التمرين الأول: نعطى العددين العقديين

$Z_2 = -2\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$	$Z_1 = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$

أولاً:

1. اكتب العدد العقدي Z_1 بالشكل الجبري
2. اكتب العدد العقدي Z_1 بالشكل المثلثي
3. استنتج النسب المثلثية للزاوية $\frac{7\pi}{12}$

ثانياً:

1. عيّن كلاً من طويلة وزاوية العدد العقدي Z_2
2. اكتب العدد العقدي $(Z_2)^2$ بالشكل الأسي.

التمرين الثاني: نعطى العددين العقديين

$Z_2 = 1 - i$	$Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

1. اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد Z_1 و Z_2 و $\frac{Z_1}{Z_2}$
2. اكتب بالشكل الجبري $\frac{Z_1}{Z_2}$
3. استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

تذكرة في العمليات على الجذور:

* $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
* $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
* $a \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \times b}$

التمرين الثالث: نعطى العددين العقديين

$$Z = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$$

1. عيّن كلا من زاوية وطويلة Z^2 ثم اكتب Z بالشكل الأسي.
2. استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

التمرين الرابع: ليكن لدينا الأعداد العقدية الآتية:

$Z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$	$Z_1 = \sqrt{5} - 5$
$Z_4 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$Z_3 = 2i\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$
$Z_5 = 1 + i + \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	

1. اكتب كلاً من $\bar{Z}_1$ و $\bar{Z}_2$ بالشكل المثلثي
2. عيّن كلاً من زاوية وطويلة Z_3 و Z_4
3. اكتب $(Z_5)^3$ بالشكل المثلثي.

التمرين الخامس:

ليكن Z عدد عقدي ما , أثبت أنّ $|iZ+2i|^2+|Z-2|^2=2|Z|^2+8$

التمرين السادس:

ليكن u و z عددان عقديين بحيث $u \neq 1$ وليكن $w=\frac{u\bar{z}-z}{u-1}$ عدد حقيقي.

أثبت أنه إمّا أن يكون z حقيقياً أو أن يكون $|u|=1$

التمرين السابع:

لتكن لدينا المعادلة: $Z^2-(1+i)Z+2+2i=0$

١. أثبت أنّ $Z_1=1-i$ جذراً للمعادلة , ثم أوجد الجذر الآخر وليكن Z_2

٢. اكتب Z_1 و Z_2 بالشكل الأسي.

التمرين الثامن:

لتكن النقطتان A و B الممثلة للأعداد العقدية $Z_A=-\sqrt{3}+i$ و $Z_B=-2i$ بالترتيب.

١. أثبت أن النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي 2

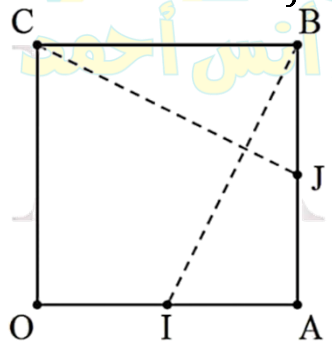
٢. اكتب Z_A بالشكل الأسي ثم جد العدد العقدي Z_C الممثل للنقطة C التي تجعل المبدأ مركز ثقل المثلث ABC

٣. أثبت أنّ $Z_C-Z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_B-Z_A)$ ثم عيّن طبيعة التحويل الهندسي.

٤. عيّن طبيعة المثلث ABC .

التمرين التاسع:

$OABC$ مربع ; النقطة I هي منتصف القطعة المستقيمة $[OA]$ والنقطة J منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$, نتأمّل المعلم المتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ والمطلوب:



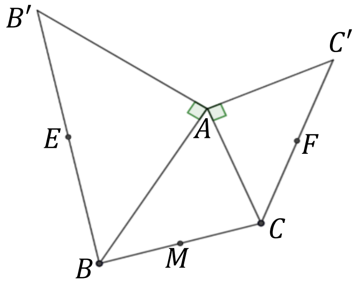
١. اكتب العدد العقدي Z_C بدلالة Z_A ثم اكتب Z_B بدلالة Z_A

٢. اكتب العددين العقديين Z_I و Z_J بدلالة Z_A

٣. احسب $\frac{Z_C-Z_J}{Z_B-Z_I}$ ثم استنتج أنّ $IB=JC$ وأنّ $(IB)\perp(JC)$

التمرين العاشر:

ABC مثلث مباشر التوجيه , النقطتين B' و C' تجعلان المثلثين $AB'B$ و ACC' قائمين ومتساوي الساقين ولتكن النقاط M و E و F منتصفات الأضلاع $[BC]$ و $[BB']$ و $[CC']$ بالترتيب , نفرض معلماً معلماً متجانساً $(A,\vec{u},\vec{v})$ ونرمز للأعداد العقدية a و b و c و e و f و m التي تمثل النقاط A و B و C و E و F و M والمطلوب:



١. أثبت أنّ $c' = ic$ و $b' = ib$ ثم اكتب بالشكل الجبري العدد العقدي $\frac{c'-b}{b'-c}$

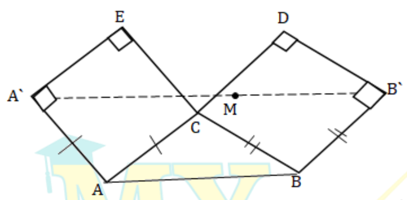
٢. أثبت أنّ $BC' = CB'$ وأنّ المستقيمين (BC') و (CB') متعامدين

٣. عبّر عن الأعداد العقدية m و e و f بدلالة b و c

٤. أثبت أنّ $\frac{e-m}{f-m} = i$ واستنتج طبيعة المثلث EFM

التمرين الحادي عشر: ليكن المثلّث ABC في المستوي تنشئ على ضلعيه $[AC]$ و$[BC]$ وخارجه المربعين $ACEA'$ و $CBB'D$ كما في الشّكل المجاور،

تمثّل الأعداد العقديّة a,b,c,a',b' النقاط A,B,C,A',B'.



١. B' هي صورة C وفق دوران مركزه B عيّنه

واكتب الصّيغة العقديّة للعدد b' بدلالة b و c

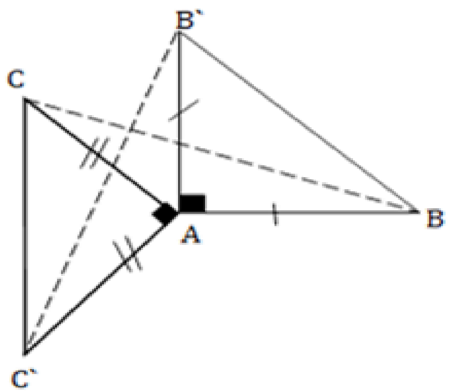
٢. أثبت أنّ $a' = i(c-a) + a$

٣. عين بدلالة a و b العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$

التمرين الثاني عشر:

في الشّكل المجاور المثلّثان ABB' و ACC' كلٌّ منهما قائم في A ومتساوي السّاقين،

تأمّل المعلم المتجانس والمباشر $(A,\vec{u},\vec{v})$



١. اكتب $Z_{B'}$ بدلالة Z_B و $Z_{C'}$ بدلالة Z_C.

٢. احسب $\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}$

٣. استنتج أنّ $(BC) \perp (B'C')$ و $BC = B'C'$

الحل:

التمرين الأول: نعطى العددين العقديين

$$Z_2 = -2\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] \qquad Z_1 = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$$

أولاً:

١. اكتب العدد العقدي Z_1 بالشكل الجبري
٢. اكتب العدد العقدي Z_1 بالشكل المثلثي
٣. استنتج النسب المثلثية للزاوية $\frac{7\pi}{12}$

ثانياً:

٤. عيّن كلاً من طويلة وزاوية العدد العقدي Z_2
٥. اكتب العدد العقدي $(Z_2)^2$ بالشكل الأسي.

أولاً:

الطلب الأول:

$$Z_1 = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{[(4+4i)(1+i\sqrt{3})]}{[(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})]}$$
$$= \frac{4+4\sqrt{3}i+4i-4\sqrt{3}}{1+3}$$
$$= \frac{4-4\sqrt{3}+4i+4\sqrt{3}i}{4}$$
$$= \frac{4(1-\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i)}{4}$$
$$= 1-\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i$$
$$= 1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$$

الطلب الثاني:

كتابة Z_1 بالشكل المثلثي:

$$Z_1 = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$$

رح نكتب البسط بالشكل المثلثي والمقام بالشكل المثلثي والسبب:

عشان لو رحنا نكتب ناتج الطلب الأول يلي هويي:

$$Z_1 = 1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$$

بالشكل المثلثي رح اوصل لنتيجة مسدودة رح تطلع معي الزاوية غير شهيرة عشان هيك رح نلجأ للأسلوب الثاني ألا وهويي:

- كتابة البسط بالشكل المثلثي
- كتابة المقام بالشكل المثلثي
- قسمة مثلثيين عن طريق:
- تقسيم الطويلة على الطويلة وطرح الزوايا.

بفرض:

$$Z' = 4+4i$$
$$x = 4\,, y = 4$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{16+16}$$
$$= \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\to \theta = \frac{\pi}{4}$$
$$Z' = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

بفرض:

$$Z'' = 1 - i\sqrt{3}$$
$$x = 1 \,, y = -\sqrt{3}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

ليش حطينا إشارة ناقص قبل الزاوية؟ عشان الساين سالب والكوساين موجب معناها الزاوية ربع رابع ودلالة الربع الرابع هيّة إشارة الناقص

$$Z'' = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

وهلق رح نرجع لـ Z_1 وفق:

$$Z_1 = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{Z'}{Z''}$$
$$= \frac{4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}$$
$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]$$
$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

الطلب الثالث:

استنتاج النسب المثلثية للزاوية $\theta = \frac{7\pi}{12}$

تعالو نرجع لكل شي اشتغلناه.

الطلب الأول كان طالب Z_1 بالشكل الجبري وطلع معنا

$$Z_1 = 1 - \sqrt{3} + (1+\sqrt{3})i$$

الطلب الثاني كان طالب Z_1 بالشكل المثلثي وطلع معنا

$$Z_1 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

تعالو نقارن بيناتهم:

$$Z_1 = 1 - \sqrt{3} + (1+\sqrt{3})i$$
$$Z_1 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{x}{r} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{y}{r} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

الـ x و الـ y مناخدهم من الشكل الجبري

والـ r مناخدها من الشكل المثلثي

ثانياً:

الطلب الأول:

$$Z_2 = -2\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= -2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= -2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right]$$
$$= -2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= -2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= (-1)2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= [\cos\pi + i\sin\pi]2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

ومنه:

$$|Z_2| = 2$$

$$\arg(Z_2) = \frac{2\pi}{3}$$

الطلب الثاني:

لدينا من الطلب السابق:

$$Z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$Z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$(Z_2)^2 = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2$$

$$= 2^2 e^{i\frac{2\times 2\pi}{3}}$$

$$= 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

التمرين الثاني: نعطى العددين العقديين

$Z_2 = 1 - i$	$Z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

1. اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد Z_1 و Z_2 و $\frac{Z_1}{Z_2}$
2. اكتب بالشكل الجبري $\frac{Z_1}{Z_2}$
3. استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

الطلب الأول:

$$Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \to x = \frac{\sqrt{6}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حساب r :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}}$$

$$r = \sqrt{2}$$

حساب $\cos\theta$:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4\times 2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{6}{8}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حساب $\sin\theta$:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي فإنّ $\theta = -\frac{\pi}{6}$

$$Z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$Z_2 = 1 - i$$
$$\to x = 1 \, , y = -1$$

حساب r :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$r = \sqrt{1^2 + 1^2}$$
$$r = \sqrt{2}$$

حساب $cos\ \theta$:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حساب $sin\ \theta$:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبالتالي فإن $\theta = -\frac{\pi}{4}$

$$Z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]}{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

الطلب الثاني:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}}{1 - i}$$
$$= \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{1}{1 - i}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 - 2i}$$
$$= \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)}$$
$$= \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}i - 2\sqrt{2}i + 2\sqrt{2}}{4 + 4i - 4i + 4}$$
$$= \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}i - 2\sqrt{2}i}{8}$$
$$= \frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{6}i - \sqrt{2}i)}{8}$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{6}i - \sqrt{2}i}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

الطلب الثالث:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

التمرين الثالث: نعطى العددين العقديين

$$Z = \left(\sqrt{3} + 1\right) + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

1. عيّن كلا من زاوية وطويلة Z^2 ثم اكتب Z بالشكل الأسي.
2. استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

الطلب الأول:

$$Z = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$$
$$Z^2 = \left[(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)\right]^2$$

منفك المطابقة:

$$= (\sqrt{3}+1)^2 + 2i(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}-1)^2$$
$$= 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 2i(3-1) - (3 - 2\sqrt{3} + 1)$$
$$= 4 + 2\sqrt{3} + 4i - 4 + 2\sqrt{3}$$
$$= 4\sqrt{3} + 4i$$

إذا بدنا نكتب Z بالشكل الأسي.

إذا رحنا جربنا نكتب Z الرئيسي رح نلاقي مشاكل وما حتطلع الزاوية شهيرة, عشان هيك رح اكتب Z^2 بالشكل الأسي وآخر الشي بجذر.

$$Z^2 = 4\sqrt{3} + 4i$$
$$x = 4\sqrt{3}\,, y = 4$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{16\times 3 + 16}$$
$$= \sqrt{64} = 8$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$Z^2 = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$Z = \sqrt{8e^{i\frac{\pi}{6}}}$$
$$= \sqrt{8}.\sqrt{e^{i\frac{\pi}{6}}}$$
$$= 2\sqrt{2}.\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

الطلب الثاني:

استنتاج النسب المثلثية للزاوية $\theta = \frac{\pi}{12}$

$$Z = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$$
$$Z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

الـ x والـ y مناخدهم من الشكل الجبري

والـ r مناخدها من الشكل المثلثي.

التمرين الرابع: ليكن لدينا الأعداد العقدية الآتية:

$Z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$	$Z_1 = \sqrt{5} - 5$
$Z_4 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$Z_3 = 2i\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$
$Z_5 = 1 + i + \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	

1. اكتب كلاً من $\bar{Z}_1$ و $\bar{Z}_2$ بالشكل المثلثي
2. عيّن كلاً من زاوية وطويلة Z_3 و Z_4
3. اكتب $(Z_5)^3$ بالشكل المثلثي.

الطلب الأول:

إيجاد $\bar{Z}_1$:

$$Z_1 = \sqrt{5} - 5$$
$$= -(5 - \sqrt{5})$$
$$= (5 - \sqrt{5})(\cos\pi + i\sin\pi)$$
$$\bar{Z}_1 = (5 - \sqrt{5})(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$$

إيجاد $\bar{Z}_2$:

$$Z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2\left[\frac{1}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$= 1 + i$$
$$x = 1 , y = 1$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$
$$Z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\bar{Z}_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

الطلب الثاني:

إيجاد زاوية وطويلة Z_3 :

$$Z_3 = 2i\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2i\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2(i)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

ومنه:

$$|Z_3| = 2$$
$$\arg(Z_3) = \frac{\pi}{3}$$

إيجاد زاوية وطويلة Z_4 :

$$Z_4 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)(1 + i)$$

كتابة المقدار $(1 + i)$ بالشكل المثلثي:

$$x = 1 , y = 1$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$
$$1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

ومنه:

$$|Z_4| = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$
$$\arg(Z_4) = \frac{\pi}{4}$$

الطلب الثالث:

$$Z_5 = 1 + i + \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

أول خطوة رح نكتب Z_5 بالشكل المثلثي:

$$Z_5 = 1 + i + \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

هلق أغلبنا رح يفكّر نروح نحوّل المقدار $(1+i)$ إلى شكل مثلثي وبعدين اجمع مثلثيين.

بس انتبهو يا أعزائي الطلاب نحنا ما عنا قاعدة لجمع مثلثيين , طيب معقول ما في حل أبداً؟

طبعاً في حل ألا وهويي تحويل الشكل المثلثي إلى شكل جبري ومنجمع جبريين والناتج يلي حيطلع معي بحولو لشكل مثلثي.

بفرض:

$$Z' = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = r\cos(\theta) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$$

$$y = r\sin(\theta) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

$$Z' = -1 + i$$

نعوّض في Z_5 وفق:

$$Z_5 = 1 + i - 1 + i$$

$$= 2i$$

نحوّل Z_5 الآن إلى شكل مثلثي وفق:

$$Z_5 = 2(i)$$

$$= 2[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

كتابة $(Z_5)^3$ بالشكل المثلثي:

$$Z_5 = 2[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(Z_5)^3 = 2^3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$(Z_5)^3 = 8\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

التمرين الخامس:

ليكن Z عدد عقدي ما , أثبت أنّ $|iZ + 2i|^2 + |Z - 2|^2 = 2|Z|^2 + 8$

$$L_1 = |iZ + 2i|^2 + |Z - 2|^2$$

كما نعلم: $\left|\text{عدد عقدي}\right|^2 = \left(\text{العدد العقدي}\right) \times \left(\text{مرافق العدد العقدي}\right)$

$$= (iZ + 2i)(-i\bar{Z} - 2i) + (Z - 2)(\bar{Z} - 2)$$

$$= Z\bar{Z} + 2Z + 2\bar{Z} + 4 + Z\bar{Z} - 2Z - 2\bar{Z} + 4$$

$$= 2Z\bar{Z} + 8$$

كما نعلم: $\left(\text{العدد العقدي}\right) \times \left(\text{مرافق العدد العقدي}\right) = \left|\text{عدد عقدي}\right|^2$

$$= 2|Z|^2 + 8$$

$$= L_2$$

التمرين السادس:

ليكن u و z عددان عقديين بحيث $u \neq 1$ وليكن $w = \frac{u\bar{z}-z}{u-1}$ عدد حقيقي.

أثبت أنه إمّا أن يكون z حقيقياً أو أن يكون $|u| = 1$

الحل:

بما أنّ w حقيقي فإنّ:

$$\bar{w} = w$$

$$\frac{\bar{u}z - \bar{z}}{\bar{u} - 1} = \frac{u\bar{z} - z}{u - 1}$$

جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين

$$(\bar{u}z - \bar{z})(u - 1) = (\bar{u} - 1)(u\bar{z} - z)$$

$$u\bar{u}z - \bar{u}z - u\bar{z} + \bar{z} = u\bar{u}\bar{z} - \bar{u}z - u\bar{z} + z$$

$$u\bar{u}z - \bar{u}z - u\bar{z} + \bar{z} - u\bar{u}\bar{z} + \bar{u}z + u\bar{z} - z = 0$$

$$u\bar{u}z - u\bar{u}\bar{z} + \bar{z} - z = 0$$

$$u\bar{u}(z - \bar{z}) + \bar{z} - z = 0$$

$$(z - \bar{z})u\bar{u} - (z - \bar{z}) = 0$$

$$(z - \bar{z})(u\bar{u} - 1) = 0$$

إما:

$$z - \bar{z} = 0$$

$$z = \bar{z}$$

وبالتالي z حقيقي.

أو:

$$u\bar{u} - 1 = 0$$

$$u\bar{u} = 1$$

كما نعلم: $\left|\text{عدد عقدي}\right|^2 = \left(\text{مرافق العدد العقدي}\right) \times \left(\text{العدد العقدي}\right)$

$$|u|^2 = 1$$

ومنه:

$$|u| = 1$$

التمرين السابع:

لتكن لدينا المعادلة: $Z^2-(1+i)Z+2+2i=0$

1. أثبت أنّ $Z_1=1-i$ جذراً للمعادلة , ثم أوجد الجذر الآخر وليكن Z_2
2. اكتب Z_1 و Z_2 بالشكل الأسي.

الطلب الأول:

إثبات أنّ $Z_1=1-i$ جذراً للمعادلة , نعوّض:

$$(1-i)^2-(1+i)(1-i)+2+2i \overset{?}{=} 0$$
$$1-2i-1-(1+1)+2+2i$$
$$-2i-2+2+2i$$
$$=0$$

إذاً $Z_1=1-i$ جذراً للمعادلة.

إيجاد الجذر الآخر ويتم وفق:

الشكل العام للمعادلة هو:

$$aZ^2+bZ+c=0$$
$$Z^2-(1+i)Z+2+2i=0$$

ومنه:

$$a=1$$
$$b=-1-i$$
$$c=2+2i$$

لإيجاد Z_2 وفق أحد القانونين الآتيين.

- $Z_1+Z_2=\frac{-b}{a}$
- $Z_1\,.\,Z_2=\frac{c}{a}$

رح نستخدم القانون الأول لحساب Z_2 ويتم وفق:

$$Z_1+Z_2=\frac{-b}{a}$$
$$1-i+Z_2=\frac{-(-1-i)}{1}$$
$$1-i+Z_2=1+i$$
$$Z_2=1+i-1+i$$
$$Z_2=2i$$

الطلب الثاني:

كتابة Z_1 بالشكل الأسي:

$$Z_1=1-i$$
$$x=1\,,y=-1$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$$
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\theta=-\frac{\pi}{4}$$

كتابة Z_2 بالشكل الأسي:

$$Z_2=2i$$
$$Z_2=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

التمرين الثامن:

لتكن النقطتان A و B الممثلة للأعداد العقدية $Z_A = -\sqrt{3} + i$ و $Z_B = -2i$ بالترتيب.

1. أثبت أن النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي 2
2. اكتب Z_A بالشكل الأسي ثم جد العدد العقدي Z_C الممثل للنقطة C التي تجعل المبدأ مركز ثقل المثلث ABC
3. أثبت أنّ $Z_C - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_B - Z_A)$ ثم عيّن طبيعة التحويل الهندسي.
4. عيّن طبيعة المثلث ABC .

الحل:

الطلب الأول:

$$OA = |Z_{\overrightarrow{OA}}| = |Z_A - Z_O|$$
$$= |-\sqrt{3} + i - 0| = |-\sqrt{3} + i|$$
$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$
$$OA = 2$$

$$OB = |Z_{\overrightarrow{OB}}| = |Z_B - Z_O|$$
$$= |-2i - 0| = |-2i|$$
$$= \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4}$$
$$OB = 2$$

وبالتالي فإنّ:

$$OB = OA = r = 2$$

إذاً النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي الـ 2

الطلب الثاني:

كتابة Z_A بالشكل الأسي:

$$Z_A = -\sqrt{3} + i \rightarrow x = -\sqrt{3}\,, y = 1$$

حساب r :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$
$$r = 2$$

حساب $\cos\theta$:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حساب $\sin\theta$:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

وبالتالي فإنّ: $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$$Z_A = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

حساب Z_c :

$$Z_O = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$
$$0 = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$
$$Z_A + Z_B + Z_C = 0$$
$$Z_C = -Z_A - Z_B$$
$$Z_C = \sqrt{3} - i + 2i$$
$$\boldsymbol{Z_C = \sqrt{3} + i}$$

الطلب الثالث:

إثبات المساواة:

$$Z_C - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_B - Z_A)$$

$$L_1 = Z_C - Z_A$$

$$= \sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i = 2\sqrt{3}$$

$$L_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_B - Z_A)$$

كتابة $e^{i\frac{\pi}{3}}$ بالشكل الجبري:

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$L_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-2i + \sqrt{3} - i\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\sqrt{3} - 3i\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} = L_1$$

تعيين طبيعة التحويل الهندسي:

$$Z_C - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_B - Z_A)$$

النقطة C صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$

الطلب الرابع:

$$AB = \left|Z_{\overrightarrow{AB}}\right| = |Z_B - Z_A|$$

$$= \left|-2i + \sqrt{3} - i\right| = \left|\sqrt{3} - 3i\right|$$

$$AB = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$AC = \left|Z_{\overrightarrow{AC}}\right| = |Z_C - Z_A|$$

$$= \left|\sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i\right| = \left|2\sqrt{3}\right|$$

$$AC = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$BC = \left|Z_{\overrightarrow{BC}}\right| = |Z_C - Z_B|$$

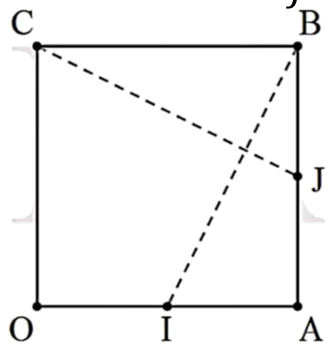
$$= \left|\sqrt{3} + i + 2i\right| = \left|\sqrt{3} + 3i\right|$$

$$BC = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

ومنهُ المثلث ABC مثلث متساوي الأضلاع ^_^

التمرين التاسع:

$OABC$ مربع ; النقطة I هي منتصف القطعة المستقيمة $[OA]$ والنقطة J منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$, نتأمّل المعلم المتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ والمطلوب:



١. اكتب العدد العقدي Z_C بدلالة Z_A ثم اكتب Z_B بدلالة Z_A

٢. اكتب العددين العقديين Z_I و Z_J بدلالة Z_A

٣. احسب $\frac{Z_C - Z_J}{Z_B - Z_I}$ ثم استنتج أنّ $IB = JC$ وأنّ $(IB) \perp (JC)$

الحل:

الطلب الأول:

كتابة Z_c بدلالة Z_A :

C صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$Z_C - Z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_A - Z_O)$$

لدينا النقطة O مبدأ المعلم: وبالتالي $Z_O = 0$

$$Z_C = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_A)$$
$$Z_C = i(Z_A)$$
$$Z_C = i\,Z_A$$

كتابة Z_B بدلالة Z_A :

لدينا $OABC$ مربع وكما نعلم في المربع أنّ كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين وبالتالي:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$$

يُكافئ:

$$Z_{\overrightarrow{OA}} = Z_{\overrightarrow{CB}}$$
$$Z_A - Z_O = Z_B - Z_C$$
$$Z_A = Z_B - Z_C$$
$$Z_B = Z_A + Z_C$$

من سابقاً لدينا $Z_C = i\,Z_A$ نعوّض:

$$Z_B = Z_A + i\,Z_A$$
$$Z_B = Z_A(1+i)$$
$$Z_B = (1+i)Z_A$$

الطلب الثاني:

لدينا النقطة I منتصف القطعة المستقيم $[OA]$

$$Z_I = \frac{Z_O + Z_A}{2}$$
$$Z_I = \frac{Z_A}{2}$$
$$Z_I = \frac{1}{2}Z_A$$

لدينا النقطة J منتصف القطعة المستقيم $[AB]$

$$Z_J = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

من سابقاً لدينا: $Z_B = (1+i)Z_A$

$$Z_J = \frac{Z_A + (1+i)Z_A}{2}$$
$$Z_J = \frac{Z_A[1 + (1+i)]}{3}$$
$$Z_J = \frac{Z_A(1+1+i)}{2}$$
$$Z_J = \frac{Z_A(2+i)}{2}$$
$$Z_J = \frac{(2+i)Z_A}{2}$$
$$Z_J = \frac{2+i}{2}Z_A$$

الطلب الثالث:

حساب النسبة $\frac{Z_C - Z_J}{Z_B - Z_I}$:

$$\frac{Z_C - Z_J}{Z_B - Z_I} = \frac{iZ_A - \frac{2+i}{2}Z_A}{(1+i)Z_A - \frac{1}{2}Z_A}$$

$$= \frac{Z_A\left[i - \frac{2+i}{2}\right]}{Z_A\left[(1+i) - \frac{1}{2}\right]} = \frac{\frac{2i - 2 - i}{2}}{\frac{2 + 2i - 1}{2}}$$

$$= \frac{-2+i}{1+2i} = \frac{(-2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= \frac{-2 + 4i + i + 2}{1+4} = \frac{5i}{5}$$

$$\frac{Z_C - Z_J}{Z_B - Z_I} = i$$

استنتاج أنّ: $IB = JC$

من سابقاً لدينا:

$$\frac{Z_C - Z_J}{Z_B - Z_I} = i$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{JC}}}{Z_{\overrightarrow{IB}}} = i$$

$$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{JC}}}{Z_{\overrightarrow{IB}}}\right| = |i|$$

$$\frac{JC}{IB} = 1$$

جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين ومنهُ:

$$IB = JC$$

استنتاج أنّ: $(IB) \perp (JC)$:

من سابقاً لدينا:

$$\frac{Z_C - Z_J}{Z_B - Z_I} = i$$

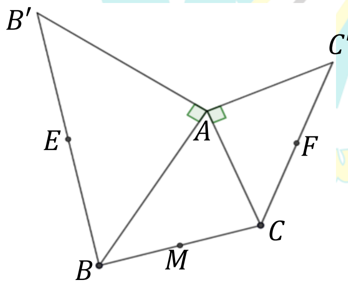
$$\frac{Z_{\overrightarrow{JC}}}{Z_{\overrightarrow{IB}}} = i$$

$$\arg(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{JC}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنهُ المستقيمان (IB) و (JC) متعامدان.

التمرين العاشر:

ABC مثلث مباشر التوجيه , النقطتين B' و C' تجعلان المثلثين $AB'B$ و ACC' قائمين ومتساوي الساقين ولتكن النقاط M و E و F منتصفات الأضلاع $[BC]$ و $[BB']$ و $[CC']$ بالترتيب , نفرض معلماً $(A, \vec{u}, \vec{v})$ معلماً متجانساً ونرمز للأعداد العقدية a و b و c و e و f و m التي تمثل النقاط A و B و C و E و F و M والمطلوب:



١. أثبت أنّ $c' = ic$ و $b' = ib$ ثم اكتب بالشكل الجبري العدد العقدي $\frac{c'-b}{b'-c}$

٢. أثبت أنّ $BC' = CB'$ وأنّ المستقيمين (BC') و (CB') متعامدين

٣. عبّر عن الأعداد العقدية m و e و f بدلالة b و c

٤. أثبت أنّ $\frac{e-m}{f-m} = i$ واستنتج طبيعة المثلث EFM

الحل:

الطلب الأول:

لدينا المثلث ACC' مثلث قائم ومتساوي الساقين

ومنهُ:

C' صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$c' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a)$$

لدينا النقطة A مبدأ المعلم وبالتالي: $a = 0$

$$c' = e^{i\frac{\pi}{2}}(c)$$

$$c' = i\, c$$

وهيك منكون أثبتنا العلاقة الأولى ^_^

لدينا المثلث $AB'B$ مثلث قائم ومتساوي الساقين

ومنهُ:

B' صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$b' - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-a)$$
$$b' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b)$$
$$b' = -i\, b$$

الطلب الثاني:

نشكّل النسبة:

$$w = \frac{Z_{\overrightarrow{BC'}}}{Z_{\overrightarrow{CB'}}}$$
$$w = \frac{Z_{C'} - Z_B}{Z_{B'} - Z_C}$$

لدينا: $b' = -ib$ و $c' = ic$ نعوّض:

$$w = \frac{ic - b}{-ib - c}$$

نضرب بالمرافق:

$$w = \frac{(ic-b)(+ib-c)}{(-ib-c)(+ib-c)}$$
$$w = \frac{-cb - ic^2 - ib^2 + cb}{b^2 + c^2}$$
$$w = \frac{-ib^2 - ic^2}{b^2+c^2}$$
$$w = \frac{-i(b^2+c^2)}{b^2+c^2}$$
$$w = -i$$

إثبات أنّ $BC' = CB'$ ويتم وفق:

من النسبة يلي شكلناها من شوي نجد أنّ:

$$w = \frac{Z_{\overrightarrow{BC'}}}{Z_{\overrightarrow{CB'}}} = -i$$
$$|w| = |-i|$$
$$\frac{BC'}{CB'} = 1$$
$$BC' = CB'$$

إثبات أنّ (CB') و (BC') متعامدان ويتم وفق:

من النسبة يلي شكلناها من شوي نجد أنّ:

$$w = \frac{Z_{\overrightarrow{BC'}}}{Z_{\overrightarrow{CB'}}} = -i$$
$$\arg\left(\overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{BC'}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

ومنهُ نستنتج أنّ:

المستقيمان (CB') و (BC') متعامدان

الطلب الثالث:

النقطة M منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

$$m = \frac{b+c}{2}$$

لدينا E منتصف القطعة المستقيمة $[BB']$

$$e = \frac{b+b'}{2}$$
$$e = \frac{b-ib}{2}$$

لدينا F منتصف القطعة المستقيمة $[CC']$

$$f = \frac{c+c'}{2}$$
$$f = \frac{c+ic}{2}$$

الطلب الرابع:

إثبات أنّ $\frac{e-m}{f-m} = i$

$$\frac{e-m}{f-m} = \frac{\frac{b-ib}{2} - \frac{(b+c)}{2}}{\frac{c+ic}{2} - \frac{(b+c)}{2}}$$
$$= \frac{\frac{b-ib-b-c}{2}}{\frac{c+ic-b-c}{2}} = \frac{-c-ib}{-b+ic}$$
$$= \frac{(-c-ib)(-b-ic)}{(-b+ic)(-b-ic)}$$

$$= \frac{cb + ic^2 + ib^2 - cb}{b^2 + c^2}$$

$$= \frac{ib^2 + ic^2}{b^2 + c^2} = \frac{i(b^2 + c^2)}{b^2 + c^2} = i$$

$$\frac{e - m}{f - m} = i$$

وهيك أثبتنا يلي انطلب منا :)

استنتاج طبيعة المثلث EFM :

لدينا من سابقاً:

$$\frac{e - m}{f - m} = i$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{ME}}}{Z_{\overrightarrow{MF}}} = i$$

نوجد الطويلة وفق:

$$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{ME}}}{Z_{\overrightarrow{MF}}}\right| = |i|$$

$$\frac{ME}{MF} = 1$$

$$ME = MF$$

نوجد الزاوية وفق:

$$\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{ME}}}{Z_{\overrightarrow{MF}}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg\left(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{ME}\right) = \frac{\pi}{2}$$

إذاً المستقيمان (MF) و (ME) متعامدان.

طيب أيي كيف بدنا نحدد نوع المثلث على هالحالة؟ أيي بسيطة جداً , اتخيلوا مثلث بخيالكن, بعد ما اتخيلناه تعالو نحط العلاقات يلي أنا استنتجتهم من النسبة.

العلاقة الأولى:

$$ME = MF$$

من هي العلاقة استنتجنا أنو:

في عندي ضلعين تساويا

العلاقة الثانية:

$$\arg\left(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{ME}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ومن هي العلاقة استنتجنا أنو المستقيمين يلي تساويا من شويي كمان اتعامدو.

طيب هيك صار عندي مثلث فيه:

ضلعين متساويين ومتعامدين ,

شو نوع المثلث يلي بحققلي هدول الشرطين؟؟

طبعاالمثلث القائم والمتساوي الساقين ^_^

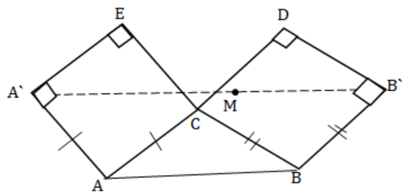
ومنشان تحديد مين الزاوية القائمة.

فالزاوية القائمة هيّة الحرف المشترك بين المستقيمين يلي حكينا عنهم من شويي.

فصار عندي:

المثلث EFM مثلث قائم في M ومتساوي الساقين

التمرين الحادي عشر: ليكن المثلّث ABC في المستوي تنشئ على ضلعيه $[AC]$ و$[BC]$ وخارجه المربعين $ACEA'$ و $CBB'D$ كما في الشّكل المجاور،



تمثّل الأعداد العقديّة a, b, c, a', b' النقاط A, B, C, A', B'.

١. B' هي صورة C وفق دوران مركزه B عيّنه واكتب الصّيغة العقديّة للعدد b' بدلالة b و c

٢. أثبت أنّ $a' = i(c-a) + a$

٣. عين بدلالة a و b العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$

الحل:

الطلب الأول:

لدينا $CBB'D$ مربع ومنهُ:

B' صورة C وفق دوران مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$b' - b = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c-b)$$
$$b' - b = -i(c-b)$$
$$b' = -i(c-b) + b$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ $a' = i(c-a) + a$ وفق:

لدينا $ACEA'$ مربع ومنهُ:

A' صورة C وفق دورا مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$a' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)$$
$$a' - a = i(c-a)$$
$$a' = i(c-a) + a$$

الطلب الثالث:

لدينا M منتصف القطعة المستقيمة $[A'B']$

$$m = \frac{a'+b'}{2}$$
$$m = \frac{i(c-a) + a - i(c-b) + b}{2}$$
$$m = \frac{ic - ia + a - ic + ib + b}{2}$$
$$m = \frac{a + b + ib - ia}{2}$$
$$m = \frac{a + b + (b-a)i}{2}$$
$$m = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}i$$

التمرين الثاني عشر:

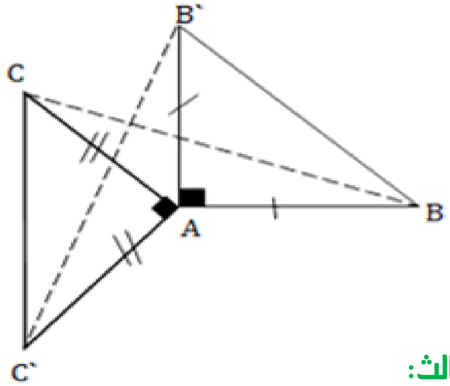
في الشّكل المجاور المثلّثان ABB' و ACC' كلاً منهما قائم في A ومتساوي السّاقين،

تأمّل المعلم المتجانس والمباشر $(A,\vec{u},\vec{v})$

١. اكتب $Z_{B'}$ بدلالة Z_B و$Z_{C'}$ بدلالة Z_C.

٢. احسب $\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}$

٣. استنتج أنّ $(BC) \perp (B'C')$ و $BC = B'C'$



الحل:

الطلب الأول:

كتابة $Z_{B'}$ بدلالة Z_B ويتم وفق:

لدينا المثلث ABB' قائم في A

ومتساوي الساقين ومنهُ:

B' صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$b' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-a)$$

لدينا النقطة A مبدأ المعلم وبالتالي: $a = 0$

$$b' = e^{i\frac{\pi}{2}}(b)$$

$$b' = ib$$

كتابة $Z_{C'}$ بدلالة Z_C ويتم وفق:

لدينا المثلث ACC' قائم في A

ومتساوي الساقين ومنهُ:

C' صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$c' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)$$

$$c' = e^{i\frac{\pi}{2}}(c)$$

$$c' = ic$$

الطلب الثاني:

$$\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C} = \frac{b'-c'}{b-c}$$

$$= \frac{ib-ic}{b-c} = \frac{i(b-c)}{b-c} = i$$

الطلب الثالث:

استنتاج أنّ: $(BC) \perp (B'C')$ ويتم وفق:

من الطلب السابق لدينا:

$$\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C} = i$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{C'B'}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}} = i$$

$$\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{C'B'}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{C'B'}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنهُ $(BC) \perp (B'C')$

استنتاج أنّ: $BC = B'C'$ ويتم وفق:

من الطلب السابق لدينا:

$$\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C} = i$$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{C'B'}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}} = i$$

$$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{C'B'}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}\right| = |i|$$

$$\frac{C'B'}{CB} = 1$$

$$C'B' = CB$$

ومنهُ $BC = B'C'$

كُتبت هذه الورقة وحلّها بحُبّ خالصٍ لكُم أعزائي الطلبة..

دُمتم ودُمنا في توفيقٍ من اللّه..

مُحبكم الأستاذ أيمن عامر :)