بنوك الأعداد العقديّة

1) الجواب: $\overline{z_1} = 2 - 4i$: d .

2) الجواب: $\boxed{b \ : \ \overline{z_3} = \frac{5}{2}i}$.

3) الجواب: $\boxed{a \ : \ 5 + 3i}$:

$$z_1 + z_2 = 2 + 4i + 3 - i = 5 + 3i$$

4) الجواب: $\boxed{a \ : \ -\frac{13}{2}i - 2}$:

$$z_3 - z_1 = -\frac{5}{2}i - 2 - 4i$$
$$= \frac{-5i - 8i}{2} - 2 = -\frac{13}{2}i - 2$$

5) الجواب: $\boxed{c \ : \ 10 + 10i}$:

$$z_1 . z_2 = (2 + 4i)(3 - i)$$
$$= 6 - 2i + 12i - 4i^2$$
$$= 6 + 10i + 4 = 10 + 10i$$

6) الجواب: $\boxed{b \ : \ 0}$:

$$z_3 = 0 - \frac{5}{2}i \implies Re(z_3) = 0$$

7) الجواب: $\boxed{b \ : \ -1}$:

$$z_2 = 3 - 1i \implies Im(z_2) = -1$$

8) الجواب: $\boxed{a \ : \ -12 + 16i}$:

$$z_1^2 = (2 + 4i)^2 = 4 + 16i - 16$$
$$= -12 + 16i$$

9) الجواب: $\boxed{c \ : \ |z_1| = 1}$

$$z_1 = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$
$$z_1 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

بالمطابقة نجد أنّ :

$$|z_1| = r = 1$$

10) الجواب: $\boxed{c \ : |z_2| = 3}$:

$$z_2 = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$
$$z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

بالمطابقة نجد أنّ :

$$|z_2| = r = 3$$

11) الجواب: $\boxed{a \ : \ \overline{z_1} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$:

حسب قاعدة: ((عندما نأخذ مرافق الشكل المثلّثي للعدد العقدي فقط نضع اشارة سالب(-) للزاوية)) .

12) الجواب: $\boxed{c : \overline{z_2} = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$.

13) الجواب: $\boxed{c \ : \arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}}$.

14) الجواب: $\boxed{a : \ \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{3}\right)}$, التفسير:

$$(z_1)^7 = \left(1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^7$$
$$z_1^7 = 1^7\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$$
$$\implies z_1^7 = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$$

15) الجواب:

$$\boxed{d : z_2^3 = 27\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$$

16) الجواب: $\boxed{a : \ 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$:

ضرب الطويلات و جمع الزوايا:

$$z_1 . z_2 = 3 \times 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

17) الجواب: $\boxed{b : \ \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)}$:

قسمة الطويلات و طرح الزوايا:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right.$$
$$\left. + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$$
$$\implies \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

18) الجواب: $\boxed{c : \ 3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)}$:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$\implies \frac{z_2}{z_1} = 3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + isin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

19) الجواب: $\boxed{b \ : \ \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i}$:

$$z = \frac{1}{2 - i}$$

ما بصير يكون في i بالمقام لذلك , نضرب البسط و المقام بمرافق المقام:

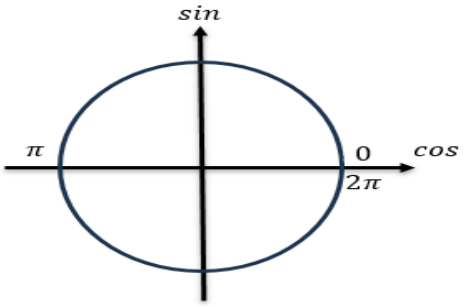
$$z = \frac{2 + i}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i}{4 + 1} = \frac{2 + i}{5}$$
$$\implies z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

20) الجواب: $\boxed{c : \sqrt{2}i}$:

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\implies z = (1 + i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2}i$$

21) الجواب: $\boxed{d\ :\ \text{غير ذلك}}$:

$$z=\sqrt{3}-3+0i$$
$$r=\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2+0^2}=\sqrt{3}-3$$
$$\Rightarrow \cos(\theta)=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-3}=1$$
$$\sin(\theta)=\frac{y}{r}=\frac{0}{\sqrt{3}-3}=0$$



وبالتالي:

$$\theta=0 \text{ أو } \theta=2\pi$$
$$\Rightarrow z=(\sqrt{3}-3)(\cos(0)+i\sin(0))$$

22) الجواب: $\boxed{a\ :\ 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)}$:

$$z=-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$z=-2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$z=2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$z=2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

23) الجواب: $\boxed{a\ :\ \cos(2\pi)+isin(2\pi)}$, التفسير:

$$z^8=\left(\frac{3i-1}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}\right)^8$$

نضرب البسط و المقام بمرافق المقام:

$$z=\frac{(3i-1)(\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)}{(\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)}$$
$$z=\frac{3\sqrt{2}i+6\sqrt{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2+8}$$
$$=\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i}{10}$$
$$=\frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$|z|=r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$$

$$\Rightarrow \cos(\theta)=\frac{x}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin(\theta)=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

و بالتالي فإنّ الشكل المثلّثي ل z يعطى بالشكل:

$$z=1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$\Rightarrow z^8=1^8\left(\cos\left(\frac{8\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{4}\right)\right)$$
$$\Rightarrow z^8=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)$$

24) الجواب: $\boxed{a\ :\ (\sqrt{2}-1)e^{i\frac{4\pi}{3}}}$, التفسير:

$$z=(1-\sqrt{2})\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$=-(\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\pi}(\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$=e^{i\pi+i\frac{\pi}{3}}(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2}-1)\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

25) الجواب: $\boxed{a\ :\ 32e^{-i\frac{4\pi}{3}}}$, التفسير:

$$z=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$$

نفرض:

$$w=\frac{\sqrt{3}-i}{i}$$

نضرب البسط و المقام بمرافق المقام:

$$w=\frac{(\sqrt{3}-i)(-i)}{(i)(-i)}=\frac{-\sqrt{3}i-1}{-i^2}$$
$$=-\sqrt{3}i-1$$
$$\Rightarrow |w|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$
$$\Rightarrow \cos(\theta)=\frac{x}{r}=-\frac{1}{2}$$
$$\sin(\theta)=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow\ \theta=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\Rightarrow w=2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$$
$$z=w^5=\left(2\,e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^5=2^5.e^{i\frac{20\pi}{3}}=32\,e^{i\frac{20\pi}{3}}$$

الإرجاع الى الرّبع الأوّل:

$$\frac{20\pi}{3}=\frac{24\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}=8\pi-\frac{4\pi}{3}=-\frac{4\pi}{3}$$
$$\Rightarrow\ z=32\,e^{-\frac{4\pi}{3}i}$$

26) الجواب: $\boxed{d\ :\ (a\ ,b)}$, التفسير:

$$z=(1+\sqrt{3}i)^4\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

نفرض أنّ:

$$w=1+\sqrt{3}i\Rightarrow x=1\ ,\ y=\sqrt{3}$$
$$r=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$
$$\Rightarrow \cos(\theta)=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و بالتالي فإنّ: $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$w = 2\,e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\Rightarrow w^4 = \left(2\,e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^4 = 2^4\ e^{\frac{4\pi}{3}i} = 16\,e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

و بالتالي إمّا:

$$z = 16\,e^{\frac{4\pi}{3}i}\ e^{\frac{4\pi}{3}i} = 16\,e^{\frac{8\pi}{3}i}$$

أو , بالإرجاع الى الربع الأوّل:

$$\frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

و بالتالي:

$$z = 16\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

27) الجواب: $\boxed{c\ :\ z = 2^{1008}}$, التفسير:

$$(1+i)^{2016} = ((1+i)^2)^{1008} = (2i)^{1008}$$
$$= 2^{1008} \times i^{1008} = 2^{1008} \times i^4$$
$$= 2^{1008} \times 1 = 2^{1008}$$

28) الجواب: $\boxed{c:\ 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$, التفسير:

$$z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نفرض أنّ:

$$w = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نعوّض في z :

$$z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

نضرب الطويلات و نجمع الزوايا:

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

29) الجواب: $\boxed{b:\ z = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}}$, التفسير:

$$\overline{z} = \frac{9}{z} \Rightarrow z.\overline{z} = 9 \Rightarrow |z|^2 = 9 \Rightarrow |z| = 3$$
$$\arg(iz) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{3} - \arg(i)$$
$$\Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow z = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

30) الجواب: $c\ :\ 1$

31) الجواب: $\boxed{c:\ 2[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)]}$,

التفسير:

$$w = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^5$$
$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)^5$$
$$= 2\left(e^{-i\frac{\pi}{5}}\right)^5$$
$$= 2e^{-i\pi}$$
$$= 2(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$$

32) الجواب: $\boxed{b\ :\ -\frac{5\pi}{14}}$, التفسير:

$$z = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right)$$
$$\Rightarrow \overline{z} = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{14}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{14}\right)\right)$$

33) الجواب: $\boxed{d:\ \frac{1}{2}}$, التفسير:

$$z = 1 + i$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i}$$

نضرب بمرافق المقام و نقسم عليه:

$$\frac{1}{z} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$
$$\Rightarrow Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$$

34) الجواب: $\boxed{c\ :\ z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}}$, التفسير:

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$$

نفرض أنّ البسط:

$$u = 1 + \sqrt{3}i$$
$$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2}\ ,\quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

و نفرض أنّ المقام:

$$v = 1 + i \Rightarrow v = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

و بالتالي:

$$z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$$

35) الجواب: $\boxed{c\ :z = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$, التفسير:

$$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}}$$

$$z = \alpha + \alpha^4$$

$$\Rightarrow z = e^{i\frac{2\pi}{5}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$$

$$\frac{8\pi}{5} = \frac{10\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \underbrace{2\pi}_{\text{يهمل}} - \frac{2\pi}{5} = -\frac{2\pi}{5}$$

$$\Rightarrow z = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

36) الجواب: $\boxed{a \ : \ |\overline{z}| = 2}$, التفسير:

$$z = \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^4}$$

نفرض أنّ:

$$u = 1+\sqrt{3}i \Rightarrow u = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

و نفرض أنّ:

$$v = \sqrt{2}+\sqrt{2}i \Rightarrow r = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow v = 2\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\left(2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5}{\left(2\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4} = \frac{2^5\,e^{i\frac{5\pi}{3}}}{2^4\,e^{i\pi}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}-\pi\right)} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \overline{z} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow |\overline{z}| = 2$$

37) الجوب:

$$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

خواص الـ arg

1) الجواب:

$\boxed{a \ : \ \widehat{DEC}}$ المستقيم (EA) منصف للزاوية ,

التفسير:

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

- $\left|\frac{a-e}{d-e}\right| = \left|\frac{c-e}{a-e}\right| \Rightarrow \frac{EA}{ED} = \frac{EC}{EA}$

$\Rightarrow EA^2 = ED\,.\,EC$

- $\arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right) = \arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{ED}\,,\overrightarrow{EA}\right) = \left(\overrightarrow{EA}\,,\overrightarrow{EC}\right)$

$\Rightarrow \widehat{DEA} = \widehat{AEC}$

و بالتالي EA منصّف في المثلّث DEC .

2) الجواب: $\boxed{b}$ قائم في B و متساوي الساقين ,

التفسير:

$$\frac{d-b}{c-b} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

- $\left|\frac{d-b}{c-b}\right| = 1 \Rightarrow \frac{BD}{BC} = 1 \Rightarrow BD = BC$
- $\arg\left(\frac{d-b}{c-b}\right) = \left(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{2}$

و بالتالي المثلث BCD قائم في B و متساوي الساقين.

3) الجواب: $\boxed{b}$ دوران , التفسير:

$$b = ia = e^{i\frac{\pi}{2}}a$$

4) الجواب:

$b \ : \ \arg(z_1) + \arg(z_2)$

5) الجواب:

قائم في B ومتساوي الساقين

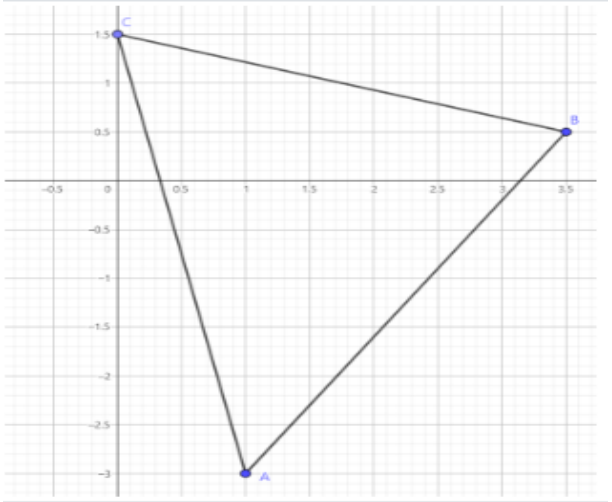
6) الجواب:

$\boxed{a \ : \ 2}$ تحاكٍ نسبته , التفسير:

$$a - 1 = 2b - 2$$

الجواب: a $a - 1 = 2(b-1)$

7) الجواب: $\boxed{c}$, التفسير:



$a = 1 - 3i \Rightarrow A(1, -3)$

$b = \frac{7}{2} + i \Rightarrow B\left(\frac{7}{2}, 1\right)$

$c = \frac{3}{2}i \Rightarrow C\left(0, \frac{3}{2}\right)$

8) الجواب: $\boxed{b: \begin{cases} Z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{2} + 4i \\ Z_{\overrightarrow{AC}} = -1 + \frac{9}{2}i \\ Z_{\overrightarrow{BC}} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}}$, التفسير:

$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$

$= \frac{7}{2} + i - 1 + 3i$

$= 4i + \frac{7}{2} - \frac{2}{2} = \frac{5}{2} + 4i$

$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A$

$= \frac{3}{2}i - 1 + 3i$

$= -1 + \frac{3}{2}i + \frac{6}{2}i = -1 + \frac{9}{2}i$

$Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B$

$= \frac{3}{2}i - \frac{7}{2} - i = \frac{3}{2}i - \frac{2}{2}i - \frac{7}{2}$

$= \frac{1}{2}i - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$

9) الجواب: $\boxed{b: \begin{cases} AB = \frac{\sqrt{89}}{2} \\ AC = \frac{\sqrt{85}}{2} \\ BC = \frac{\sqrt{50}}{2} \end{cases}}$, التفسير:

$AB = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (4)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 16}$

$= \sqrt{\frac{25 + 64}{4}} = \sqrt{\frac{89}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}$

$AC = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{81}{4}}$

$= \sqrt{\frac{4 + 81}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}$

$BC = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49 + 1}{4}}$

$= \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$

10) الجواب: $\boxed{d: \text{مختلف الأضلاع}}$, التفسير:

لنختبر ان كان قائم حسب عكس فيثاغورث:

$L_1 = BC^2 =^? AB^2 + AC^2 = L_2$

$L_1 = \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$

$L_2 = \left(\frac{\sqrt{89}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{85}}{2}\right)^2$

$= \frac{89}{4} + \frac{85}{4} = \frac{174}{4}$

و بالتالي $L_1 \neq L_2$ اذاً المثلث ABC مختلف الأضلاع.

11) الجواب: $\boxed{a: Z_1 = \frac{9}{4} - i}$, التفسير:

$z_1 = \frac{a + b}{2} = \frac{1 - 3i + \frac{7}{2} + i}{2}$

$= \frac{-2i + \frac{9}{2}}{2} = \frac{\frac{9 - 4i}{2}}{2} = \frac{9 - 4i}{4}$

$\Rightarrow z_1 = \frac{9}{4} - i$

12) الجواب: $\boxed{c: g = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}i}$, التفسير:

$z_G = \frac{a + b + c}{3} = \frac{1 - 3i + \frac{7}{2} + i + \frac{3}{2}i}{3}$

$= \frac{-2i + \frac{3}{2}i + \frac{9}{2}}{3} = \frac{\frac{-4i + 3i + 9}{2}}{3}$

$= \frac{-i + 9}{6} = \frac{9}{6} - \frac{1}{6}i = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}i$

13) الجواب: $\boxed{d: Z_M = \frac{11}{4} - \frac{13}{4}i}$, التفسير:

$z_M = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma}$

$= \frac{2(1 - 3i) + 1\left(\frac{7}{2} + i\right) - 1\left(\frac{3}{2}i\right)}{2 + 1 - 1}$

$= \frac{2 - 6i + \frac{7}{2} + i - \frac{3}{2}i}{2} = \frac{2 + \frac{7}{2} - 5i - \frac{3}{2}i}{2}$

$= \frac{\frac{4 + 7 - 10i - 3i}{2}}{2} = \frac{11}{4} - \frac{13}{4}i$

14) الجواب: $\boxed{a: \text{نعم}}$, التفسير:

$Z_{\overrightarrow{OC}} = Z_C - Z_O = \frac{3}{2}i - 0 = \frac{3}{2}i$

$|Z_{\overrightarrow{OC}}| = OC = \sqrt{\frac{9}{4} + 0} = \frac{3}{2} = r$

15) الجواب: $\boxed{a: \text{نعم}}$, التفسير:

$Z_{\overrightarrow{BC}} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$

$|Z_{\overrightarrow{BC}}| = BC = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}}$

$= \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = r$

16) الجواب: مختلف الأضلاع و قائم : b , التفسير:

$Z_A = -2 \ , Z_B = 2 \ , Z_C = -1 + i \ , Z_D = 1 - 3i$

اطوال أضلاع المثلث ACD :

$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A$

$= -1 + i + 2 = 1 + i$

$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{AC}}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$Z_{\overrightarrow{AD}} = Z_D - Z_A$

$= 1 - 3i + 2 = 3 - 3i$

$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{AD}}| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_C - Z_D$

$= -1 + i - 1 + 3i = -2 + 4i$

$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{DC}}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

لنختبر ان كان قائم حسب عكس فيثاغورث:

$L_1 = DC^2 =^? AC^2 + AD^2 = L_2$

$L_1 = DC^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 4 \times 5 = 20$

$L_2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 2 + (3 \times 2)$

$= 2 + 18 = 20$

$\Rightarrow L_1 \neq L_2$

اذاً المثلث ACD قائم في A و مختلف الأضلاع.

17) الجواب: متساوي الساقين و قائم : a , التفسير:

اطوال اضلاع المثلث BCD :

$Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B = -1 + i - 2 = -3 + i$

$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{BC}}| = BC = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$Z_{\overrightarrow{BD}} = Z_D - Z_B = 1 - 3i - 2 = -1 - 3i$

$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{BD}}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$Z_{\overrightarrow{DC}} = -2 + 4i$

$\Rightarrow |Z_{\overrightarrow{DC}}| = DC = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

لنختبر ان كان قائم حسب عكس فيثاغورث:

$L_1 = DC^2 =^? BC^2 + BD^2 = L_2$

$L_1 = \left(\sqrt{20}\right)^2 = 20$

$L_2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10 + 10 = 20$

$\Rightarrow L_1 = L_2$

و بالتالي المثلث BCD قائم في B و متساوي الساقين.

18) الجواب: $d : \ Z_E = -2 - 2i$, التفسير:

$Z_D = 1 - 3i \ , Z_C = -1 + i \ , Z_B = 2$

$Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_{\overrightarrow{DE}}$

$\Rightarrow Z_C - Z_B = Z_E - Z_D$

$-1 + i - 2 = Z_E - 1 + 3i$

$\Rightarrow Z_E = -1 + i - 2 + 1 - 3i$

$\Rightarrow Z_E = -2 - 2i$

19) الجواب: متوازيان : a , التفسير:

$$\frac{Z_C - Z_B}{Z_D - Z_E} = \frac{-1 + i - 2}{1 - 3i + 2 + 2i}$$

$$= \frac{-3 + i}{3 - i} = \frac{-(3 - i)}{3 - i} = -1$$

$$\arg\left(\frac{Z_C - Z_B}{Z_D - Z_E}\right) = \pi$$

و بالتالي المستقيمان ED و BC متوازيان.

20) الجواب: متعامدان : b , التفسير:

$$\frac{Z_D - Z_C}{Z_E - Z_B} = \frac{1 - 3i + 1 - i}{-2 - 2i - 2}$$

$$= \frac{2 - 4i}{-4 - 2i} = \frac{(2 - 4i)(-4 + 2i)}{(-4 - 2i)(-4 + 2i)}$$

$$= \frac{-8 + 4i + 16i + 8}{16 + 4} = \frac{20i}{20} = i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_E - Z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

و بالتالي المستقيمان DC و BE متعامدان.

21) الجواب: $c : \ Z_I = -i$, التفسير:

$$Z_I = \frac{c + d}{2} = \frac{-1 + i + 1 - 3i}{2}$$

$$= -\frac{2i}{2} = -i$$

22) الجواب: تقع على استقامة واحدة : a , التفسير:

$Z_E = -2 - 2i$

$Z_I = -i \ , \quad Z_B = 2$

$Z_{\overrightarrow{IB}} = Z_B - Z_I = 2 + i$

$Z_{\overrightarrow{IE}} = Z_E - Z_I = -2 - 2i + i$

$= -2 - i$

$$\frac{Z_{\overrightarrow{IB}}}{Z_{\overrightarrow{IE}}} = \frac{2 + i}{-2 - i} = \frac{2 + i}{-(2 + i)} = -1$$

$\Rightarrow Z_{\overrightarrow{IB}} = -Z_{\overrightarrow{IE}}$

و منه $\overrightarrow{IE}$ و $\overrightarrow{IB}$ مرتبطان خطيّاً و بالتالي النقاط E, B, I تقع على استقامة واحدة.

23) الجواب: $a : e = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$, التفسير:

$a = 2 - 2i \ , \quad b = -1 + 7i$

$c = 4 + 2i \ , \quad d = -4 - 2i$

$$e = \frac{a + b}{2} = \frac{2 - 2i - 1 + 7i}{2}$$

$$= \frac{1 + 5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

24) الجواب: $c : ACD$ المستقيم منصف في المثلث , التفسير:

$$L_1 = \frac{a - e}{d - e} = \frac{c - e}{a - e} = L_2$$

$$L_1 = \frac{a-e}{d-e} = \frac{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{-4-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}$$
$$= \frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i}{\frac{-8-1}{2}+\frac{-4i-5i}{2}} = \frac{\frac{3-9i}{2}}{\frac{-9-9i}{2}}$$
$$= \frac{3-9i}{-9-9i} = \frac{3(1-3i)(1-i)}{-9(1+i)(1-i)}$$
$$= \frac{3(1-i-3i-3)}{9(1+1)} = \frac{3(-4i-2)}{9\times 2}$$
$$= \frac{-4i-2}{3\times 2} = -\frac{4i}{6}-\frac{2}{6}$$
$$= -\frac{2}{3}i-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(+1+2i)$$

$$L_2 = \frac{c-e}{a-e} = \frac{4+2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}$$
$$= \frac{4-\frac{1}{2}+2i-\frac{5}{2}i}{2-\frac{1}{2}-2i-\frac{5}{2}i} = \frac{\frac{8}{2}-\frac{1}{2}+\frac{4}{2}i-\frac{5}{2}i}{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}-\frac{4}{2}i-\frac{5}{2}i}$$
$$= \frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i} = \frac{(7-i)(3+9i)}{(3-9i)(3+9i)}$$
$$= \frac{21+63i-3i-9\,i^2}{9+81}$$
$$= \frac{(30+60i)\quad\times\frac{1}{10}}{9\quad\times\frac{1}{10}} = \frac{3+6i}{9} = \frac{3}{9}+\frac{6}{9}i$$
$$= \frac{1}{3}+\frac{2}{3}i = \frac{1}{3}(1+2i)$$

و بالتالي:

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

و منه:

$$\left|\frac{a-e}{d-e}\right| = \left|\frac{c-e}{a-e}\right|$$
$$\frac{EA}{ED} = \frac{EC}{EA} \Longrightarrow EA^2 = EC\,.\,ED$$

- $$\arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right) = \arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{ED}\,,\overrightarrow{EA}\right) = \left(\overrightarrow{EA}\,,\overrightarrow{EC}\right)$$
$$\widehat{DEA} = \widehat{AEC}$$

اذاً EA منصّف في المثلث ACD .

25) الجواب: $\boxed{b : e^{\frac{2\pi}{3}i}}$, التفسير:

$$a = 2\,,\quad b = 1+\sqrt{3}i\,,\quad c = -1+\sqrt{3}i$$
$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{2-1-\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}i}{-2} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x = -\frac{1}{2}\,,\quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Longrightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$
$$\Longrightarrow \cos(\theta) = -\frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Longrightarrow \theta = \pi-\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$
$$\Longrightarrow \frac{a-b}{c-b} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$
$$\Longrightarrow \frac{a-b}{c-b} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

26) الجواب: $\boxed{d : i}$, التفسير:

$$a = 8\,,\quad b = -4+4i\,,\quad c = -4i$$
$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4+4i+4i}{8+4i} = \frac{-4+8i}{8-4i}$$
$$= \frac{(-4+8i)(8-4i)}{(8+4i)(8-4i)}$$
$$= \frac{-32+16i+64i+32}{64+16} = \frac{80i}{80} = i$$

27) الجواب: $\boxed{a : \text{قائم و متساوي الساقين}}$, التفسير:

- $$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = |i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$$
$$\frac{CB}{CA} = 1 \Longrightarrow CB = CA$$

- $$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$
$$\Longrightarrow \left(\overrightarrow{CA}\,,\overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{2}$$

و بالتالي المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

28) الجواب: $\boxed{a : \frac{1}{2}}$, التفسير:

$$a = 6-i\,,\quad b = -6+3i$$
$$c = -18+7i$$
$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}$$
$$= \frac{-12+4i}{8i-24} = \frac{4(-3+i)}{8(i+3)}$$
$$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

29) الجواب:

$\boxed{a : \text{النقاط } A,B,C \text{ تقع على استقامة واحدة}}$

,التفسير:

$$\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 2\,AB$$

و بالتالي النقاط $A\,,B\,,C$ تقع على استقامة واحدة.

30) الجواب: $\boxed{b : \frac{\pi}{2}}$, التفسير:

$$d = 1 + 6i$$
$$d - 0 = (a - 0)e^{i\theta} \Rightarrow d = a\,e^{i\theta}$$
$$1 + 6i = (6 - i)e^{i\theta}$$
$$\frac{1 + 6i}{6 - i} = e^{i\theta}$$
$$\frac{(1 + 6i)(6 + i)}{36 + 1} = e^{i\theta}$$
$$\frac{6 + i + 36i - 6}{37} = e^{i\theta}$$
$$\Rightarrow \frac{37i}{37} = e^{i\theta} \Rightarrow i = e^{i\theta} \Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\theta}$$

بالمقارنة نجد:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

31) الجواب: $\boxed{c : \sqrt{3}i}$, التفسير:

$$a = -1\ , \quad b = 2 + \sqrt{3}i$$
$$c = \overline{b} = 2 - \sqrt{3}i\ , \quad d = 3$$
$$\frac{a - c}{d - c} = \frac{-1 - (2 - \sqrt{3}i)}{3 - (2 - \sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1 - 2 + \sqrt{3}i}{3 - 2 + \sqrt{3}i} = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i}$$
$$= \frac{(-3 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-3 + 3\sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 3}{1 + 3} = \frac{4\sqrt{3}i}{4} = \sqrt{3}i$$

32) الجواب: $\boxed{b : \frac{\pi}{2}}$, التفسير:

- $\left|\frac{a - c}{d - c}\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \sqrt{3} \Rightarrow CA = \sqrt{3}CD$$

اذا غير متساوي الساقين

- $\arg\left(\frac{a - c}{d - c}\right) = \arg(\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{CD}\,, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$$

33) الجواب: $\boxed{d : \text{قائم الزاوية}}$, التفسير:

$$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A = 2 - \sqrt{3}i + 1 = 3 - \sqrt{3}i$$
$$Z_{\overrightarrow{AD}} = Z_D - Z_A = 3 + 1 = 4$$
$$Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_C - Z_D = 2 - \sqrt{3}i - 3 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$AD = \sqrt{16} = 4$$
$$DC = \sqrt{1 + 3} = 2$$

حسب عكس فيثاغورث:

$$L_1 = AD^2 =^? AC^2 + DC^2 = L_2$$
$$L_1 = (4)^2 = 16$$
$$L_2 = 12 + 4 = 16$$
$$\Rightarrow L_1 = L_2$$

و بالتالي المثلث ADC قائم.

34) الجواب: $\boxed{a : b = 3 - i}$, التفسير:

$$\vec{w}(2\,, -2)$$
$$b = a + 2 - 2i$$
$$b = 1 + i + 2 - 2i$$
$$b = 3 - i$$

35) الجواب: $\boxed{d : c = 0}$, التفسير:

$$z' - w = k(z - w)$$
$$c - 2 - 2i = 2(a - 2 - 2i)$$
$$c - 2 - 2i = 2(1 + i - 2 - 2i)$$
$$c - 2 - 2i = 2(-1 - i)$$
$$\Rightarrow c = 2 + 2i - 2 - 2i = 0$$

36) الجواب: $\boxed{b : d = 2 + 2i}$, التفسير:

$$d - 0 = 2(a - 0) \Rightarrow d = 2a$$
$$\Rightarrow d = 2(1 + i) \Rightarrow d = 2 + 2i$$

37) الجواب: $\boxed{a : e = 1 - 3i}$, التفسير:

$$e - 3 + i = e^{\frac{\pi}{2}i}(a - 3 + i)$$
$$\Rightarrow e - 3 + i = i(1 + i - 3 + i)$$
$$\Rightarrow e - 3 + i = i(2i - 2)$$
$$\Rightarrow e = -2 - 2i + 3 - i$$
$$\Rightarrow e = 1 - 3i$$

38) الجواب: $\boxed{c : m = \sqrt{2}i}$, التفسير:

$$m = e^{\frac{\pi}{4}i}\,a$$
$$\Rightarrow m = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)(1 + i)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(1 + i)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2}i$$

39) الجواب: $\boxed{d : b = 1 + 3i}$, التفسير:

$$z' = \overline{z} \Rightarrow b = \overline{a} = 1 + 3i$$

40) الجواب: $\boxed{c : c = -1 + 3i}$, التفسير:

$$z' = -z \Rightarrow c = -a = -1 + 3i$$

41) الجواب: $\boxed{c : d = -1 + 3i}$, التفسير:

$$d - 0 = -(a - 0)$$
$$\Rightarrow d = -a = -1 + 3i$$

42) الجواب: $\boxed{a : e = 3 - 7i}$, التفسير:

$$e - (2 - 5i) = -(a - 2 + 5i)$$
$$\Rightarrow e - 2 + 5i = -(1 - 3i - 2 + 5i)$$
$$\Rightarrow e - 2 + 5i = -(2i - 1)$$

$\Rightarrow e-2+5i=-2i+1$
$\Rightarrow e=3-7i$

43) الجواب: $\boxed{b\ :\ b+i(b-c)}$, التفسير:

$b'-b=e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-b)$
$\Rightarrow b'-b=-i(c-b)$
$\Rightarrow b'-b=-ic+ib$
$\Rightarrow b'=b+i(b-c)$

44) الجواب: $\boxed{a\ :\ a'=a+i(c-a)}$, التفسير:

$a'-a=e^{\frac{\pi}{2}i}(c-a)$
$\Rightarrow a'-a=i(c-a)$
$\Rightarrow a'=a+i(c-a)$

45) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{(b+a)+i(b-a)}{2}}$, التفسير:

$M=\frac{a'+b'}{2}$

$\Rightarrow M=\frac{a+i(c-a)+b+i(b-c)}{2}$
$\Rightarrow M=\frac{a+ic-ia+b+ib-ic}{2}$
$\Rightarrow M=\frac{(a+b)+i(b-a)}{2}$

46) الجواب: $\boxed{a\ :\ \begin{cases} n=\frac{b+c}{2} \\ b'=ib \\ c'=-ic \end{cases}}$, التفسير:

$n=\frac{c+b}{2}$

b' صورة b وفق دوران مركزه A و زاويته:

$\theta=\frac{\pi}{2}$

و بالتالي:

$b'-a=e^{\frac{\pi}{2}i}(b-a)$
$\Rightarrow b'=ib$

c' صورة c وفق دوران مركزه A و زاويته:

$\theta=-\frac{\pi}{2}$

و بالتالي:

$c'-a=e^{-\frac{\pi}{2}i}(c-a)$
$\Rightarrow c'-a=-i(c-a)$
$\Rightarrow c'=-ic$

47) الجواب: $\boxed{b\ :\ -i}$, التفسير:

$\frac{c'-b}{c-b'}=\frac{-ic-b}{c-ib}$
$=\frac{(-ic-b)(c+ib)}{c^2+b^2}$
$=\frac{-ic^2+cb-bc-ib^2}{c^2+b^2}$
$=\frac{-i(c^2+b^2)}{c^2+b^2}=-i$

الجواب: $\boxed{d\ :\ e^{-\frac{\pi}{2}i}}$, التفسير:

$-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$

48) الجواب: $\boxed{b\ :\ \text{متعامدان و متساويان}}$, التفسير:

من النسبة:

$\frac{c'-b}{c-b'}=-i$

نجد أنّ:

- $\arg\left(\frac{c'-b}{c-b'}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{BC'}\right)=-\frac{\pi}{2}$

و بالتالي المستقيمان (BC') و $(B'C)$ متعامدان.

- $\left|\frac{c'-b}{c-b'}\right|=|-i|$

$\Rightarrow \sqrt{(-i)^2}=1$
$\Rightarrow \frac{BC'}{B'C}=1 \Rightarrow BC'=B'C$

و بالتالي المستقيمان (BC') و $(B'C)$ متساويان.

49) الجواب: $\boxed{a\ :\ \begin{cases} a=3\ ,\ b=4 \\ c=7\ ,\ d=7+i \\ e=6+3i \end{cases}}$, التفسير:

$A(3\ ,0)\Rightarrow a=3$
$B(4\ ,0)\Rightarrow b=4$
$D(7\ ,1)\Rightarrow d=7+i$
$E(6\ ,3)\Rightarrow e=6+3i$

50) الجواب: $\boxed{d\ :\ \begin{cases} Z_{\overrightarrow{BD}}=3+i \\ Z_{\overrightarrow{AE}}=3+3i \\ Z_{\overrightarrow{OE}}=6+3i \end{cases}}$, التفسير:

$Z_{\overrightarrow{OE}}=e-o=3+3i$
$Z_{\overrightarrow{AE}}=e-a=6+3i-3=3+3i$
$Z_{\overrightarrow{BD}}=d-b=7+i-4=3+i$

51) الجواب: $\boxed{a\ :\ 90i}$, التفسير:

$Z_{\overrightarrow{BD}}.Z_{\overrightarrow{AE}}.Z_{\overrightarrow{OE}}$
$=(3+i)(3+3i)(6+3i)$
$=(9+9i+3i-3)(6+3i)$
$=(6+12i)(6+3i)$
$=36+18i+72i-36$
$=90i$

52) الجواب: $\boxed{c:90\,e^{\frac{\pi}{2}i}}$, التفسير:

$90i=90\,e^{\frac{\pi}{2}i}$

53) الجواب: $\boxed{b:\frac{\pi}{2}}$, التفسير:

$\alpha+\beta+\gamma=\arg\big((3+i)(3+3i)(6+3i)\big)$
$=\arg(90i)=\frac{\pi}{2}$

54)

المعادلات العقديّة

1) الجواب: $\boxed{c\ :\ -1}$, التفسير:

$$3z-2=6z+1$$
$$-1-2=6z-3z$$
$$-3=3z \Longrightarrow z=-1$$

2) الجواب: $\boxed{c\ :\ 2+i}$, التفسير:

$$2z+i\overline{z}=5+4i$$

نفرض:

$$z=x+iy \Longrightarrow \overline{z}=x-iy$$

و بالتالي يكون:

$$2(x+iy)+i(x-iy)=5+4i$$
$$\Longrightarrow 2x+2iy+xi+y=5+4i$$
$$\Longrightarrow 2x+y+(2y+x)i=5+4i$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2x+y=5 & \dots(1) \\ 2y+x=4 & \dots(2) \quad \times -2 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x+y=5 & \dots(1) \\ -4y-2x=-8 & \dots(2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$-3y=-3 \Longrightarrow y=1$$

نعوّض في (1) :

$$2x+y=5 \Longrightarrow 2x+1=5$$
$$\Longrightarrow 2x=4 \Longrightarrow x=2$$
$$\Longrightarrow z=2+i$$

3) الجواب: $\boxed{d\ :\ 3i}$, التفسير:

$$\frac{\overline{z}-3}{\overline{z}+3}=i$$

نأخذ مرافق الطرفين:

$$\frac{z-3}{z+3}=-i$$

نضرب الوسطين بالطرفين:

$$z-3=-iz-3i$$
$$z+iz=3-3i$$
$$z(1+i)=3(1-i)$$
$$\Longrightarrow z=\frac{3(1-i)}{1+i}$$

نضرب البسط و المقام بمرافق المقام:

$$z=\frac{3(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3(1-i)^2}{1+1}$$
$$=\frac{3(-2i)}{2}=\frac{-6i}{2}=-3i$$

و بالتالي فإنّ:

$$\overline{z}=3i$$

4) الجواب: $\boxed{a\ :\ 0\ ,-\frac{3}{7i}}$, التفسير:

$$7z^2=-3i\,z$$
$$\Longrightarrow 7z^2+3i\,z=0$$
$$\Longrightarrow z(7z+3i)=0$$

إمّا: $z=0$

أو: $7z+3i=0$ و بالتالي:

$$7z=-3i \Longrightarrow z=-\frac{3}{7i}$$

5) الجواب: $\boxed{b:\overline{z}=1-i}$, التفسير:

$$-7\,\overline{z}=-7+7i$$

نقسم على -7 :

$$\overline{z}=1-i$$

6) **34)** الجواب: $\boxed{c\ :\ 5\ ,-5}$, التفسير:

$$4\,z^2-100=0$$
$$\Longrightarrow 4\,z^2=100$$
$$\Longrightarrow z^2=\frac{100}{4}=25$$

نجذر الطرفين:

$$\sqrt{z^2}=\sqrt{25} \Longrightarrow z=|5|$$
$$\Longrightarrow z=+5\ ,\ z=-5$$

7) الجواب: $\boxed{c\ :\ z_1=3+2i\,,z_2=-3-2i}$,

التفسير:

$$z^2=5+12i$$

نفرض w هو الجذر التربيعي لِ z :

$$x^2+y^2=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13 \quad \dots(1)$$
$$x^2-y^2=5 \quad \dots.(2)$$
$$2xy=12>0 \quad \dots.(3)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2x^2=18 \Longrightarrow x^2=9$$
$$x=3\ ,\ x=-3$$

بطرح (1) و (2) نجد:

$$2y^2=8 \Longrightarrow y^2=4$$
$$y=2\ ,\ y=-2$$

و بالتالي تكون الحلول:

$$z_1=3+2i \quad , \quad z_2=-3-2i$$

8) الجواب: $\boxed{c:z_1=1+2i\ ,\ z_2=-1-i}$,

التفسير:

$$i\,z^2+z+3+i=0$$
$$a=i\ ,\ b=1\ ,\ c=3+i$$
$$\Delta=b^2-4ac=1-4(i)(3+i)$$
$$=1-12i+4=5-12i$$

نفرض w هو الجذر التربيعي لِ Δ :

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+144}$$
$$\Longrightarrow x^2+y^2=\sqrt{169}=13 \quad \dots(1)$$
$$x^2-y^2=a=5 \quad \dots(2)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2x^2=18 \Longrightarrow x^2=9$$
$$x=3\ ,\ x=-3$$

بطرح (1) و (2) نجد:

$$2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4$$
$$y = 2 \ , \ y = -2$$

و بالتالي تكون الحلول:

$$w_1 = 3 - 2i \ \ , \ \ w_2 = -3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{-1 - 3 + 2i}{2i}$$
$$= \frac{-4 + 2i}{2i} = \frac{(-4 + 2i)(-2i)}{(2i)(-2i)}$$
$$= \frac{8i + 4}{4} \Rightarrow z_1 = 1 + 2i$$
$$\Rightarrow z_2 = \frac{-b + w_2}{2a} = \frac{(-1 + 3 - 2i)(-2i)}{(2i)(-2i)}$$
$$= \frac{(2 - 2i)(-2i)}{4} = \frac{-4i - 4}{4} \Rightarrow z_2 = -1 - i$$

9) الجواب: $\boxed{b \ : z = \frac{1+\sqrt{3}}{2}}$, التفسير:

$$z^2 - (1 + \sqrt{3})z + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$a = 1 \ , \quad b = -1 - \sqrt{3} \ , \ c = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1 - \sqrt{3})^2 - 4(1)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4 - 2\sqrt{3} = 1 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow z = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1 - \sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

10) الجواب: $\boxed{c : \begin{cases} 1+i \\ 1-\sqrt{3}i \\ 1+\sqrt{3}i \end{cases}}$, التفسير:

$$(z - 1 - i)(z^2 - 2z + 4) = 0$$

إمّا: $z - 1 - i = 0$ و بالتالي:

$$z_1 = 1 + i$$

أو: $z^2 - 2z + 4 = 0$ و بالتالي:

$$a = 1 \ , \quad b = -2 \ , \ c = 4$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(4)$$
$$= 4 - 16 = -12 < 0$$

و منه للمعادلة حلّان عقديّان مترافقان:

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - i\sqrt{12}}{2}$$
$$= \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$
$$z_3 = \overline{z_2} = 1 + i\sqrt{3}$$

11) الجواب: $\boxed{b : \ z_1 = 1 \, , z_2 = -2}$, التفسير:

$$(2 - z - z^2)^3 = 0$$
$$(-z^2 - z + 2)^3 = 0$$

نفرض أنّ:

$$w = -z^2 - z + 2$$
$$\Rightarrow a = -1 \ , \ \ b = -1 \, , \ c = 2$$
$$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(-1)(2)$$
$$= 1 + 4(2) = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 3}{2(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$
$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 3}{2(-1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

12) الجواب: $\boxed{b : \begin{cases} 3e^{i\frac{3\pi}{2}} \\ 3e^{i\frac{\pi}{3}} \\ 3e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{cases}}$, التفسير:

$$z^3 = 27i \Rightarrow z^3 - 27i = 0$$
$$\Rightarrow z^3 + (3i)^3 = 0$$
$$\Rightarrow (z + 3i)(z^2 - 3iz - 9) = 0$$

و بالتالي إمّا :

$$z = -3i \ \Rightarrow z = 3\, e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

أو:

$$z^2 - 3iz - 9 = 0$$
$$\Rightarrow a = 1 \ , \ \ b = -3i \, , \ c = -9$$
$$\Rightarrow \Delta = -9 - 4(1)(-9) = -9 + 36$$
$$\Rightarrow \Delta = 27 > 0 \ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

و منه يوجد للمعادلة جذرين مختلفين:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3i - 3\sqrt{3}}{2}$$
$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$
$$r_1 = \sqrt{\frac{9 \times 3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin(\theta) = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$
$$\Rightarrow z_1 = 3\, e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3i + 3\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$
$$r_2 = 3 \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow \sin(\theta) = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow z_2 = 3\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

13) الجواب: $\boxed{b: \text{تخيّلي بحت}}$, التفسير:

$$w = \frac{z - u\,\overline{z}}{i - iu}$$

$$; |u| = 1 \ , \ \overline{u} = \frac{1}{u}$$

لنحسب مرافق w :

$$\overline{w} = \frac{\overline{z} - \overline{u}\,z}{-i - i\overline{u}} = \frac{\overline{z} - \frac{1}{u}\,z}{-i + i\frac{1}{u}}$$

$$= \frac{\frac{\overline{z}\,u - z}{u}}{\frac{-iu + i}{u}} = \frac{\overline{z}u - z}{-iu + i} = \frac{-(z - u\overline{z})}{i - ui}$$

$$\Rightarrow \overline{w} = -w$$

و بالتالي w تخيّلي بحت.

14) الجواب: $\boxed{b: \ |Z|^2 + |Z'|^2}$, التفسير:

$$|z - z'|^2 + z'\overline{z} + z\,\overline{z}' =$$
$$(z - z')\left(\overline{z} - \overline{z}'\right) + z'\overline{z} + z\,\overline{z}' =$$
$$z\,\overline{z} - z\,\overline{z}' - z'\overline{z} + z'\overline{z}' + z'\overline{z} + z\,\overline{z}' =$$
$$z\,\overline{z} + z'\overline{z}' = |Z|^2 + |Z'|^2$$

15) الجواب: $\boxed{c: 1}$, التفسير:

$$z = \sin(\theta) + i\cos(\theta)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$
$$\Rightarrow |z| = 1$$

16) الجواب: $\boxed{a: \frac{\pi}{4}}$, التفسير:

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

17) الجواب: $\boxed{c: \frac{\sqrt{2}}{2}}$, التفسير:

من الطلب السابق (44).

18) الجواب: $\boxed{a: \text{حقيقي}}$, التفسير:

$$|z| = 1 \ , \quad \overline{z} = \frac{1}{z}$$
$$|w| = 1 \ , \quad \overline{w} = \frac{1}{w}$$
$$z = \frac{z + w}{zw + 1}$$
$$\overline{z} = \frac{\overline{z} + \overline{w}}{\overline{zw} + 1} = \frac{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{w}\right)}{\frac{1}{zw} + 1}$$
$$= \frac{\frac{w + z}{zw}}{\frac{1 + wz}{zw}} = \frac{w + z}{zw + 1}$$
$$\Rightarrow \overline{z} = z$$

إذاً z حقيقي.

19) الجواب: $\boxed{a: P(z) = (z - 1)(5z^2 + 2z + 1)}$,

التفسير:

$$P(z) = 5z^3 - 3z^2 - z - 1$$

لنجرّب:

$$P(+1) = 5 - 3 - 1 - 1 = 2 - 2 = 0$$

اذاً بالقسمة الإقليديّة ل $P(z)$ على $(z - 1)$ نجد:

$$P(z) = (z - 1)(5z^2 + 2z + 1)$$

20) الجواب: $\boxed{c: \left\{1, -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\,, -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right\}}$, التفسير:

$$P(z) = 0$$
$$(z - 1)(5z^2 + 2z + 1) = 0$$

إمّا:

$$z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$$

أو:

$$5z^2 + 2z + 1 = 0$$
$$a = 5 \ , \ \ b = 2 \ , \ \ c = 1$$
$$\Rightarrow \Delta = 4 - 4(5)(1) = 4 - 20 = -16 < 0$$

و بالتالي للمعادلة حلّان مترافقان:

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2 - i\sqrt{16}}{2(5)}$$
$$= -\frac{2}{10} - \frac{4}{10}i = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$
$$\Rightarrow z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

21) الجواب: $\boxed{d: 0}$, التفسير:

$$P(z) = 2z^3 - 5z^2 + 3z - 2$$
$$\Rightarrow P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 3(2) - 2$$
$$= 16 - 20 + 6 - 2 = 20 - 20 = 0$$

22) الجواب: $\boxed{d: P(z) = (z + 2)(2z^2 - z + 1)}$,

التفسير:

بالقسمة الإقليدية لِ $P(z)$ على $(z - 2)$

23) الجواب: $\boxed{a: \ 3}$, التفسير:

لأنَّ $P(z)$ معادلة من الدرجة الثالثة.

24) الجواب: $\boxed{d: z = 1 - i}$, التفسير:

$$2iz + \overline{z} = 3 + 3i$$

نفرض أنَّ:

$$z = a + ib \quad , \quad \overline{z} = a - ib$$

و بالتالي:

$$2i(a + ib) + (a - ib) = 3 + 3i$$
$$\Rightarrow 2ia - 2b + a - ib = 3 + 3i$$

$$\Rightarrow a-2b+i(2a-b)=3+3i$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a-2b=3 \ \dots(1) \\ 2a-b=3 \ \dots(2) \end{cases}$$

من (1) نجد:

$$a=3+2b \ \dots(*)$$

نعوّض في (2):

$$2(3+2b)-b=3$$
$$\Rightarrow 6+4b-b=3$$
$$\Rightarrow 6+3b=3$$
$$\Rightarrow 3b=-3 \Rightarrow b=-1$$

نعوّض في (*):

$$\Rightarrow a=3-2=1$$
$$\Rightarrow z=1-i$$

25) الجواب: $\boxed{b: p=i-2 \ , \ q=3-i}$, التفسير:

$$z_1=1+i \ \ , \ z_2=1-2i$$
$$z^2+pz+q=0$$
$$p=z_1+z_2$$
$$=1+i+1-2i=2-i$$
$$\Rightarrow p=i-2$$
$$q=z_1.z_2=(1+i)(1-2i)$$
$$=1-2i+i+2=3-i$$

26) الجواب: a

$$z_1=e^{-ix} \ \ , \ z_2=e^{ix}$$
$$p=z_1+z_2=e^{-ix}+e^{ix}$$
$$=2\cos(x) \Rightarrow p=-2\cos(x)$$
$$q=z_1.z_2=e^{-ix}.e^{ix}=e^0=1$$

المجموعات النقطيّة

1) الجواب: $\boxed{b}$, تمثل نصف المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل.

2) الجواب: $\boxed{b: \text{تمثّل محور لقطعة مستقيمة}}$,

التفسير:

$$|2z-4+6i|=|2z-4|$$
$$\Rightarrow |z-2+3i|=|z-2|$$
$$\Rightarrow |z-(2-3i)|=|z-2|$$

3) الجواب: $\boxed{b: \ x=2 \text{ المستقيم الشاقولي}}$.

4) الجواب: $\boxed{c: \frac{3\pi}{14}}$, التفسير:

$$\theta=-\frac{25\pi}{14}=-\frac{28\pi}{14}+\frac{3\pi}{14}=\underbrace{-2\pi}_{\text{يُهمل}}+\frac{3\pi}{14}=\frac{3\pi}{14}$$

5) الجواب: $\boxed{b: -\frac{5\pi}{6}}$, التفسير:

$$\theta=\frac{7\pi}{6}=\frac{12\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}=\underbrace{2\pi}_{\text{يُهمل}}-\frac{5\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$$

6) الجواب: $\boxed{b: \ (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})}$.

7) الجواب: $\boxed{a: \ |z|=\sqrt{2}}$, التفسير:

$$z=-\frac{\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\pi}\frac{\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$=e^{i\frac{4\pi}{3}}\frac{\sqrt{2}}{1+i}=e^{i\frac{4\pi}{3}}\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$=\sqrt{2}\,e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\,e^{\frac{16\pi-3\pi i}{12}}$$
$$\Rightarrow z=\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}} \Rightarrow |z|=\sqrt{2}$$

8) الجواب: **23**

$\boxed{b: Cos(a+b)=cosa\,cosb-sina\,sinb}$,

التفسير:

$$z=e^{ia} \ \ , \ \ z'=e^{ib}$$
$$zz'=e^{ib}e^{ia}=e^{i(a+b)}$$
$$zz'=\cos(a+b)+i\sin(a+b)$$
$$\cos(a+b)=\cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b)$$

9) الجواب: $\boxed{b \ : \ z=e^{-ix}}$, التفسير:

$$z=\frac{1+\cos(x)-i\sin(x)}{1+\cos(x)+i\sin(x)}$$
$$=\frac{1+e^{-ix}}{1+e^{ix}}=\frac{e^{-ix}(e^{ix}+1)}{1+e^{ix}}=e^{-ix}$$

10) الجواب: $\boxed{b: xy=\alpha\beta}$, التفسير:

$$a=\alpha+i\,\beta$$
$$z=x+i\,y$$
$$z^2-a^2=\overline{z}^2-\overline{a}^2$$
$$\underbrace{(x+iy)^2-(\alpha+i\beta)^2}_{L_1}=\underbrace{(x-iy)^2-(\alpha-i\beta)^2}_{L_2}$$

$$L_1=(x+iy)^2-(\alpha+i\beta)^2$$
$$=x^2+2xyi-y^2-(\alpha^2+2\alpha\beta i-\beta^2)$$
$$=x^2+2xyi-y^2-\alpha^2-2\alpha\beta i+\beta^2$$
$$L_2=(x-yi)^2-(\alpha-\beta i)^2$$
$$=x^2-2xyi-y^2-(\alpha^2-2\alpha\beta i-\beta^2)$$
$$=x^2-2xyi-y^2-\alpha^2+2\alpha\beta i+\beta^2$$

$$\Rightarrow x^2+2xyi-y^2-\alpha^2-2\alpha\beta i+\beta^2$$
$$=x^2-2xyi-y^2-\alpha^2+2\alpha\beta i+\beta^2$$

$$\Rightarrow 2xyi+2xyi-2\alpha\beta i-2\alpha\beta i=0$$
$$\Rightarrow 4xyi=4\alpha\beta i$$

بالمطابقة نجد:

$$4xy=4\alpha\beta$$
$$\Rightarrow xy=\alpha\beta$$

11) الجواب: $\boxed{b \ : \ t=i\tan(\theta)}$, التفسير:

$$t=\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1}$$

نفرض أنّ البسط:

$$u=e^{2i\theta}-1$$

و نفرض أنّ المقام:

$$v = e^{2i\theta} + 1$$

و بالتالي:

$$u = e^{2i\theta} - 1 = e^{i(\theta+\theta)} - e^{i0}$$
$$= e^{i(\theta+\theta)} - e^{i(\theta-\theta)} = e^{i\theta}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$
$$= e^{i\theta}(2i\sin(\theta))$$

$$v = e^{2i\theta} + 1 = e^{i(\theta+\theta)} + e^{i0}$$
$$= e^{i(\theta+\theta)} + e^{i(\theta-\theta)} = e^{i\theta}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$$
$$= e^{i\theta}(2\cos(\theta))$$

نعوّض في t :

$$t = \frac{e^{i\theta}(2i\sin(\theta))}{e^{i\theta}(2\cos(\theta))} = i\tan(\theta)$$

12) الجواب: $\boxed{c \ : \ z_1 + z_2 = 0}$, التفسير:

$$w = -3 + 4i$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \ldots (1)$$
$$x^2 - y^2 = a = -3 \quad \ldots . (2)$$
$$2xy = +4 > 0 \quad \ldots . (3)$$

$\boldsymbol{y}$ و $\boldsymbol{x}$ لهما نفس الإشارة, بجمع (1) و (2) نجد:

$$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$$
$$\Rightarrow x = -1 \ , \ x = 1$$

بطرح (1) و (2) نجد:

$$2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4$$
$$\Rightarrow y = -2 \ , \ y = 2$$

و بالتالي:

$$z_1 = -1 - 2i \ , \ z_2 = +1 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 0$$

13) الجواب: $\boxed{c : 0}$.

14) الجواب: $\boxed{c : 0}$.

15) الجواب: $\boxed{c \ : \ 0}$, التفسير:

$$z = e^{i\frac{2\pi}{11}}$$
$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{10}$$
$$= z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + \cdots + z^{10}$$
$$= \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^0 + \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^1 + \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^2$$
$$+ \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^3 + \cdots + \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^{10}$$

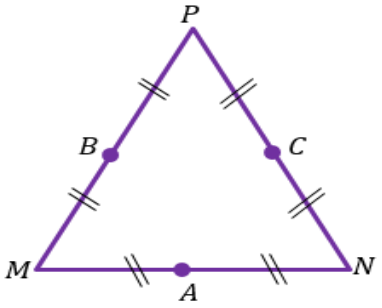
و هي متتالية هندسيّة أساسها:

$$q = e^{i\frac{2\pi}{11}}$$

مجموعها يُعطى بِ:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{(1)\left(1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^{11}\right)}{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)}$$
$$= \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{11}}} = \frac{1-1}{1 - e^{i\frac{2\pi}{11}}} = \frac{0}{1 - e^{i\frac{2\pi}{11}}} = 0$$

16) الجواب: $\boxed{a \ : \ g' = g}$, التفسير:



$$c = \frac{n+p}{2} \ , \ b = \frac{m+p}{2} \ , \ a = \frac{m+n}{2}$$
$$\Rightarrow g = \frac{\frac{m+n}{2} + \frac{m+p}{2} + \frac{n+p}{2}}{3}$$
$$= \frac{n+p+m}{3} = g' \Rightarrow g = g'$$

17) الجواب:

c محور لقطعة مستقيمة.

التحليل التوافقي والاحتمالات

1) الجواب:

$$b \ : \ (3!)^2 = (3 \times 2 \times 1)^2 = (6)^2 = 36$$

2) الجواب:

$$c \ : \ P_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

3) الجواب:

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

4) الجواب:

$$b \ : \ P_4^3 \times 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$= 576$$

5) الجواب:

$$a \ : \ 7 \times 3 \times 2 \times 1 = 42$$

6) الجواب: $\boldsymbol{c}$

$$P_{n+2}^3 = 6P_{n+2}^1$$
$$n+2 \geq 3 \quad n+2 \geq 1$$
$$n \geq 1 \quad n \geq -1$$
$$(n+2)(n+1)n = 6(n+2)$$
$$\Rightarrow n^2 + n = 6$$
$$n^2 + n - 6 = 0$$
$$(n+6)(n-5) = 0$$

$n = -6$ مرفوض

$n = 5$ مقبول

7) الجواب: $\boldsymbol{c}$

$$3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2} \ , \ n \geq 4 \quad n \geq 2$$

$$\frac{3n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}=\frac{14n(n-1)}{2\times1}$$
$$n^2-5n+6=56$$
$$n^2-5n-50=0$$
$$(n-10)(n+5)=0$$
$n=10$ مقبول

$n=-5$ مرفوض

8) الجواب: c

$$\binom{10}{3n}=\binom{10}{n+2}$$
$10\geq 2n$ $\quad$ $10\geq n+2$
$n\leq 5$ $\quad$ $n\leq 8$
$3n+4+2=10$ $\quad$ $3n=n+2$
$4n+2=10$ $\quad$ $n=1$
$4n=8$ $\quad$ $n=2$

9) الجواب: b

$$\binom{10}{2n}=\binom{10}{n+1}$$
$10\geq 2n$ $\quad$ $10\geq n+1$
$n\leq 5$ $\quad$ $n\leq 9$
$2n+n+1=10$ $\quad$ $2n=n+1$
$n=3$ $\quad$ $n=1$

مسائل التوافيق

1) الجواب:

45 مصافحة، حيثُ:

$$\binom{10}{2}=\frac{10\times2}{2\times1}=\frac{90}{2}=45$$

2) الجواب:

44 مصافحة، حيثُ:

$$\binom{10}{2}-\binom{2}{2}=45-1=44$$

3) الجواب: الجواب 6 حيثُ:

$$\binom{4}{2}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

4) الجواب:

n عدد الأشخاص

$$\binom{n}{2}=66\ ;n\geq2\quad,\quad P_2^n=66$$
$$\frac{(n)(n-1)}{2}=66$$
$$\Rightarrow\frac{n^2-n}{2}=66\Rightarrow n^2-n=132$$
$$\Rightarrow n^2-n-132=0$$
$$\Rightarrow(n-12)(n+11)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}n=12 & \text{مقبول}\\ n=-11 & \text{مرفوض}\end{cases}\Rightarrow n=12$$

5) الجواب c:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

6) الجواب a:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

7) الجواب i: b

8) الجواب 1: a

9) الجواب b:

$$\frac{3\pi}{8}$$

10) الجواب b:

$$\frac{2-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i$$

11) الجواب:

$\binom{8}{3}=72$ مثلث

12) الجواب:

$$\binom{9}{3}=84$$

13) الجواب: 16 مثلث قائم:

$4\times4=16$

14) الجواب:

$$\binom{8}{4}=70$$

15) الجواب: 6 مستطيلات

16) الجواب: 24 مثلّث منفرج الزاوية.

17) الجواب: 20

18) الجواب: عدد متوازيات الأضلاع 60 حيثُ:

$$\binom{5}{2}.\binom{4}{2}=\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}=10\times6=60$$

19) المستقيمات المتوازية:

$$\binom{4}{2}\binom{3}{2}+\binom{4}{2}\binom{2}{2}+\binom{3}{2}\binom{2}{2}$$
$$=(6)(3)+(6)(1)+(3)(1)=27$$

20) توزيع 4 قوالب على أربع تلاميذ:

$4!=4\times3\times2\times1=24$

$n=24\times10=240$ طريقة

21) لدينا:

$$P_7^6=7.6.5.4.3.2=5040$$

22) لدينا:

$$\binom{10}{4} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$$

23) شركة توليدو:

عدد طرق اختيار مدير عام 15

عدد طرق اختيار أمين سر 14

وبالتالي:

$n = 15 \times 14 = 210$ طريقة

24) الجواب: $\boxed{b : 504}$, التفسير:

$\{0,0,2,2,2,3,3,3,3\}$

$P_9^3 = 504$

25) الجواب: $\boxed{b : 42}$, التفسير:

$\{0,0,2\}\ \{0,0,3\} = 42$

26) الجواب: $\boxed{c : 132}$, التفسير:

$\{2,2,2\}\{2,3,3\}\{3,3,3\} = 132$

27) الجواب: $\boxed{d : 20}$, التفسير:

$$\binom{6}{3} = 20$$

28) الجواب: $\boxed{d : 60}$, التفسير:

$$P_5^2 \times \frac{3!}{2!} = 20 \times \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$$

29) الجواب: $\boxed{a : 90}$, التفسير:

$$5^2 \frac{3!}{2!} + 5^1 \frac{3!}{2!}$$

$$25 \times 3 + 15 = 90$$

30) الجواب: $\boxed{b : 5}$, التفسير:

$$P_5^1 \times \frac{3!}{3!} = 5$$

31) الجواب: $\boxed{a : 156}$, التفسير:

$$5^3 + 1^3 + 5^2 \times 1^1 + 5^1 \times 1^1$$

$$= 125 + 1 + 25 + 5 = 156$$

32) الجواب: $\boxed{c : 80}$, التفسير:

$$P_5^3 + P_5^2 \times P_1^1$$

$$= 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 1$$

$$= 60 + 20 = 80$$

33) يمكن حساب المئات بـ 5 طريقة

يمكن حساب العشرات بـ 6 طريقة

يمكن حساب الآحاد بـ 3 طريقة

$5.6.3 = 90$

34) يمكن حساب المئات بـ 6 طريقة

يمكن حساب العشرات بـ 6 طريقة

يمكن حساب الآحاد بـ 1طريقة

$6.6.1 = 36$

35) نميز حالتين:

الحالة (1): إذا تم أخذ الصفر في خانة الآحاد:

يمكن حساب المئات بـ 5 طريقة

يمكن حساب العشرات بـ 4 طريقة

يمكن حساب الآحاد بـ 1طريقة

$5.4.1 = 20$

الحالة (2): إذا لم يتم أخذ الصفر في خانة الآحاد:

يمكن حساب المئات بـ 4 طريقة

يمكن حساب العشرات بـ 4 طريقة

يمكن حساب الآحاد بـ 1 طريقة

$4.4.1 = 16$

ومجموع الطرق الكلية:

$20 + 16 = 36$

36) الجواب:

5 نوطات ، 4 مكثفات

$$\underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}_{\text{الخانات المتبقية}} \times \underbrace{\underline{3}}_{\text{خانة 3}} \times \underbrace{\underline{4}}_{\text{خانة 2}} \times \underbrace{\underline{5}}_{\text{خانة 1}}$$

$\Rightarrow n = 43200$

37) الجواب: اختيار لجنة مع تخاصم:

م : متخاصم (2)

م′ : غير متخاصم (5)

$$\{\text{م م′ م′} \times \frac{3!}{2!} \text{ أو } \text{م′ م′ م′}\}$$

$\Rightarrow n = 2 \times 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 3$

$= 120 + 60 = 180$

حول منشور ثنائي الحد

1) الجواب

2) الجواب

3) الجواب:

آحاد وعشرات العدد 11^{11} :

$$11^{11} = (1+10)^{11}$$
$$T_r = \binom{11}{r}(1)^{11-r}(10)^r$$
$$= \binom{11}{r}(10)^r$$

إذاً الحدود $T_1, T_2, \dots, T_{11}$ هي من مضاعفات المئة أي أنّ الآحاد والعشرات 1 لأنّ:

$$T_0 + T_1 = 111$$

4) الجواب:

5) الجواب:

6) الجواب:

$$f(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^3}{8}$$
$$= \frac{1}{8}\left[\binom{3}{0}.e^{3ix}.e^{-0xi} + \binom{3}{1}.e^{2xi}.e^{-1xi} + \binom{3}{2}.e^{1xi}.e^{-2xi} + \binom{3}{3}e^{0xi}.e^{-3xi}\right]$$
$$= \frac{1}{8}(e^{3xi}+3e^{xi}+3e^{-xi}+e^{-3xi})$$
$$= \frac{1}{8}(3[e^{xi}+e^{-xi}]+[e^{3xi}+e^{-3xi}])$$
$$= \frac{1}{8}(6\cos(x)+2\cos(3x)$$
$$= \frac{6}{8}\cos(x)+\frac{2}{8}\cos(3x)$$
$$= \frac{3}{4}\cos(x)+\frac{1}{4}\cos(3x)$$

7) الجواب:

$$f(x) = \sin^3(x)$$
$$f(x) = \left(\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{xi}-e^{-xi})^3}{-8i}$$
$$= -\frac{1}{8i}\left[\binom{3}{0}e^{3xi}.e^{0xi} - \binom{3}{1}e^{2xi}.e^{-1xi} + \binom{3}{2}e^{1xi}.e^{-2xi} - \binom{3}{3}e^{0xi}.e^{-3xi}\right]$$
$$= -\frac{1}{8i}(e^{3xi}-3e^{xi}+3e^{-xi}-e^{-3xi})$$
$$= -\frac{1}{8i}(2i\sin(3x)-6i\sin(x))$$
$$= -\frac{2}{8}\sin(3x)+\frac{6}{8}\sin(x)$$

8) الجواب:

حسب اوبيتال:

$$\frac{-3sin(3x)}{-sin(x)} = \frac{3sin(3x)}{sin(x)}$$

$$lim_{x\to+\frac{\pi}{2}}\frac{3sin(3x)}{sin(x)} = -\frac{3}{1} = -3$$

9) الجواب:

الحد الذي يحوي x^2 :

$$T_r = \binom{n}{r}.a^{n-r}.b^r$$
$$T_r = \binom{10}{r}.x^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{10}{r}.x^{10-2r}$$
$$10-2r = 2 \Longrightarrow r = 4$$
$$\Longrightarrow T_4 = \binom{10}{4}.x^2 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}x^2$$
$$\Longrightarrow T_4 = 210\,x^2$$

10) الجواب:

خواص n ليكون هناك حد ثابت:

$$\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n \quad ; \quad a = x\,, b = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$T_r = \binom{n}{r}.x^{n-r}.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r$$
$$= \binom{n}{r}.x^{n-r}.x^{-\frac{1}{2}r}$$
$$= \binom{n}{r}.x^{n-\frac{3}{2}r}$$
$$n-\frac{3}{2}r = 0 \Longrightarrow n = \frac{3}{2}r \Longrightarrow r = \frac{2}{3}n$$

ومنه n يجب أن يكون من مضاعفات العدد 3

11) الجواب:

$$(2+10)^{12} = \binom{12}{r}2^{10-r}.10^r$$

$$T_0 = \binom{12}{0}.2^{12}.10^0 = 4096$$

$$T_1 = \binom{12}{1}2^{11}.10^1 = 245760$$

الآحاد: $T_0 = 4096$

العشرات: $T_0 + T_1 = 4096 + 245760 = 249{,}856$

12) الجواب:

القيم المحتملة للمجموع $a+b$:

نجد أنّ $f'(a)=5a+4b$ وبحسب الفرض:

$$5a+4b=62$$

ولكن a و b موجبان

$$4(a+b)\le 5a+4b\le 5(a+b)$$

وهذا يكافئ:

$$\frac{62}{5}\le a+b\le \frac{62}{4}$$
$$\Rightarrow 12.4\le a+b\le 15.5$$
$$\Rightarrow a+b\in\{13\,,14\,,15\}$$

13) الجواب:

نعمل شبكة سحب تتالي بدون إعادة: نحذف

القطر الرئيسي:

-	1	1	2	2	3
1					
1					
2					
2					
3					

$$n=4$$

14) الجواب:

$$n=5$$

15) الجواب:

$$n=12$$

16) الجواب:

3 كتب لـ A ، 4 كتب لـ B

$$\underbrace{1}_{\text{خانة 7}}\times\underbrace{2}_{\text{خانة 6}}\times\underbrace{3}_{\text{خانة 5}}\times\underbrace{4}_{\text{خانة 4}}\times\underbrace{2}_{\text{خانة 3}}\times\underbrace{3}_{\text{خانة 2}}$$
$$\times\underbrace{4}_{\text{خانة 1}}$$
$$\Rightarrow n=576$$

17) الجواب:

3 كتب لـ A ، 4 كتب لـ B

$$1\times2\times3\times4\times5\times6\times\underbrace{4}_{\text{خانة 1}}$$
$$\Rightarrow n=2880$$

18) الجواب:

$$\frac{1}{\binom{4}{r}}=\frac{1}{\binom{5}{r}}+\frac{1}{\binom{6}{r}}$$
$$\frac{1}{\frac{4!}{r!\,(4-r)!}}=\frac{1}{\frac{5!}{r!\,(5-r)!}}+\frac{1}{\frac{6i}{r!\,(6-r)!}}$$
$$\underbrace{\frac{(4-r)!}{4\times3\times2\times1}}_{(30)}=\underbrace{\frac{(5-r)!}{5\times4\times3\times2\times1}}_{(6)}+\underbrace{\frac{(6-r)!}{6\times5\times4\times3\times2\times1}}_{(1)}$$
$$\frac{30(4-r)!}{720}=\frac{6(5-r)!}{720}+\frac{1(6-r)!}{720}$$
$$\Rightarrow 30(4-r)!=(6(5-r)(4-r)!)+(6-r)(5-r)(4-r)!$$
$$\Rightarrow 30=30-6r+(6-r)(5-r)$$
$$\Rightarrow 30=30-6r+30-6r-5r+r^2$$
$$\Rightarrow r^2-17r+30=0$$
$$\Rightarrow (r-15)(r-2)=0$$
$$\Rightarrow r=15\quad,\quad r=2$$

19) الجواب:

مضاعفات 5 / أصغر من 500 :

شرط الآحاد $\{5\}$ ، شرط المئات $\{2\,,3\}$

عدد طرق اختيار الآحاد 1

عدد طرق اختيار العشرات 4

عدد طرق اختيار المئات 2

$$\Rightarrow n=1\times2\times4=8$$

20) الجواب:

مصافحة مع 3 متخاصمين:

$$\binom{10}{2}-\binom{3}{2}=\frac{10\times9}{2\times1}-3$$
$$=45-3=42 \text{ مصافحة}$$

مقدمة في الاحتمالات

التمرين (1)

1) $\{1\,,3\,,5\}$

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

2) $\{2\,,3\,,5\}$

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

3) $\{4\,,5\,,6\}$

$$P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

4) $C\cup B=\{2\,,3\,,5\,,4\,,5\,,6\}$

$$P(C\cup B)=\frac{5}{6}$$

5) $A\cup B=\{1\,,3\,,5\,,2\,,3\,,5\}$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

6) الجواب:

$$P(B \cap C) = \frac{1}{6}$$

7) الجواب:

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$$

8) الجواب:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

التمرين (2) :

$$P(F \cap R) = P(F) + P(R) - P(A \cup R)$$
$$= \frac{30}{100} + \frac{40}{100} - \frac{60}{100}$$
$$= \frac{10}{100} = 10\%$$

يدرسون اللغتين معاً.

الاحتمال الشرطي

التمرين (1) :

1) نكتب فضاء العينة:

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} BBBB \\ BBBG, BBGB, BGBB, GBBB \\ GGGB, GGBG, GBGG, BGGG \\ BGBG, GBGB, BBGG, GGBB \\ BGGB, GBBG \\ GGGG \end{matrix} \right\}$$

2) الجواب:

$$P(C) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

3) الجواب:

$$P(A) = \frac{2}{16}$$

4) الجواب:

$$P(B) = \frac{6}{16}$$

5) الجواب:

$$P(A \backslash C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{8}{16}} = \frac{1}{8}$$

6) الجواب:

$$P(B \backslash C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{8}{16}} = \frac{3}{8}$$

7) الجواب: مستقلان

8) $X = \{0\,,1\,,2\,,3\,,4\}$

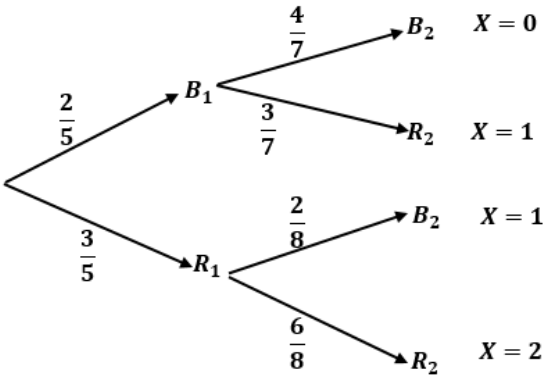
9) الجواب:

$$P(X = 4) = \frac{1}{16}$$

10) الجواب:

$$P(X = 1) = \frac{4}{16}$$

المسألة الأولى :



1) $P(R_2) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2)$
$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{6}{8} = \frac{87}{140}$

2) S : $R_1 \cap R_2$ أو $B_1 \cap B_2$

$$\Rightarrow P(S) = \frac{3}{5} \times \frac{6}{8} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{63}{140} + \frac{8}{35} = \frac{95}{140}$$

3) $P(B_1) = \frac{2}{5}$

4) طريقة 1 :

S' : $R_1 \cap B_2$ أو $B_1 \cap R_2$

طريقة 2 :

$$P(S') = 1 - P(S) = 1 - \frac{95}{140} = \frac{45}{140}$$

5) $X = \{0\,,1\,,2\}$

6)

$$E(x) = \frac{6}{35} + \frac{6}{40} + \frac{18}{40}$$

المسألة الثانية:

-	B_2	B_1	R_1	R_2	w_1
B_2					
B_1					
R_1					
R_2					
w_1					

1) اهتمام باللون:

$$P(A) = \frac{9}{25}$$

2)
$$P(A') = 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

3)
$$P(C) = \frac{11}{25}$$

4)
$$P(D) = \frac{12}{25}$$

5)
$$P(A \cap C) = \frac{3}{25}$$

المسألة الثالثة:

إعادة المسألة الثانية ولكن السحب دون إعادة.

	R_0	R_1	B_1	B_2	W_1
R_0	///////	$X=1$	$X=1$	$X=2$	$X=1$
R_1	$X=1$	///////	$X=2$	$X=3$	$X=2$
B_1	$X=1$	$X=2$	///////	$X=3$	$X=2$
B_2	$X=2$	$X=3$	$X=3$	///////	$X=3$
W_1	$X=1$	$X=2$	$X=2$	$X=3$	///////

1)
$$\mathrm{P(A)} = \frac{4}{20}$$

2)
$$P(A') = 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{14}{20} = \frac{16}{20}$$

3)
$$P(B) = \frac{8}{20}$$

4)
$$P(C) = \frac{12}{20}$$

5) حدث مستحيل:

$$P(D) = P(A \cap B) = 0$$

$$X = \{1, 2, 3\}$$

x_i	1	2	3	$\sum$
P_i	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	1

$$E(x) = \sum x_i P_i = \frac{6}{20} + \frac{16}{20} + \frac{18}{20} = \frac{40}{20} = 2$$

المسألة الرابعة:

	R_0	R_1	B_1	B_2	W_1
R_0	//////	$X=1$	$X=1$	$X=2$	$X=1$
R_1	//////	//////	$X=2$	$X=3$	$X=3$
B_1	//////	//////	//////	$X=3$	$X=2$
B_2	//////	//////	//////	//////	$X=3$
W_1	//////	//////	//////	//////	//////

1)
$$P(A) = \frac{5}{10}$$

2)
$$P(B) = \frac{23}{10}$$

3)
$$P(C) = \frac{3}{10}$$

4)
$$P(D) = \frac{7}{10}$$

5) حدث مستحيل حيثُ:

$$P(A \cap C) = 0$$

6)
$$X = \{1, 2, 3\}$$

x_i	1	2	3	$\sum$
P_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

7)
$$E(x) = \frac{3}{10} + \frac{6}{10} + \frac{12}{10} = \frac{21}{10}$$

8)
$$V(x) = \left(\frac{3}{10} + \frac{12}{10} + \frac{36}{10}\right) - \frac{441}{100} = \frac{4659}{100}$$
$$\Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{4659}{100}} = \frac{\sqrt{4659}}{10}$$

المسألة الخامسة:

سحب ثلاث كرات معاً:

$$n(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

1) A : RRR أو WWW

$$n(A) = \binom{6}{3} + \binom{3}{3} = 20 + 1 = 21$$
$$\Rightarrow P(A) = \frac{21}{120}$$

2) B : RRR'

$$\Rightarrow n(B) = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} = 60$$
$$\Rightarrow P(B) = \frac{60}{120}$$

3) C : RWB

$$\Rightarrow n(C) = \binom{6}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{1}{1} = 18$$
$$\Rightarrow P(C) = \frac{18}{120}$$

4) D : $RR'R'$, RRR' , RRR

$$n(D) = \binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2} + \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{6}{3}$$
$$= (6)(6) + (15)(4) + 20$$
$$= 36 + 60 + 20 = 116$$
$$\Rightarrow P(D) = \frac{116}{120}$$

المسألة السادسة:

$6\,R$, $3W$, $1B$

1) RRR أو WWW

$$P(A) = \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} + \frac{3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8} = \frac{126}{720}$$

2) تباديل RRR'

$$P(B) = \frac{6 \times 5 \times 4}{720} \times \frac{3!}{2!} = \frac{360}{720}$$

3)

$$P(C) = \frac{6 \times 4 \times 1}{720} \times 6 = \frac{144}{720}$$

4) حدث ظهور ثلاث كرات غير حمراء

E' : $R'R'R'$

$$P(E') = \frac{4 \times 3 \times 2}{720} = \frac{14}{720}$$

$$\begin{cases} RR'R' \\ RRR' \\ RRR \end{cases} \Rightarrow P(E) = 1 - \frac{14}{720} = \frac{706}{720}$$

5)

$$P(D) = \frac{1 \times 9 \times 8}{720} \times 3 = \frac{216}{720}$$

المسألة السابعة:

1) RRR أو WWW أو BBB

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{244}{1000}$$

2) RRR' $\frac{3!}{2!}$

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{4}{10}\right)(3) = \frac{432}{1000}$$

3) RWB $\frac{3!}{1!}$

$$\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)(6) = \frac{108}{1000}$$

4) E حدث ظهور كرة حمراء على الأقل.

E' حدث ظهور ثلاث كرات غير حمراء.

E' : $R'R'R'$

$$\Rightarrow P(E') = \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{4}{10}\right) = \frac{64}{1000}$$
$$\Rightarrow P(E) = 1 - \frac{64}{1000} = \frac{936}{1000}$$

5) F حدث ظهور كرة سوداء على الأقل.

F' حدث ظهور ثلاث كرات غير سوداء.

F' : $B'B'B'$

$$\Rightarrow P(F') = \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{729}{1000}$$
$$\Rightarrow P(F) = 1 - \frac{729}{1000} = \frac{271}{1000}$$

6) X يدل على السوداء

$X = 2$ BBB'
$X = 3$ BBB
$X = 0$ $B'B'B'$
$X = 1$ $BB'B'$
$\Rightarrow X = \{0\,,1\,,2\,,3\}$

المسألة الثامنة:

	B_1	B_2	B_3	R_1	R_2
B_1	///////	$X=1$	$X=1$	$X=2$	$X=2$
B_2	///////	///////	$X=1$	$X=2$	$X=2$
B_3	///////	///////	///////	$X=2$	$X=2$
R_1	///////	///////	///////	///////	$X=1$
R_2	///////	///////	///////	///////	///////

1)

$$P(A) = \frac{5}{10}$$

2)

$$P(B)=\frac{4}{10}$$

3)

$$P(B\backslash A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{5}{10}}=\frac{1}{5}$$

4) X عدد الألوان

$$X=\{1\,,2\}$$

5)

x_i	1	2	$\sum$
P_i	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	1

$$E(x)=\frac{4}{10}+\frac{12}{10}=\frac{16}{10}$$

6)

$$V(x)=\left(\frac{4}{10}+\frac{24}{10}\right)-\left(\frac{16}{10}\right)^2$$
$$=\frac{26}{10}-\frac{256}{100}=\frac{4}{100}$$

7)

$$\gamma=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{4}{100}}=\frac{2}{10}$$

المسألة التاسعة:

	1	1	2	2	3
1	//////	$X=2$	$X=3$	$X=3$	$X=4$
1	$X=2$	//////	$X=3$	$X=3$	$X=4$
2	$X=3$	$X=3$	//////	$X=4$	$X=5$
2	$X=3$	$X=3$	$X=4$	//////	$X=5$
3	$X=4$	$X=4$	$X=5$	$X=5$	//////

X مجموع الرقم الظاهر:

$$X=\{2\,,3\,,4\,,5\}$$

x_i	2	3	4	5	$\sum$
P_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$	1

$$E(x)=\frac{4}{20}+\frac{24}{20}+\frac{24}{20}+\frac{20}{20}=\frac{72}{20}$$

$$V(x)=\left(\frac{8}{20}+\frac{72}{20}+\frac{96}{20}+\frac{100}{20}\right)-\frac{5184}{400}=\frac{336}{400}$$

$$\Rightarrow \gamma=\sqrt{\frac{336}{400}}$$

المسألة العاشرة:

	R_1	B_2	B_3
R_1	$y=2$ $x=0$	$x=1$ $y=3$	$x=1$ $y=4$
B_2	$y=3$ $x=1$	$x=2$ $y=4$	$x=2$ $y=5$
B_3	$y=4$ $x=1$	$x=2$ $y=5$	$x=2$ $y=6$

قيم x:

$$x\ :\ \{0\,,1\,,2\}$$

قيم y:

$$y\ :\ \{2\,,3\,,4\,,5\,,6\}$$

قانون x:

$$P(X=0)=\frac{1}{9}$$
$$P(X=1)=\frac{4}{9}$$
$$P(X=2)=\frac{4}{9}$$

x_i	0	1	2	$\sum$
P_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

قانون y:

y_i	2	3	4	5	6	$\sum$
P_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

القانون الاحتمالي للزوج:

$X\backslash Y$	2	3	4	5	6	قانون x
0	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	$\frac{1}{9}$
1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{4}{9}$
2	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
قانون y	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$$P(X=0\cap Y=2)=\frac{1}{9}$$

دراسة الاستقلال:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$
$$P(X=0\cap Y=2)=\frac{1}{9}$$
$$P(X=0).P(Y=2)=\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)$$
$$\frac{1}{9}\neq\frac{1}{9}.\frac{1}{9}$$ غير مستقلان

المسألة 11:

-	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

عبي القيم لحالك.

1) $P(X=0)=\frac{18}{36}$

2) $P(Y=2)=\frac{9}{36}$

3) لدينا:

$$P(X=0\cap Y=2)=\frac{9}{36}$$

نختبر شرط الاستقلال:

$$P(X=0).P(Y=2)=\frac{18}{36}.\frac{9}{36}=\frac{1}{8}$$

$$P(X=0\cap Y=2)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

إذن غير مستقلان احتمالياً

المسألة 12:

$$E=\{X_A=2\,,X_B=1\}\cup\{X_A=1\,,X_B=2\}\cup\{X_A=1\,,X_B=1\}$$

$$\Rightarrow P(E)=[P(X_A\,,X_B)=(2\,,1)]+[P(X_A,X_B)=(2\,,1)]+[P(X_A\,,X_B)=(1\,,1)]$$

وبما أنّ الحدثان مستقلان احتمالياً:

$$P(X_A\,,X_B)=P(X_A).P(X_B)$$

$$\Rightarrow P(E)=0.04+0.06+0.1=0.2$$

المسألة 13:

$X\setminus Y$	0	1	2	قانون x
0	0.12	0.20	0.08	0.4
1	0.06	0.10	0.04	0.20
2	0.12	0.20	0.08	0.4
قانون y	0.3	0.50	0.20	1.0

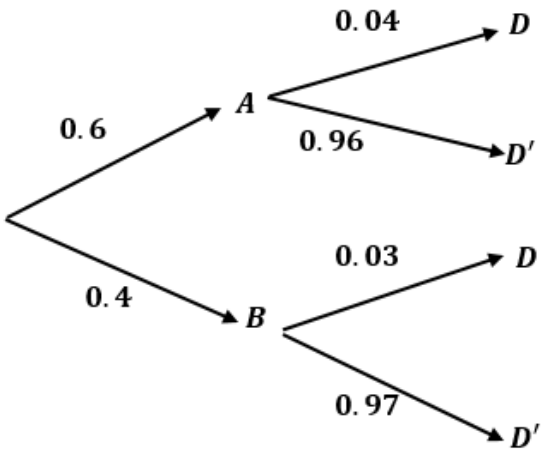
$$P(X=1).P(Y=1)=P(X=1\cap Y=1)$$

$$x\times 0.2=0.1\Rightarrow x=\frac{0.1}{0.2}=0.5$$

وهكذا .....

قواعد استخدام التمثيل الشجري

المسألة الأولى :



1)

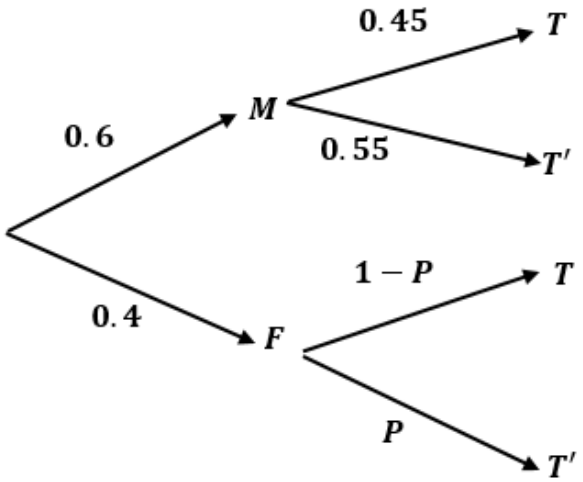
$$P(D)=(0.6)(0.004)+(0.4)(0.03)=0.036$$

2)

$$P(A\backslash D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{(0.6)(0.04)}{0.036}=\frac{2}{3}$$

المسألة الثانية:

T يلعبون ، T' لا يلعبون



$$P(T'\backslash F)=?$$

$$P(T'\backslash M)=0.55$$
$$P(T)=0.3$$
$$P(M)=0.6$$

$$P(T) = 0.4(1-P) + (0.6)(0.45) = 0.925$$
$$= P(T'\backslash F)$$

المسألة الثالثة:

$$P(A).P(C) = P(A \cap C) \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}P\right) = \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{18}+\frac{2}{9}P = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2}{9}P = \frac{1}{6}-\frac{1}{18} \Rightarrow \frac{2}{9}P = \frac{2}{18} \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

المسألة الرابعة:

$$X = \{2\,,3\,,4\}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{4}\times\frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

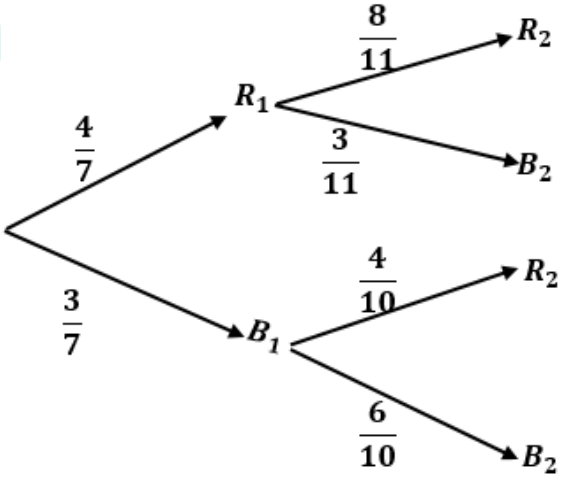
$$P(X=3) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{10}$$

$$P(X=4) = 1-[P(X=2)+P(X=3)] = \frac{3}{5}$$

x_i	2	3	4
P_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

$$E(x) = 3.5$$

المسألة الخامسة:



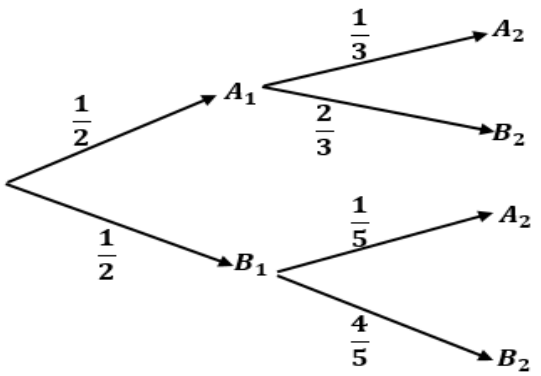
$$P(R_2) = \frac{4}{7}\times\frac{8}{11}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{10} = \frac{32}{77}+\frac{12}{70} = \frac{3164}{5396} = \frac{791}{1349}$$

$$P(B_1\backslash R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{12}{70}}{\frac{791}{1349}}$$

$$= \frac{12}{70}\times\frac{1349}{791} = \frac{16188}{55370}$$

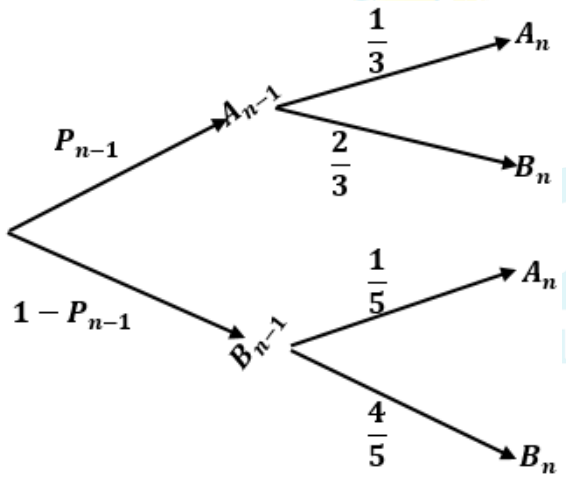
المسألة السادسة:

(1



$$P_2 = P(A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}$$

(2



$$P_n = P(A_n) = P_{n-1}\times\frac{1}{3}+(1-P_{n-1})\times\frac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{5}+\frac{2}{15}P_{n-1}$$

(3

$$u_n = P_n - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}P_{n-1}+\frac{1}{5}-\frac{3}{13}$$
$$= \frac{2}{15}P_{n-1}-\frac{2}{65}$$
$$= \frac{2}{15}u_{n-1}$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{15}u_{n-1}$$

هندسية أساسها:

$$q = \frac{2}{15}$$

وحدّها الأوّل:

$$u_1 = P_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$$

4) $u_n = q^{n-1} . u_1$

$$\Rightarrow u_n = \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$$

$$P_n = \frac{3}{13} + \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{3}{13} + \frac{7}{26}(0) = \frac{3}{13}$$

المسألة السابعة:

1) الجواب:

$$c \ : \frac{1}{4}$$

2) الجواب:

$$c : \frac{1}{4}\, P(R_1) + \frac{1}{4}$$

3) الجواب:

$$c \ : \ \frac{1}{4} P(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$$

4) الجواب:

هندسيّة أساسها $c : \frac{1}{4}$

5) الجواب:

$$c : -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

6) الجواب:

$$c : \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{3}$$

التجربة البرنولية

التمرين (1):

تجربة برنوليّة: $n = 5$

1) $X = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$

2) $P(X = 0) = ?$

$$P = \frac{2}{6} \quad ; \quad q = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$

$$P(X = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$= 1 \times \frac{32}{243} = \frac{32}{243}$$

3) $E(x) = n.P$

$$\Rightarrow E(x) = 5 \times \frac{2}{6} = \frac{10}{6}$$

4) $V(x) = n.q.P$

$$\Rightarrow V(x) = 5 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{9}$$

التمرين (2):

n هي احتمال ظهور كتابة.

$2n$ هي احتمال ظهور صورة.

1) $X = \{0 , 1 , 2 , 3\}$

2) عدد مرات الرمي $n = 3$; $E(x) = n.p$

$$P = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow E(x) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

3) $V(x) = n.p.q$

$$\Rightarrow V(x) = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

التمرين (3):

1) عدد الكرات البيضاء n

عدد الكرات الحمراء $3n$

$$3n + n = 4n$$

$$P(R) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

2) $X = \{0 , 1 , 2 , 3\}$

$$P = \frac{3}{4} \ , \ q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

والسحب هنا $n = 3$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

التمرين (4):

قيمة n : $n = 4$

قيمة P : لدينا:

$$P(X = 3) = \frac{1}{27}$$

$$\binom{3}{3} P^3 q^{3-3} = \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow P^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow P = \frac{1}{3}$$

قيمة q :

$$q = \frac{2}{3}$$

قيمة $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{3}{3}\right)^{3} = \frac{8}{27}$$

منصة طريقي التعليمية الافتراضية مع أنس أحمد