الأعداد العقدية وتطبيقاتها

اشكال العدد العقدي		
الشكل الجبري $z = x + iy$	الشكل المثلثي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	الشكل الأسي $z = re^{i\theta}$

الانتقال بين الأشكال

من جبري إلى مثلثي أو أسي	من مثلثي أو أسي إلى جبري
1- نحدد x, y 2- نحسب $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 3- نحسب النسب المثلثية : $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$ 4- نستنتج الزاوية (القيمة و الربع المناسب) 5- نعوض في الشكل الأسي أو المثلثي حسب الطلب.	1- نحدد r, θ 2- نحسب النسب المثلثية للزاوية θ 3- نضع $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ 4- نعوض في الشكل الجبري $z = x + iy$ ملاحظة : قد نحتاج إلى إرجاع الزاوية إلى الربع الأول من خلال الخطوات : 1- نكتب البسط بدلالة مضاعف للمقام 2- نفرق 3- نميز حالتين : أ- إذا وجدنا عدد زوجي مضروب بـ π نحذف الحد كاملاً ب- إذا وجدنا عدد فردي مضروب بـ π نستبدله بـ π 4- نحدد الإشارات حسب الربع الموافق

تمارين

1- اكتب بالشكل الأسي و المثلثي كل من الأعداد العقدية الآتية:

$z = \sqrt{2}i - \sqrt{6}$	$z = 3 - 3i$	$z = -3 + \sqrt{3}i$
$z = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}}$	$z = \frac{\sqrt{3} - 3i}{3 + 3\sqrt{3}i}$

2- اكتب بالشكل الجبري كل من الأعداد العقدية الآتية:

$z = 2\,e^{\frac{i2\pi}{3}}$	$z = e^{\frac{i9\pi}{4}}$	$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

تحويلات سريعة

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$	$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$-1 = e^{i\pi}$	$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

اشكال مثلثية ناقصة

$\cos(\theta) - i\sin(\theta)$	$-\cos(\theta) + i\sin(\theta)$	$-\cos(\theta) - i\sin(\theta)$	$\sin(\theta) + i\cos(\theta)$
نستبدل θ بـ $-\theta$.	نستبدل θ بـ $\pi - \theta$.	نستبدل θ بـ $\pi + \theta$.	نستبدل θ بـ $\frac{\pi}{2} - \theta$.
$\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$	$\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)$	$\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

العمليات على الشكل المثلثي أو الأسي

الضرب	القسمة	القوة	المرافق
نضرب الطويلات و نجمع الزاويا	نقسم الطويلات ونطرح الزوايا	قوةً للطويلة و أمثالاً للزاوية	يحافظ على الطويلة ونعكس الزاوية

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

تمارين		
التمرين الأول: اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:		
$z=\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$	$z=\overline{\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}+\imath sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\right.}$	$z=\left(2(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{10}$

التمرين الثاني: ليكن $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2=1-i$

1- اكتب $z_1, z_2, \frac{z_1}{z_2}$ بالشكل المثلثي

2- اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري

3- استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

التمرين الثالث: نتأمل النقطتين A, B اللتين يمثلهما العددان $a=2$ و $b=2e^{\frac{3i\pi}{4}}$ و ليكن I منتصف $[AB]$ و المطلوب :

1- ارسم شكلاً مناسباً و بين طبيعة المثلث OAB

2- استنتج قياس الزاوية $(\vec{u}, \vec{OI})$

3- احسب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بالشكلين الجبري و الأسي ثم استنتج $sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

التمرين الرابع: بفرض $z_1=e^{ia}$ و $z_2=e^{ib}$ استنتج $\sin(a+b)$ ، $\cos(a+b)$.

علاقات أويلر eular	
$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin(\theta)$	$e^{-i\theta}=\cos(-\theta)+isin(-\theta)$
$2\cos(\theta)=e^{i\theta}+e^{-i\theta}$	$2isin(\theta)=e^{i\theta}-e^{-i\theta}$

تمارين		
التمرين الأول: بسط كلاً من الأعداد الآتية:		
$z=\dfrac{1+\cos(x)-isin(x)}{1+\cos(x)+isin(x)}$	$z=\dfrac{\cos(x)+isin(x)}{\cos(x)-isin(x)}$	$z=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$

التمرين الثاني: ليكن $\alpha=e^{2i\frac{\pi}{5}}$ نضع

$$A=\alpha+\alpha^4 \qquad B=\alpha^2+\alpha^3$$

1- أثبت أن $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$ واستنتج أن A, B هما جذرا المعادلة $x^2+x-1=0 \dots (*)$

2- عبر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

3- حل المعادلة $(*)$ واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

التمرين الثالث: ليكن $z=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$ أثبت أن $z=itan(\theta)$.

طويلة عدد عقدي		
اثبات أن Z حقيقي	اثبات أن Z تخيلي	اثبات صحة علاقة تحوي $\lvert z\rvert^2$
1- نأخذ المرافق $\bar{Z}$ 2- نستفيد من كل عدد w طويلته 1 بأنه يحقق أن $\bar{w}=\frac{1}{w}$ 3- نصلح ونحاول اظهار أن: $\bar{Z}=Z$ عندئذٍ Z حقيقي	1- نأخذ المرافق $\bar{Z}$ 2- نستفيد من كل عدد w طويلته 1 بأنه يحقق أن $\bar{w}=\frac{1}{w}$ 3- نصلح ونحاول اظهار أن: $\bar{Z}=-Z$ عندئذٍ Z تخيلي	ننطلق من طرف لنصل للطرف الآخر وذلك باستخدام العلاقة: $\lvert z\rvert^2=z.\bar{z}$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

تمارين

التمرين الأول: ليكن $u = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{\frac{i\pi}{3}}$:

1- أثبت أن $|u| = 1$

2- أثبت أن العدد:

$$W = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$$

حقيقي.

التمرين الثاني: إذا كان β عدداً حقيقياً و كان العدد العقدي $W = \frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta}$

1- أثبت أن $|W| = 1$

2- من أجل $\beta = 1$. أثبت أن W^{12} حقيقي

التمرين الثالث: أثبت صحة المساواة:

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

الصيغ العقدية للتحويلات الهندسية

الانسحاب	التحاكي	الدوران
$\underset{\text{صورة}}{z'} = \underset{\text{أصل}}{z} + Z_{\vec{w}}$	$\underset{\text{صورة}}{z'} - \underset{\text{مركز}}{w} = \underset{\text{نسبة تحاكي}}{k}\left(\underset{\text{اصل}}{z} - w\right)$	$\underset{\text{صورة}}{z'} - \underset{\text{مركز}}{w} = \underset{\text{زاوية}}{e^{i\theta}}(\underset{\text{اصل}}{z} - w)$
التناظر المركزي	تناظر محوره ox	تناظر محوره oy
$\underset{\text{صورة}}{z'} - \underset{\text{مركز}}{w} = -(\underset{\text{اصل}}{z} - w)$	$\underset{\text{صورة}}{z'} = \bar{z}$	$\underset{\text{صورة}}{z'} = -\bar{z}$

تمارين

التمرين الأول: ليكن $z = 3 + 5i$ العدد العقدي الممثل للنقطة M . في كلٍ من الحالات الآتية جد z' العدد الممثل للنقطة M' :

1- M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}(3,4)$

2- M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $2\vec{u} - \vec{v}$

3- M' صورة M وفق تحاكٍ مركزه $A(2+i)$ و نسبته -3 :

4- M' صورة M وفق تناظر محوري محوره Ox

5- M' صورة M وفق دوران مركزه المبدأ و زاويته $\frac{\pi}{6}$

التمرين الثاني: لتكن النقطتان:

$$G(3 - \sqrt{3}i)\,, H(3 + \sqrt{3}i)$$

وليكن R الدوران الذي مركزه O وتحقق $R(G) = H$

احسب $(\overrightarrow{OG}\,, \overrightarrow{OH})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران .

ملاحظة غير ملاحظة: عندما يطلب الصيغة العقدية أي تحديد عناصر التحويل دون تعويض الصورة والأصل.

الكسر الذهبي $\frac{b-a}{c-d}$

1- نعوض الأعداد ونبسط.

2- نكتب الكسر بالشكل الأسي.

3- نحدد الطويلة والزاوية ونميز الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

$\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$

يكون (CD) و (AB) متعامدين

الحالة الثانية:

$\left|\frac{d-c}{b-a}\right| = 1$

يكون $AB = CD$

الحالة الثالثة:

اجتماع الحالتين:

$\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3}$ & $\left|\frac{d-a}{b-a}\right| = 1$

عندئذٍ يكون المثلث ABD متساوي الأضلاع

الحالة الرابعة :

$\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) \in \{0, \pi\}$

النقاط A, B, D على استقامة واحدة

الحالة الخامسة :

$\frac{d-a}{b-a} = k \in R$

الشعاعان $\overrightarrow{AD}\,, \overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً.

الحالة السادسة:

$\arg\left(\frac{d-e}{b-e}\right) = \arg\left(\frac{c-e}{d-e}\right)$

المستقيم (DE) منصف للزاوية BEC

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

الحالة السابعة:

$$\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right)>\frac{\pi}{2}$$

المثلث ABD منفرج الزاوية A.

تمارين

التمرين الأول: لتكن النقاط A,B,C,D التي تمثلها الأعداد :

$$a=2-2i\,,b=-1+7i$$
$$c=4+2i\,,d=-4-2i$$

1- لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد $w=-1+2i$ أثبت أن النقاط A,B,C,D تقع على دائرة واحدة مركزها Ω

2- ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E منتصف $[AB]$. احسب e ثم برهن أن $\frac{a-e}{d-e}=\frac{c-e}{a-e}$

3- ماذا تستنتج .

التمرين الثاني: لتكن النقاط A,B,C نقاط المستوي التي تمثل الاعداد العقدية :

$$a=2\quad,\quad b=1+\sqrt{3}i$$
$$c=-1+i\sqrt{3}$$

1- أثبت أن $\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{2\pi}{3}i}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC

2- ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل . عين a',b',c'

التمرين الثالث: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس نتأمل النقاط A,B,C التي تمثلها الأعداد $a=8\,,b=-4+4i\,,c=-4i$

1- احسب $\frac{b-c}{a-c}$ و ماذا تستنتج

2- جد العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{4}$

3- جد العدد العقدي e الممثل للنقطة E التي تجعل الرباعي $ACBE$ مربعاً

التمرين الرابع: نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس النقاط A,B,C التي تمثلها الأعداد $a=6-i\,,b=-6+3i\,,c=-18+7i$

1- احسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ و ماذا تستنتج

2- بفرض $d=1+6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O و زاويته θ

3- جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N التي تجعل الرباعي $OAND$ مربعاً

التمرين الخامس: لتكن M النقطة التي تمثل العدد العقدي $z=-1+i$ و المطلوب :

1- أثبت أن z^8 حقيقي (بطريقتين)

2- جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$

التمرين السادس: نتأمل النقاط A,B,C التي تمثلها الأعداد

$$a=-1\,,b=2+i\sqrt{3}$$
$$c=\bar{b}\quad,d=3$$

و المطلوب :

1- ارسم النقاط A, B, C, D ثم احسب AB, AC, BC و استنتج طبيعة المثلث ABC

2- عين $\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)$ و استنتج طبيعة المثلث ACD

3- أثبت أن D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(A,-1)\,,(B,2),(C,2)$$

مسائل التطبيقات العقدية

1- أي معلومة عن ضلعين مشتركين بالرأس متساويين بالطول فأحدهما دوران للآخر (مربع، مثلث متساوي الساقين , ... etc)

2- عندما يذكر (مثلثاً مباشر التوجيه): عميل حالك اعمى.

3- الدوران المباشر عكس عقارب الساعة

4- ربع الدورة يساوي $\frac{\pi}{2}$

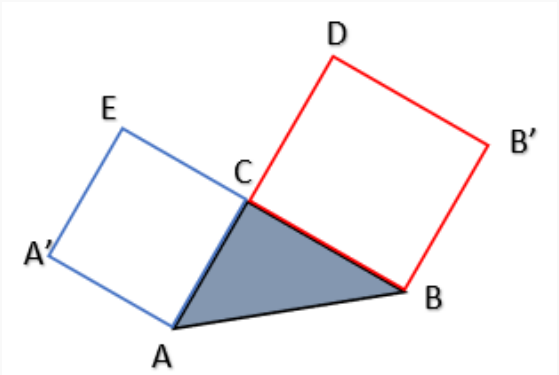
5- يُفضل عند تطبيق دوران ما: جعل الصورة هي النقطة المراد حسابها و الأصل هي النقطة التي نريد الكتابة بدلالتها

6- حالة خاصة: بعض المسائل لا تحوي أي اضلاع متساوية لذلك نفرض احداثيات النقاط ونوجد علاقات بينها.

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

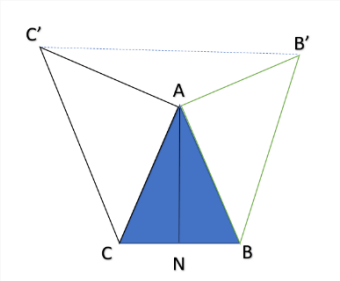
مسائل

المسألة الأولى: ليكن المثلث ABC في المستوي
ننشئ على ضلعيه $[AC]$ و $[BC]$ و خارجه المربعين $ACEA'$, $CBB'D$ كما في الشكل المجاور
تمثل الأعداد a, b, c, a', b' النقاط A, B, C, A', B'



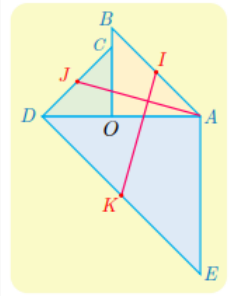
1- B' صورة C وفق دوران مركزه B . عينه و اكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b, c
2- أثبت أن $a' = i(c - a) + a$
3- عين بدلالة a,b العدد m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$

المسألة الثانية: في الشكل المجاور نتأمل مثلثاً ABCمتساوي الساقين رأسه A , ننشئ على ضلعيه مثلثين قائمين و متساويي الساقين ABB', ACC' و النقطة N منتصف CB



و بفرض A, B, C, B', C', N الأعداد العقدية التي تمثلها النقاط a, b, c, b', c', n
1- أوجد بدلالة c, b الأعداد b', c', n
2- اكتب العدد $\frac{c'-b}{c-b'}$ بالشكلين الجبري و الأسي
3- أثبت $(C'B)$ يعامد (CB')
و أن $C'B = CB'$
4- بفرض A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B', 2)$ و $(C'3)$ و $(C, 1)$و $(B, 1)$
احسب $\frac{c}{b}$

المسألة الثالثة: نتأمل في معلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ المثلثات AFD , ODB , OAB قائمة و متساوية الساقين و مباشرة و النقاط I, J, K منتصفات أوتار هذه المثلثات
كما هو موضح في الشكل . و لتكن الأعداد a, b, c, e, d الممثلة للنقاط A, B, C, E, D

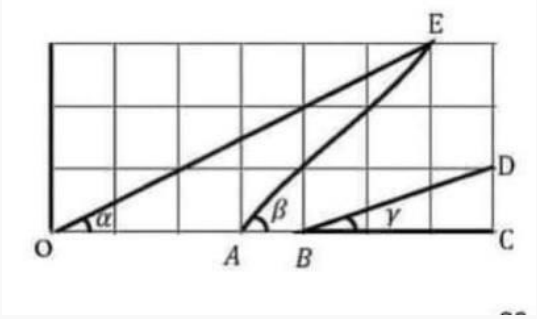


1-عبر بدلالة a,c عن e,d,b ثم استنتج z_I, z_J, z_K
2-أثبت أن $z_K - z_I = i(z_J - a)$ و استنتج أن IK يعامد AI و أن لهما نفس الطول

خواص الـ arg

مشان ما نطول عليكون بعرف تعبانين..
نفس خواص اللوغارتم 😉 والمرافق يغير الإشارة

مثال: في معلم متجانس:
α, β, γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}), (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}), (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$
على الترتيب و المطلوب :



1- اكتب كلاً من $Z_{\overrightarrow{OE}}$ و $Z_{\overrightarrow{AE}}$ و $Z_{\overrightarrow{BD}}$ بالشكل الجبري و الأسي
2- احسب الجداء $Z_{\overrightarrow{OE}} \cdot Z_{\overrightarrow{AE}}$. $Z_{\overrightarrow{BD}}$ بالشكلين الجبري و الأسي
3- استنتج قياساً للزاوية $\alpha + \beta + \gamma$

المعادلات العقدية		
أولاً: معادلات الدرجة الأولى:		
معادلة تحوي z	معادلة تحوي $\bar{z}$	معادلة تحوي z و $\bar{z}$
نعزل z	نأخذ المرافق ثم نعزل z	1- نفرض $z=x+iy$ فيكون $\bar{z}=x-iy$ 2- نعوض ونصلح. 3- نقارن الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي
تمارين		
$-2z+3=iz$	$-\bar{z}+3i=2i\bar{z}+1$	$z+2\bar{z}=3+3i$

ثانياً: معادلات الدرجة الثانية:		
$z^2=-k^2$	$z^2=a+ib$	$az^2+bz+c=0$
نضع $i^2=-1$ ثم نجذر	1- نفرض $Z=x+iy$ 2- نضع المعادلات $\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \dots ① \\ x^2-y^2=a \dots ② \\ 2xy=b \dots ③ \end{cases}$ 3- نجمع ① و ② فنحسب x_1 و x_2 4- نطرح ① و ② فنحسب y_1 و y_2 5- من المعادلة ③ نميز حالتين: أ- $2xy=b>0$ فنأخذ x و y من نفس الإشارة ونضعها بالشكل الجبري ب- $2xy=b<0$ فنأخذ x و y من إشارتين متعاكستين ونضعها بالشكل الجبري **صيغة يمكن تجي مو اكيد:** جد الجذور التربيعية للعدد العقدي $a+ib$.	أ- حالة $\Delta>0$: للمعادلة حلان $Z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $Z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ب- حالة $\Delta=0$: للمعادلة حل وحيد : $Z=-\frac{b}{2a}$ ت- حالة $\Delta<0$: أي $\Delta=-k^2$ عندها للمعادلة حلان عقديان $Z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $Z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ث- حالة $\Delta=a+ib$ (عدد عقدي): عندئذٍ نفرض $w=x+iy$ هو الجذر التربيعي لـ Δ عندها $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$ $x^2-y^2=a$ $2xy=b$ ونوجد الحلول فنحصل على جذري المميز Δ : w_1, w_2 $Z_1=\frac{-b+w_1}{2a}$ $Z_2=\frac{-b+w_2}{2a}$

ثالثاً: معادلات من الدرجة الثالثة فما فوق:		
الحل المعلوم حقيقي أو تخيلي	الحل تخيلي والمعاملات حقيقية	يوجد صيغ متكافئة لتعيين الثوابت
نقسم على (الحل $-z$)	نقسم على $(z^2-$ الحل$^2)$	ننشر ونطابق
نمط مميز: أوجد حلول المعادلة إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً:		
1- نفرض الحل $z=bi$ ونعوض ونصلح فنحصل على المعادلة (1). 2- نأخذ مرافق طرفي المعادلة (1) فنحصل على المعادلة (2). 3- نجمع (1) و (2) ونحسب b. 4- نقسم على $z-bi$. 5- مبروووك عليك!		

التمرين الأول: حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية:		
$z^2+(1+4i)z-5-i=0$	$z^2=-3+4i$	$z^2+2(1+i)z+i+\frac{3}{4}=0$
$2z^2-5z+6=0$	$z^2-2\sin(\theta)\,z+1=0$	$Z^2-2(1+\sqrt{2})Z+2(\sqrt{2}+2)=0$

التمرين الثاني: ليكن كثير الحدود:

$$P(Z)=Z^4-19Z^2+52Z-40$$

عين عددين حقيقيين a و b يحققان أن

$$P(Z)=(Z^2+aZ+b)(Z^2+4Z+2a)$$

ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$.

التمرين الثالث: لتكن المعادلة:

$$Z^3-3Z^2+3Z+7=0$$

1- أثبت أن $Z=-1$ حل للمعادلة

2- اكتب المعادلة بالشكل :

$$(Z+1)Q(Z)=0$$

3- أوجد حلول هذه المعادلة

التمرين الرابع:

$$P(z)=z^3-2(\alpha+i\sqrt{3})z^2-4(\alpha-i\sqrt{3})z+8$$

المطلوب :

1- عين α إذا علمت أن $z=2$ حل للمعادلة $P(z)=0$

2- بفرض $\alpha=1$. جد كثير حدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ بحيث :

$$P(z)=(z-2)Q(z)$$

ثم استنتج حلول المعادلة $P(z)=0$

أفكار يجب تمثلها:

الجذور التكعيبية لعدد عقدي $z^3=a+ib$	خواص حلول معادلة من الدرجة الثانية
1- نكتب $w=a+ib$ بالشكل الأسي: $w=m\,e^{i\alpha}$ 2- نفرض $z=re^{i\theta}$ ونعوض. 3- $r^3e^{i3\theta}=m\,e^{i\alpha}$ بالمقارنة نجد: $r=\sqrt[3]{m}\,,\theta=\frac{\alpha+2\pi k}{3}\,;k\in\{0,1,2\}$	$z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ و $z_1.z_2=\frac{c}{a}$ 1- الحلان معلومان والمطلوب هو التحقق أنهما حلول 2- حل معلوم و مطلوب حساب الآخر 3- الحلان معلومان و مطلوب حساب a,b,c

التمرين الأول: جد حلول كلٍ من المعادلات:

$$z^3=1$$
$$3j^3-27i=0$$

التمرين الثاني: أثبت أن العدد $z=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ حل للمعادلة

$$1+z+z^2=0$$

ثم استنتج الحل الآخر , و اكتبهما بالشكل الجبري

المجموعات النقطية		
$Re(z)=a$ المستقيم الشاقولي x = a	$Im(z)=b$ المستقيم الأفقي y = b	$\lvert z-a\rvert=r$ الدائرة التي مركزها A(a)ونصف قطرها r
$\lvert z-a\rvert=\lvert z-b\rvert$ محور القطعة المستقيمة $[AB]$ $A(a),B(b)$	$argz=\theta$ نصف المستقيم الذي يصنع زاوية θ مع محور الفواصل دون المبدأ	في باقي الحالات نضع z = x + iy ونعزل ونستنتج المعادلة انتبه!! إذا كانت المعادلة بدلالة arg نضع $z=re^{i\theta}$ ونطبق خواص الـ arg.

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

التمرين الأول: صف مجموعة النقاط $M(z)$ في الحالات الآتية:		
$\|z+2\| = \|z-1+i\|$	$\|z\| = 3$	$\|z-1\| = \sqrt{2}$
$Re(iz) = 3$	$\arg iz^2 = \frac{2\pi}{3}$	$\arg(\bar{z}) = \arg\left(\frac{1}{i}\right)$

التمرين الثاني: في حالة عدد عقدي $z \neq -1$ نتأمل العدد العقدي $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ وبفرض أن $z = x + iy$ و $Z = X + iY$ والمطلوب:

1- اكتب X, Y بدلالة x, y
2- أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل العدد Z حقيقي هي مستقيم محذوف منه نقطة
3- أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل العدد Z تخيلي بحت هي دائرة محذوف منها نقطة

اختبار في الأعداد العقدية وتطبيقاتها

التمرين الأول: ليكن z العدد العقدي الذي يحقق:

$$\bar{z} = \frac{9}{z} \ , \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

اكتب z بالشكل الأسي.

التمرين الثاني: ليكن المجموع $S = 1 + i + i^2 + \cdots + i^7$:

1- بسط عبارة S.
2- اكتب S بالشكل المثلثي.
3- أثبت أن S^8 حقيقي.

التمرين الثالث:

أ- حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة $z^2 - 8z + 41 = 0$

ب- نعتبر في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس النقاط A, B, C, D التي تمثلها الأعداد العقدية

$$a = 4 + 5i \ , b = 3 + 4i \ , c = 6 + 7i$$
$$, d = 4 + 7i$$

1- احسب $\frac{c-b}{a-b}$ و استنتج أن النقاط A, B, C على استقامة واحدة
2- بفرض $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ وفق الدوران الذي مركزه D و زاويته $-\frac{\pi}{2}$, أثبت أن :
$$z' = -iz - 3 + 11i$$
3- عين صورة C وفق الدوران السابق و ما طبيعة المثلث ACD
4- ليكن T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{DC}$ و لتكن B' صورة B وفق T و A صورة A' وفق T و المطلوب :
   a- اكتب الصيغة العقدية للانسحاب ثم استنتج a', b'
   b- اكتب الشكل الجبري و الأسي للعدد $Z = \frac{d-b}{a'-b'}$
   c- استنتج أن المستقيمين $(A'B')$ و (DB) متعامدين و أن $DB = A'B'$
5- ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E منتصف [AD] أثبت أن النقاط A', B', B, C تقع على دائرة واحدة مركزها E

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

التمرين الرابع: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A,B,C,M التي تمثلها الأعداد :

$$a=-i \quad , \quad b=1-i \ , \qquad m=-1+i \quad , d=2i$$

1- مثل A,B,C,M في المستوي
2- احسب العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة النقطة D وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$
3- أثبت أن النقاط O,B,M على استقامة واحدة
4- احسب $\frac{d-c}{m}$ بالشكل الأسي ثم استنتج أن $(DC),(OM)$ متعامدان
5- حل المعادلة $Z^3=4z^2+29z=0$
6- عين العددين z,w المحققان :

$$2z-w=-3$$
$$2\bar{z}-\bar{w}=-3+2\sqrt{3}i$$

7- أوجد e صورة m وفق تحاكٍ مركزه b و نسبته -3
8- أوجد الجذرين التربيعين للعدد العقدي $z=3-4i$

التمرين الخامس: اكتب $\cos^3 x$ على شكل عبارة خطية للنسب المثلية لمضاعفات الزاوية ثم احسب $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$ ثم احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحصور بين منحني التابع المعرف وفق $f(x)=\cos^3 x$ والمستقيمان $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ ومحور الفواصل.

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

■ أولاً: العاملي:

نرمز له بالرمز $n!$ ويُحسب كما يلي:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$$

ونصطلح أن $1! = 1$ و $0! = 1$

أمثلة توضيحية:

- $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
- $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

كيف نجري الحساب باستخدام العاملي:

بوجهٍ عام يمكن أن نقوم بالرجوع بدءاً من العدد الاصلي ونقف عند أي عدد نريده و نضع (!)

فمثلاً:

$$5! = 5 \times 4!$$

هنا قمنا بالرجوع خطوة واحدة ثم وضعنا (!)
و كان بالإمكان أن نضع:

$$5! = 5 \times 4 \times 3!$$

وبالتالي نكون قد رجعنا خطوتين ثم وضعنا (!)
وهكذا يمكن أن نضع بعض الصيغ التي نستخدمها كثيراً.

$n! = n(n-1)!$
$(n+1)! = (n+1)n!$
$(n+2)! = (n+2)(n+1)!$

■ ثانياً: التراتيب:

ورمزه p_n^r حيث $n \geq r$

و يُحسب من القانون:

$$p_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(الكبير عاملي على طرحهم عاملي)

أمثلة:

- $p_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$
- $p_3^1 = \frac{3!}{2!} = 3$

حسابات سريعة:

$$p_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$p_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$$p_n^n = n!$$

ويمكن أيضاً أن نحسب قيمة أي تراتيب بتشكيل عدد من المضاريب يساوي r ابتداءً من n مثلاً:

- $p_4^3 = 4 \times 3 \times 2$ (مرجع 3 خطوات)
- $p_5^2 = 5 \times 4$ (مرجع خطوتين)
- $p_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$
- $p_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

■ ثالثاً: التوافيق:

رمزه $\binom{n}{r}$ حيث $n \geq r$ ويُحسب من القانون:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

(الكبير عاملي على الصغير عاملي بطرحهم عاملي)

أو $\binom{n}{r} = \frac{p_n^r}{r!}$

أمثلة:

- $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$
- $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \times 2!} = 3$
- $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15$
- $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \times 2!} = 15$

حسابات سريعة:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$$
$$\binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n-1} = n$$

فمثلاً:

$$\binom{10}{9} = 10$$

ويمكن أيضاً أن نحسب أي توافيق بأن نرجع في البسط بقدر r و نقسم على $r!$ مثلاً:

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$
$$\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

ملاحظة للحساب:

إذا كان r أكبر من نصف n يمكن أن نستفيد من العلاقة:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

يعني مثلاً عند حساب $\binom{10}{8}$ فإنه بالطريقة المباشرة سيكون لدينا ثمانِ مضاريب في البسط و ثمانِ مضاريب في المقام و لكن

بملاحظة أن 8 أكبر من نصف العدد 10 نستفيد من العلاقة السابقة و نستبدل 8 بمتممتها للـ 10 أي 2 :

$$\binom{10}{8}=\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2!}=45$$

■ **حل المعادلات التي تحوي P_n^r أو $\binom{n}{r}$:**

- نضع شرط الحل $n\geq r$ ونقاطع الشروط لإيجاد شرط الحل.
- نطبق قانون التراتيب أو التوافيق ونختصر.
- نحل المعادلة الناتجة ونختار الحلول المقبولة.

التمرين (1)

حل المعادلة التالية:

1- $P_n^5=18.P_{n-2}^4$

2- $P_{n+2}^4=14.P_n^3$

التمرين (2)

عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق الشرط المعطى

1- $\binom{n}{2}=36$

2- $3\binom{n}{4}=14\binom{n}{2}$

حالة خاصة: المعادلات من الشكل:

$$\binom{n}{m}=\binom{n}{r}$$

(العدد الأكبر نفسه)

إما $m=r$ أو (العدد الكبير) $m+r=n$

مثال:

$$\binom{10}{3n}=\binom{10}{n+2}$$

مثال:

حل المعادلة الآتية :

$$\binom{12}{n+1}=\binom{12}{2n+2}$$

■ **جمل المعادلات:**

نعطى عدد من الشروط يساوي عدد المجاهيل:

- نبسط الشروط للحصول على جملة معادلتين بسيطة
- نحل الجملة حلاً مشتركاً

التمرين (1)

احسب قيمة كل من n و r إذا علمت أنّ:

$$2\binom{n+1}{r+1}=5\binom{n+1}{r}$$
$$3\binom{n}{r}=8\binom{n}{r-1}$$

■ **علاقات وبراهين:**

يوجد أسلوبان:

1- الانطلاق من طرف للوصول للآخر

2- تبسيط كل من الطرفين والوصول إلى نفس الصيغة

التمرين (1)

أثبت صحة العلاقتين:

1- $\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{n+1}{r+1}$

2- $\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}}=\frac{n+1}{n+1-r}$

3- $n\binom{n-1}{r-1}=r\binom{n}{r}$

منشور ثنائي الحد

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(a)^{n-r}.(b)^r$$

ويتم النشر بتعويض قيم متتالية لـ r بدءاً من $r=0$ وحتى $r=n$ كما يلي:

$$=\underbrace{\binom{n}{0}a^n.b^0}_{r=0}+\underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}.b^1}_{r=1}+\cdots+\underbrace{\binom{n}{n}a^0.b^n}_{r=n}$$

مثال: انشر كلاً من العبارات التالية:

1- $(2+x)^4$

2- $(3-2i)^3$

3- $\left(\frac{1}{x}+x^2\right)^3$

التمرين (2)

أثبت أن:

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

التمرين (3)

أثبت أن: أوجد منشور $(1+2x)^n$ ثم استنتج قيمة المجموع:

$$S_n=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\cdots+2^n\binom{n}{n}$$

■ **الحد T_r :**

إذا كان السؤال لا يتطلب إيجاد كامل المنشور وإنما فقط حد من هذا المنشور

- نضع القانون $T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}.b^r$
- نصلح هذا الجداء.
- نضع شرط على الأس الناتج ونحسب r ولنفترض أن $r=\circledast$
- نعوض في القانون:

$$T_{\circledast}=\binom{n}{\circledast}a^{n-\circledast}.b^{\circledast}$$

أوراق الدورة المكثفة

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

التمرين (4)

عين في منشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ الحد الذي يحوي x^2 ثم الحد الثابت

التمرين (5)

انشر كلاً من المقادير الآتية:

1- أوجد الحد الذي يحوي $x\sqrt{x}$ في منشور $\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^3$

2- أوجد الحد الذي يحوي x^2y^3 في منشور $(2x+y)^5$

3- أوجد الحد المستقل عن y في منشور $(3y-2)^{10}$

التمرين (6)

1- ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحوي المنشور $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ على حد ثابت؟؟

2- ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحوي المنشور $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ على حد ثابت؟؟

التمرين (7)

اختزل منشور المقدار:

$$(1+x)^6+(1-x)^6$$

التمرين (8)

احسب أمثال x^3 في منشور:

$$(2+3x)^{15}$$

10	10	5	9
آحاد	عشرات	مئات	آلاف

مافيني حط صفر

قدماً نحو الأمام:

يمكن الاستفادة من منشور ثنائي الحد في إيجاد صيغة بعبارات خطية للنسب المثلثية بدلالة مضاعفات زاوية ما:

1- نضع: $cosx=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\quad sinx=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

2- تطبيق منشور ثنائي الحد

3- تجميع الحدود للحصول على علاقات أويلر جديدة

التمرين (9)

اكتب المقدار $\cos^3 x$ بصيغة عبارات خطية للنسب المثلثية لمضاعفات الزاوية ثم احسب النهاية

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cos3x}{cosx}$$

التمرين (11)

اكتب المقدار $\sin^3 x$ بصيغة عبارات خطية للنسب المثلثية لمضاعفات الزاوية ثم احسب قيمة النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x-3sinx}{\tan^3 x}$$

طرائق العد

■ **المبدأ الأساسي في العد:**

يُستخدم غالباً عندما يكون السحب مقسماً إلى مراحل فنكتب:

المرحلة الأولى تتم بـ n_1 طريقة

المرحلة الثانية تتم بـ n_2 طريقة

.....

المرحلة الأخيرة تتم بـ n_k طريقة

فيكون عدد الطرق الكلية هي جداء عدد طرق كل مرحلة أي:

$$n_1\times n_2\times\ldots\times n_k$$

مثال: نتأمل المجموعة:

$$D=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

ما عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها من عناصر D وعدد منازلها 4 وخانة مئاتها زوجية؟

5	4
آحاد	عشرات

الحل

- المرحلة الأولى تتم بـ ..... طريقة
- المرحلة الثانية تتم بـ ..... طريقة
- المرحلة الثالثة تتم بـ ..... طريقة
- المرحلة الرابعة تتم بـ ..... طريقة

⇐ عدد الطرائق المطلوبة:

.....

....

مثال: لتكن $S=\{1,2,5,8,9\}$

1- كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمن تشكيله من عناصر S ؟

5	5
آحاد	عشرات

.....

.....

.....

ملاحظة:

هو لم يطلب أن تكون المنزلتين مختلفتين وبالتالي التكرار مسموح في الخانات

2- كم عدداً مؤلفاً من منزلتين ومختلفة الأرقام يمكن تشكيله من عناصر S ؟؟

.....

.....

.....

.....

3- كم عدداً زوجياً مؤلف من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر S ؟؟؟

5	2
آحاد	عشرات

.....

.....

.....

4- كم عدداً زوجياً مؤلف من منزلتين مختلفتين يمكن تشكيله من عناصر S؟

.....

.....

.....

التمرين (1) (شروط متقاطعة)

لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$

ولدينا H مجموعة من الأعداد التي تتمتع بالخصائص التالية:

أرقامها مختلفة ومأخوذة من S ص

لا يوجد أي عدد منها من مضاعفات 5

كل عدد منها أكبر تماماً من 2000

فما هو عدد عناصر H ؟

التمرين 2: (شروط متقاطعة)

لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

كم عدداً مؤلفاً من 6 منازل مختلفة يمكن تشكيله من عناصر S بحيث يكون زوجياً و أكبر تماماً من 300.000

تمهيد: تعريف القائمة:

القائمة المكونة من r خانة تعني عنصر مرّتب يحوي r خانة مسحوبة من مجموعة تحوي n عنصراً

و هذه القائمة قد تشتمل على تكرار في الخانات أو لا تشتمل

فمثلاً لو كان لدينا المجموعة $A = \{a,b,c,d,e\}$ المكونة من 5 عناصر فإن

(a,b,c) قائمة و (a,c,b) قائمة مختلفة

و (a,a,b) قائمة و (a,b,a) قائمة مختلفة

■ **التباديل: (كل من كل- الترتيب مهم – دون تكرار)**

إذا كانت لدينا المجموعة $\{a,b,c\}$, فنلاحظ أنه يمكن تشكيل القوائم التالية :

$$abc \quad acb \quad cab \quad cba \quad bca \quad bac$$

وعدد هذه التباديل 3! أي 6

بالحالة العامة عدد التباديل لمجموعة مكونة من n عنصراً هو $n!$

انتبه: إذا كان لدينا بعض العناصر المكررة مثلاً: $\{a,a,b\}$

$$aab \quad aba \quad baa$$

عددهم هنا:

$$\frac{(\text{العدد الكلي})!}{(\text{التكرار})!} = \frac{3!}{2!} = 3$$

مثال: كم كلمة مكونة من 5 أحرف مختلفة يمكن تشكيلها من حروف كلمة $SYRIA$

الجواب: .....

و هذا يوافق المبدأ الأساسي في العد :

.....

..

مثال: بكم طريقة يمكن توزيع 4 طلاب على 4 كراسي

الجواب : .....

مثال: بكم طريقة يمكن توزيع 3 هدايا على 3 طلاب بشرط أن يحصل كل طالب على جائزة واحدة فقط.

الجواب : .....

■ **التراتيب (القوائم دون تكرار) : (جزء من كل والترتيب مهم ودون إعادة)**

رمزه P_n^r , وقانونه :

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \; ; n \geq r$$

ويستخدم لحساب عدد الطرق الممكنة لتشكيل قائمة حجمها r من مجموعة عدد عناصرها n بشكل مرتب ودون تكرار.

مثال: يتألف مجلس إدارة نادي من سبعة أعضاء , بكم طريقة يمكن اختيار رئيس أو نائب رئيس وأمين سر ؟!

نلاحظ أنه المطلوب أن نسحب جزءاً من كل و أن الترتيب مهم (حيث تغيير الترتيب يؤدي إلى تغيير توزيع المناصب)

....

مثال :

اشترك مئة سابق في سباق , يجري توزيع ثلاثة ميداليات (ذهبية , فضية , برونزية)

نلاحظ أنه المطلوب أن نسحب جزءاً من كل و أن الترتيب مهم (حيث تغيير الترتيب يؤدي إلى تغيير توزيع المراكز)

أوراق الدورة المكثفة

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

.....

.....

■ **القوائم مع تكرار (n^r) : (جزء من كل والترتيب مهم والتكرار مسموح)**

مثال :

بكم طريقة يمكن تشكيل كلمة مكونة من ثلاث حروف من حروف كلمة $Syria$ ؟!

(كونه لم يذكر أن حروف الكلمة المطلوبة يجب أن تكون مختلفة و أننا نسحب جزء من كل فالقانون هو n^r) حيث n عدد الخيارات المتاحة (الكل) و r عدد الخيارات المطلوبة (الجزء)

.....

.....

■ **التوافيق: (جزء من كل والترتيب غير مهم أي السحب معاً)**

عدد المجموعات الجزئية ذات الحجم r والمأخوذة من عناصر المجموعة الأكبر ذات الحجم n حيث $(n \geq r)$

هو $\binom{n}{r}$ ويحسب بالشكل :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

تذكر : عندما نستخدم التوافيق فنحن هنا لا نهتم بترتيب العناصر المسحوبة و تذكر:

$$\binom{n}{0} = 1\,,\binom{n}{1} = n\,,\binom{n}{n} = 1\,,$$
$$\binom{n}{n-1} = n$$

في المسائل $\binom{\text{عندي}}{\text{بدي}}$

مثال :

نريد تأليف لجنة مكونة من أربعة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي خمسة رجلاً وأربع نساء .

1- كم لجنة مختلفة يمكن تأليفها ؟
2- كم لجنة مختلفة مكونة من رجلين و امرأتين يمكن تأليفها ؟
3- كم لجنة مختلفة تحوي رجلين على الأكثر
4- كم لجنة مختلفة تحوي على 3 نساء على الأقل

التمرين (1)

يلتقي عشرة أصدقاء في حفل , يصفح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط

كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل ؟

عمم النتيجة السابقة إلى حالة n صديقاً

إضافي :

إذا كان عدد المصافحات 10 فما عدد الأشخاص في الحفل

التمرين (2)

في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن سبعة أسئلة من عشرة

بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟

بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة إذا علمت أن الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية ؟

التمرين (3)

أراد صف فيه 12 طالب و 8 طالبات تأليف لجنة نشاط للصف مؤلفة من 5 أشخاص

كم لجنة مختلفة يمكن تشكيلها في الحالات الآتية ؟!

اللجنة مؤلفة من 3 طلاب و طالبتين

في اللجنة طالبتان على الأكثر

في اللجنة طالبتان على الأقل

التمرين (4)

يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرعة يفتح عند إدخال رماز (كود) مكون من عدد ذي أربع خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أياً من القيم : $0,1,2,3,\ldots,9$

1- ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل
2- ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل و المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى ؟!
3- عند فصل المذياع عن التغذية الكهربائية , يجب إعادة إدخال الرماز الصحيح مجدداً

يتذكر المالك أن الرماز الصحيح مكون من الأرقام 9,9,5,1 ولكنه نسي ترتيبها

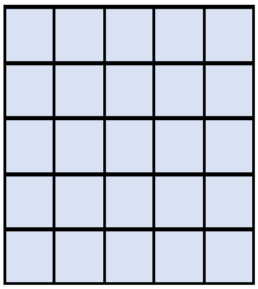
كم رمازاً مختلفاً يمكن تشكيله من هذه الأرقام ؟

التمرين (5)

أثبت أن عدد أقطار مضلع محدب عدد رؤوسه n حيث $n \geq 4$ يعطى بالعلاقة $\frac{n(n-3)}{2}$

التمرين (6)

ما عدد المستطيلات في الشكل المجاور ؟



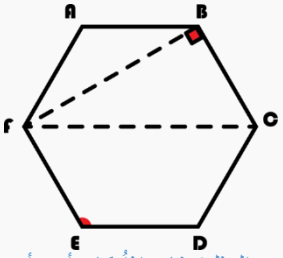
أوراق الدورة المكثفة

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

المسألة (1)

نتأمل مسدساً منتظماً $ABCDEF$

1 ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من رؤوس هذا المسدس



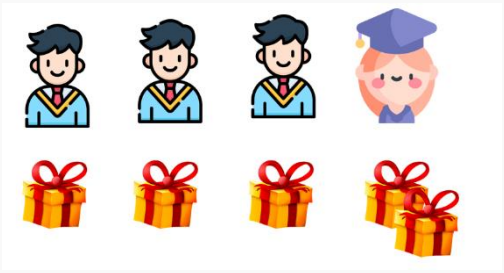
2 ما عدد المثلثات القائمة: يكون المثلث قائم إذاً كان أحد أضلاعه قطراً

3 ما عدد المثلثات منفرجة الزاوية

إضافي: ما عدد المثلثات حادة الزوايا

المسألة (2)

يريد معلم توزيع $n+1$ جائزة مختلفة على n تلميذاً بحيث يحصل كل تلميذ على هدية واحدة على الأقل . ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية:



المسألة (3)

لتكن المجموعة $S=\{1,2,3,4,\dots,30\}$

كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S و مجموعها من مضاعفات العدد 3

تمهيد

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

مسائل إضافية:

المسألة (1)

يحتوي مغلف على 5 بطاقات , اثنتان تحملان الرقم , واثنتان تحملان الرقم , واحدة تحمل الرقم , نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي دون إعادة و المطلوب :

1- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما 4
2- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما عدد فردي
3- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين بطاقتين بطاقتين مجموعهما 2 أو 5

المسألة (2)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء و كرتين بيضاوين و كرة زرقاء

نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً و المطلوب :

1- ما عدد النتائج التي تشتمل على 3 كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى
2- ما عدد النتائج التي تشتمل على كرتين من نفس اللون
3- ما عدد النتائج التي تشتمل على كرات من لون واحد

المسألة (3)

رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ثلاثة كتب للمؤلف A و 4 كتب للمؤلف B

1- بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B
2- بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كان كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية

المسألة (4)

صندوق يحمي خمس كرات حمراء و خمس كرات خضراء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً

1- كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات حمراء
2- كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل كرتين حمراوين و كرة خضراء

المسألة (5)

احسب قيمة r إذا علمت :

$$\frac{1}{\binom{4}{r}}=\frac{1}{\binom{5}{r}}+\frac{1}{\binom{6}{r}}$$

المسألة (6)

ما هي أمثال x^2y في منشور

$$\left(\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y}\right)^8$$

المسألة (7)

مغلق يحوي 6 بطاقات مرقمة بالأرقام 1,2,3,4,5,6

نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي دون إعادة

1- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين أصغرهما 3
2- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين أصغرهما 1
3- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما زوجي
4- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعها 5

المسألة (8)

نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير و نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمس أشخاص . بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

المسألة (9)

لتكن المجموعة $S = \{2,3,5,6,7,9\}$

1- ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى و أرقامها مأخوذة من S
2- ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلة و أرقامها مأخوذة من S و كل عدد منها من مضاعفات العدد 5 و أصغر من 500

المسألة (10)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء مرقمة بالأرقام 1و2 و3

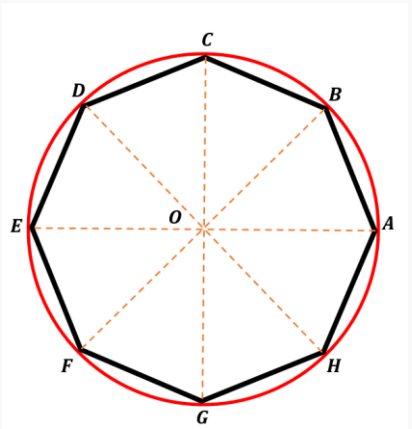
و كرتين زرقاوين مرقمين بالأرقام 1و2

و كرتين بيضاوين مرقمين بالأرقام 2و3

نسحب من الصندوق 3 كرات معاً

1- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات مختلفة الألوان
2- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات تحمل نفس الرقم
3- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات مختلفة اللون و تحمل نفس الرقم

المسألة (11)



نتأمل في معلم متجانس $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ في المستوي الشكل المرسوم جانباً .

لدينا ثما نقاط A, B, C, D, E, F, G, H موزعة على دائرة نصف قطرها 1 . و التي تمثل رؤوس مثمن منتظم

1- أثبت أن الشكل الجبري للعدد b هو

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2- اكتب الأعداد a, c, d بالشكل الجبري
3- ليكن I منتصف $[AD]$ استنتج قياساً للزاوية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI})$
4- احسب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I بصيغتيه الجبرية و الأسية و استنتج $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$
5- ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن
6- ما عدد المثلثات التي نحصل عليها من ثلاث نقاط من النقاط $A, B, C, D, E, F, G, H, O$
7- ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن .

سؤال إضافي

يلتقي n شخصاً في حفل ويصافح كل منهم الأشخاص البقية فإذا علمت أن عدد المصافحات التي تتم في الحفل 66 , احسب عدد الأشخاص في الحفل.

سؤال إضافي تاني

التقى عشرة أصدقاء في حفل, ما عدد المصافحات التي ممكن ان تتم بينهم إذا علمت أن في الحفل ثلاثة اشخاص متخاصمين.

إن عدد طرائق النجاح متناسبٌ طرداً مع عدد المحاولات و عدد العثرات و عدد المرات التي تقع فيها ثم تنهض مرة أخرى لأنك قد علمت أن في نهاية الطريق جِنَانٌ و قطاف يستحقُّ تعبك و اجتهادك

إياك أن تقع و تبقى طريح الأرض .. فإن العلا ينادي لك و يستدعيك

فقط قم و اسعَ .. فلن يخيب الله مسعى السعاة

لن يبلى الشغف

مسائل الاحتمالات – القسم (1)

تجربة قطعة النقود	تجربة حجر النرد	تجربة الولادات
- رمي مرة واحدة (أو قطعة واحدة) $\Omega = \{H, T\}$ - رمي مرتين (أو قطعتين): $\Omega = \{\text{HH}, \text{HT}, \text{TH}, \text{TT}\}$ - رمي 3 مرات (أو 3 قطع نقود): $\Omega = \begin{Bmatrix} HHH \\ HHT\ , HTH, THH \\ TTH, THT, HTT \\ TTT \end{Bmatrix}$	- مرة واحدة (حجر واحد): $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ - مرتين (أو حجرين): جدول:	- ولادة واحدة: $\Omega = \{\text{B}, \text{G}\}$ - ولادتين: $\Omega = \{BB, BG, GB, GG\}$ - 3 ولادات: $\Omega = \begin{Bmatrix} BBB \\ BBG.BGB.GBB \\ GGB.GBG.BGG \\ GGG \end{Bmatrix}$ - 4 ولادات: $\Omega = \begin{Bmatrix} BBBB \\ BBBG, BBGB, BGBB, GBBB \\ GGGB, GGBG, GBGG, BGGG \\ BGBG, GBGB, BBGG, GGBB \\ BGGB, GBBG \\ GGGG \end{Bmatrix}$

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- **الحدث:** هو أي مجموعة جزئية من المجموعة التي تحوي جميع العناصر (Ω)
- **الأحداث المميزة:**
  - الحدث البسيط: هو الحدث الذي يحوي عنصر وحيد.
  - الحدث المستحيل: هو الحدث الذي لا يحوي أي عناصر (المجموعة الخالية ϕ)
  - الحدث الأكيد: هو الحدث الذي يحوي جميع العناصر (المجموعة Ω)
  - التقاطع (AوB) : هي العناصر المشتركة بين الحدثين
  - الاجتماع (AأوB) : هي العناصر المشتركة وغير المشتركة بين A و B
  - المعاكس A' هي العناصر غير الموجودة في A
  - الحدثان المتنافيان: هما الحدثان اللذان لا يقعان معاً (لا يوجد بينهما عناصر مشتركة) أي:

$$A \cap B = \phi$$

قوانين هامة:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{عدد الحالات الممكنة}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

كحالة خاصة: إذا كان A و B متنافيان فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{0}_{\text{لأنهم متنافيان}}$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

التمرين (1)

نلقي حجر نرد وليكن A الحدث الدال على ظهور عدد فردي و B الحدث الدال على ظهور عدد أولي و C الحد الدال على ظهور عدد أكبر تماماً من 3

1- احسب احتمال وقوع كلٍ من الأحداث A, B, C
2- احسب احتمال وقوع الأحداث $C \cup B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $A \cap C$, $A \cap B$
3- احسب احتمال A' بطريقتين

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

التمرين (2)

في مدرستنا 30% من الطلاب يدرسون اللغة الفرنسية و 40% يدرسون الروسية و 60% يدرسون إحدى اللغتين على الأقل . احسب احتمال أن يكون طالباً مختاراً بشكل عشوائي ممن يدرسون اللغتين في آنٍ معاً

■ **شرط الاستقلال الاحتمالي:**

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

1- نحسب احتمال A
2- نحسب احتمال B
3- نحسب احتمال $A \cap B$
4- نختبر الشرط

مثال1: في تجربة القاء حجر نرد متجانس ليكن A حدث ظهور عدد أولي و B حدث ظهور عدد زوجي, أيكون الحدثان A و B مستقلان؟!

■ **الاحتمال الشرطي:** رمزه $A|B$ ويقرأ بأحد الأساليب:

1- A علماً أن B قد وقع
2- A بشرط B
3- A بعد B

قانونه:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

"احتمال التقاطع على احتمال الذي وقع"

التمرين (1)

في تجربة مراقبة جنس المولود في عائلة مكونة من 4 ولادات :نعرف الأحداث الآتية :

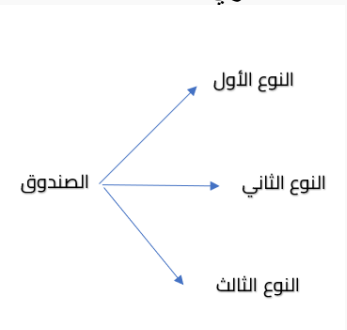
A : الأطفال الأربعة من نفس الجنس

B : لدى العائلة طفلان وطفلتان

C : المولود الثالث أنثى:

1- احسب $P(A), P(B), P(C)$
2- هل A, C مستقلان احتمالياً
3- هل B, C مستقلان احتمالياً
4- احسب $P(A|C)$, $P(B|C)$
5- دمج متغير عشوائي: ليكن X المتغير العشوائي الدال على عدد الاناث في العائلة, اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

سحب أو اختيار عنصر واحد	سحب أو اختيار عنصرين	سحب أو اختيار 3 عناصر
مخطط شجري  	جدول: نضع في السطر الأول والعمود الأول محتويات الصندوق كاملة مع ذكر التكرار مثلاً $R \quad R \quad R \quad B \quad W \quad W$	قوانين
	السحب على التتالي مع إعادة: نضع الجدول كاملاً محتويات الصندوق مع التكرار / محتويات الصندوق مع التكرار	السحب على التتالي مع إعادة القانون n^r $P(A) = \frac{\text{التباديل} \times \text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$
	السحب على التتالي دون إعادة : نحذف القطر الرئيسي: محتويات الصندوق مع التكرار / محتويات الصندوق مع التكرار	السحب على التتالي دون إعادة: القانون P_n^r $P(A) = \frac{\text{التباديل} \times \text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$
	السحب معاً : نحذف القطر الرئيسي و ما تحته : محتويات الصندوق مع التكرار / محتويات الصندوق مع التكرار	السحب معاً : القانون $\binom{n}{r}$ $P(A) = \frac{\text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$

نضع الاحتمالات على الشجرة : $\frac{\text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$	القانون دائماً : $P(A) = \frac{\text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$ و نعد الحالات عداً مباشراً	في كل الحالات : نحسب الحالات الكلية $n(\Omega)$ من القانون و نثبت المقام على كامل المسألة عند حساب $n(\Omega)$ لانضرب بالتباديل عدد التباديل : $\frac{!(\text{عدد الكرات المسحوبة})}{!(\text{التكرار})}$

المسألة (1)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء و كرتين سوداوين : نسحب من الصندوق كرة و نسجل لونها

ثم نعيدها و نضاعف الكرات من لونها ثم نسحب كرة أخرى و المطلوب:

1- احسب احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء
2- احسب احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون
3- احسب احتمال أن تكون الأولى سوداء
4- احسب احتمال أن تكون الكرات متمايزة في اللون
5- دمج مع متحول عشوائي: ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الكرات الحمراء المسحوبة, اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

المسألة (2)

مغلف يحوي بطاقتين حمراوين تحملان الأرقام 0,1 و بطاقتين زرقاوين تحملان الرقمين 1,2 و بطاقة بيضاء تحمل الرقم 1 ,نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع إعادة و المطلوب :

1- احسب احتمال أن تكون الكرتين من نفس اللون
2- احسب احتمال أن تكون الكرتين من لونين مختلفين
3- احسب احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين يساوي 2
4- احسب احتمال أن يكون مجموع الرقمين عدد فردي
5- احسب احتمال أن تكون الكرات من نفس اللون ومجموعها مساوي للعدد 2
6- ليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع الرقمين الظاهرين , اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

المسألة (3)

أعد المسألة السابقة في حالة السحب على التتالي دون إعادة

المسألة (4)

أعد المسألة السابقة في حالة السحب معاً

صندوق يحوي 10 كرات ستة منها حمراء و ثلاثة بيضاء و واحدة سوداء

نسحب من الصندوق 3 كراتٍ معاً

1- ما احتمال ظهور كرات من نفس اللون
2- ما احتمال ظهور كرتين حمراوين فقط
3- ما احتمال ظهور كرات ألوانها مختلفة مثنى مثنى
4- ما احتمال ظهور كرة حمراء واحد على الأقل
5- ما احتمال ظهور كرة سوداء واحدة على الأقل
6- ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الكرات السوداء , اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

المسألة (5)

أعد المسألة السابقة في حال السحب على التتالي دون إعادة

المسألة (6)

أعد المسألة السابقة في حال السحب على التتالي مع إعادة

المسألة (7)

يحتوي صندوق على 5 كرات. ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملان الأرقام 1 و 2. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق والمطلوب:

1- ما احتمال الحدث A "الكرتين المسحوبتين من اللون ذاته".
2- ما احتمال الحدث B "مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3".
3- ما احتمال الحدث B علماً أن A قد وقع؟
4- ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الألوان المختلفة الظاهرة , اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

التمرين (1)

نلقي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية و ليكن X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد مرات ظهور الكتابة (T)

فتكون قيم X هي $X = \{0,1,2,3\}$ (لا نكرر القيمة أكثر من مرة عندما نكتب مجموعة قيم X)

النتائج في فضاء العينة	كيف نعبر عنها وفق X	قيمة X الموافقة
HHH	عدد مرات ظهور T هنا ولا مرة	$X = 0$
HHT	عدد مرات ظهور T هنا مرة واحدة	$X = 1$
HTH	عدد مرات ظهور T هنا مرة واحدة	$X = 1$
THH	عدد مرات ظهور T هنا مرة واحدة	$X = 1$
TTH	عدد مرات ظهور T هنا مرتين	$X = 2$
THT	عدد مرات ظهور T هنا مرتين	$X = 2$
HTT	عدد مرات ظهور T هنا مرتين	$X = 2$
TTT	عدد مرات ظهور T هنا 3 مرات	$X = 3$

القانون الاحتمالي :

$$P(X = 0) = P(\{HHH\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = P(\{HHT, HTH, THH\}) = \frac{3}{8}$$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

$$P(X=2)=p(\{TTH,THT,HTT\})=\frac{3}{8} \quad , \quad P(X=3)=P(\{TTT\})=\frac{1}{8}$$

جدول القانون الاحتمالي:

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$x_i p_i$					
$x_i^2 p_i$					

التوقع الرياضي :

$$E(x)=\sum x_i pi$$

$$E(x)=\cdots \ldots \ldots$$

التباين :

$$V(x)=\sum x_i^2 p_i - E^2(x)$$

$$V(x)=\cdots \ldots -(\ldots \ldots)^2 =$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x=\sqrt{V(x)}=\cdots$$

التمرين (2)

نلقي قطعة نقود متوازنة 3 مرات و نتأمل لعبةً تقتضي بالحصول على نقطة واحدة كلما ظهر وجه الصورة (H) و خسارة نقطة كلما ظهر وجه الكتابة (T) و ليكن X المتحول العشوائي الذي يدلُّ على مجموع النقاط التي يحصل عليه اللاعب في نهاية اللعبة

فتكون مجموعة قيم X هي $X=\{3,1,-1,-3\}$

القانون الاحتمالي :

$$P(X=3)=P(\{HHH\})=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=P(\{HHT,HTH,THH\})=\frac{3}{8}$$

$$P(X=-1)=p(\{TTH,THT,HTT\})=\frac{3}{8}$$

$$P(X=-3)=P(\{TTT\})=\frac{1}{8}$$

النتائج في فضاء العينة	كيف نعبر عنها وفق X	قيمة X الموافقة
HHH	هنا اللاعب سيربح 3 نقاط لأنه قد ظهر الوجه H 3 مرات	$X=3$
HHT	هنا اللاعب سيربح نقطتين مقابل HH ويخسر نقطة مقابل T أي 1-1+1+ فيكون المجموع 1 نقطة	$X=1$
HTH	هنا اللاعب سيربح نقطتين مقابل HH ويخسر نقطة مقابل T أي 1-1+1+ فيكون المجموع 1 نقطة	$X=1$
THH	هنا اللاعب سيربح نقطتين مقابل HH ويخسر نقطة مقابل T أي 1-1+1+ فيكون المجموع 1 نقطة	$X=1$
TTH	هنا اللاعب سيربح نقطة مقابل H ويخسر نقطتين مقابل TT أي 1-1-1+ فيكون المجموع 1 - نقطة	$X=-1$
THT	هنا اللاعب سيربح نقطة مقابل H ويخسر نقطتين مقابل TT أي 1-1-1+ فيكون المجموع 1 - نقطة	$X=-1$
HTT	هنا اللاعب سيربح نقطة مقابل H ويخسر نقطتين مقابل TT أي 1-1-1+ فيكون المجموع 1 - نقطة	$X=-1$
TTT	هنا سيخسر اللاعب ثلاث نقاط مقابل TTT	$X=-3$

جدول القانون الاحتمالي :

x_i	-3	1	-1	3	$\sum$
p_i					1
$x_i p_i$					
$x_i^2 p_i$					

التوقع الرياضي :

$$E(x) = \sum x_i pi$$

$$E(x) = \cdots \ldots \ldots$$

التباين :

$$V(x) = \sum x_i^2 p_i - E^2(x)$$

$$V(x) = \cdots \ldots - (\ldots \ldots)^2 =$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \cdots$$

التمرين (3)

نلقي حجري نرد متوازنين وليكن X المتحول العشوائي الدال على أصغر العددين الظاهرين

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1) أصغرهما 1 $X=1$	(1,2) أصغرهما 1 $X=1$	(1,3) أصغرهما 1 $X=1$	(1,4) أصغرهما 1 $X=1$	(1,5) أصغرهما 1 $X=1$	(1,6) أصغرهما 1 $X=1$
2	(2,1) أصغرهما 1 $X=1$	(2,2) أصغرهما 2 $X=2$	(2,3) أصغرهما 2 $X=2$	(2,4) أصغرهما 2 $X=2$	(2,5) أصغرهما 2 $X=2$	(2,6) أصغرهما 2 $X=2$
3	(3,1) أصغرهما 1 $X=1$	(3,2) أصغرهما 2 $X=2$	(3,3) أصغرهما 3 $X=3$	(3,4) أصغرهما 3 $X=3$	(3,5) أصغرهما 3 $X=3$	(3,6) أصغرهما 3 $X=3$
4	(4,1) أصغرهما 1 $X=1$	(4,2) أصغرهما 2 $X=2$	(4,3) أصغرهما 3 $X=3$	(4,4) أصغرهما 4 $X=4$	(4,5) أصغرهما 4 $X=4$	(4,6) أصغرهما 4 $X=4$
5	(5,1) أصغرهما 1 $X=1$	(5,2) أصغرهما 2 $X=2$	(5,3) أصغرهما 3 $X=3$	(5,4) أصغرهما 4 $X=4$	(5,5) أصغرهما 5 $X=5$	(5,6) أصغرهما 5 $X=5$
6	(6,1) أصغرهما 1 $X=1$	(6,2) أصغرهما 2 $X=2$	(6,3) أصغرهما 3 $X=3$	(6,4) أصغرهما 4 $X=4$	(6,5) أصغرهما 5 $X=5$	(6,6) أصغرهما 6 $X=6$

نلاحظ أن مجموعة قيم X هي

$X = \{1,2,3,4,5,6\}$

(إذا كان الطلب أكبرهما يُحلُّ بنفس الأسلوب تماماً)

القانون الاحتمالي:

$P(X=1) = \frac{11}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X=1$ في الجدول

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

$P(X=2)=\frac{9}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X=2$ في الجدول

$P(X=3)=\frac{7}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X=3$ في الجدول

$P(X=4)=\frac{5}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X=4$ في الجدول

$P(X=5)=\frac{3}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X=5$ في الجدول

$P(X=6)=\frac{1}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X=6$ في الجدول

(مسامح بجدول القانون الاحتمالي و باقي الطلبات)

التمرين (4)

نلقي حجري نرد متوازنين وليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع العددين الظاهرين

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1) مجموعهما2 $X=2$	(1,2) مجموعهما3 $X=3$	(1,3) مجموعهما 4 $X=4$	(1,4) مجموعهما5 $X=5$	(1,5) مجموعهما6 $X=6$	(1,6) مجموعهما7 $X=7$
2	(2,1) مجموعهما3 $X=3$	(2,2) مجموعهما 4 $X=4$	(2,3) مجموعهما5 $X=5$	(2,4) مجموعهما6 $X=6$	(2,5) مجموعهما7 $X=7$	(2,6) مجموعهما8 $X=8$
3	(3,1) مجموعهما 4 $X=4$	(3,2) مجموعهما5 $X=5$	(3,3) مجموعهما6 $X=6$	(3,4) مجموعهما7 $X=7$	(3,5) مجموعهما8 $X=8$	(3,6) مجموعهما9 $X=9$
4	(4,1) مجموعهما5 $X=5$	(4,2) مجموعهما6 $X=6$	(4,3) مجموعهما7 $X=7$	(4,4) مجموعهما8 $X=8$	(4,5) مجموعهما9 $X=9$	(4,6) مجموعهما 10 $X=10$
5	(5,1) مجموعهما6 $X=6$	(5,2) مجموعهما7 $X=7$	(5,3) مجموعهما8 $X=8$	(5,4) مجموعهما9 $X=9$	(5,5) مجموعهما 10 $X=10$	(5,6) مجموعهما11 $X=11$
6	(6,1) مجموعهما7 $X=7$	(6,2) مجموعهما8 $X=8$	(6,3) مجموعهما9 $X=9$	(6,4) مجموعهما 10 $X=10$	(6,5) مجموعهما11 $X=11$	(6,6) مجموعهما12 $X=12$

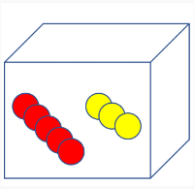
فمجموعة قيم X هي $X=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

بشكل مماثل للمسألة السابقة (بالعد المباشر) يمكن إيجاد الاحتمالات

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

التمرين (5)

صندوق يحوي 5 كرات حمراء و 3 كرات صفراء نسحب من الصندوق 3 كرات معاً و ليكن **X** المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة



☺هنا نحن نسحب 3 كرات (بسسس 3 كرات) و X يراقب عدد الكرات الحمراء المحتمل أن نسحبها

فتكون قيم $X = \{0,1,2,3\}$

الحالات الممكنة للسحب	التفسير	قيمة X الموافقة
3 كرات صفراء	ولا كرة حمراء	$X = 0$
كرتين صفراويين وكرة حمراء	كرة واحدة حمراء	$X = 1$
كرتين حمراوين وكرة صفراء	كرتين حمراء	$X = 2$
ثلاث كرات حمراء	ثلاث كرات حمراء	$X = 3$

القانون الاحتمالي :في مسائل سحب الكرات يجب أولاً حساب عدد الحالات الكلية ليكون مقام لكل المسألة

بما أن السحب 3 كرات معاً : $n(\Omega) = \binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56$

$$P(X=0) = P(YYY) = \frac{\binom{3}{3}}{56} = \frac{1}{56}$$

$$P(X=1) = P(YYR) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{56} = \frac{15}{56}$$

$$P(X=2) = P(RRY) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{56} = \frac{30}{56}$$

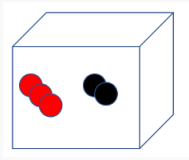
$$P(X=3) = P(RRR) = \frac{\binom{5}{3}}{56} = \frac{10}{56}$$

أكمل الجدول و التوقع و التباين و الانحراف

التمرين (6)

صندوق يحوي كرتين سوداء و 3 كرات حمراء. نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي دون إعادة

و ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة



الحالات الممكنة للسحب	التفسير	قيمة X الموافقة
3 كرات حمراء	-	$X = 3$
كرتين حمراوين وكرة سوداء	كرتين حمراء	$X = 2$
كرتين سوداوين وكرة حمراء	كرة واحدة حمراء	$X = 1$

فقيم المتحول X هي $X = \{1,2,3\}$

لاحظ هنا انه من المستحيل أن يكون $X = 0$ لأن $X = 0$ تعني عدم ظهور ولا كرة حمراء و هذا مستحيل فأقل ما يمكن أن يحدث أن نحصل على كرتين سوداين و كرة حمراء فأقل قيمة لـ X هي 1 ثم 2 ثم 3

القانون الاحتمالي :

نحسب عدد الحالات الكلي $n(\Omega) = P_5^3 = 5.4.3 = 60$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

$$P(X=3)=P(RRR)=\frac{P_3^3}{60}=\frac{6}{60}$$

$$P(X=2)=P(RRB)=\frac{P_3^2P_2^1\times \underbrace{3}_{\text{تباديل}}}{60}=\frac{36}{60}$$

$$P(X=1)=P(BBR)=\frac{P_2^2P_3^1\times \underbrace{3}_{\text{تباديل}}}{60}=\frac{18}{60}$$

جدول القانون الاحتمالي :

x_i	3	2	1	$\sum$
p_i				1
x_ip_i				
$x_i^2p_i$				

التوقع الرياضي :

$$E(x)=\sum x_ipi$$

$$E(x)=\cdots\ldots\ldots$$

التباين :

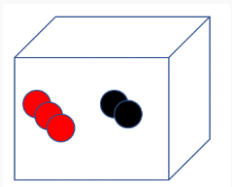
$$V(x)=\sum x_i^2p_i-E^2(x)$$

$$V(x)=\cdots\ldots-(\ldots\ldots)^2=$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x=\sqrt{V(x)}=\cdots$$

التمرين (7)



صندوق يحوي كرتين سوداء و 3 كرات حمراء. نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي مع إعادة

و ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة

الحالات الممكنة للسحب	التفسير	قيمة X الموافقة
3 كرات حمراء	-	$X=3$
كرتين حمراوين وكرة سوداء	كرتين حمراء	$X=2$
كرتين سوداوين وكرة حمراء	كرة واحدة حمراء	$X=1$
3 كرات سوداء (السحب مع إعادة)	ولا كرة حمراء	$X=0$

فقيم المتحول X هي $X=\{0,1,2,3\}$

القانون الاحتمالي :

عدد الحالات الكلي $n(\Omega) = 5^3 = 125$

$$P(X=3) = P(RRR) = \frac{3^3}{125} = \frac{27}{125}$$

$$P(X=2) = P(RRB) = \frac{3^2.2^1 \times \underbrace{3}_{\text{تباديل}}}{125} = \frac{54}{125}$$

$$P(X=1) = P(RBB) = \frac{3^1.2^2 \times \underbrace{3}_{\text{تباديل}}}{125} = \frac{36}{125}$$

$$P(X=0) = P(BBB) = \frac{2^3}{125} = \frac{8}{125}$$

التمرين (8)

صندوق يحوي 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرة صفراء . نسحب من الصندوق 3 كرات معاً و ليكن X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الألوان المختلفة الظاهرة

(((((عدد الألوان المختلفة يعني كم لون ممكن يظهر بالسحب.. فمستحيل ما يظهر ولا لون فمستحيل يكون $X = 0$))))) سنرمز للخضراء G والحمراء R والصفراء Y

الحالات الممكنة للسحب	التفسير	قيمة X الموافقة
GGG	لون واحد الأخضر	$X = 1$
GGR	لونين الأخضر والأحمر	$X = 2$
GGY	لونين الأخضر والأصفر	$X = 2$
GRY	3 ألوان اخضر وأحمر وأصفر	$X = 3$
RRR	لون واحد الأحمر	$X = 1$
RRG	لونين الأحمر والأخضر	$X = 2$
RRY	لونين الأصفر والأحمر	$X = 2$

فقيم X تكون $X = \{1,2,3\}$

القانون الاحتمالي : لنحسب عدد الحالات الكلي : $n(\Omega) = \binom{8}{3} = 56$

$$P(X=3) = P(RGY) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{56} = \frac{12}{56} \quad , \quad P(X=1) = P(GGG, RRR) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{3}}{56} = \frac{4}{56}$$

إن حالة $X = 2$ صعبة الحساب لذا سنتسفيد من خاصية الحدث المتمم :

$$P(X=2) = 1 - \big(P(X=1) + P(X=3)\big) = 1 - \left(\frac{4}{56} + \frac{12}{56}\right) = \frac{36}{56}$$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

لا يوجد ما هو مستحيل في الرياضيات

إن إبداع الطالب دائماً يمكن استخراجه إذا ما تم عرض المعلومة بطريقة مناسبة وأسلوب محبب
و طالما لدى الطالب الرغبة على بلوغ أسمى المستويات فإن من واجب المدرس الإرتقاء بهم لتحقيق أعلى معدلات التميز و النجاح .... نذير تيناوي
#لن_يبلى_الشغف

المسألة (1)

يحتوي صندوق على 5 كرات , اثنتان تحملان الرقم , واثنتان تحملان الرقم , واحدة تحمل الرقم , نسحب من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة , نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع رقمي الوجهين الظاهرين

عين مجموعة قيم X واكتب قانونه الاحتمالي ثم احسب التوقع و التباين و الانحراف المعياري

المسألة (1)

نتأمل التجربة الآتية:

صندوق يحوي ثلاث كرات : واحدة حمراء تحمل الرقم 1 اثنتان زرقاوان تحملان ارقم 2 و 3 نسحب

من الصندوق عشوائياً كرتين على التتالي مع إعادة ولتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة :

- نعرف على Ω المتحول العشوائي X الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد الكرات الزرقاوات المسحوبة
- ونعرف على Ω المتحول العشوائي Y الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموعة رقمي الكرتين المسحوبين

1- اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي
2- اكتب قيم Y و قانونه الاحتمالي
3- اكتب قانون الاحتمال للزوج (X,Y)
4- هل X,Y مستقلان عشوائياً

المسألة (2)

نلقي حجري نرد متوازنين نرمز بالرمز S إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها وليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 2 و Y الذي يمثل باقي قسمة S على 4 والمطلوب:

1- عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S.
2- عين القانونين الاحتماليين للمتحولين العشوائيين X و Y.
3- عين القانون الاحتمالي للزوج (X,Y).
4- هل المتحولان X و Y مستقلان احتمالياً؟!

المسألة (3)

يتطلب انجاز منهاج الرياضيات في جلسة شغف الرياضيات الامتحانية مرحلتين المرحلة A شرح الأفكار النظرية والمرحلة B حل مسائل وتمارين شاملة تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يعطى قانون احتمالها بالجدول الآتي:

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X_A = x)$	0.2	0.5	0.3

x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_B = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

وتستغرف المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B يعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

المتحولان العشوائيان X_B و X_A مستقلان احتمالياً. نرمز بالرمز E للحدث "تستغرق انجاز المنهاج ثلاثة أيام أو أقل". احسب احتمال الحدث E.

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

المسألة (4)

أكمل الجدول الآتي إذا علمت أن X و Y مستقلان احتمالياً:

X \ Y	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

التمثيل الشجري

- **قواعد التمثيل الشجري:**
  - توافق كل عقدة حالة من حالات التجربة
  - قانون العقد: مجموع جميع الاحتمالات المكتوبة على الفروع الصادرة من العقد يساوي 1
  - يمثل مسار تام بدءاً من جذر الشجرة إلى نهاية طرف نهائي فيها الحدث الموافق لتقاطع جميع الأحداث التي يمر بها المسار
  - إن احتمال مسار يساوي جداء ضرب الاحتمالات المسجلة على الفروع التي تكوّن هذا المسار
  - احتمال الحدث D يساوي مجموع احتمالات المسارات المؤدية إلى D

المسألة (1)

يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح الكهربائية , عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح , صنعت الورشة A منها 1200 مصباح وصنعت البقية الورشة B , هناك نسبة 4% من المصابيح التي من صناعة الورشة A معطوبة , في حين تكون نسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة , نسحب عشوائياً مصباحاً من الطلب , نرمز بالرمز A إلى الحدث " المصباح مصنوع في الورشة A " وبالرمز B إلى الحدث " المصباح مصنوع في الورشة B " وبالرمز D إلى الحدث " المصباح معطوب " , المطلوب :

1- أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة
2- احسب احتمال أن يكون المصباح معطوب
3- إذا كان المصباح معطوباً فما احتمال أن يكون مصنوعا في الورشة A

المسألة (2)

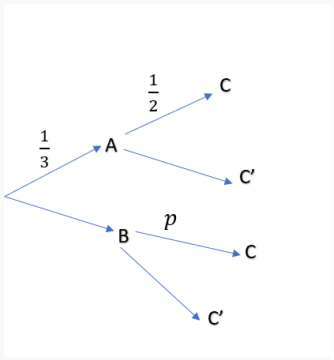
في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب , ونعلم أن مدرستنا تضم 60% ذكور وأن 55% من هؤلاء لا يلعبون كرة المضرب ' ما احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين الطالبات لا تمارس كرة المضرب .

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

المسألة (3)

نتأمل في الشكل المجاور تمثيلاً شجرياً لتجربة عشوائية

احسب p ليكون الحدثان A, C مستقلان احتمالياً .



المسألة (4)

صندوق يحوي ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين نسحب من الصندوق كرة تلو الأخرى حتى لا يتبقى في الصندوق الا كرات من اللون ذاته، وليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد مرات السحب اللازمة، عين مجموعة قيم X واكتب قانونه الاحتمالي ثم احسب التوقع و التباين و الانحراف المعياري

المسألة (5)

نتأمل صندوقاً يحوي على 3 كرات سوداء و أربع كرات حمراء .نسحب من عشوائياً كرة من الصندوق و نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق ثم نحسب مجدداً كرة من الصندوق . لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث (الكرة المحسوبة في المرة الثانية حمراء اللون)

و ليكن R_1 الحدث (الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون)

1- أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة
2- احسب احتمال R_2
3- إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون ما احتمال أن تكون الكرة الأولى في المرة الأولى سوداء اللون ؟

المسألة (6)

تحاول سعاد إدخال الوتد في حلقات تلقيها, تكرر سعاد التجربة عدداً من المرات عندما تنجح سعاد في ادخال الحلقة فإن احتمال نجاحها في ادخال الحلقة اللاحقة هو $\frac{1}{3}$ وعندما تفشل في ادخال الحلقة يصبح احتمال فشلها في ادخال اللاحقة $\frac{4}{5}$ نفترض أن احتمال نجاح سعاد في ادخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها, نتأمل أيا كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n الحدثين الآتيين:

A_n : نجحت سعاد في ادخال الحلقة عند المرة n.

B_n: فشلت سعاد في ادخال الحلقة عند المرة n.

ونعرف $p_n = P(A_n)$:

1- عين p_1 وبرهن أن $p_2 = \frac{4}{15}$.
2- أثبت انه أيا كانت $n \geq 2$ كان $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$.
3- نعرف في حالة $n \geq 1$ المقدار u_n بالعلاقة $u_n = p_n - \frac{3}{13}$ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية وعين حدها الأول u_1 وأساسها q.
4- استنتج قيمة u_n ثم p_n بدلالة n, ثم احسب نهاية p_n.
5- ماذا تستنتج؟

المسألة (7)

لدينا n صندوقاً $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء و كرة واحدة حمراء . و كل صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين و كرة واحدة حمراء .

نسحب كرة من الصندوق الأول u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 و نضعها في الصندوق u_3 و هكذا ... , حتى نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} و نضعها في الصندوق u_n .

يرمز بالرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)

1- قيمة $P(R_1)$ تساوي :

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

a	$\frac{1}{3}$	b	$\frac{2}{5}$	c	$\frac{1}{4}$	d	$\frac{3}{4}$

-2 يكون $P(R_2)$ مساوياً لـ :

a	$\frac{1}{4}P(R_1)-\frac{1}{4}$	b	$\frac{3}{4}P(R_1)+\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{4}P(R_1)+\frac{1}{4}$	d	$\frac{1}{4}P(R_1)+\frac{3}{4}$

-3 في حالة $2 \le k \le n$ يكون $P(R_k)$ مساوياً لـ :

a	$\frac{1}{4}P(R_{k-1})-\frac{1}{4}$	b	$\frac{3}{4}P(R_{k-1})+\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{4}P(R_{k-1})+\frac{1}{4}$	d	$\frac{1}{4}P(R_{k-1})+\frac{3}{4}$

-4 نعرف $x_k = P(R_k) - \frac{1}{3}$ عندئذٍ تكون المتتالية $(x_k)_{k\ge1}$:

a	هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	b	هندسية أساسها $-\frac{1}{4}$	c	هندسية أساسها $\frac{1}{4}$	d	ليست هندسية

-5 عبارة x_k بدلالة k :

a	$\left(\frac{1}{4}\right)^k$	b	$\left(-\frac{1}{4}\right)^k$	c	$-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k$	d	$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k$

-6 عبارة $P(R_k)$ بدلالة k :

a	$\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{3}$	b	$\left(-\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{3}$	c	$-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{3}$	d	$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{1}{3}$

الأجوبة : كلن ^C_^

التجربة البرنولية

تستخدم في حال عدد مرات التكرار كان أكبر من 3 أو حجم فضاء العينة مجهول و السحب على التتالي مع إعادة أو قطعة نقود غير متجانسة

-1 نرمز لاحتمال النجاح في المرة الواحدة p و احتمال الفشل $q = 1 - p$
-2 عدد مرات تكرار التجربة n
-3 مجموعة قيم المتحول الحداني :

$$X = \{0,1,2,3,\dots,n\}$$

-4 القانون الاحتمالي :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

-5 التوقع $E(x) = np$
-6 التباين $V(x) = npq$
-7 الانحراف المعياري $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

التمرين (1) دورة 2021

نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود و ووجهان ملونان بالأحمر . نلقي هذا الحجر خمس مرات متتالية و نعرف المتحول العشوائي X الذي يدل على عدد الوجوه السوداء التي نحصل عليها و المطلوب :

-1 اكتب قيم المتحول العشوائي X واحسب $P(X = 0)$
-2 احسب التوقع الرياضي للمتحول X واحسب تباينه

التمرين (2)

قطعة نقود غير متجانسة فيها احتمال ظهور صورة يساوي مثلي احتمال ظهور كتابة نلقي هذه القطعة ثلاثة مرات وليكن X املتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور كتابة عين قيم المتحول العشوائي X ثم اكتب جدول القانون الاحتمال واحسب كل من: التوقع الرياضي , التباين و الانحراف المعياري.

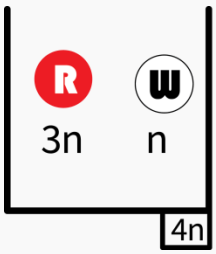
التمرين (3)

يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء ، عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء

-1 نسحب عشوائياً كرة ، ما احتمال أن تكون حمراء اللون
-2 نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي و مع إعادة و نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عملية السحب ، ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X
-3

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

الحل



❶ لنفرض أن عدد الكرات البيضاء هو n عندئذٍ يكون عدد الكرات الحمراء $3n$ و عدد الكرات الكلي في الصندوق $3n+n=4n$ و بالتالي احتمال أن تكون كرة مسحوبة عشوائياً حمراء اللون يساوي

$$\frac{3n}{4n}=\frac{3}{4}$$

❷ قيم المتحول العشوائي X :

$$X=\{0,1,2,3\}$$

$\mathrm{P}=\frac{3}{4}$ ((احتمال ظهور كرة حمراء)) و منه

$$\mathrm{q}=1-\mathrm{p}=\frac{1}{4}$$

و السحب يتكرر هنا 3 مرات $\Leftarrow$ $\boxed{\mathrm{n}=3}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=\binom{3}{\mathrm{k}}\left(\frac{3}{4}\right)^{\mathrm{k}}\left(\frac{1}{4}\right)^{3-\mathrm{k}}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}=\frac{1}{64}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=\frac{9}{64}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}=\frac{27}{64}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}=\frac{27}{64}$$

التمرين (4) سؤال دورة

نتأمل في الجدول الآتي تجربة برنولية

k	0	1	2	3
P_k				$\frac{1}{27}$

1- أوجد وسطاء القانون الاحتمالي n,p,q
2- اكتب القانون الاحتمالي و أكمل الجدول السابق

الحل

لدينا $k=0,1,2,\ldots\ldots,n$ إذن $\boxed{n=3}$ نعلم ان القانون الاحتمالي الحداني

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=\binom{3}{\mathrm{k}}p^{k}q^{3-k}\ \ldots\ldots(\star)$$

من الجدول لدينا $P(X=k)=\frac{1}{27}$ نعوض في $(\star)$

$$\binom{3}{3}p^{3}q^{3-3}=\frac{1}{27}$$

$$p^{3}=\frac{1}{27}\Rightarrow\boxed{p=\frac{1}{3}}$$

إذن

$$\boxed{q=\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow P(X=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$$

$$P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\frac{8}{27}$$

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{12}{27}$$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}=\frac{6}{27}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{27}$$

k	0	1	2	3	Σ
p_k	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

إضافي : احسب التوقع و الانحراف المعياري

$$E(x)=np=3\times\frac{1}{3}=1$$

$$V(x)=npq=3\times\frac{1}{3}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\sigma_{(x)}=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

اختبار

المسألة (1)

يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء و عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء و المطلوب :

1- نسحب عشوائياً من الصندوق كرة . ما احتمال أن تكون بيضاء اللون
2- نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي مع إعادة . نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاثة . اكتب مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي .

المسألة (2)

يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام 1و2و3و4و5 نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع الإعادة و المطلوب :

1- كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب
2- كم عدد النتائج المختلفة و التي تشتمل على كرتين مجموعهما عدد فردي

المسألة (3)

عين قيمة n التي تحقق المعادلة :

$$P_{n+3}^{3}=16\binom{n+2}{2}$$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592

المسألة (4)

صندوق يحوي 9 كرات متماثلة منها 4 كرات خضراء و 5 كرات حمراء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً . و نتأمل متحولاً عشوائياً X يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء يأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين و كرة خضراءو يأخذ القيمة 0 عدا ذلك و المطلوب

اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X و احسب توقعه الرياضي

المسألة (5)

في مجتمع للبالغين تبلغ نسبة المصابين بمرض *corona* *30%* وبينت الدراسات أن *70%* من المصابين تظهر عليهم أعراض ارتفاع درجة الحرارة و أن *25%* من غير المصابين تظهر عليهم أعراض ارتفاع درجة الحرارة

1- أعط تمثيلاً شجرياً للمسألة
2- احسب احتمال أن تظهر على شخص ما أعرض ارتفاع درجة الحرارة
3- ما احتمال أن يكون الشخص غير مصاب بـ *corona* علماً أنه يعاني ارتفاع حرارة

المسألة (6)

يحتوي مغلف على 5 بطاقات , اثنتان تحملان الرقم , واثنتان تحملان الرقم , واحدة تحمل الرقم , نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي دون إعادة و المطلوب :

1- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما 4
2- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما عدد فردي

المسألة (7)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء و كرتين بيضاوين و كرة زرقاء

نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً و المطلوب :

1- ما عدد النتائج التي تشتمل على 3 كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى
2- ما عدد النتائج التي تشتمل على كرتين من نفس اللون
3- ما عدد النتائج التي تشتمل على كرات من لون واحد

المسألة (8)

احسب قيمة r إذا علمت :

$$\frac{1}{\binom{4}{r}}=\frac{1}{\binom{5}{r}}+\frac{1}{\binom{6}{r}}$$

المسألة (9)

نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير و نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمس أشخاص . بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

المسألة (10)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء مرقمة بالأرقام 1و2 و3 و كرتين زرقاوين مرقمين بالأرقام 1و2 و كرتين بيضاوين مرقمين بالأرقام 2و3 ,نسحب من الصندوق 3 كرات معاً

1- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات مختلفة الألوان
2- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات تحمل نفس الرقم
3- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات مختلفة اللون و تحمل نفس الرقم

المسألة (11)

نتأمل في الشكل المجاور 6 خانات يمكن لأي منها أن تُملأ بأحد الرقمين $+1$ أو -1

1- بكم طريقة يمكن ملء هذه الخانات
2- بكم طريقة يمكن ملء هذه الخانات حتى يكون مجموع أرقمها مساوياً للصفر
3- ليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع الأرقام في الخانات بعد ملئها . اكتب قيم X

المسألة (VIE 1)

في تجربة القاء حجري نرد متوازنين نعرف X المتحول العشوائي الدال على أكبر العددين الظاهرين, المطلوب:

1- اكتب مجموعة قيم X وجدول قانونه الاحتمالي.
2- احسب توقعه الرياضي $E(x)$.
3- إذا علمت أن اكبر العددين الظاهرين هو 6 فما احتمال ظهور العدد 1؟

المسألة (VIE 2)

نتأمل جانباً جدول القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي X, المطلوب:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{\alpha}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{\beta}{16}$

1- عين العددين α و β إذا علمت أن $E(x)=2$.
2- من أجل $\alpha=6$ و $\beta=1$ ، احسب تباين المتحول العشوائي $V(x)$.

المسألة (VIE 3)

تقدم طالب لامتحان مؤلف من 8 أسئلة لكل سؤال جواب صحيح واحد من أصل 4 ويجيب هذا الطالب بالحزر (التشليف) وليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الأسئلة التي ينجح في الإجابة عنها الطالب:

1- اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي.
2- احسب التوقع الرياضي.
3- ما احتمال أن يجيب الطالب على سؤالين صحيحين فقط؟

المسألة (VIE 4)

لدينا n صندوقاً $I_1, I_2, I_3 \dots, I_n$ يحوي الصندوق I_1 كرتين حمراوين وكرة سوداء أما باقي الصناديق الأخرى فكل منها يحوي كرتين حمراوين وكرتين سوداوين، نسحب من I_1 كرة ونضعها في I_2 ثم نسحب كرة من I_2 ونضعها في I_3 ونكمل التجربة إلى أن نصل إلى I_n , وليكن $P_k = P(R_k)$ ظهور كرة حمراء في المرة k حيث $1 \le k \le n$.

1- احسب P_1 و P_2.
2- اكتب P_{n+1} بدلالة P_n.
3- بفرض $P_{n+1} = f(P_n)$.
أ- عين $f(x)$.
ب- جد ℓ حل المعادلة $f(x)=x$
ت- نضع المتتالية $v_n = P_n - \ell$, أثبت أنها هندسية وعين أساسها.

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الامتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو whatsApp:0947050592