-4=0 \ldots(L_3) \end{cases}$$

$$-L_1+L_2 \to L'_2$$
$$-2L_1+L_2 \to L'_3$$

$$\begin{cases} x+y+2z-5=0 \ldots(L_1) \\ -2y-z+4=0 \ldots(L'_2) \\ -3y-3z+6=0 \ldots(L'_3) \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}L'_2+L'_3 \to L''_3$$

$$\begin{cases} x+y+2z-5=0 \ldots(L_1) \\ -2y-z+4=0 \ldots(L'_2) \\ -\frac{3}{2}z=0 \ldots(L''_3) \end{cases}$$

من (L''_3) نجد:

$$-\frac{3}{2}z=0 \Rightarrow z=0$$

نعوض في (L'_2) نجد:

$$-2y+4=0$$
$$-2y=-4$$
$$y=2$$

نعوض في (L_1) فنجد:

$$x+2-5=0$$
$$x=3$$

إذاً المستويات P و Q و R تشترك بنقطة واحدة هي:

$$I(3,2,0)$$

١٥. المركز: $E(3,-1,2)$

نصف القطر: $R=\sqrt{3}$

المعادلة:

$$S_1:(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3$$

التمرين الثامن والعشرون:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(0,1,2)$ و $B(2,1,1)$ و $C(1,0,0)$ و $D(1,-2,\lambda)$ والمستويات:

$$P: 2x-y+3z=9$$
$$Q: 3x-2y+4z=11$$

١. جد العدد الحقيقي λ بحيث يكون المثلث ABD قائم في A.

٢. أثبت أنّ المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) ثم استنتج معادلة المستوي (ABC).

٣. أثبت أنّ المستويان P و Q متقاطعين وجد تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d.

٤. أوجد نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC).

٥. أثبت ان النقطة $A'\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d ثم استنتج بعد A عن d.

الحل:

١. يكون المثلث ABD قائم في A إذا كان الضلعين القائمين AB و AD متعامدان أي يتحقق:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$$

$$\overrightarrow{AB}(2,0,-1)\,,\overrightarrow{AD}(1,-3,\lambda-2)$$

نعوض:

$$2(1)+0(-3)-1(\lambda-2)=0$$
$$2-\lambda+2=0$$
$$\lambda=4$$

٢.

حتى يكون (AD) عمودي على (ABC) يجب أن يكون $\overrightarrow{AD}$ شعاع توجيه للمستقيم. (AD) عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABC)، لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(2,0,-1)\,,\overrightarrow{AC}(1,-1,-2)$$

شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABC).ونعلم أن شعاع توجيه المستقيم (AD) هو: $\overrightarrow{AD}(1,-3,2)$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=2+0-2=0$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=1+3-4=0$$

وبالتالي (AD) عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABD) ، فهذا يعني أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

معادلة المستوي (ABC):

الناظم: بما أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) فإن:

$$\vec{n}_{(ABC)}=\overrightarrow{AD}(1,-3,2)$$

النقطة: $A(0,1,2)$

المعادلة:

$$\mathbf{1}(x-0)-3(y-1)+2(z-2)=0$$
$$x-3y+3+2z-4=0$$
$$x-3y+2z-1=0$$

٣.

لدينا المستوي P ناظمه $\vec{n}_P(2,-1,3)$

لدينا المستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(3,-2,4)$

نلاحظ أن $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات ومنه المستويان P و Q متقاطعان. لتحديد الفصل المشترك d:

لدينا الجملة:

$$\begin{cases}2x-y+3z=9\,\ldots\ldots(1)\\3x-2y+4z=11\,\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد (-2):

$$\begin{cases}-4x+2y-6z=-18\,\ldots\ldots(1)\\3x-2y+4z=11\,\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2):

$$-x-2z=-7$$
$$x=-2z+7$$

نعوض x في (2) نجد:

$$3(-2z+7)-2y+4z=11$$
$$-6z+21-2y+4z=11$$
$$-2z-2y=11-21$$
$$2y=-2z+10$$
$$y=-z+5$$

بفرض $z=t$ نعوض في y و x:

$$x=-2t+7$$
$$y=-t+5$$

ومنه:

$$d:\begin{cases}x=-2t+7\\y=-t+5\,;t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}$$

٤.

من الطلب السابق أوجدنا أن المستويان P و Q يتقاطعان في الفصل المشترك d ولتحديد نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC) فإننا نوجد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC) وبالتالي تكون نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC) هي نفسها نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC).

الخطوة الأولى:

دراسة الوضع النسبي بين المستقيم d والمستوي (ABC):

لدينا المستقيم d شعاع توجيهه: $\vec{u}_d(-2,-1,1)$

لدينا المستوي (ABC) ناظمه: $\vec{n}(1,-3,2)$

ولدينا:

$$\vec{n}.\vec{u}=-2+3+2=3\neq0$$

ومنه المستقيم d والمستوي (ABC) متقاطعان.

الخطوة الثانية:

إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC):

لدينا الجملة:

$$\begin{cases}x-3y+2z-1=0\,\ldots(1)\\x=-2t+7\,\ldots(2)\\y=-t+5\,\ldots(3)\\z=t\,\ldots(4)\end{cases}$$

نعوض كلاً من $(2),(3),(4)$ في (1):

$$-2t+7-3(-t+5)+2t-1=0$$
$$-2t+7+3t-15+2t-1=0$$
$$3t-9=0$$
$$3t=9$$
$$t=3$$

نعوض قيمة t في $(2),(3),(4)$:

$$x=-2(3)+7\Rightarrow x=1$$
$$y=-(3)+5\Rightarrow y=2$$
$$z=3$$

ومنه إحداثيات I نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC) هي:

$$I(1,2,3)$$

الخطوة الثالثة:

نقطة تقاطع المستويات الثلاثة P و Q و (ABC) هي نفسها نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC) وهي: $I(1,2,3)$

٥. لدينا المستقيم d شعاع توجيهه:

$$\vec{u}(-2,-1,1)$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AA'}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

نختبر تعامد كلاً من $\overrightarrow{AA'}$ مع شعاع توجيه المستقيم d وفق:

$$\vec{u}.\overrightarrow{AA'}=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=0$$

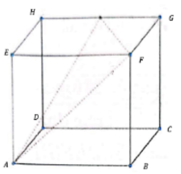
إذاً النقطة A' هي المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d.

لحساب بعد النقطة A عن المستقيم d:

$$dist(A,d)=AA'$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{21}{9}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

التمرين التاسع والعشرون:



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=4$ و $AE=AD=2$ ولتكن J منتصف $[HG]$ ونتأمل معلماً متجانساً $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

١. أوجد إحداثيات النقاط A و F و C و J.

٢. احسب المسافتين $[AJ]$ و $[JF]$.

٣. أثبت أن المثلث AFJ قائم في J واحسب مساحته.

٤. أثبت أن $\vec{n}(1,1,-2)$ ناظم المستوي (AFJ) ثم اكتب معادلته.

٥. احسب بعد C عن المستوي AFJ ثم استنتج حجم الرباعي الوجوه $AFJC$.

٦. أوجد إحداثيات النقطة N المسقط القائم للنقطة E على المستقيم (AF).

الحل:

١. إيجاد الإحداثيات:

$$A(0,0,0)\,,\ \ B(4,0,0)$$
$$D(0,2,0)\,,\ \ E(0,0,2)$$
$$C(4,2,0)\,,\ \ F(4,0,2)$$
$$H(0,2,2)\,,\ \ G(4,2,2)$$
$$J\left(\frac{0+4}{2},\frac{2+2}{2},\frac{2+2}{2}\right)$$
$$J(2,2,2)$$

٢. لحساب المسافتين:

$$\overrightarrow{AJ}(2,2,2)$$
$$AJ=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$\overrightarrow{JF}(2,-2,0)$$
$$JF=\sqrt{4+4+0}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

٣. حتى يكون المثلث AFJ قائم في J يجب أن يكون:

$$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{JF}=0$$
$$4-4+0$$
$$0=0$$

محققة، إذا المثلث AEJ قائم في J.

مساحته:

$$S_{AFJ}=\frac{\text{جداء الضلعين القائمتين}}{2}$$
$$S_{AFJ}=\frac{AJ.JF}{2}=\frac{2\sqrt{3}.2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$$

٤. لدينا:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AJ}=2+2-4=0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{JF}=2-2+0=0$$

أي $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AJ}$ و $\overrightarrow{JF}$

وبالتالي $\vec{n}$ ناظم على المستوي (AFJ)

معادلة المستوي حيث:

النقطة $A(0,0,0)$

الناظم $\vec{n}(1,1,-2)$

فتكون المعادلة:

$$1(x-0)+1(y-0)-2(z-0)=0$$
$$x+y-2z=0$$

٥. لدينا:

$$dist(C,(AFJ))=\frac{|4+2-0|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

حساب الحجم:

$$V_{AFJC}=\frac{1}{3}.S_{AFJ}.h$$

حيث:

$$S_{AFJ}=2\sqrt{6}$$
$$h=dist(C,(AFJ))=\sqrt{6}$$
$$\Rightarrow V_{AFJC}=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{6}\times\sqrt{6}=4$$

٦.

التمثيل الوسيطي للمستقيم (AF):

النقطة: $A(0,0,0)$

شعاع التوجيه: $\overrightarrow{AF}(4,0,2)$

فيكون التمثيل الوسيطي هو:

$$(AF):\begin{cases}x=4t\\ y=0\ \ ;t\in\mathbb{R}\\ z=2t\end{cases}$$

لتكن النقطة $N(4t,0,2t)$ نقطة من المستقيم (AF) ولدينا:

$$\overrightarrow{EN}(4t,0,2t-2)$$
$$\vec{u}(4,0,2)$$

تكون النقطة N هي المسقط القائم للنقطة E على المستقيم (AF) إذا تحقق:

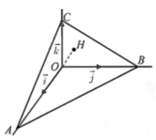
$$\overrightarrow{EN}.\vec{u}=0$$
$$16t+0+4t-4=0$$
$$20t=4$$
$$t=\frac{4}{20}\rightarrow t=\frac{1}{5}$$

نعوض قيمة t في كل من (2) و (3) و (4):

$$x=\frac{4}{5}\ \ ,y=0\ \ ,z=\frac{2}{5}$$

ومنه إحداثيات N هي:

$$N\left(\frac{4}{5},0,\frac{2}{5}\right)$$



التمرين الثلاثون: تتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(2,0,0)$ و $B(0,2,0)$ و $C(0,0,1)$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ $x+y+2z=2$ معادلة للمستوي ABC

٢. استنتج تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار بالنقطة O عمودياً على المستوي (ABC)

٣. أوجد إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (ABC)

٤. تحقق أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

٥. احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$ ثم استنتج مساحة المثلث ABC.

الحل:

التمرين الواحد والثلاثون

الطلب الأول:

تعويض النقطة A في معادلة المستوي:

$$2+0+2(0)=2$$
$$2=2\rightarrow \text{محققة}$$

تعويض النقطة B في معادلة المستوي:

$$0+2+2(0)=2$$
$$2=2\rightarrow \text{محققة}$$

تعويض النقطة C في معادلة المستوي:

$$0+0+2(1)=2$$
$$2=2\rightarrow \text{محققة}$$

ومنه $x+y+2z=2$ معادلة للمستوي (ABC)

الطلب الثاني:

التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ :

تحديد النقطة $O(0,0,0)$.

تحديد شعاع التوجيه:

بما أنّ Δ عمودي على المستوي (ABC) فإنّ

$$\vec{u}_{\Delta}=\vec{n}_{ABC}(1,1,2)$$

التمثيل الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases}x=t\\ y=t\ \ ;t\in\mathbb{R}\\ z=2t\end{cases}$$

الطلب الثالث:

النقطة H نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (ABC) ومنه لدينا الجملة:

$$\begin{cases}x+y+2z=2\ldots(1)\\ x=t\ldots(2)\\ y=t\ldots(3)\\ z=2t\ldots(4)\end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) :

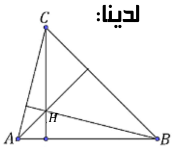
$$t+t+2(2t)=2$$
$$6t=2\rightarrow t=\frac{1}{3}$$

نعوض قيمة t في كل من (2) و (3) و (4) :

$$x=\frac{1}{3}\ \ ,\ \ y=\frac{1}{3}\ \ ,\ \ z=\frac{2}{3}$$
$$\rightarrow H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

الطلب الرابع:

لدينا:



$$\overrightarrow{AB}(-2,2,0)$$
$$\overrightarrow{AC}(-2,0,1)$$
$$\overrightarrow{BC}(0,-2,1)$$

$$\overrightarrow{AH}\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{BH}\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{CH}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

إثبات أنّ (AH) ارتفاع في المثلث (ABC) :

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{5}{3}\right)(0) + \left(\frac{1}{3}\right)(-2) + \left(\frac{2}{3}\right)(1)$$
$$= 0 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

ومنهُ (AH) ارتفاع في المثلث ABC .

إثبات أنّ (BH) ارتفاع في المثلث (ABC) :

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{3}\right)(-2) + \left(-\frac{5}{3}\right)(0) + \left(\frac{2}{3}\right)(1)$$
$$= -\frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 0$$

ومنهُ (BH) ارتفاع في المثلث ABC .

إثبات أنّ (CH) ارتفاع في المثلث (ABC) :

$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3}\right)(-2) + \left(\frac{1}{3}\right)(2) + \left(-\frac{1}{3}\right)(0)$$
$$= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 0 = 0$$

ومنهُ (CH) ارتفاع في المثلث ABC .

وبالتالي النقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .

الطلب الخامس:

حجم رباعي الوجوه $(OABC)$:

$$V_{OABC} = \frac{1}{3}S_{OAB}.h$$

حيث:

$$S_{OAB} = \frac{OA.OB}{2} = \frac{(2)(2)}{2} = 2$$
$$h = OC = 1$$

ومنهُ:

$$V_{OABC} = \frac{1}{3}(2)(1) = \frac{2}{3}$$

مساحة المثلث ABC :

$$V_{OABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.h \;...\;(*)$$

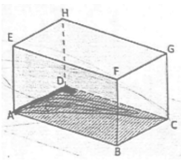
حيث h في هذه الحالة هي بُعد النقطة O عن المستوي (ABC) أيّ أنّ:

$$h = OH = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

بالتعويض في علاقة $(*)$:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3}S_{ABC}.\frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$S_{ABC} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

التمرين الثاني والثلاثون:



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات مرسوم جانباً فيه $AB = 4$ و $AD = 2$ و $AE = 1$ نزوده بالمعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

1. اكتب إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات.
2. نعرف النقطة M بالعلاقة $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EG}$, عين إحداثيات النقطة M
3. بفرض K مسقط M على $[DC]$ عين إحداثيات النقطة K ثم استنتج طول القطعة $[MK]$
4. عندما تدور القطعة $[AC]$ من المثلث ACD حول المستقيم (AD) تولد مخروطاً دورانياً قائماً , عين معادلة هذا المخروط ثم احسب حجمهُ.
5. اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AH]$

الحل:

الطلب الأول:

احداثيات رؤوس متوازي المستطيلات:

$A(0,0,0)$	$E(0,0,1)$
$B(4,0,0)$	$F(4,0,1)$
$D(0,2,0)$	$H(0,2,1)$
$C(4,2,0)$	$G(4,2,1)$

الطلب الثاني:

إيجاد إحداثيات النقطة M :

بفرض $M(x,y,z)$ ولدينا:

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EG}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$x = \frac{4}{3} \quad , \quad y = \frac{2}{3} \quad , \quad z = 1$$
$$\rightarrow M\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},1\right)$$

الطلب الثالث:

تعيين K :

التمثيل الوسيطي $[DC]$:

النقطة: $D(0,2,0)$

شعاع التوجيه: $\vec{u} = \overrightarrow{DC}(4,0,0)$

التمثيل الوسيطي:

$$[DC]:\begin{cases} x = 4t \\ y = 2 \quad ; t \in [0,1] \\ z = 0 \end{cases}$$

بما أنّ K من $[DC]$ فإنّ:

$$K(4t,2,0)\;...\;(*)$$

وتكون K مسقط M على $[DC]$ إذا تحقق

$$\overrightarrow{MK}.\vec{u} = 0\;...\;(**)$$
$$\left(4t-\frac{4}{3}\right)(4) + \left(\frac{4}{3}\right)(0) + (-1)(0) = 0$$
$$16t - \frac{16}{3} = 0$$
$$16t = \frac{16}{3} \rightarrow t = \frac{1}{3}$$

نعوض قيمة t في $(*)$ فنجد:

$$K\left(\frac{4}{3},2,0\right)$$

طول $[MK]$:

$$MK = \sqrt{\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{0+\frac{16}{9}+1} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

الطلب الرابع:

معادلة المخروط:

تحديد المحور $(O,\vec{j})$

تحديد الرأس: $A(0,0,0)$

تحديد مركز القاعدة: $D(0,2,0)$

تحديد نصف القطر: $r = DC = 4$

حيث:

$$\overrightarrow{DC}(4,0,0) \rightarrow DC = 4$$

ومنهُ:

$$\begin{cases} x^2+z^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 y^2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+z^2 = 4y^2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

حجم المخروط:

$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3}(\text{مساحة القاعدة})(\text{الارتفاع})$$

حيث:

$$\text{مساحة القاعدة} = \pi r^2 = 16\pi$$
$$\text{الارتفاع} = AD = \sqrt{4} = 2$$

ومنهُ:

$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3}(6\pi)(2) = \frac{32\pi}{3}$$

الطلب الخامس:

معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AH]$:

تحديد النقطة:

النقطة I منتصف القطعة $[AH]$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AH]$ ومنه:

$$I\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+2}{2},\frac{0+1}{2}\right)$$

$$\rightarrow\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$$

تحديد الناظم:

إنّ ناظم المستوي المحوري للقطعة $[AH]$

$$\vec{n}=\overrightarrow{AH}(0,2,1)$$

المعادلة:

$$0(x-0)+2(y-1)+1\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$2y-2+z-\frac{1}{2}=0$$

$$4y+2z-4-1=0$$

$$4y+2z-5=0$$

مخططات داعمة:

المخطط الأول: نص السؤال: أثبت وقوع ثلاثة نقاط على استقامة واحدة نميز:

- وجود إحداثيات أو إمكانيّة إيجادها
  - الارتباط الخطي لشعاعين
- غير ذلك
  - نثبت أنّ إحدى النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الباقيتين

المخطط الثاني: إثبات وقوع أربعة نقاط في مستو واحد نميز:

- وجود إحداثيات أو إمكانيّة إيجادها
  - الارتباط الخطي لثلاثة أشعة "علاقة الجاهة"
- غير ذلك
  - نثبت أنّ إحدى النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثلاثة المتبقيّة

المخطط الثالث: نص السؤال: أثبت أنّ المثلث (ABC) :

- قائم
  - نوجد أطوال الأضلاع ونستخدم عكس فيثاغورث.
- قائم في B
  - نستخدم الجداء السلمي حيث نثبت أنّ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=$

المخطط الرابع: معادلات المستوي "نقطة وناظم":

أولاً: الناظم الفوري نميز:

- مستوي P يوازي مستوي Q
  - $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}$
- مستوي P يعامد مستوي Q
  - $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_d}$
- مستوي محوري للقطعة المستقيمة $[AB]$
  - ناظم المستوي: هو الشعاع اسم القطعة المستقيمة.
  - نقطة منه: هي النقطة منتصف القطعة المستقيمة
- مستوي مماس للكرة في نقطة
  - ناظم المستوي: هو الشعاع الواصل بين مركز الكرة ونقطة التماس
  - نقطة منه: نقطة التماس

ثانياً: الناظم غير فوري "يحتاج معادلتين" ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ونميز:

- مستوي يقبل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موجهين له
  - $\vec{n}.\vec{u}=0$
  - $\vec{n}.\vec{v}=0$
- مستوي P يعامد مستويان R و Q
  - $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0$
  - $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R}=0$
- مستوي P مار من A و B ويعامد المستوي Q
  - $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AB}=0$
  - $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0$
- مستوي مار من ثلاثة نقاط A و B و C
  - نثبت أنّ A و B و C تشكل مستوي
  - نثبت أنّ
  - $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AB}=0$
  - $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AC}=0$
- مستوي يحوي مستقيمان متقاطعان
  - ناظم المستوي:
  - $\vec{n}.\vec{u}=0$
  - $\vec{n}.\vec{v}=0$
  - نقطة من المستوي: نقطة تقاطع المستقيمان

المخطط الخامس: التمثيل الوسيطي للمستقيم في الفراغ "شعاع توجيه ونقطة":

- التمثيل الوسيطي لمستقيم d يوازي مستقيم Δ
  - $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{u_\Delta}$
- التمثيل الوسيطي لمستقيم يعامد مستوي
  - $\vec{u} = \vec{n}$
- الصيغة الأولى: التمثيل الوسيطي لمستقيم مار من نقطتين A و B
  الصيغة الثانية: اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)
  - $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
- التمثيل الوسيطي للمستقيم d للفصل المشترك للمستويان P و Q
  - جملة معادلتين ثم فرضية بدلالة t

المخطط السادس: معادلة الكرة "مركز ونصف قطر"

- معادلة كرة مركزها Ω وتمر من A
  - $R = \Omega A$
- معادلة كرة قطرها $[AB]$
  - المركز هو: النقطة I منتصف $[AB]$
    نصف القطر:
    $R = IB$ أو $R = IA$ أو $R = \frac{AB}{2}$
- معادلة كرة مركزها Ω وتمس مستوى P
  - دائمًا في الكرة التي تمس المستوي يتحقق: $R = dist($المستوي , مركز الكرة$)$

المخطط السابع: هل النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد

- وجود إحداثيات أو إمكانية إيجادها
  - الأسلوب الأول
    - الارتباط الخطي لثلاثة أشعة "الجاهزة"
  - الأسلوب الثاني
    - نكتب معادلة المستوي المار من ثلاثة نقاط منها "الحالة السابعة" ثم نتحقق من انتماء النقطة المتبقية لهذا المستوي
- غير ذلك
  - نثبت أنّ إحدى النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثلاثة المتبقية.

المخطط الثامن الوضع النسبي لمستويان في الفراغ:

نص السؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ P وQ متوازيان	نثبت أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و$\overrightarrow{n_Q}$ مرتبطان خطيًا
أثبت أنّ P وQ متقاطعان	نثبت أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و$\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطيًا
أثبت أنّ P وQ متعامدان	نثبت أنّ: $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 0$
أثبت أنّ P وQ منطبقان	نثبت أنّ معادلتي P و Q متكافئتان أيّ: إحدى المعادلتين تنتج عن الأخرى بضربها بعدد حقيقي
في حال تقاطع P و Q ما هو تقاطعهما؟	تقاطعهما هو فصل مشترك (مستقيم)
اكتب التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لـ P وQ	الحالة الرّابعة من حالات كتابة التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ

المخطط التاسع: الوضع النسبي لمستقيمان في الفراغ:

نص السؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ d_1 وd_2 متوازيان	نثبت أنّ: ◦ $\vec{u}_1$ و$\vec{u}_2$ مرتبطان خطيًا ◦ d_1 وd_2 لا يشتركان بأيّة نقطة
أثبت أنّ d_1 وd_2 منطبقان	نثبت أنّ: ◦ $\vec{u}_1$ و$\vec{u}_2$ مرتبطان خطيًا ◦ d_1 وd_2 يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط
أثبت أنّ d_1 وd_2 متخالفان	نثبت أنّ: ◦ $\vec{u}_1$ و$\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطيًا ◦ d_1 وd_2 لا يشتركان بأيّة نقطة
أثبت أنّ d_1 وd_2 متقاطعان	نثبت أنّ: ◦ $\vec{u}_1$ و$\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطيًا ◦ d_1 وd_2 يشتركان بنقطة
أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع d_1 وd_2	بالحلّ المشترك لجملة التمثيلات الوسيطيّة لـ d_1 وd_2
أثبت أنّ d_1 وd_2 متعامدان	نثبت أنّ: $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$

هل d_1 و d_2 يقعان في مستوٍ واحد؟	ندرس الوضع النسبي لـ d_1 و d_2 ونميّز الحالات: حالة ①: d_1 و d_2 متخالفان، إذاً d_1 و d_2 لا يقعان في مستوٍ واحد حالة ②: باقي الحالات إذاً d_1 و d_2 يقعان في مستوٍ واحد.

المخطط العاشر: دراسة الوضع النسبي بين مستقيم ومستوي في الفراغ:

نص السؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ P و d متوازيان	نثبت أنّ: $\vec{n}.\vec{u} = 0$
أثبت أنّ P و d متقاطعان	نثبت أنّ: $\vec{n}.\vec{u} \neq 0$
أثبت أنّ P و d متعامدان بحيث $\vec{n}$ معلوم	نثبت أنّ $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطّياً
أثبت أنّ P و d متعامدان بحيث $\vec{n}$ غير معلوم	نثبت أنّ شعاع توجيه المستقيم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطّيًا من المستوي
أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي P	بالحل المشترك لجملة معادلات المستوي ومعادلات المستقيم نحصل على نقطة التقاطع
هل المستقيم d محتوى في المستوي P ؟	بالحل المشترك لجملة المعادلات الأربعة نلاحظ أنّ المستقيم والمستوي يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط إذاً المستقيم محتوى في المستوي

المخطط الحادي عشر: مستقيمان متقاطعان "تلاقي مستقيمان"

أثبت أنّ d_1 و d_2 متقاطعان: نميز:

- وجود النقاط وأشعة التوجيه أو إمكانية إيجادها
  - الأسلوب الأول
    - نثبت أنّ d_1 و d_2 غير متوازيان وذلك بإثبات أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيًا.
    - نثبت أنّ d_1 و d_2 يقعان في مستوٍ واحد وذلك بإثبات أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطيًا "علاقة الجاهة" ويتم تحديد نقطة التقاطع من خلال الزرع.
  - الأسلوب الثاني
    - نكتب التمثيل الوسيطي لكل من d_1 و d_2
    - اختبار الارتباط الخطي
    - اختبار الاشتراك بنقطة
    - ويتم تحديد نقطة التقاطع من خلال تعويض t و s في المعادلات المناسبة.
- غير ذلك
  - نثبت وجود نقطة مشتركة على جميع المستقيمات من خلال مراكز الأبعاد المتناسبة

المخطط الثاني عشر: المسقط القائم لنقطة على:

- مستوي
  - معلم
    - فورًا
  - عشوائي
    - معادلة المستوي
    - مستقيم عمودي
    - تقاطع مستقيم ومستوي "أربعة معادلات"
- مستقيم
  - معلم
    - فورًا
  - عشوائي
    - الأسلوب الأول
      - المستقيم
      - مستوي عمودي
      - تقاطع مستقيم ومستوي
    - الأسلوب الثاني
      - المستقيم
      - النقطة A' "بدلالة t"
      - يتحقق: $\overrightarrow{AA'}.\vec{u} = 0$ فنحصل على قيمة t
      - نعوض في A'

المخطط الثالث عشر: بُعد نقطة عن في الفراغ:

- نقطة
  - المسافة بين نقطتان في الفراغ

$$\sqrt{\left(\text{المركبة الأولى}\right)^2 + \left(\text{المركبة الثانية}\right)^2 + \left(\text{المركبة الثالث}\right)^2}$$

- مستوي
  - يوجد قانون:

$$P: ax + by + cz + d = 0$$
$$A(x_A, y_A, z_A)$$
$$\text{dist}(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cZ_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- مستقيم
  - المستقيم d هو الفصل المشترك لمستويان متعامدان P و Q
    - استنادًا إلى مبرهنة فيثاغورث يتحقق:

$$\text{dist}(A, d) = \sqrt{\text{dist}^2(A, P) + \text{dist}^2(A, Q)}$$

  - غير ذلك
    - يكون بعد النقطة عن مستقيم في الفراغ هو المسافة بين هذه النقطة ومسقطها على هذا المستقيم

المخطط الرابع عشر: مجموعات النقاط:

صف مجموعة القاط / ماذا تمثل مجموعة النقاط نميز:

أولاً: يكون المعطى هو علاقة "مساواة" تحوي طويلة "نظيم"

نصلح في هذه العلاقة للوصول إلى

- $||\overrightarrow{MA}|| = ||\overrightarrow{AB}||$ تمثل الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB
- $||\overrightarrow{MA}|| = ||\overrightarrow{MB}||$ تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

ثانيًا: يكون المعطى هو علاقة من الشكل:

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

بالإتمام إلى مربعات كاملة نحصل على:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k$

- $k < 0$ مجموعة خالية
- $k = 0$ تمثل نقطة (x_0, y_0, z_0)
- $k > 0$ تمثل كرة مركزها (x_0, y_0, z_0) ونصف قطرها $R = \sqrt{k}$

ثالثًا: يكون المعطى هو علاقة:

نعوض في هذه العلاقة ونصلح وصولاً إلى معادلة كما سبق.

المخطط الخامس عشر: الوضع النسبي لثلاث مستويات في الفراغ:

الوضع النسبي لثلاثة مستويات في الفراغ.

ادرس الوضع النسبي للمستويات P و Q و R

نستخدم طريقة غاوس وفق:

الخطوة الأولى: نرتب المعادلات

الخطوة الثانية: المرحلة الأولى: تحتاج أمرين وفق:

$L_1 + L_2 \to L'_2$ (معكوس أسفل) (مقلوب فوق)

$L_1 + L_2 \to L'_3$ (معكوس أسفل) (مقلوب فوق)

الخطوة الثالثة: المرحلة الثانية: تحتاج أمر واحد:

$L'_2 + L'_3 \to L''_3$ (معكوس أسفل) (مقلوب فوق)

تطبيق الأوامر يحتاج العمليات الحسابية واستعن بالمسودة عند اللزوم

الخطوة الرابعة: ننظر إلى L''_3 ونميز:

- وجود Z
  - للجملة حل وحيد من L''_3 نوجد Z , نعوض في L'_2 لإيجاد y ونعوض في L_1 لإيجاد قيمة x وتكون المستويات تشترك بنقطة وحيدة.
- اختفاء Z
  - محققة: للجملة عدد لا نهائي من الحلول والمستويات تشترك بفصل مشترك
  - غير محققة: الجملة مستحيلة الحل والمستويات لا تشترك بأية نقطة

تدريج طلبات

لدينا ثلاث مستويات P و Q و R :

① أثبت أنّ P و Q يتقاطعان بفصل مشترك d أوجد تمثيله الوسيطي.

$\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطان خطيًا + جملة معادلتين + فرضية t

② استنتج أن إحداثيات A نقطة تقاطع المستويات P و Q و R

تكون نقطة تقاطع المستويات P و Q و R هي ذاتها نقطة تقاطع المستقيم d و R "أربعة معادلات"

لإيجاد حجم الهرم "رباعي الوجوه"

الخطوة الأولى: نحدد قاعدة الهرم, اختر قاعدة يكون حساب مساحتها ممكناً.

الخطو الثانية: نحدد رأس الهرم.

الخطوة الثالثة: نحدد ارتفاع الهرم ونميز:

قاعدة الهرم مستوي معلم

يكون ارتفاع الهرم هو المسافة بين النقطة.
رأس الهرم ومسقطها على مستوي القاعدة.

قاعدة الهرم مستوي عشوائي

يكون:
$h = dist(\text{مستوي القاعدة} , \text{رأس الهرم})$

الخطوة الرابعة: نضع القانون ونعوّض.

ملاحظة: عندما يكون لدينا طلب إيجاد حجم مجسم ثم استنتاج مساحة وجه فإننا نعود ونحسب حجم المجسم باعتبار قاعدة المجسم هي الوجه المراد استنتاج مساحته ثم نعوض ونعزل المطلوب.