حلول بنوك الشغف في التحليل

التمرين الأول

$$f(x)=\frac{2\ln x-3}{\ln x+1}$$

1- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)\left(2-\frac{3}{\ln(x)}\right)}{\ln(x)\left(1+\frac{1}{\ln(x)}\right)}=2$$

2- لدينا:

$$\ell=\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$

$$\varepsilon=b-\ell=0.01=\frac{1}{100}$$

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2\ln x-3}{\ln x+1}-2\right|<\frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{2\ln x-3-2\ln x-2}{\ln x+1}\right|<\frac{1}{100}$$

$$\frac{5}{\ln(x)+1}<\frac{1}{100}$$

$$\frac{\ln(x)+1}{5}>100$$

$$\ln(x)+1>500$$

$$\ln(x)>499$$

$$x>e^{499}$$

3- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to2} f(X)=\frac{2\ln(2)-3}{\ln(2)+1}$$

التمرين الثاني

1- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

2- لدينا:

$$4\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)$$

$$=4\left(x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)$$

$$=4\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)$$

$$=(2x+1)^2+4$$

3- لدينا:

$$f(x)-\sqrt{(2x+1)^2}$$

$$=\sqrt{(2x+1)^2+4}-\sqrt{(2x+1)^2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{(2x+1)^2+4}-\sqrt{(2x+1)^2}\right)\left(\sqrt{(2x+1)^2+4}+\sqrt{(2x+1)^2}\right)}{\sqrt{(2x+1)^2+4}+\sqrt{(2x+1)^2}}$$

$$=\frac{(2x+1)^2+4-(2x+1)^2}{\sqrt{(2x+1)^2+4}+\sqrt{(2x+1)^2}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{(2x+1)^2+4}+\sqrt{(2x+1)^2}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-\sqrt{(2x+1)^2}=0$$

4- نضع: $y_d=\sqrt{(2x+1)^2}$

$$y_d=|2x+1|\begin{cases}y_1=2x+1\;;x\to+\infty\\ y_2=-2x-1\;;x\to-\infty\end{cases}$$

5- لدينا:

$$f'(x)=\frac{8x+4}{2\sqrt{4x^2+4x+5}}=\frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$$

نلاحظ أن:

$$g(x)=f(\sin(x))$$

$$g'(x)=f'(\sin(x))(\sin(x))'$$

$$=\frac{4\sin(x)+2}{\sqrt{4\sin^2 x+4\sin x+5}}.\cos x$$

التمرين الثالث

1- لدينا:

$$g(1)=2$$

g اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$g(x)=e^{\ln(2^x)}=e^{\ln(2)x}$$

$$g'(x)=\ln(2)\,e^{x\ln(2)}$$

$$g'(1)=\ln(2)\,e^{\ln(2)}$$

2- لدينا:

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{2^x-2}{x-1}$$

$$=g'(1)=\ln(2)\,e^{\ln(2)}=2ln2$$

3- لدينا:

$$\lim_{x\to1}f(x)=2\ln(2)$$

$$f(2)=\ln(m)$$

حسب شرط الاستمرار:

$$\ln(m)=2ln2$$

$$m=4$$

التمرين الرابع

1- لدينا:

$$f'(x)=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x)=3^2\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=3^2\sin\left(3x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f^{(3)}(x)=3^3\sin\left(3x+\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=3^3\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

2- لدينا:

$$E(n):f^{(n)}(x)=3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$f'(x)=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$$

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$f^{(n)}(x)=3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$$ .....الفرض

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$f^{(n+1)}(x)=3^{n+1}\sin\left(3x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$ ..طلب

البرهان: لدينا من الفرض:

$$f^{(n)}(x)=3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

نشتق الطرفين:

$$f^{(n+1)}(x)=3^n\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right).3$$

$$=3^{n+1}\sin\left(3x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

محققة.

التمرين الخامس

$$\lim_{x\to0}xln^2x$$

لدينا:

$$x(\ln x)^2$$

سندخل الـ x للقوس فتُجذر:

$$\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)^2$$

$$\left(\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})^2\right)^2$$

$$\left(2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\right)^2$$

$$\lim_{x\to}\left(2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\right)^2=0$$

لأن $\lim_{t\to 0} t\ln(t) = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

بفرض:

$$\frac{x+1}{x} = 1+t$$

$$x+1 = x(1+t)$$

$$x(1+t) - x = 1$$

$$x(1+t-1) = 1$$

$$x = \frac{1}{t}$$

نغير جهة السعي:

$$(x\to+\infty) \Rightarrow (t\to 0)$$

نعوض:

$$\frac{1}{t}\ln(1+t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\lim_{x\to 4}(5-x)^{\frac{1}{x-4}}$$

بفرض:

$$5-x = 1+t$$

$$x = 4-t$$

نغير جهة السعي:

$$(x\to 4) \Rightarrow (t\to 0)$$

نعوض:

$$(1+t)^{\frac{1}{4-t-4}} = (1+t)^{-\frac{1}{t}}$$

$$= (1+t)^{\frac{-1}{t}}$$

$$\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-1} = e^{-1}$$

لأن $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

التمرين السادس

$$\boldsymbol{ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{lna+lnb}{2}}$$

$$ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{ln(ab)}{2}$$

$$2\,ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = ln(ab)$$

$$ln\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{9}\right) = ln(ab)$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{9} = ab$$

$$a^2+2ab+b^2 = 9ab$$

$$a^2-7ab+b^2 = 0$$

نقسم على b^2:

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{7a}{b} + 1 = 0$$

نفرض $x = \frac{a}{b}$:

$$x^2-7x+1 = 0$$

$$\Delta = 49-4(1)(1) = 45$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

يوجد قيمتين للمقدار $\frac{a}{b}$.

التمرين السابع

$$2\ln^2 x \geq \ln(x)^2$$

لنوجد شروط الحل :

$$E_1 =]0,+\infty[$$
$$E_2 = R^*$$

فالشرط $E = R_+^*$

$$2\ln^2 x \geq 2\ln(x)$$

$$2\ln^2 x - 2\ln(x) \geq 0$$

بفرض $\ln(x) = t$:

$$2t^2 - 2t \geq 0$$

$$2t^2 - 2t = 0$$

$$t^2 - t = 0$$

$$t(t-1) = 0$$

$$t = 0 \, , t = 1$$

$$\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\ln(x) = 1 \Rightarrow x = e$$

ننظم جدول إشارة:

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$2\ln^2 x - 2\ln x$	$+++$ 0 $---$ 0 $+++$
$0 >$	مقبول غير مقبول مقبول

$$S:]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

التمرين الثامن

$$\boldsymbol{y' + 2y = 0}$$

$$\boldsymbol{f'(-2) = \frac{1}{2}}$$

نعزل y' :

$$y' = -2y$$

فنجد أنها من الشكل $y' = ay + b$ حيث :

$$a = -2 \quad , \quad b = 0$$

نعوض في عبارة الحل العام $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

$$\Rightarrow y = k.e^{-2x}$$

نضع :

$$f(x) = ke^{-2x}$$
$$f'(x) = -2ke^{-2x}$$

نعوض -2 في المشتق:

$$f'(-2) = -2ke^4$$

$$\frac{1}{2} = -2ke^4$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{4e^4}$$

فالحل المطلوب :

$$y = -\frac{1}{4e^4}e^{-2x}$$

التمرين التاسع

1- نشكل الفرق:

$$G(x) - F(x) = 601 - cos^2 x - sin^2 x$$

$$= 601 - (sin^2 x + cos^2 x)$$

$$= 601 - 1 = 600 = k$$

إذن F, G تابعان أصليان للتابع ذاته

2- نشكل الفرق:

$$G(x) - F(x) = \frac{1}{cos^2 x} - tan^2 x$$

$$= \frac{1}{cos^2 x} - \frac{sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1 - sin^2 x}{cos^2 x}$$

$$= \frac{cos^2 x}{cos^2 x} = 1 = k$$

إذن F, G تابعان أصليان للتابع ذاته

التمرين العاشر

ندرس اطراد x_n:

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

متزايدة.

ندرس اطراد y_n:

$$y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$y_{n+1}-y_n=x_{n+1}+\frac{1}{n+1}-x_n-\frac{1}{n}$$

$$=(x_{n+1}-x_n)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1+n+1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{n+2-(n+1)^2}{n(n+1)^2}<0$$

متناقصة.

نشكل لدينا:

$$y_n=x_n+\frac{1}{n}$$

$$y_n-x_n=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_n-x_n=0$$

متجاورتان.

التمرين الحادي عشر

$$u_n=\frac{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}=\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=0$$

التمرين الثاني عشر

1- لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$$

لأن $a>b$ فإن $q<1$.

2- لدينا:

$$v_n=\frac{a^n\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}=\frac{1-u_n}{1+u_n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\frac{1}{1}=1$$

التمرين الثالث عشر

1- لدينا:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\sqrt{16}=4$$

2- لدينا: $|f(x)-4|\le 0.2$

فحسب خواص القيمة المطلقة :

$$-0.2\le f(x)-4\le 0.2$$

نضيف 4 للطرفين :

$$3.8<f(x)<4.2$$

$$3.8<\sqrt{9x-2}<4.2$$

نربع:

$$(3.8)^2<9x-2<(4.2)^2$$

نضيف 2:

$$(3.8)^2+2<9x<(4.2)^2+2$$

نقسم على 9:

$$\frac{(3.8)^2+2}{9}<x<\frac{(4.2)^2+2}{9}$$

$$x\in\left]\frac{(3.8)^2+2}{9},\frac{(4.2)^2+2}{9}\right[$$

بالمقارنة مع المجال المطلوب :

$$x\in]2-\delta,2+\delta[$$

نجد

$$2+\delta=\frac{(4.2)^2+2}{9}$$

$$\delta=\frac{(4.2)^2+2}{9}-2$$

$$=\frac{(4.2)^2+2-18}{9}=\frac{(4.2)^2-16}{9}=\frac{1.64}{9}$$

تمرين الرابع عشر

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{3e^x-1}{e^x+1}}$$

1- نحسب:

$$f(x)+f(-x)$$

$$=\frac{3e^x-1}{e^x+1}+\frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$$

$$=\frac{3e^x-1}{e^x+1}+\frac{\frac{3}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}$$

$$=\frac{3e^x-1}{e^x+1}+\frac{\frac{3-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=\frac{3e^x-1+3-e^x}{e^x+1}$$

$$=\frac{2e^x+2}{e^x+1}=2\frac{e^x+1}{e^x+1}=2$$

2- لدينا:

$$D_f=\mathbb{R}$$

$$x\in\mathbb{R}\ \to -x\in\mathbb{R}$$

محقق، ولقد برهنا بالطلب السابق أن:

$$f(x)+f(-x)=2b$$

وبالتالي $I(0,1)$ مركز تناظر للتابع f.

3- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(3-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$$

$y=-1$ مقارب افقي في جوار $-\infty$.

$y=3$ مقارب افقي في جوار $+\infty$.

f اشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{3e^x(e^x+1)-e^x(3e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^x(3e^x+3-3e^x+1)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

الجدول:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + + + + +	
$f(x)$	-1 ↗	3

4- الرسم:

$$(3-m)e^x-1-m=0$$

$$3e^x-e^xm-m-1=0$$

$$-e^xm-m=-3e^x+1$$

$$m(-e^x-1)=-3e^x+1$$

$$m=\frac{-(3e^x+1)}{-(e^x+1)}=f(x)$$

$m\in]-\infty,-1]$ لا يوجد حلول

$m\in]-1,3[$ حل وحيد

$m\in[3,+\infty[$ لا يوجد حلول

5- للإثبات:

$$l_2=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=$$

$$\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=\frac{1}{1+e^x}=l_1$$

محققة.

طريقة 2 :

$$l_1=\frac{1}{e^x+1}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

لحساب المساحة:

$$f(x)=\frac{3e^x-1}{e^x+1}$$

نفرق

$$f(x)=3\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{e^x+1}$$

و بالاستفادة من الطلب السابق:

$$f(x)=3\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}$$
$$F(x)=3\ln|e^x+1|+\ln|e^{-x}+1|$$
$$\int_0^{ln2}f(x)dx=$$
$$[3\ln|e^x+1|+\ln|e^{-x}+1|]_0^{ln2}$$

$$=(3ln3+\ln\left(\frac{3}{2}\right))-(3ln2+ln2)$$

$$4ln3-5ln2=\ln\left(\frac{81}{32}\right)$$

تمرين الخامس عشر

$$\boldsymbol{f(x)=2\sin(x)+\sin(2x)}$$

1- لدينا:

$$f(x+2\pi)=2\sin(x+2\pi)+\sin\big(2(x+2\pi)\big)$$

$$=2\sin(x+2\pi)+\sin(2x+4\pi)$$

لكن إضافة 2π او 4π لا يؤثر على الزاوية.

$$=2\sin(x)+\sin(2x)=f(x)$$

فإنه دوري ودوره 2π,

لدراسة فردية أو زوجية التابع:

$$x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$$

$$f(-x)=2\sin(-x)+\sin(-2x)$$

$$=-2\sin(x)-\sin(2x)=-f(x)$$

التابع فردي.

2- التابع الدوري الذي دوره T يكفي دراسته على المجال $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ فهنا يكفي الدراسة على المجال $[-\pi,\pi]$ و بما أنه فردي متناظر للمبدأ فيكمن تنصيف المجال أي $[0,\pi]$

3- f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$\ell_1: f'(x)=2\cos(x)+2\cos(2x)$$

$$=2(\cos(x)+\cos(2x))$$

ومن جهة أخرى:

$$\ell_2=2(2\cos(x)-1)(\cos(x)+1)$$

$$=2(2\cos^2 x+2\cos x-\cos x-1)$$

$$=2(2\cos^2 x+\cos x-1)$$

$$=2(1+\cos(2x)+\cos x-1)$$

$$=2(\cos x+\cos(2x)=\ell_1$$

4- لدينا:

$$f(0)=0\,,f(\pi)=0$$

نعدم المشتق:

$$2(2\cos(x)-1)(\cos(x)+1)=0$$

إما:

$$2\cos x-1=0$$

$$\cos x=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{3}$$

أو:

$$\cos(x)+1=0$$

$$\cos(x)=-1$$

$$x=\pi$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ننظم جدولاً:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+ + + + + + + + + +	0 − − − − − − − − −	0
$f(x)$	0 ↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ↘	0

التمرين السادس عشر

$$\boldsymbol{f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)}$$

1- نشكل الفرق :

$$f(x) - y_d =$$
$$x - ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - (x - ln(2))$$

$$f(x) - y_d = x - ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - x + ln(2)$$

$$f(x) - y_d = -ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) + ln(2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_d) = -ln(2) + ln(2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_d) = 0$$

d مقارب مائل في جوار الـ $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_d = -ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) + ln(2)$$
$$= \ln(2) - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2}{\left(\frac{2x+1}{x}\right)}\right) = \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$$

نقارن المضمون مع الواحد :

$$\frac{2x}{2x+1} < 1$$

نأخذ لوغارتم الطرفين :

$$\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) < 0$$
$$f(x) - y_d < 0$$

2- التغيرات

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - ln(2) = +\infty$$

f اشتقاقي على D_f :

$$f'(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x(2x+1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(2)(1)$$

$$1 - 8 = -7 < 0$$

مستحيلة الحل

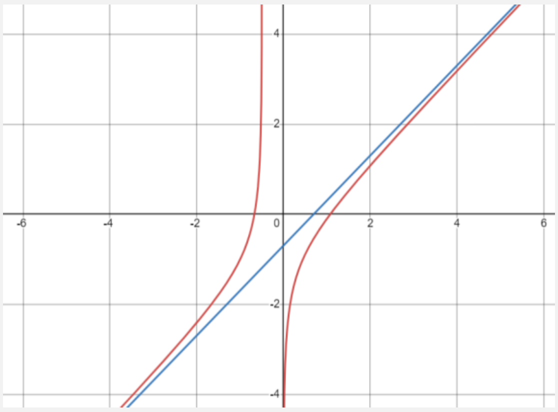
$$f'(x) > 0$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+ + + +	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3- نلاحظ أنّ f مستمر ومتزايد تماماً على $]1,2[$

$$0 \in f(\,]1,2[\,) =]1 - ln(3)\ ,2 - ln\left(\frac{5}{2}\right)[$$

للمعادلة حل وحيد α على المجال $]1,2[$



التمرين السابع عشر

1- لدينا:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\ln(0)}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

نعدم المشتق:

$$1-\ln(x) = 0$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

$$f(e) = \frac{1}{e}$$

x	0		e		$+\infty$
f'	‖	$+ + + + + + +$	0	$- - - - - - -$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2- نلاحظ من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x)=m$ حلان لما كانت $m \in]0,1/e[$

وبفرض الحلين a و b فإن:

$$f(a) = f(b)$$

$$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

3- نلاحظ من جدول التغيرات أن التابع متناقص على المجال $[3,+\infty[$ فإن u_n متناقصة.

4- لدينا $\cos(x)$ معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ فإنه اشتقاقي ومعرف على I

كما أن $cosx \in]0,+\infty[$ لأن

$$g'(x) = f'(\cos x)(\cos x)'$$

$$= \frac{1-\ln(cos(x))}{\cos^2 x}(-\sin x)$$

$$= \frac{\sin(x)\,(\ln(cos\,x)-1)}{\cos^2 x}$$

5- لدينا:

$$-f(x) = -\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right) = h(x)$$

ينتج عن c_h بتناظر c_f بالنسبة لمحور الفواصل.

التمرين الثامن عشر

1- لدينا:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

$$= e^x(2x+x^2)$$

نعدم:

$$2x + x^2 = 0$$

$$x(2+x) = 0$$

$$x = 0\,, x = -2$$

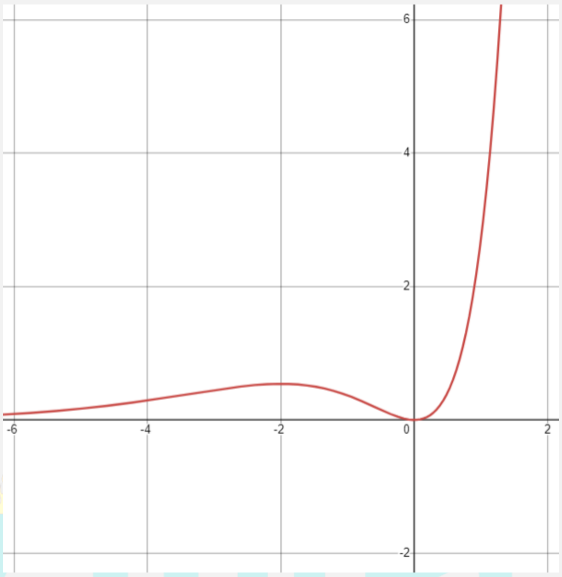
$$f(0) = 0\,, f(-2) = \frac{4}{e^2}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+++++$	0	$------$	0	$+++++$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-2) = \frac{4}{e^2}$ قيمة حدية كبرى

$f(0) = 0$ قيمة حدية صغرى

2- الرسم:



3- لدينا:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2e^x\,dx$$

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$$

$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$S = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\,dx$$

$$L = \int_0^1 2xe^x\,dx$$

$$u = 2x \Rightarrow u' = 2$$

$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$[2xe^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x\,dx$$

$$L = [2xe^x]_0^1 - [2e^x]_0^1$$

$$= [2xe^x - 2e^x]_0^1$$

$$= [0] - [-2] = 2$$

نعوض:

$$S = [(e) - (0)] - 2$$

$$S = e - 2$$

4- لدينا:

$$G'(x) = f^2(x)$$
$$(P'(x) + 2P(x))e^{2x} = x^4e^{2x}$$

$$\Rightarrow P'(x) + 2P(x) = x^4 \ldots (*)$$

نفرض $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$$P'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

نعوض في $(*)$:

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d + 2ax^4 + 2bx^3 + 2cx^2 + 2dx + 2e = x^4$$

$$2ax^4 + (4a + 2b)x^3 + (3b + 2c)x^2 + (2c + 2d)x + d + 2e = x^4$$

بالمقارنة :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 4a + 2b = 0 \\ 3b + 2c = 0 \\ 2c + 2d = 0 \\ d + 2e = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{2}\ ,b = -1\ \ ,c = -\frac{3}{2}\ \ ,d = \frac{3}{2}\ ,e = -\frac{3}{4}$$

$$G(x) = \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{2x}$$

الآن لحساب الحجم :

$$V = \pi\int_0^1 f^2(x)\,dx = \pi[G(x)]_0^1$$

$$V = \pi[G(1) - G(0)]$$

$$V = \pi\left[\left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)e^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$V = \pi\left[\left(-\frac{5}{4}\right)e^2 + \frac{3}{4}\right]$$

-a لدينا :

$$y = f(x) = x^2 e^x$$
$$y' = f'(x) = (x^2+2x)e^x$$

نعوض في المعادلة $y' + y \overset{?}{=} 2xe^x$

$$e^x(2x+x^2) - x^2e^x \overset{?}{=} 2xe^x$$

$$e^x(2x+x^2-x^2) \overset{?}{=} 2xe^x$$
$$2xe^x = 2xe^x$$

محققة

-b تمهيد :

إن المبرهنات التي من النمط (إذا وفقط إذا) تعني أن المطلوب برهان القضية بالاتجاهين

الاتجاه الأول :

g حل للمعادلة E $\Leftarrow$ $g-f$ حل للمعادلة E' :

- الفرض : g حل للمعادلة E فهو يحققها:

$$g'(x)+g(x) = 2xe^x$$

- الطلب : $g-f$ حل لـ E' :
- البرهان :

$$\left(g(x)-f(x)\right)' + \left(g(x)-f(x)\right) \overset{?}{=} 0$$
$$g'(x)-f'(x)+g(x)-f(x) \overset{?}{=} 0$$
$$\underbrace{g'(x)+g(x)}_{\text{فرضاً}=2xe^x} - f'(x) - f(x) \overset{?}{=} 0$$
$$2xe^x - (x^2+2x)e^x - x^2e^x \overset{?}{=} 0$$
$$0 = 0$$

محققة .

الاتجاه الثاني :

$g-f$ حل للمعادلة E' $\Leftarrow$ g حلّ لـ E

- الفرض : $g-f$ حل لـ E' أي:

$$\left(g(x)-f(x)\right)' + \left(g(x)-f(x)\right) = 0$$
$$g'(x)+g(x) = f'(x)+f(x) = 2xe^x$$

- الطلب : g حلّ لـ E :

$$g'(x)+g(x) \overset{?}{=} 2xe^x$$

و حسب الفرض :

$$2xe^x = 2xe^x$$

C- الآن : لدينا $E': y'+y=0$ أو :

$$y' = -y$$

فحلها العام يعطى بالشكل :

$$y = ke^{-x}$$

و هي مجموعة حلول E' و التي $g-f$ واحدٌ منها :

$$g(x)-f(x) = ke^{-x}$$
$$g(x) = f(x)+ke^{-x}$$
$$g(x) = x^2e^x + ke^{-x}$$

وهذه مجموعة حلول E

5- من أجل $m \in]0,4/e[$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول . لنرمز لحلين منهم α,β : إذن :

$$f(\alpha) = f(\beta)$$
$$\alpha^2e^\alpha = \beta^2e^\beta$$
$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{e^\beta}{e^\alpha}$$
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = e^{\beta-\alpha}$$

إضافة :

لو كان الطلب : أثبت وجود 3 أعداد حقيقية a,b,c تحقق أن :

$$a^2e^a = b^2e^b = c^2e^c$$

لاستفدنا من الحلول الثلاثة

التمرين التاسع عشر

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$$

1- لدينا:

$$\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

f اشتقاقي على $]1,+\infty[$:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0$$

الجدول:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

2- f مستمر ومتناقص على المجال $]1,+\infty[$ و:

$$0\in f(]1,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$$

للمعادلة حل وحيد α

التمرين العشرون

1- لدينا:

$$\lim_{x\to0} f(x)=+\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يقع على يمين مقاربه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$y=0$ مقارب أفقي نحو $+\infty$

2- f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

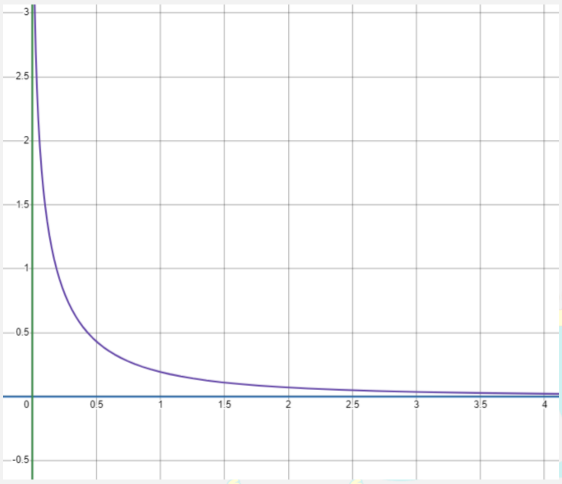
$$=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}<0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$ 0

الرسم:



3- لدينا من جدول التغيرات السابق:

$$f(x)>0$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0$$

$$\ln(x+1)-\ln(x)-\frac{1}{x+1}>0$$

$$\ln(x+1)>\ln(x)+\frac{1}{x+1}$$

وهو المطلوب.

التمرين الواحد والعشرون

1- بالضرب بالمرافق:

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

2- لدينا:

$$v_n = \underbrace{1}_{u_0} + \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{2}}}_{u_1} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}}_{u_{n-1}}$$

ولكن من الطلب السابق وجدنا أن:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

باستعمال هذه الخاصة نجد:

$$\begin{aligned} v_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ v_n &= \sqrt{1}-\sqrt{0} \\ &\quad +\sqrt{2}-\sqrt{1} \\ &\quad +\sqrt{3}-\sqrt{2} \\ &\quad +\cdots \\ &\quad +\sqrt{n}-\sqrt{n-1} \end{aligned}$$

تشطيب ^_^

$$v_n = \sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

التمرين الثاني والعشرون

1- لدينا:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

متزايدة.

2- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): u_n \le 2 - \frac{1}{n}$$

نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$u_1 \le 2 - \frac{1}{1}$$

$$1 \le 1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ... ... $u_n \le 2 - \frac{1}{n}$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$u_{n+1} \le 2 - \frac{1}{n+1}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$u_n \le 2 - \frac{1}{n}$$

نضيف للطرفين $\frac{1}{(n+1)^2}$:

$$u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \le 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

نضيف و نطرح $\frac{1}{n+1}$:

$$u_{n+1} \le 2 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1} \le 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1} \le 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)^2} \le 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1} \le 2 - \frac{1}{n+1}$$

محققة.

3- لدينا:

$$u_n \le 2 - \frac{1}{n} \le 2$$

بما أنها متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 2

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \le 2$$

فالمتتالية متقاربة.

التمرين الثالث والعشرون

1- لدينا:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$$

$$a(n+1)+bn=1$$

بتعويض $n=0$:

$$a=1$$

وبتعويض $n=-1$:

$$-b=1\Rightarrow b=-1$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

2- لدينا:

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

بالتشطيب ^_^

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=1$$

3- نلاحظ وضوحاً أن :

$$0\le u_n\le 1$$

التمرين الرابع والعشرون

$$\boldsymbol{S_0=12\ ,t_0=1}$$

$$\boldsymbol{S_{n+1}=\frac{t_n+3S_n}{4}\ ,t_{n+1}=\frac{t_n+2S_n}{3}}$$

1- لدينا:

$$v_{n+1}=S_{n+1}-t_{n+1}$$
$$=\frac{t_n+3S_n}{4}-\frac{t_n+2S_n}{3}$$
$$=\frac{3t_n+9S_n-4t_n-S_n}{12}$$
$$=\frac{1}{12}(S_n-t_n)=\frac{1}{12}v_n$$

متتالية هندسية وأساسها $q=\frac{1}{12}$.

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=0$$

لأن $-1<q=\frac{1}{12}<1$.

2- الشرط الأول:

لندرس اطراد المتتالية S_n:

$$S_{n+1}-S_n=\frac{t_n+3S_n}{4}-S_n$$
$$=\frac{t_n+3S_n-4S_n}{4}=\frac{t_n-S_n}{4}=-\frac{1}{4}(v_n)$$

$$v_0=S_0-t_0=1>0\,;q>0$$

$$v_n>0$$

$$\Rightarrow S_{n+1}-S_n=-\frac{1}{4}(v_n)<0$$

فالمتتالية S_n متناقصة.

لندرس اطراد t_n:

$$t_{n+1}-t_n=\frac{t_n+2S_n}{3}-t_n$$
$$=\frac{2S_n-2t_n}{3}=\frac{2}{3}(S_n-t_n)=\frac{2}{3}(v_n)\ge 0$$

فالمتتالية t_n متزايدة.

الشرط الثاني:

$$\lim_{n\to+\infty}(S_n-t_n)=\lim_{n\to+\infty}v_n=0$$

فالمتتاليتان S_n و t_n متجاورتان.

3- لدينا:

$$u_{n+1}=3t_{n+1}+8S_{n+1}$$
$$=t_n+2S_n+2t_n+6S_n$$
$$=3t_n+8S_n=u_n$$
$$u_{n+1}=u_n\ ;\forall n$$

ثابتة وقيمتها:

$$u_0=3t_0+8S_0=3+96=99$$
$$\Rightarrow u_n=99\ ;\forall n$$

4- بما أنهما متجاورتان:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}t_n=\ell$$

لدينا:

$$u_n=3t_n+8S_n$$

بأخذ نهاية الطرفين:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}3t_n+8S_n$$

ولكن $u_n=99$ وبالتالي:

$$99=3\ell+8\ell$$
$$99=11\ell$$
$$\Rightarrow \ell=9$$

وهي النهاية المشتركة:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}t_n=9$$

التمرين الخامس والعشرون

-1

$$x_{n+1}=x_n+2\Rightarrow X_{n+1}-x_n=2$$

ومنه: $(x_n)_{n\geq0}$ حسابية وأساسها $r=2$.

$$x_n-x_0=(n-0)r\Rightarrow x_n=2n+3$$

2- أياً كان العدد الطبيعي n فإن: $y_{n+1}-y_n=x_n=2n+3>0$ إذن: $(y_n)_{n\geq0}$ متزايدة.

3- لدينا:

$$y_1-y_0=x_0$$
$$y_2-y_1=x_1$$
$$y_3-y_2=x_2$$
$$\vdots$$
$$y_n-y_{n-1}=x_{n-1}$$
$$y_{n+1}-y_n=x_n$$

بالجمع نجد:

$$y_{n+1}-y_0=x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n$$

ولما كان: $y_0=0$ فإن:

$$y_{n+1}=x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n$$

-4

$$y_{n+1}=\left(\text{عدد الحدود}\right)\frac{a+l}{2}$$
$$=\frac{n+1}{2}(x_0+x_n)=\frac{n+1}{2}(3+2n+3)$$
$$=(n+1)(n+3)$$
$$(n-1+1)(n-1+3)=n(n+2)$$
$$=n^2+2n$$

وبما أن:

$$\lim_{n\to+\infty}y_n=+\infty$$

فتكون $(y_n)_{n\geq0}$ متباعدة.

التمرين السادس والعشرون

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\left(lnx-\frac{3}{2}\right) & : x>0\\ 0 & : x=0\end{cases}$$

1- لدينا:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{x^2}{2}\left(lnx-\frac{3}{2}\right)}{x}=\frac{x}{2}\left(lnx-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(xlnx-\frac{3}{2}x\right)$$
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$

التابع f اشتقاقي عند $x=0$ و $f'(0)=0$.

2- لدينا:

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$y=f(0)=0$$

3- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

4- f اشتقاقي على $[0,+\infty[$:

$$f'(x) = x\left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}$$

$$= x\left(\ln(x) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= x(\ln(x) - 1)$$

نعدم:

إما:

$$x = 0$$

أو:

$$\ln(x) - 1 = 0$$

$$\ln(x) = 1$$

$$x = e$$

$$f(0) = 0\,, f(e) = -\frac{e^2}{4}$$

ننظم جدولاً:

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-----------$	0	$+++++++++++$
$f(x)$	0 ↘	$-\frac{e^2}{4}$	↗ $+\infty$

المسألة الأولى

1- لدينا:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

f اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2}{2x^2}$$

نعدم:

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$x = +\sqrt{2}$ مقبول

$x = -\sqrt{2}$ مرفوض

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

ننظم جدولاً:

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$----------$	0	$++++++++++$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\sqrt{2}$	↗ $+\infty$

2- بفرض $y_d = \frac{x}{2}$:

$$f(x) - y_d = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_d = 0$$

d مقارب مائل.

نلاحظ أن:

$$f(x) - y_d > 0$$

C فوق d.

3- نضع:

$$f(x) = x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x$$

$$\frac{x^2 + 2}{2x} = x$$

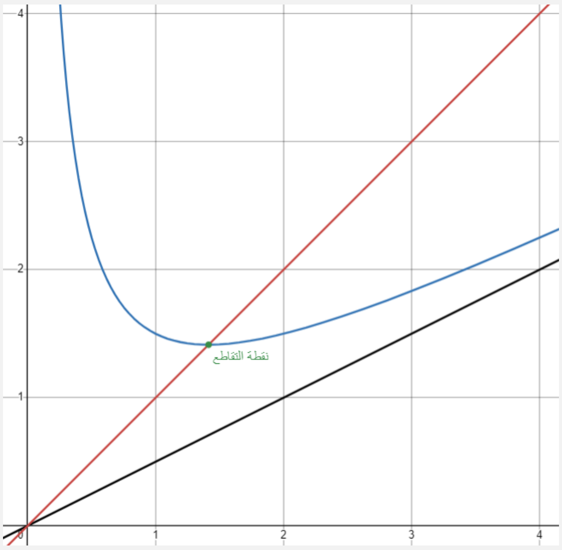
$$x^2 + 2 = 2x^2$$

$$x^2 = 2$$

$x = +\sqrt{2}$ مقبول

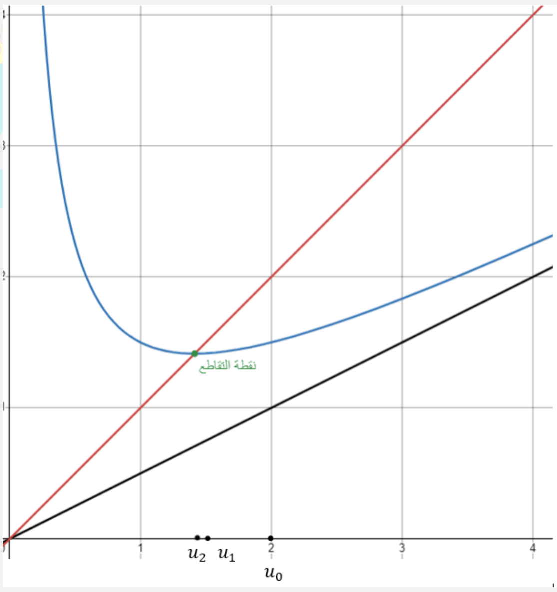
مرفوض $x = -\sqrt{2}$

4- الرسم:



5- لدينا:

أ- على الرسم نجد:



ب- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): \sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\sqrt{2} \le u_1 \le u_0$$

$$2 \le \frac{3}{2} \le 2$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

فرض ... ... $\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

طلب ... ... $\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$$

نصور الأطراف:

$$f(\sqrt{2}) \le f(u_{n+1}) \le f(u_n)$$

$$\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$$

ت- بما أنها متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة, لتعيين نهايتها:

$$f(x) = x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x$$

$$\frac{x^2 + 2}{2x} = x$$

$$x^2 + 2 = 2x^2$$

$$x^2 = 2$$

مقبول $x = +\sqrt{2}$

مرفوض $x = -\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$$

حلول المتابعة المنزلية تحليل

أولاً: حالات عدم التعيين

السؤال الأول

$$\lim_{x\to 0} x\ln^2 x$$

$$\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2 = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})^2\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\left(2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\right)^2$$

$$= (2.0)^2 = 0$$

$$f(x) = x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right) ; a = +\infty$$

$$= x^2\left(\frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right)$$

$$= x^2\left(\frac{2+\frac{1}{x}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right)$$

$$= x^2\left(\frac{1}{x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$= x\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \sin x\,.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ , a = 0^+$$

$$= \sin x\sqrt{\frac{1}{x^2}(x^2+1)}$$

$$= \sin x\left(\frac{1}{|x|}\right)\sqrt{x^2+1}$$

عند $x = 0^+$ فإن $|x| = x$:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1(1) = 1$$

$$f(x) = x(\ln x - 1)\ , a = 0^+$$

$$= x\ln x - x$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} ; a = 0$$

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$= \frac{1+\sin x-1+\sin x}{x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$= \frac{\sin x}{x}.\frac{2}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1\left(\frac{2}{2}\right) = 1$$

$$f(x) = (2-x)^{\frac{1}{x-1}} ; a = 1$$

$$= 1^{\infty}$$

$$f(x) = (1+1-x)^{\frac{1}{x-1}}$$

نفرض $t = 1-x$ وبالتالي $x = 1-t$:

نغير جهة السعي:

$$(x\to 1) \Rightarrow (t\to 0)$$

$$f(t) = (1+t)^{\frac{1}{-t}} = \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1}$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = e^{-1}$$

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} ; a = +\infty$$

$$= \left(1+\frac{x-2}{x+1}-1\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$= \left(1+\frac{x-2-x-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$= \left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

نفرض $t = -\frac{3}{x+1}$ فيكون:

$$x+1 = -\frac{3}{t}$$

$$x = -\frac{3}{t}-1 = \frac{-3-t}{t}$$

نغير جهة السعي:

$$(x\to +\infty) \Rightarrow (t\to 0)$$

لدينا الأس:

$$t = -\frac{3}{x+1}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x} - lnx}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{lnx}}$$

$$D_1:\ lnx = 0$$

$$x = 1$$

$$D_1 =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$D_2 =]0, +\infty[$$

$$D_f = D_1 \cap D_2 =]0,1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{lnx}{x^2}}$$

$$D_1 =]0, +\infty[$$

$$D_2 =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\boldsymbol{f(x) = x(1 - lnx)}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - xlnx) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}(lnx - 1)}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x - lnx}{x}}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{lnx}{x} = 1$$

$$\frac{1}{t} = -\frac{x+1}{3}$$

$$-\frac{1}{t} = \frac{x+1}{3}$$

$$f(t) = (1+t)^{-\frac{1}{t}}$$

$$= \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1}$$

$$\lim_{t \to 0} f(t) = e^{-1}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1}\ ;\ a = 0}$$

$$f(x) = \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}$$

$$= \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{1 + x - 1}$$

$$= \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{1+x} + 1\right)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1(1) = 2$$

السؤال الثاني

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{lnx}{x}}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\boldsymbol{f(x) = x - lnx}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{lnx}{x}\right) = +\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x} + lnx}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{x}(1 + xlnx)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty(1 + 0) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x+1}{lnx}}$$
$$D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{lnx}+\frac{1}{lnx}=+\infty$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=\frac{1}{-\infty}=0$$
$$\boldsymbol{f(x)=\frac{xlnx}{x+1}}$$
$$D_f=]0,+\infty[$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{0}{1}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xlnx}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=+\infty$$
$$\boldsymbol{f(x)=\frac{xlnx}{x-1}}$$
$$D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{xlnx}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=-\infty$$
$$\lim_{x\to1} f(x)=1$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xlnx}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=+\infty$$
$$\boldsymbol{f(x)=ln(2x+1)-ln(x)}$$
$$D_f=]0,+\infty[$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$$
$$f(x)=ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=ln(2)$$
$$\boldsymbol{f(x)=ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}$$
$$D_f=]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to1} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty$$
$$f(x)=\frac{ln(1+sinx)}{x}\ ;a=0$$
$$f(x)=\frac{sinx}{x}.\frac{ln(1+sinx)}{sinx}$$
$$\lim_{x\to0} f(x)=1.1=1$$

لأن:

$$\lim_{x\to0}\frac{ln(1+t)}{t}=1$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{ln\left(\sqrt{x+1}\right)-ln\sqrt{2}}{x-1}\ ;a=1}$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$g(x)=ln\left(\sqrt{x+1}\right)-ln\left(\sqrt{2}\right)$$
$$g'(x)=\left(\frac{1}{2}ln(x+1)-ln\sqrt{2}\right)'$$
$$=\frac{1}{2(x+1)}$$
$$g(1)=0$$
$$g'(1)=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{4}$$
$$\boldsymbol{f(x)=\frac{ln\sqrt{x}}{x}\ ;\ a=+\infty}$$
$$f(x)=\frac{\frac{1}{2}lnx}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$
$$\boldsymbol{f(x)=\frac{lnx}{\sqrt{x}}}$$
$$D_f=]0,+\infty[$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$$
$$\boldsymbol{f(x)=e^x-x^2}$$
$$D_f=]-\infty,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$
$$f(x)=x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-1\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$
$$\boldsymbol{f(x)=\frac{2e^x+1}{1+e^x}}$$
$$D_f=]-\infty,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(2+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}=2$$

$$\boldsymbol{f(x) = \ln(x) - e^x}$$
$$D_f =]0, +\infty[$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{lnx}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = 1$$

$$\boldsymbol{f(x) = (3 - x)e^x}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} 3e^x - xe^x = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}}$$
$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}}$$
$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)}{2x} = +\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = \ln(e^x + 2)}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ln(2)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = 2xe^{-x}}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$$

$$\boldsymbol{f(x) = 2x - 1 + e^{-x}}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2xe^x - e^x + 1}{e^x} = +\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = e^{2x} - x - 2}$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 2x\left(\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = x - \ln(e^x + 1)\ ; a = +\infty}$$
$$= x - ln\left(e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right)$$
$$= x - x - ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$
$$= -ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ln(1) = 0$$

ثانياً: المقاربات والأوضاع النسبية

السؤال الأول

بفرض $y_\Delta = 5 - 2x$:

$$f(x) - y_\Delta = ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = ln(1) = 0$$

لدراسة الوضع النسبي:

$$\frac{x+1}{x-4} > 1$$

نأخذ لوغارتم الطرفين:

$$ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > ln(1)$$

$$f(x) - y > 0$$

C فوق Δ.

السؤال الثاني

بفرض $y = x - 1$:

$$f(x) - y = \frac{sin(x)}{\sqrt{x}}$$

إحاطة $\lim_{x\to+\infty} \frac{sin(x)}{\sqrt{x}} = sin(\infty)$

$$-1 \le sinx \le 1$$

نقسم على $\sqrt{x}$:

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} \le f(x) - y \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

حسب الإحاطة:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$$

على المجال $[0,2\pi]$ فإن $f(x) - y > 0$ إذن C فوق المقارب

السؤال الثالث

1- لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

2- لدينا:

$$f(x) - \sqrt{2}x = \sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x$$

$$= \frac{(\sqrt{2x^2+x+1} - \sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2+x+1} + \sqrt{2}x)}{\sqrt{2x^2+x+1} + \sqrt{2}x}$$

$$= \frac{2x^2 + x + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2+x+1} + \sqrt{2}x}$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{2}x}$$

$$= \frac{x+1}{|x|\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}x}$$

بما أن $x \to +\infty$ فإن $|x| = +x$:

$$f(x) - \sqrt{2}x = \frac{x+1}{x\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}x}$$

$$= \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \sqrt{2}x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \sqrt{2}x - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2\sqrt{2}}) = 0$$

$$y_d = \sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

3- f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x+1}}$$

4- لدينا $sin(x)$ معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ وبالتالي معرف واشتقاقي على $]0,\frac{\pi}{2}[$ ومشتقه:

$$g(x) = f(sin(x))$$

$$g'(x) = f'(sin(x))(sin(x))'$$

$$= \frac{4\,sin(x) + 1}{2\sqrt{2\,sin^2 x + sin(x) + 1}}(cos\,x)$$

السؤال الرابع

1- لدينا:

$$f(x) - 2x = ln(e^x + 1) - x$$

$$= ln\left(e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right) - x$$

$$= ln\,e^x + ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) - x$$

$$= x + ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) - x = ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = ln(1) = 0$$

$y=2x$ مقارب مائل.

2- لدينا:

$$f(x)-y_d=ln(e^x+1)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y_d=ln(1)=0$$

لدينا:

$$e^x+1>1$$
$$ln(e^x+1)>ln(1)$$
$$f(x)-y_d>0$$

C فوق d.

ثالثاً: الاستمرار و قابلية الاشتقاق و تابع الجزء الصحيح

السؤال الأول

$$\boldsymbol{f(x)=2x+E(x)\,;\,x\in[0,3[}$$

1- لكتابة التابع بصيغة مستقلة:

$$f(x)=\begin{cases}2x\,;\,x\in[0,1[\\2x+1\,;\,x\in[1,2[\\2x+2\,;\,x\in[2,3[\end{cases}$$

2- لدراسة الاستمرار:

$$f(1)=3$$
$$\lim_{x\to1} f(x)=2$$
$$\lim_{x\to1} f(x)\neq f(1)$$

التابع غير مستمر على $[0,3[$.

3- الرسم:

4- لدراسة النهاية:

$$x-1<E(x)\le x$$

نضيف $2x$:

$$3x-1<2x+E(x)\le 3x$$

نقسم على $x^2+1>0$:

$$\frac{3x-1}{x^2+1}<\frac{f(x)}{x^2+1}\le\frac{3x}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2+1}=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

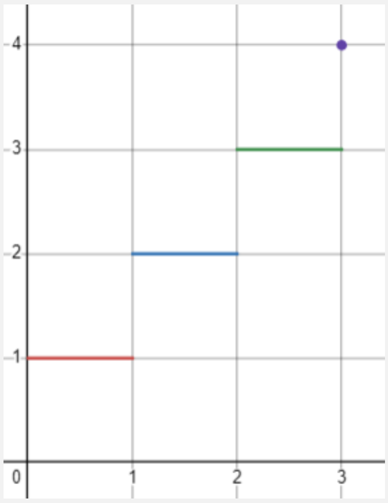
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=0$$

السؤال الثاني

1- لدينا:

$$f(x)=\begin{cases}1\;\;;[0,1[\\2\;\;;[1,2[\\3\;\;;[2,3[\\4\;\;;x=3\end{cases}$$

2- لدينا:



3- لا غير مستمر.

السؤال الثالث

1- لدينا:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2(1-ln(x))}{x}$$

$$=x(1-ln(x))=x-xln(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

التابع قابل للاشتقاق عند $x=0$ و $f'(0)=0$

(يوجد مماساً أفقياً)

2- لدينا:

$$y=f(0)=0$$

3- لدينا:

$$f(0+0.2)=f'(0)(0.2)+f(0)$$

$$f(0.2)=0$$

السؤال الرابع

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x+|x|}{x+2}}$$

1- نعرف التابع $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$:

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+|x|}{x+2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+|x|}{x(x+2)}$$

نميز حالتين:

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}g(x)=0$$

نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)\neq\lim_{x\to 0^-}g(x)$$

فالتابع غير قابل للاشتقاق عند $a=0$.

2- نعوض في قانون معادلة المماس:

$$y_T=f'(0^+)(x-0)+f(0)$$

$$y_T=1$$

السؤال الخامس

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & ;x\neq 0\\ 1 & ;x=0\end{cases}}$$

1- شرط الاستمرار:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

$$f(0)=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$$

محقق فالتابع مستمر عند $a=0$.

2- نحسب المشتق:

$$f'(x)=\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{e^x(1-x)-1}{(e^x-1)^2}$$

السؤال السادس

1- لدينا:

$$f(x)=e^{ln\left(2^{x^2}\right)}=e^{x^2\,ln(2)}$$

2- لدينا:

$$f(1)=2$$

$$f'(x) = 2\,ln(2)\,xe^{x^2 ln(2)}$$

$$f'(1) = 4\,ln(2)$$

3- حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{2^{x^2}-2}{x-1} = 4\,ln(2)$$

السؤال السابع

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} & ; x > 0 \\ \dfrac{x+2}{-x+1} & ; x < 0 \end{cases}$$

ندرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليمين:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x} = \frac{\frac{x+2-2x-2}{x+1}}{x}$$

$$= \frac{-x}{x(x+1)} = -\frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to0^+} -\frac{1}{x+1} = -1$$

ندرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليسار:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x+2}{1-x}-2}{x} = \frac{\frac{x+2-2+2x}{1-x}}{x}$$

$$= \frac{3}{1-x}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{3}{1-x} = 3$$

التابع غير قابل للاشتقاق عند الصفر.

رابعاً: التفسير الهندسي للنهايات

السؤال الأول

1- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

$y = 3$ مقارب افقي عند $+\infty$.

2- لدينا:

$$\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

$$\varepsilon = b - \ell = 3.01 - 3 = 0.01 = \frac{1}{100}$$

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3x+2}{x+1} - 3\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{3x+2-3x-3}{x+1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|-\frac{1}{x+1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{100}$$

$$x+1 > 100$$

$$x > 99$$

السؤال الثاني

1- بالقسمة الإقليدية نجد:

$$f(x) = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$$a = 1\,, b = 6$$

$$\lim_{x\to4} f(x) = 7$$

2- لدينا:

$$6.9 < f(x) < 7.1$$

$$6.9 < 1 + \frac{6}{x-3} < 7.1$$

نطرح 1:

$$5.9 < \frac{6}{x-3} < 6.1$$

نقلب:

$$\frac{1}{5.9} < \frac{x-3}{6} < \frac{1}{6.1}$$

نضرب بـ 6:

$$\frac{6}{5.9} < x - 3 < \frac{6}{6.1}$$

نضيف 3:

$$\frac{6}{5.9} + 3 < x < \frac{6}{6.1} + 3$$

$$\Rightarrow \left] \frac{6}{5.9} + 3 , \frac{6}{6.1} + 3 \right[$$

السؤال الثالث

1- لدينا:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x\left(1 + \frac{3}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{3}{e^x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

2- لدينا:

$$\ell = 1$$

$$\varepsilon = 1.01 - 1 = \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{e^x}{e^x + 3} - 1 \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{e^x - e^x - 3}{e^x + 3} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{3}{e^x + 3} < \frac{1}{100}$$

نقلب:

$$\frac{e^x + 3}{3} > 100$$

$$e^x + 3 > 300$$

$$e^x > 297$$

$$x > ln(297)$$

خامساً: المشتقات من مراتب عليا

السؤال الأول

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}$$

1- لدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1 - x)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1 - x)^4}$$

2- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1 - x)^{n+1}}$$

نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$f'(x) = \frac{1}{(1 - x)^2} \quad \text{محققة}$$

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1 - x)^{n+1}} \ \dots\dots \text{الفرض}$$

نثبت صحة القضية $E(n + 1)$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n + 1)!}{(1 - x)^{n+2}} \ \dots\dots \text{الطلب}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1 - x)^{n+1}}$$

نشتق الطرفين:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{-(n + 1)(1 - x)^n(-1)(n!)}{(1 - x)^{2n+2}}$$

$$= \frac{(n + 1)!}{(1 - x)^{2n+2}(1 - x)^{-n}}$$

$$= \frac{(n + 1)!}{(1 - x)^{n+2}}$$

فالقضية صحيحة.

السؤال الثاني

$$f(x) = xe^x$$

1- لدينا:

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

$$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$= e^x(x+2)$$

2- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

نثبت صحة القضية $E(1)$:

$f'(x) = (x+1)e^x$ محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ...... $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$f^{(n+1)}(x) = (x+n+1)e^x$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

نشتق الطرفين:

$$f^{(n+1)}(x) = e^x + e^x(x+n)$$

$$= e^x(1+x+n)$$

صحيحة.

السؤال الثالث

$$f(x) = \ln(x) - \sin(x)$$

1- لدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

2- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n+1}}{x^n} - \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ...... $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n+1}}{x^n} - \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ...... $f^{(n+1)}(x) = \frac{n!\,(-1)^{n+2}}{x^{n+1}} - \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n+1}}{x^n} - \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

نشتق الطرفين:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{-nx^{n-1}(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^{2n}} - \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{n!\,(-1)^{n+2}}{x^{2n-n+1}} - \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{n!\,(-1)^{n+2}}{x^{n+1}} - \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

محققة

سادساً: المعادلات والمتراجحات

السؤال الأول

1- لدينا:

$$\ln(x^2-4) = \ln(3x-4)$$

لنوجد مجال التعريف للطرف الأول E_1

ومنه $3x - 4 > 0$ $3x > 4$

$$\Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

فيكون المجال $E_1 =]\frac{4}{3}, +\infty[$

لنوجد E_2 مجال التعريف للطرف الثاني

$x^2 - 4 > 0$ ومنه $x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow (x+2)(x-2) = 0$

فيكون إما

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

أو

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

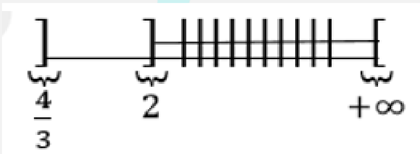
وبتنظيم جدول الإشارة نجد :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	
>0		م	|	غ م	|	م	

فيكون المجال

$E_2 =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

-نقاطع: $E_2 = E_1 \cap E_2$ هي المنطقة التي تحوي على خطين ضمن المجال



أي $E =]2, +\infty[$

$ln(3x-4) = ln(x^2-4)$

نتخلص من اللوغارتمات:

$\Leftrightarrow (3x-4) = (x^2-4)$

$\Rightarrow 3x - 4 - x^2 + 4 = 0$
$\Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow x(3-x) = 0$

ومنه إما $\boxed{x = 0}$ وهو مرفوض لأنه خارج المجال E

أو $3 - x = 0$ وبالتالي $\boxed{x = 3}$ وهو مقبول لأنه ضمن المجال E

-2 لدينا:

مجموعة تعريف الطرف الأصغر E_1
$x^2 - 4 > 0$

$E_1 =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

و سنكتفي بها حسب الفائدة السابقة

$$\begin{gathered} ln(x^2-4) \le ln\ (-3x) \\ \Leftrightarrow x^2 - 4 \le -3x \\ \Rightarrow x^2 + 3x - 4 \le 0 \\ \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \\ \Rightarrow (x+4)(x-1) = 0 \end{gathered}$$

إما $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

ننظم جدول الإشارة كما يلي:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2-4+3x		$+$	0	$-$	0	$+$	
≤ 0		غ م	|	م	|	غ م	

فتكون مجموعة الحلول هي:
$S =]-4, 1[$

$E = E_1 \cap S =]-4, -2[$

-3 لدينا:

- $E_1 : 2x - 3 > 0$ وبالتالي يكون
$2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$
ومنه $\boxed{E_1 =]\frac{3}{2}, +\infty[}$
- $E_2 : 6 - x > 0$ وبالتالي يكون
$-x > -6 \Rightarrow x < 6$
ومنه $\boxed{E_2 =]-\infty, 6[}$
- $E_3 : x > 0$ فيكون المجال
$\boxed{E_3 =]0, +\infty[}$
- نقاطع: $\boxed{\boxed{E =]\frac{3}{2}, 6[}}$

$$ln\sqrt{2x-3} = ln(6-x) - \frac{1}{2}ln\,x$$
$$\Rightarrow ln(2x-3)^{\frac{1}{2}} = ln(6-x) - \frac{1}{2}ln\,x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}ln(2x-3) = ln(6-x) - \frac{1}{2}ln\,x$$
$$\underset{\text{بضرب بـ2}}{\Rightarrow}\quad ln(2x-3) = 2\,ln(6-x) - ln\,x$$
$$\Rightarrow ln(2x-3) = ln(6-x)^2 - ln\,x$$
$$\Rightarrow ln(2x-3) = ln\left(\frac{(6-x)^2}{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x-3 = \frac{(6-x)^2}{x}$$
$$\Rightarrow x(2x-3) = (6-x)^2$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 3x = 36 - 12x + x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 36 + 12x - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x - 36 = 0$$
$$\Rightarrow (x+12)(x-3) = 0$$

إما $x+12=0$ ومنه $x=-12$ مرفوض

أو $x-3=0$ ومنه $x=3$ مقبول

4- لدينا:

- مجموعة تعريف الحد الأول الذي يكافئ E_1
$x-2>0 \Rightarrow x>2$
فيكون المجال $E_1 =]2,+\infty[$
- مجموعة تعريف الحد الثاني الذي يكافئ E_2
$x+1>0 \Rightarrow x>-1$
فيكون المجال $E_2 =]-1,+\infty[$

أي فيكون تقاطعهما

$$E = E_1 \cap E_2 \Rightarrow E =]2,+\infty[$$

$$ln(x-2) - ln(x+1) = 2$$
$$\Rightarrow ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = 2$$
$$\Rightarrow e^{ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)} = e^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x+1}\right) = e^2$$
$$\Rightarrow x-2 = e^2(x+1)$$
$$\Rightarrow x-2 = xe^2 + e^2$$
$$\Rightarrow x - xe^2 = e^2 + 2$$
$$\Rightarrow x(1-e^2) = e^2 + 2$$
$$\Rightarrow x = \frac{(e^2+2)}{1-e^2}$$

قيمة x مرفوضة لأنها لا تقع ضمن المجال لأنها أقل من العدد 2

5- لدينا:

بشرط $x>0$ نفرض $ln\,x = t$ فتصبح المعادلة من الشكل:

$$t^2 - 5t = 6 \Rightarrow t^2 - 5t - 6 = 0$$
$$\Rightarrow (t-6)(t+1) = 0$$

إما $t-6=0 \Rightarrow t=6 \Rightarrow ln\,x = 6$

$$\Rightarrow \boxed{x = e^6}$$

أو $t+1=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow ln\,x = -1$

$$\Rightarrow \boxed{x = e^{-1}}$$

6- لدينا:

بشرط $x>0$ نفرض $ln\,x = t$ فتصبح العلاقة:

$$(t-3)(t-2) \le 0$$
$$\Rightarrow (t-3)(t-2) = 0$$

إما $t-3=0 \Rightarrow t=3$ ومنه $ln\,x = 3$

$$\Rightarrow \boxed{x = e^3}$$

أو $t-2=0 \Rightarrow t=2$ ومنه $ln\,x = 2$

$$\Rightarrow \boxed{x = e^2}$$

ننظم جدول الإشارة

x	0	e^2		e^3	$+\infty$
المتراجحة	$+$	0	$-$	0	$+$
≤ 0	غ م	|	م	|	غ م

وبالتالي مجموعة التعريف $S = [e^2, e^3]$

7- لدينا:

نعيد صياغة المعادلة الثانية :

$$(lnx)(lny) = -12$$
$$ln(x) + lny = 1$$

فإننا نبحث عن عددين جداؤهما 12- و

مجموعهما 1 , إذن :

$$lnx = 4 \quad , \quad lny = -3$$
$$x = e^4 \quad , \quad y = e^{-3}$$

أو بالعكس $x = e^{-3}, y = e^4$

8- لدينا:

بشرطين $x > 0$, $y > 0$, نأخذ لوغارتم الطرفين بالمعادلة الأولى:

$$ln(xy) = ln(4)$$
$$ln(x) + ln(y) = 2\,ln(2)$$

نجد أن:

$$ln(x) = 2\,ln(2) - ln(y)$$

نعوض في المعادلة الثانية:

$$(2\,ln(2) - ln(y))^2 + ln(y)^2 = \frac{5}{2}ln^2(2)$$
$$4\,ln^2 2 - 4\,ln(2)\,ln(y) + ln^2(y) + ln^2(y) = \frac{5}{2}ln^2(2)$$
$$2\,ln^2 y - 4\,ln(2)\,ln(y) + \frac{3}{2}ln^2(2) = 0$$

بفرض $t = ln(y)$:

$$2t^2 - 4\,ln(2)\ t + \frac{3}{2}ln^2 2 = 0$$
$$\Delta = 16\,ln^2 2 - 4(2)\left(\frac{3}{2}ln^2 2\right)$$
$$= 16\,ln^2 2 - 12\,ln^2 2 = 4\,ln^2 2$$
$$\sqrt{\Delta} = 2\,ln\,2$$
$$t_1 = \frac{4\,ln(2) + 2\,ln(2)}{4} = \frac{3}{2}ln(2)$$
$$ln(y) = \frac{3}{2}ln(2)$$
$$ln(y) = ln\left(\sqrt{2^3}\right)$$
$$y = 2\sqrt{2}$$

أو:

$$t_2 = \frac{4\,ln(2) - 2\,ln(2)}{4} = \frac{1}{2}ln(2)$$
$$ln(y) = \frac{1}{2}ln(2)$$
$$y = \sqrt{2}$$

في حال $y = 2\sqrt{2}$:

$$ln(x) = 2\,ln(2) - ln(2\sqrt{2})$$
$$ln(x) = 2\,ln(2) - ln(2) - ln(\sqrt{2})$$
$$ln(x) = ln(2) - ln(\sqrt{2})$$
$$ln(x) = ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$
$$x = \sqrt{2}$$

وفي حال $y = \sqrt{2}$:

$$ln(x) = 2\,ln(2) - ln(\sqrt{2})$$
$$ln(x) = ln\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$$
$$x = 2\sqrt{2}$$

السؤال الثاني

$$e^{x^2-2} \le e^{4-x}$$
$$E = \mathbb{R}$$
$$x^2 - 2 \le 4 - x$$
$$x^2 + x - 6 \le 0$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Delta = 1 - 4(1)(-6) = 25$$
$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$$
$$x_2 = \frac{-1-6}{2} = -\frac{7}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$		2	$+\infty$
x^2+x-6	$++++$	0	$----$	0	$++++$
≥ 0	مقبول		غير مقبول		مقبول

$$S =]-\infty, -\frac{7}{2}] \cup [2, +\infty[$$

$$\boldsymbol{e^{2x^2-1} \geq 3}$$

$$E = \mathbb{R}$$

$$2x^2 - 1 \geq ln(3)$$

$$2x^2 - 1 = ln(3)$$

$$2x^2 = ln(3) + 1$$

$$x^2 = \frac{ln(3)+1}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{ln(3)+1}{2}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}}$		$\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}}$	$+\infty$
$2x^2-1-ln3$	$++++$	0	$----$	0	$++++$
≥ 0	مقبول		غير مقبول		مقبول

$$S =]-\infty, -\sqrt{\frac{ln(3)+1}{2}}]$$

$$\cup [\sqrt{\frac{ln(3)+1}{2}}, +\infty[$$

$$\boldsymbol{e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0}$$

$$E = \mathbb{R}$$

نفرض $e^{-x} = t$

$$t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$(t-6)(t-1) = 0$$

إما:

$$t = 6$$

$$e^{-x} = 6$$

$$\Rightarrow -x = ln(6) \Rightarrow x = -ln(6)$$

أو:

$$t = 1 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

والحلان مقبولان في شرط الحل.

$$\boldsymbol{e^x + \frac{e}{e^x} = 1 + e}$$

$$\frac{e^{2x}+e}{e^x} = 1 + e$$

$$e^{2x} + e = (1+e)e^x$$

$$e^{2x} + (1+e)e^x + e = 0$$

بفرض $t = e^x$:

$$t^2 + (1+e)t + e = 0$$

$$\Delta = (1+e)^2 - 4e$$

$$= 1 + 2e + e^2 - 4e = e^2 - 2e + 1$$

$$= (e-1)^2$$

$$\sqrt{\Delta} = e - 1$$

$$t_1 = \frac{-1-e+e-1}{2} = -1$$

$$e^x = -1$$

مستحيلة.

$$t_2 = \frac{-1-e-e+1}{2} = -e$$

$$e^x = -e$$

مستحيلة.

المعادلة مستحيلة الحل.

$$\boldsymbol{e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0}$$

$$E = \mathbb{R}$$

نفرض $e^x = t$:

$$t^3 - 3t - 2 < 0$$

بالقسمة على $t+1$ نجد:

$$t^3 - 3t - 2 = (t+1)(t^2-t-2)$$

وبالتالي:

$$(t+1)(t^2-t-2)<0$$

$$(t+1)(t+1)(t-2)<0$$

$$(t+1)^2(t-2)<0$$

بما أن $(t+1)^2$ موجب فالإشارة من إشارة $(t-2)$:

$$t-2<0$$

$$t<2$$

$$e^x<2$$

$$x<ln2$$

$$S=]-\infty,ln2[$$

$$\mathbf{e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0}$$

$$E=\mathbb{R}$$

$$e(e^{3x}+4e^{2x}-5e^x)=0$$

نفرض $t=e^x$:

$$t^3+4t^2-5t=0$$

$$t(t^2+4t-5)=0$$

إما:

$$t=0$$

أو:

$$t^2+4t-5=0$$

$$(t+5)(t-1)=0$$

إما:

$$t=-5$$

أو:

$$t=1$$

والحلول مقبولة في شرط الحل.

$$\mathbf{\frac{e^{-x}-1}{e^x-1}=-2}$$

شرط الحل:

$$e^x-1=0$$

$$e^x=1$$

$$x=0$$

$$E=\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$e^{-x}-1=-2e^x+2$$

نضرب بـ e^x:

$$1-e^x=-2e^{2x}+2e^x$$

$$2e^{2x}-3e^x+1=0$$

نفرض $e^x=t$:

$$2t^2-3t+1=0$$

$$\Delta=9-4(2)(1)=1$$

$$t_1=\frac{3+1}{2(2)}=1$$

$\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$ مرفوض

$$t_2=\frac{3-1}{2(2)}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow e^x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-ln(2)$ مقبول

$$\mathbf{\frac{2^x}{2^x+1}<\frac{1}{3}}$$

$$3\times 2^x<2^x+1$$

$$-2\times 2^x+1>0$$

$$-2\times 2^x>-1$$

$$2^x<\frac{1}{2}$$

$$xln(2)<-ln(2)$$

$$x<-1$$

$$S=]-\infty,-1[$$

$$\mathbf{4^x+2^{x+1}-3\leq 0}$$

$$E=\mathbb{R}$$

$$2^{2x}+2^x.2-3\leq 0$$

نفرض $t = 2^x$:

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0$$

إما:

مرفوض $t = -3$

أو:

$$t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x\ln 2 = 0$$

$$x = 0$$

$$S = [0, +\infty[$$

$$\mathbf{2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geq 0}$$

نفرض $t = 2^x$:

$$2t - 10t + 12 \geq 0$$

$$-8t \geq -12$$

$$t \leq \frac{3}{2}$$

$$S = [\frac{3}{2}, +\infty[$$

$$\mathbf{3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \geq 7}$$

نضرب المتراجحة بـ 3^x:

$$3.3^{2x} + 2 \geq 7 \times 3^x$$

نفرض $t = 3^x$:

$$3t^2 - 7t + 2 \geq 0$$

$$3t^2 - 7t + 2 = 0$$

$$\Delta = 49 - (4)(3)(2) = 25$$

$$t_1 = \frac{7+5}{6} = 2$$

$$t_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3t^2 - 7t + 2$		$++++$	0	$----$	0	$++++$	
≤ 0		مقبول		مرفوض		مقبول	

$$\begin{cases} \mathbf{e^x - \frac{1}{2}e^y = 1} \\ \mathbf{2e^x + e^y = 4 + e} \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى بـ -2:

$$\begin{cases} -2e^x + e^y = -2 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

نجمع:

$$2e^y = 2 + e$$

$$e^y = \frac{2+e}{2}$$

$$y = ln\left(\frac{2+e}{2}\right)$$

نعوض في 2:

$$2e^x + \frac{2+e}{2} = 4 + e$$

$$2e^x = 4 + e - \frac{2+e}{2}$$

$$2e^x = \frac{8 + 2e - 2 - e}{2}$$

$$2e^x = \frac{6+e}{2}$$

$$e^x = \frac{6+e}{4}$$

$$x = ln\left(\frac{6+e}{4}\right)$$

$$\begin{cases} \mathbf{3^{x+y} = 9} \\ \mathbf{3^x + 3^y = 4\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^x.3^y = 9 \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

من 1 نجد:

$$3^x = \frac{9}{3^y}$$

نعوض في 2:

$$\frac{9}{3^y} + 3^y = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{9+3^{2y}}{3^y}=4\sqrt{3}$$

$$3^{2y}-4\sqrt{3}\times 3^y+9=0$$

نفرض $3^y=t$:

$$t^2-4\sqrt{3}t+9=0$$

$$\Delta=48-4(1)(9)=12$$

$$t_1=\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 3^y=ln(3\sqrt{3})\Rightarrow yln(3)=ln(3\sqrt{3})$$

$$y=\frac{ln(3\sqrt{3})}{ln(3)}$$

وبالتالي تكون x:

$$3^x=\frac{9}{3^y}=\frac{9}{3\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow xln(3)=2\,ln(3)\Rightarrow x=2$$

وممكن أن يكون العكس أيضاً.

$$\begin{cases} \boldsymbol{e^{4x}e^y=\frac{1}{e^2}} \\ \boldsymbol{xy=-2} \end{cases}$$

بالمعادلة الأولى نجد:

$$e^{4x+y}=e^{-2}$$

$$4x+y=-2$$

ومن المعادلة الثانية نجد:

$$y=-\frac{2}{x}$$

نعوض في المعادلة الأولى:

$$4x-\frac{2}{x}=-2$$

$$\frac{4x^2-2}{x}=-2$$

$$4x^2+2x-2=0$$

$$\Delta=4-4(4)(-2)=36$$

$$x_1=\frac{-2+6}{8}=\frac{1}{2}\Rightarrow y_1=-4$$

$$x_2=\frac{-2-6}{8}=-1\Rightarrow y_2=2$$

$$\boldsymbol{3^x+6\left(\frac{1}{3}\right)^x=-5}$$

$$3^x+6.3^{-x}+5=0$$

نضرب بـ 3^x:

$$3^{2x}+6+5.3^x=0$$

$$3^{2x}+5.3^x+6=0$$

بفرض $t=3^x$:

$$t^2+5t+6=0$$

$$(t+3)(t+2)=0$$

إما:

$t=-3\Rightarrow 3^x=-3$ مستحيلة

أو:

$t=-2\Rightarrow 3^x=-2$ مستحيلة

السؤال الثالث

$$\boldsymbol{y'+5y=0}$$

$$\boldsymbol{A(-2,1)}$$

$$y'=-5y$$

$$y=k.e^{-5x}$$

ولدينا:

$$f(-2)=1$$

$$\Rightarrow k.e^{10}=1\Rightarrow k=\frac{1}{e^{10}}=e^{-10}$$

السؤال الرابع

نوجد المشتق:

$$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+2) = e^{-x}(1-x-2)$$

$$= e^{-x}(-x-1)$$

نعوض في المعادلة:

$$e^{-x}(-x-1) + e^{-x}(x+2) = \lambda e^{-x}$$

$$-x-1+x+2 = \lambda$$

$$\lambda = 1$$

السؤال الخامس

نوجد المشتق:

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} - 1}$$

نعوض:

$$ln(e^x + e^{-x} - 1) + ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} - 1}\right)$$

$$= ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} - 1} \times (e^x + e^{-x} - 1)\right)$$

$$= ln(e^x - e^{-x})$$

محققة.

السؤال السادس

لدينا:

$$x(2x+1)^2 - 5 = 0$$

نعرف تابعاً:

$$f(x) = x(2x+1)^2 - 5$$

$$D_f : \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = (2x+1)^2 + 2(2x+1).2$$

$$= (2x+1)(2x+1+4)$$

نعدم:

إما:

$$2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

أو:

$$2x+5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -5$$

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{2}(16) - 5 = -45$$

ننظم جدولاً:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$++++++$	0	$+++++$	0	$+++++++$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-45	$\nearrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أن للمعادلة حلاً وحيداً يقع في المجال

$]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

السؤال السابع

$$\boldsymbol{ln(x+1) \leq \sqrt{x+1}}$$

$$0 \leq \sqrt{x+1} - ln(x+1)$$

نفرض التابع المعرف على $]-1, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \sqrt{x+1} - ln(x+1)$$

g اشتقاقي على $]-1, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1} - 2}{2(x+1)}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} - 2 = 0$$

$$\sqrt{x+1} = 2$$

$$x+1=4$$

$$x=3$$

$$g(3)=2-2\,ln(2)$$

x	-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$---$	0	$+++$	
$g(x)$		$\searrow$	$2-2\ln(2)$	$\nearrow$	

نلاحظ من الجدول أن:

$$g(x)\geq 2-2\,ln(2)>0$$

$$g(x)>0$$

$$\sqrt{x+1}-ln(x+1)>0$$

$$\sqrt{x+1}>ln(x+1)$$

محققة.

السؤال الثامن

$$e^x-x>0$$

نعرف تابعاً:

$$f(x)=e^x-x$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=e^x-1$$

نعدم:

$$e^x-1=0$$

$$e^x=1$$

$$x=0$$

$$f(0)=1$$

ننظم جدولاً:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$----------$	0	$++++++++++$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

نلاحظ من الجدول:

$$f(x)>0$$

$$e^x-x>0$$

$$e^x>x$$

محققة.

سابعاً: التكامل و التوابع الأصلية

السؤال الأول

1- لدينا:

$$f(x)=x^{-2}-x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{2}{3}}+4\frac{1}{x}$$

$$F(x)=\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+4\,ln|x|+k$$

$$=-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\,ln|x|+k$$

2- لدينا:

$$\int_1^2 (2x-1)^{-2}\;dx$$

$$=\left[\frac{\frac{1}{2}(2x-1)^{-1}}{-1}\right]_1^2=\left[-\frac{1}{2(2x-1)}\right]_1^2$$

$$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

3- لدينا:

$$f(x)=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x)=\frac{\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{2x+1}+k$$

4- لدينا:

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}}-cos(x)$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - sin(x) + k$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - sin(x) + k$$

5- لدينا:

$$f(x) = 1 + tan^2 x - 1$$

$$F(x) = tanx - x + k$$

6- لدينا:

$$\int_1^e \frac{lnx}{x} dx$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} ln(x)\, dx$$

$$= \left[\frac{ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}$$

7- لدينا:

$$\int_2^e \frac{1}{xln(x)} dx$$

$$= \int_2^e \frac{\frac{1}{x}}{ln(x)}\, dx$$

$$= [ln|ln(x)|]_2^e = 0 - ln(ln(2))$$

$$= -ln(ln(2))$$

8- لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$$

$$= \frac{1}{(x-3)^2} = (x-3)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + k$$

$$= -\frac{1}{x-3} + k$$

9- لدينا:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + 3}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} ln|x^2 + 3| + k$$

$$= \frac{1}{2} ln(x^2 + 3) + k$$

10- لدينا:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - x - 2} \; ; \; I =]-1,2[$$

بقسمة البسط على المقام قسمة اقليدية نجد:

$$f(x) = x + 1 + \frac{(3x+4)}{(x^2 - x - 2)}$$

$$\frac{3x+4}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

$$3x + 4 = A(x+1) + B(x-2)$$

بتعويض $x = -1$:

$$1 = -3B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

بتعويض $x = 2$:

$$10 = 3A \Rightarrow A = \frac{10}{3}$$

فيكون:

$$f(x) = x + 1 + \frac{10}{3}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{10}{3} ln|x-2| - \frac{1}{3} ln|x+1| + k$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{10}{3} ln(2-x) - \frac{1}{3} ln(x+1) + k$$

11- لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cos(2x)}\; dx$$

$$\sqrt{2(1 - cos(2x))} = \sqrt{2(2\, sin^2 x)} = 2|sin(x)|$$

على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

$$2\sin(x)$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ dx$$

$$= 2[-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

12- لدينا:

$$f(x) = \sin(x)\cos(2x)$$

$$= \sin(x)\,[\cos^2 x - \sin^2 x]$$

$$= \sin(x)\,[\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)]$$

$$= \sin(x)\,[\cos^2 x - 1 + \cos^2 x]$$

$$= \sin(x)\,[2\cos^2 x - 1]$$

$$= -2(-\sin x)\cos^2 x - \sin x$$

$$F(x) = -2\frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + k$$

13- لدينا:

$$f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin(x)\cos(x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{2\sin(x)\cos(x)} + \frac{\cos^2 x}{2\sin(x)\cos(x)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{1}{2}\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{-\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{1}{2}\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}\ln|\cos(x)| + \frac{1}{2}\ln|\sin(x)| + k$$

14- لدينا:

$$2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

$$I = \int_1^2 |2x-4|\ dx + \int_2^5 |2x-4|\ dx$$

$$= \int_1^2 (-2x+4)\,dx + \int_2^5 (2x-4)\ dx$$

$$= [-x^2 + 4x]_1^2 + [x^2 - 4x]_2^5$$

$$= [(-4+8) - (-1+4)]$$

$$+ [(25-20) - (4-8)]$$

$$= [1] + [9] = \boxed{10}$$

15- لدينا:

نضع:

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

إما:

$$x = 0$$

أو:

$$x = 1$$

نجزء التكامل:

$$\int_0^1 x^2\ dx + \int_1^2 x\ dx$$

$$= \frac{1}{3}[x^3]_0^1 + \frac{1}{2}[x^2]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{2+9}{6} = \frac{11}{6}$$

16- لدينا:

$$f(x) = x^{-2}\ln(x)$$

$$\int_1^x t^{-2}\ln(t)\ dt$$

$$u = \ln(t) \Rightarrow u' = \frac{1}{t}$$

$$v' = t^{-2} \Rightarrow v = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t}$$

$$\left[-\frac{1}{t}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^e -\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}\right)\ dt$$

$$= \left[-\frac{1}{t}\ln(t)\right]_1^x + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x$$

$$= \left[-\frac{1}{t}\ln(t) - \frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x}\ln(x) - \frac{1}{x} + 1$$

السؤال الثاني

$$\cos x \le 1$$

نكامل الطرفين من الصفر إلى b:

$$\int_0^b \cos x \ dx \le \int_0^b 1\, dx$$

$$\sin(b) \le b$$

نكامل المتراجحة:

$$\sin(x) \le x$$

من الصفر إلى b:

$$\int_0^b \sin(x)\, dx \le \int_0^b x\, dx$$

$$1 - \cos b \le \frac{b^2}{2}$$

السؤال الثالث

لدينا:

$$F(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$$

نشتق:

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$\ell_1 : F'(x) = 2\cos(x) + 2\cos(2x)$$

$$= 2(\cos(x) + \cos(2x))$$

ومن جهة أخرى:

$$\ell_2 = f(x) = 2(2\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)$$

$$= 2(2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1)$$

$$= 2(2\cos^2 x + \cos x - 1)$$

$$= 2(\cos(2x) + 1 + \cos x - 1)$$

$$= 2(\cos x + \cos(2x)) = \ell_1$$

لنحسب التكامل:

$$\int_0^\pi f(x)dx = [F(x)]_0^\pi$$

$$= F(\pi) - F(0)$$

$$= 0$$

السؤال الرابع

1- لدينا:

$$\sum_{r=0}^{4} \binom{4}{r} (e^{ix})^{4-r} (-e^{-ix})^r$$

$$= \binom{4}{0} (e^{ix})^4 (-e^{-ix})^0$$

$$+ \binom{4}{1} (e^{ix})^3 (-e^{-ix})^1$$

$$+ \binom{4}{2} (e^{ix})^2 (-e^{-ix})^2$$

$$+ \binom{4}{3} (e^{ix})^1 (-e^{-ix})^3$$

$$+ \binom{4}{4} (e^{ix})^0 (-e^{-ix})^4$$

$$= e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x}$$

$$= (e^{i4x} + e^{-i4x}) - 4(e^{i2x} + e^{-2ix}) + 6$$

$$= 2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6$$

2- لدينا:

$$\int_0^\pi \sin^4 x\, dx$$

$$= \int_0^\pi (2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin(4x) - 4\sin(2x) + 6x\right]_0^\pi$$

$$= 6\pi$$

السؤال الخامس

1- لدينا:

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \frac{\pi}{2}$$

2- لدينا:

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x) - sin(x)}{cos(x) + sin(x)} dx$$

$$= [ln\ |cos(x) + sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

3- لدينا:

$$I + J = \frac{\pi}{2}$$

$$I - J = 0$$

بالجمع:

$$2I = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{4}$$

نعوض في الأولى:

$$\frac{\pi}{4} + J = \frac{\pi}{2}$$

$$J = \frac{\pi}{4}$$

السؤال السادس

1- لدينا:

$$f(x) = 2\,sin(x)\,cos(x)\,.\,cos^2 x$$

$$= 2\,sin(x)\,cos^3(x)$$

2- لدينا:

$$f(x) = -2(-sin(x))\,cos^3 x$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} cos^4 x + k$$

ولكن:

$$F(\pi) = -\frac{1}{2} + k$$

نضع:

$$-\frac{1}{2} + k = 0$$

$$k = \frac{1}{2}$$

السؤال السابع

لدينا:

$$\int_0^2 4kx - 4kx^2\ dx$$

$$= \left[2kx^2 - \frac{4}{3}kx^3\right]_0^2$$

$$= 8k - \frac{32}{3}k$$

نضع:

$$8k - \frac{32}{3}k = \frac{4}{3}$$

$$\frac{24 - 32}{3}k = \frac{4}{3}$$

$$-\frac{8}{3}k = \frac{4}{3}$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

ثامناً: التقابل و التقابل العكسي

السؤال الأول

1- لدينا:

النهايات:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty\,,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

اشتقاقي على $]1, +\infty[$ ‏f:

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x-1)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	− − − − − − − − − − − − − − − −
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘	2

2- لدينا:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$- - - - - - - - - - - - - - - -$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	2
$f(x)-2$	$+\infty \searrow$	0

3- لدينا:

4- بما أن التابع مستمر ومتناقص تماماً فهو تقابل

5- لدينا:

$$x=\frac{2y-1}{y-1}$$

$$x(y-1)=2y-1$$

$$xy-x=2y-2$$

$$xy-2y=x-1$$

$$y(x-2)=x-1$$

$$y=\frac{x-1}{x-2}$$

السؤال الثاني

1- النهايات:

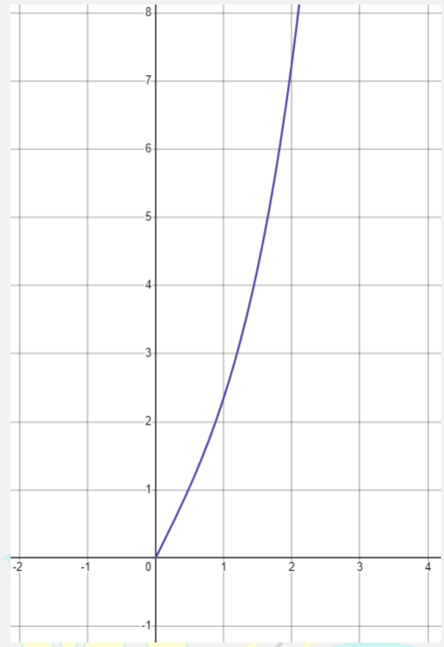
$$\lim_{x\to 0} f(x)=0\,,\ \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x)=e^{x}+e^{-x}>0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +$	
$f(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

2- لدينا:



3- بما أن التابع مستمر ومتزايد فهو تقابل.

4- لدينا:

$$x=e^{y}-e^{-y}$$

نضرب بـ e^{y}:

$$xe^{y}=e^{2y}-1$$

$$e^{2y}-xe^{y}-1=0$$

بفرض $e^{y}=t$:

$$t^{2}-xt-1=0$$

$$\Delta=x^{2}+4>0$$

$$t_1=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

$$e^{y}=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

$$y_1=ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

$$t_2 = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} < 0$$ مرفوض

تاسعاً: تتمات

السؤال الأول والوحيد

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1$$

ميل المماس Δ للخط C_f في النقطة A يعطى بـ:

$$m_\Delta = f'(0) = \frac{1}{\sqrt{0+1}} - 1 = 0$$

ميل المستقيم (BC) يعطى بـ:

$$m_{(BC)} = \frac{y_B - y_c}{x_b - x_c} = \frac{1-1}{-1-3} = 0$$

مما سبق نجد أن:

$$m_\Delta = m_{(BC)} = 0 \Rightarrow \Delta \parallel (BC)$$

مسائل تغيرات

السؤال الأول

أولاً:

$$\boldsymbol{g(x) = x^2 + lnx - 1}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

g اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$$

نعدم:

$$2x^2 + 1 = 0$$

$$2x^2 = -1$$

مستحيلة.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖ + + + + + + + + + + + +	
$g(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

الجدول:

2- نجد أن التابع مستمر ومتزايد على مجموعة تعريفه وأيضاً:

$$0 \in f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$$

وللتأكد أن $\alpha = 1$ حلاً:

$$g(1) = 0$$

وبالتالي إشارة $g(x)$:

$g(x) \geq 0$ على المجال $[1,+\infty[$

$g(x) < 0$ على المجال $]0,1[$

ثانياً:

$$\boldsymbol{f(x) = x + 1 - \frac{lnx}{x}\ ; x \in]0,+\infty[}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ يقع Cg على يمين مقاربه.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

2- f اشتقاقي على $]0,+\infty[$:

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x}x-lnx}{x^2}=\frac{x^2-1+lnx}{x^2}$$

$$=\frac{x^2+lnx-1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-----$	0	$+++++$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

3- $f(1)=2$ قيمة حدية صغرى ومعادلة

المماس الافقي:

$$y=2$$

4- نشكل الفرق:

$$f(x)-y_\Delta=-\frac{lnx}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

لدراسة الوضع النسبي، نعدم الفرق:

$$-\frac{lnx}{x}=0$$

$$lnx=0$$

$$x=1$$

x	0		1		$+\infty$
$-\frac{lnx}{x}$	‖	$+++++$	0	$------$	
الوضع	‖	C فوق Δ		C تحت Δ	

5- الرسم:

السؤال الثاني

$$\boldsymbol{f(x)=e^{-x}(1+\ln x)}$$

$$\boldsymbol{g(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x}$$

معرفان على:

$$\boldsymbol{I=]0,+\infty[}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=+\infty$$

g اشتقاقي على I:

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{-1-x}{x^2}$$

نعدم:

$$-1-x=0$$

$$x=-1$$

مرفوض.

الجدول:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-----------$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

2- التابع مستمر ومتناقص على I و:

$$0 \in f(I) =]-\infty, +\infty[$$

بالتالي يوجد حل وحيد α للمعادلة $g(x) = 0$

وللتحقق أن $\alpha = 1$:

$$g(1) = 0$$

3- النهايات:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}\left(\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}\right) = 0$$

4- اشتقاقي f على I:

$$f(x) = e^{-x} + e^{-x}lnx$$

$$f'(x) = -e^{-x} - e^{-x}\ln x + \frac{e^{-x}}{x}$$

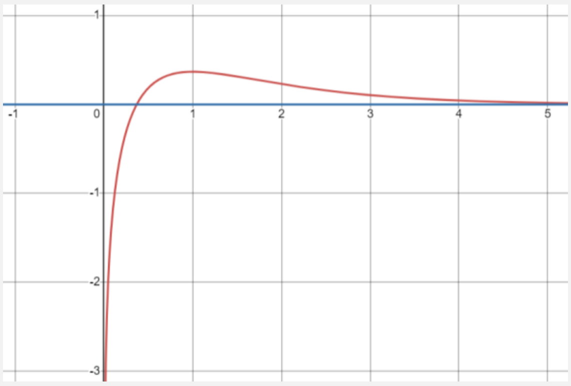
$$= e^{-x}\left(-1 - lnx + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$$

5- الجدول:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+++++$	0	$-----$	
$f(x)$	$\|\| -\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

6- الرسم:



السؤال الثالث

1- لدينا:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2- اشتقاقي f على I:

$$f'(x) = ln(x+2) + \frac{1}{x+2}(x+1)$$

$$= ln(x+2) + \frac{x+1}{x+2} = g(x)$$

معادلة المماس:

$$f(-1) = 0 \,, f'(-1) = 0$$

$$\Rightarrow y_\Delta = 0$$

3- اشتقاقي g على I:

$$g'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x+2+1}{(x+2)^2} = \frac{x+3}{(x+2)^2}$$

المشتق موجب على I.

نلاحظ أن التابع $g(x)$ ينعدم عند $x = -1$:

x	-2		-1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$++++++$		$++++$	
$g(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

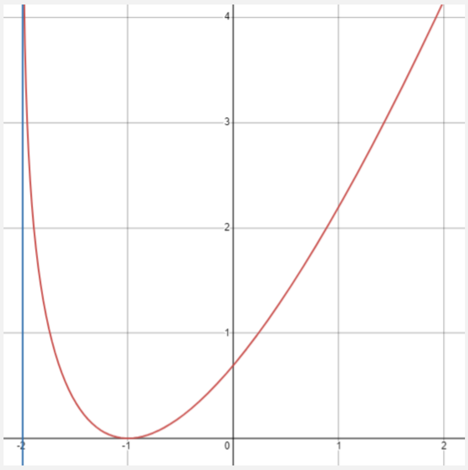
نلاحظ أن التابع $g(x) \leq 0 \,; x \in]-2, -1]$

و $g(x) \geq 0 \,; x \in]-1, +\infty[$.

4- لدينا:

x	-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$------$	0	$++++$	
$f(x)$	$\|\| +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

الرسم:



5- نلاحظ أن:

$$u_n = (n+1)\,ln(n+2)$$

وبتعريف تابعاً حيث $u_n = f(n)$:

$$f(x) = (x+1)\,ln(x+2)$$

وتبين أن مشتقه موجب على المجال $[0,+\infty[$

فالمتتالية متزايدة.

السؤال الرابع

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}\ ;\ D_f = \mathbb{R}}$$

1- لحساب النهايات:

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{e^x} = \frac{x^2}{e^x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$.

2- f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - e^x(x+1)^2}{e^{2x}}$$

$$= e^x(x+1)\left(\frac{2-x-1}{e^{2x}}\right)$$

$$= e^x(x+1)\left(\frac{1-x}{e^{2x}}\right) = \frac{e^x(1-x^2)}{e^{2x}}$$

$$= (1-x^2)e^{-x}$$

3- نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$(1-x^2)e^{-x} = 0$$

الأسي لا ينعدم. وبالتالي:

$$1 - x^2 = 0$$

$$1 = x^2$$

$$x = \pm 1$$

$$f(1) = \frac{4}{e}\ , f(-1) = 0$$

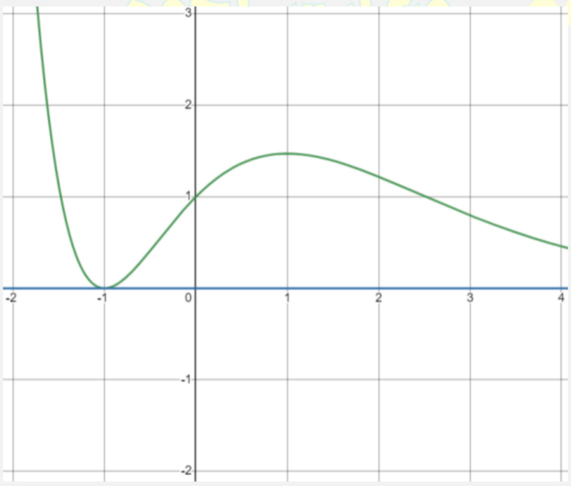
الجدول:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$----$	0	$++++$	0	$----$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

$f(-1) = 0$ قيمة حدية صغرى

$f(1) = \frac{4}{e}$ قيمة حدية كبرى

4- الرسم:



5- لدينا:

$$f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{e^{-x}}$$

$$= \left(-(x-1)\right)^2 e^x = (x-1)^2 e^x = g(x)$$

C_1 ينتج عن C بتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

6- لدينا:

$$h(x) = ln(f(x))$$

$$f(x) > 0$$

ومن الجدول نلاحظ أن:

$$D_h =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

السؤال الخامس

$$\boldsymbol{f(x) = e^{-2x} + 2x - 2 \,;\, D_f = \mathbb{R}}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x}} + 2x - 2 = \frac{1 + 2xe^{2x}}{e^{2x}} - 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

2- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = e^{-2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

نلاحظ أن C فوق Δ لأن $f(x) - y_d > 0$.

3- f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2e^{-2x} + 2$$

نعدم:

$$-2e^{-2x} + 2 = 0$$

$$-2e^{-2x} = -2$$

$$e^{-2x} = 1$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

$$f(0) = -1$$

الجدول:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\,-\,-\,-\,-$	0	$+\,+\,+\,+\,+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

التابع مستمر ومتناقص على المجال $]-\infty, 0]$ و:

$$0 \in f(]-\infty, 0[) =]-1, +\infty[$$

بالتالي يوجد حل وحيد على المجال $]-\infty, 0[$

التابع مستمر ومتزايد على المجال $]0, +\infty[$ و:

$$0 \in f(]0, +\infty[) =]-1, +\infty[$$

بالتالي يوجد حل وحيد على المجال $]-1, +\infty[$.

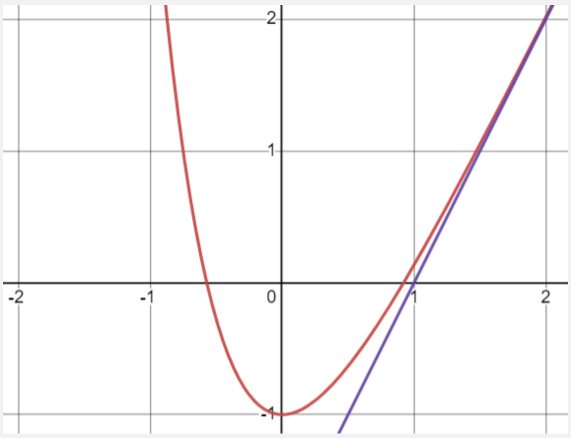
وبالتالي يوجد جذرين للمعادلة $f(x) = 0$ وللتأكد ان أحدهما ينتمي للمجال $[-1,0]$:

f مستمر ومتناقص على المجال و:

$$0 \in f([-1,0]) = [-1, e^2 - 4]$$

وبالتالي أحد الحلول ينتمي للمجال.

4- الرسم:



لحساب المساحة:

$$\int_0^1 -f(x)dx$$

$$= -\left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + x^2 - 2x\right]_0^1$$

$$= -\left(-\frac{e^{-2}}{2} - 1\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2e^2} + \frac{3}{2}$$

5- نجد أن:

$$f(-x) = e^{2x} - 2x - 2$$

$$= -(-e^{2x} + 2x + 2) = -g(x)$$

نضرب الطرفين بـ -1:

$$\Rightarrow g(x) = -f(-x)$$

C' ينتج عن C بتناظر بالنسبة للمبدأ.

السؤال السادس

$$\boldsymbol{f(x) = e^x + \ln(1-x)\ ;\ D_f =]-\infty, 1[}$$

$$\boldsymbol{g(x) = (1-x)e^x - 1\ ;\ D_g = \mathbb{R}}$$

1- g اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = -e^x + e^x(1-x)$$

$$= e^x(-1+1-x) = -xe^x$$

نعدم المشتق:

$$-xe^x = 0$$

$$x = 0$$

$$g(0) = 0$$

الجدول:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+++++$	0	$-----$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

نلاحظ أن:

$$g(x) \le 0$$

2- f اشتقاقي على $]-\infty, 1[$:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{e^x(1-x) - 1}{1-x} = \frac{g(x)}{1-x}$$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و C يقع على يسار مقاربه.

لدينا:

$$f(0) = 1$$

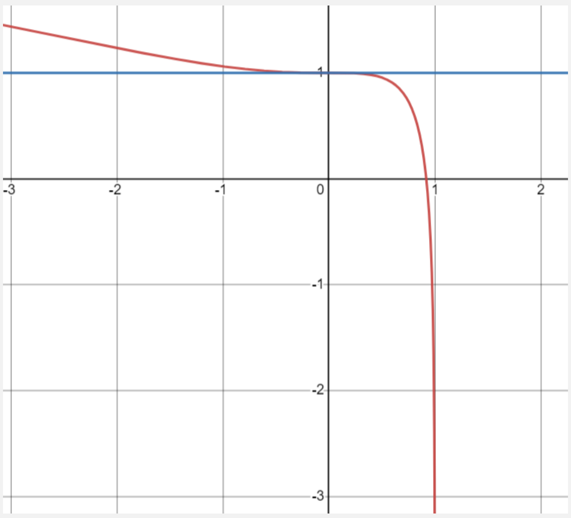
الجدول:

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	$-----$	0	$-----$ ‖
$f(x)$	$+\infty \searrow$	1	$\searrow -\infty$ ‖

3- لدينا $x = 0$ قيمة تعدم المشتق بالتالي المماس عندها يكون مماس أفقي:

$$y_T = 1$$

4- الرسم:



السؤال السابع

1- لدينا:

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \ln(2)$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

2- f اشتقاقي على $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$:

$$f(x) = \ln(2x) - \ln(x-1)$$

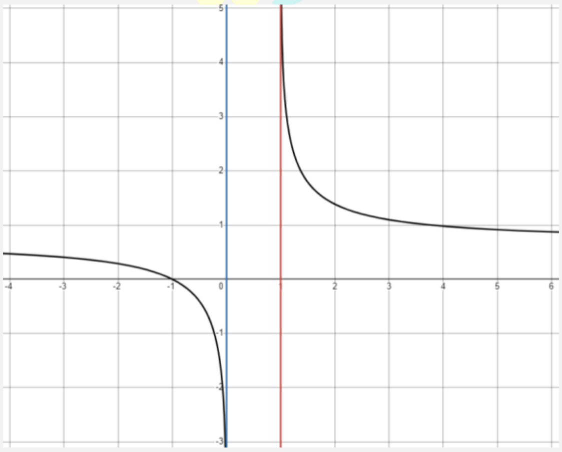
$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{x-1-x}{x(x-1)} = -\frac{1}{x(x-1)}$$

ننظم جدولاً:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - - -$				$- - - - - -$	
$f(x)$	$\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	-3

3- الرسم:



4- لدينا:

$$g(x) = -\ln\left(\frac{2x}{x-1}\right) = -f(x)$$

c_g ينتج عن c_f بتناظر بالنسبة لمحور الفواصل

5- لدينا:

$$h(x) = \ln(2x) - \ln(x-1) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

ولكن h معرف على المجال:

$$]0,+\infty[$$

فإن c_h جزء من c_f الذي يقع على المجال

$]0,+\infty[$.

السؤال الثامن

$$\boldsymbol{f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$$

f اشتقاقي على $]1,3[$:

$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(3-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3-x} = \frac{3-x+x-1}{(x-1)(3-x)}$$

$$= \frac{2}{(x-1)(3-x)}$$

$$f'(x) \neq 0$$

x	1		3
$f'(x)$	‖	$+ + + + + + + + + +$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

2- الشرط الأول:

$$x \in]1,3[$$

$$-x \in]-3,-1[$$

$$4-x \in]1,3[$$

الشرط الثاني:

$$f(x) + f(4-x) = 2b$$

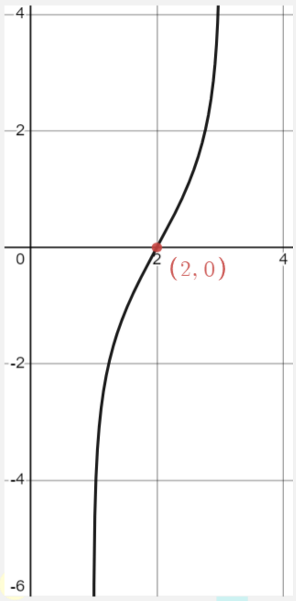
$$f(x) + f(4-x)$$

$$= ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) + ln\left(\frac{4-x-1}{3-4+x}\right)$$

$$= ln\left(\frac{x-1}{3-x} \times \frac{3-x}{x-1}\right) = ln(1) = 0$$

إذاً $I(2,0)$ مركز تناظر للتابع.

3- الرسم:



السؤال التاسع

$$f(x) = xe^{ln(2^{-x+1})}$$

$$= xe^{(-x+1)\,ln(2)} = xe^{-xln(2)+ln(2)}$$

$$= xe^{-xln(2)}.e^{ln(2)} = 2xe^{-xln(2)}$$

1- لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = \frac{2xln(2)}{ln(2)\;e^{xln(2)}} = \frac{2}{ln(2)}\cdot\frac{xln(2)}{e^{xln(2)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

2- f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2e^{-xln(2)} - ln(2)\,e^{-xln(2)}.2x$$

$$= e^{-xln(2)}(2 - 2\,ln(2)\,x)$$

نعدم:

$$2 - 2\,ln(2)\,x = 0$$

$$2 = 2\,ln(2)\,x$$

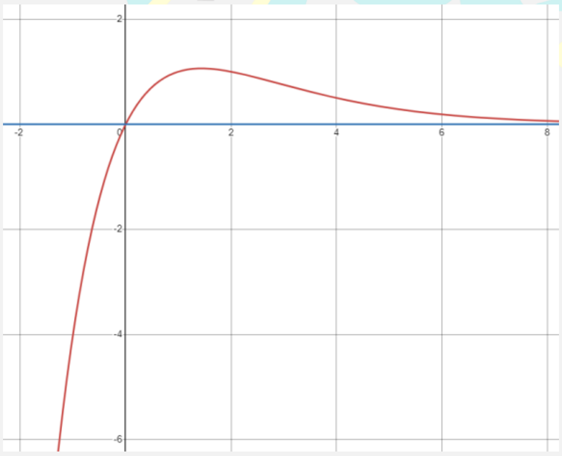
$$x = \frac{1}{ln(2)}$$

$$f\left(\frac{1}{ln(2)}\right) = \frac{2}{e.\,ln(2)}$$

الجدول:

x	$-\infty$	$\frac{1}{\ln(2)}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+++++++$	0	$-------$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{2}{eln(2)}$	↘ 0

3- الرسم:



السؤال العاشر

1- لدينا:

$$g(1) = 1 - 1 + ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

g اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$:

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0 \text{ على } I$$

الجدول:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	||	$+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +$
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

عندما $x \in]0,1[$ يكون $g(x) < 0$

عندما $x \in]1,+\infty[$ يكون $g(x) > 0$

-2 لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$$

-3 f اشتقاقي على I:

$$f'(x) = \frac{x-x+1}{x^2} ln(x) + \frac{1}{x}\frac{x-1}{x}$$

$$= \frac{ln(x)+x-1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

نلاحظ أن g ينعدم عند $x = 1$ أي أن $f'(x)$ ينعدم

وبالتالي:

$$f(1) = 0$$

ننظم جدولاً:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	|| $- - - - - - - - - -$	0	$+ + + + + + + + + + +$
$f(x)$	|| $+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

نلاحظ أن:

$$f(x) \geq 0\, ;\forall x \in I$$

-4 لدينا:

$$F'(x) = ln(x) + 1 - 1 - \frac{ln(x)}{x}$$

$$= \frac{xln(x) - ln(x)}{x} = \left(\frac{x-1}{x}\right) ln(x) = f(x)$$

إذن هو تابع أصلي لـ f.

-5 لدينا:

$$\int_1^e f(x)dx = [F(x)]_1^e$$

$$= F(e) - F(1) = \left(e - e - \frac{1}{2}\right) - (-1) = \frac{1}{2}$$

السؤال الحادي عشر

أولاً:

-1 لدينا:

$$\lim_{x\to-2} f(x) = -\infty\, ,\, \lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$$

f اشتقاقي على $]-2,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{5(x+2) - (5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

الجدول:

x	-2	$+\infty$
$g'(x)$	||	$+ + + + + + + + + + + +$
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ 5

f مستمر ومتزايد فهو تقابل ولإيجاد تقابله العكسي:

$$x = \frac{5y+4}{y+2}$$

$$x(y+2) = 5y+4$$

$$xy + 2x = 5y + 4$$

$$xy - 5y = 4 - 2x$$

$$y(x-5) = 4 - 2x$$

$$y=\frac{4-2x}{x-5}$$

2- لدينا:

$$f(x)=x$$

$$\frac{5x+4}{x+2}=x$$

$$5x+4=x^2+2x$$

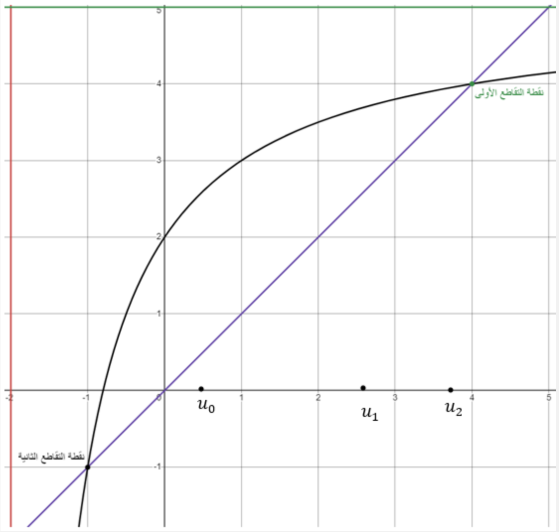
$$x^2-3x-4=0$$

$$(x-4)(x+1)=0$$

$$x=4\ ,x=-1$$

الرسم:

ثانياً:



السؤال الثاني عشر

1- لدينا:

$$f(x)-g(x)=ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$$

h اشتقاقي على I:

$$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x+1-1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$$

نعدم:

$$x=0$$

$$h(0)=0$$

الجدول:

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +$	
$h(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$h(x)\geq 0$$

2- لدينا:

$$h(x)\geq 0$$

$$f(x)-g(x)\geq 0$$

$$f(x) \geq g(x)$$

c_f فوق c_g

3- لدينا:

$$f(0) = 0\,, g(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}\,, g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(0) = 1\,, g'(0) = 1$$

إذن يقبلان مماساً مشتركاً.

4- لدينا:

$$\int_0^1 h(x)\ dx$$

$$= \int_0^1 \ln(x+1)\,dx - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$$

$$L = \int_0^1 \ln(x+1)\,dx$$

$$u = \ln(x+1) \Rightarrow u' = \frac{1}{x+1}$$

$$v' = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow [x\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$$

نعوض:

$$[x\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$$

$$= [x\ln(x+1)]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$$

$$= [x\ln(x+1)]_0^1 - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{x+1}dx$$

$$= [x\ln(x+1)]_0^1 - 2[x - \ln|x+1|]_0^1$$

$$= [x\ln(x+1) - 2(x - \ln|x+1|)]_0^1$$

$$= (\ln(2) - 2 + \ln(2)) = 2\ln(2) - 2$$

السؤال الثالث عشر

$$\boldsymbol{f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4}$$

1- نشكل الفرق :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

كما أن :

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2}{\sqrt{x}} > 0$$

إذن C فوق Δ

2- النهايات :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$ و C يمين مقاربه

نشتق :

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}2}{x} = 1 - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f(1) = -1$$

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	$- - - - - - - -$	0	$+ + + + + + +$	
f	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

$f(1) = -1$ قيمة حدية صغرى

3- f مستمر و متناقص على المجال $]0,1[$ و $f(]0,1[) =]-1, +\infty[\ni 0$ فيوجد للمعادلة حل وحيد في المجال $]0,1[$ (الحل الأول إذن محصور بين العددين 0 و 1

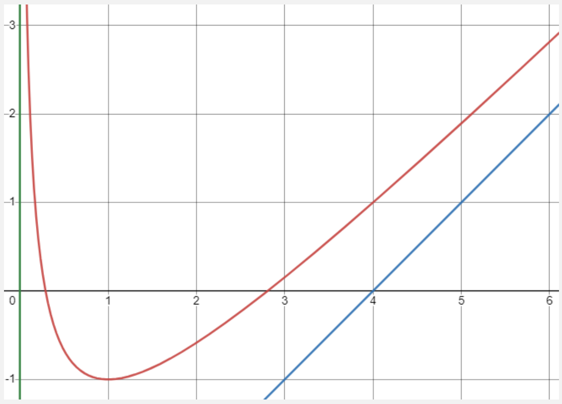
f مستمر و متزايد على المجال $]1, +\infty[$ و $f(]1, +\infty[) =]-1, +\infty[\ni 0$
فيوجد حل وحيد ضمن المجال $]1, +\infty[$

و لحصره نلاحظ أن $f(1) = -1 < 0$

و نلجرب $f(2) = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = -3 + \frac{2}{\sqrt{2}} < 0$

لنجرب $f(3) = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ فالحل محصور بين 2 و 3

4- الرسم:



5- بما أن $f(x) > 0$ على المجال $[3,4]$:

$$S = \int_3^4 f(x)dx = \int_3^4 (x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4)$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 4\sqrt{x} - 4x\right]_3^4$$

$$= (8 + 8 - 16) - \left(\frac{9}{2} + 4\sqrt{3} - 12\right)$$

$$= \frac{15}{2} - 4\sqrt{3}$$

السؤال الرابع عشر

1- لدينا:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{x^n \ln(x)}{x} = x^{n-1}\ln(x)$$

$$\lim_{x\to 0} x^{n-1}\ln(x) = 0$$

اشتقاقي و $f_n'(0) = 0$.

f_n اشتقاقي على $[0, +\infty[$:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(x) + \frac{1}{x}x^n$$

$$= nx^{n-1}\ln(x) + x^{n-1}$$

$$= x^{n-1}(n\ln(x) + 1)$$

2- نعدم:

إما:

$$x^{n-1} = 0 \Rightarrow x = 0$$

أو:

$$n\ln(x) + 1 = 0$$

$$n\ln(x) = -1$$

$$\ln(x) = -\frac{1}{n}$$

$$x = e^{-\frac{1}{n}}$$

$$f_n(0) = 0 \,, f_n\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = e^{-1}.\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{ne}$$

ولا ننسا النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty \,; n \geq 1$$

ننظم جدولاً:

x	0	$e^{-\frac{1}{n}}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	0 $- - - - - - - - - -$	0 $+ + + + + + + + + + + +$	
$f_n(x)$	0 ↘	$-\frac{1}{ne}$ ↗	$+\infty$

3- نعوض:

$$f_1(0) = 0 \,, f_2(0) = 0$$

إذن يمران بالمبدأ.

$$f_1(1) = 0 \,, f_2(1) = 0$$

إذن يمران بالنقطة A.

4- لدينا:

$$f_1'(x) = \ln(x) + 1$$

$$f_2'(x) = 2x\ln(x) + x$$

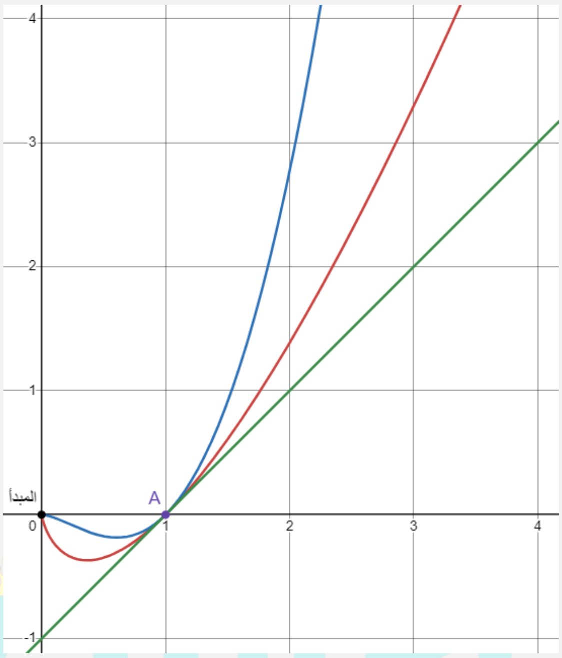
$f_1'(1)=1\,,f_2'(1)=1$

إذن يقبلان مماساً مشتركاً عند A, معادلته:

$$y=1(x-1)+0$$

$$y=x-1$$

5- الرسم:



6- لدينا:

$$-\int_{\frac{1}{e}}^{1} f_2(x)\,dx$$

$$-\int_{\frac{1}{e}}^{1} x^2\ln(x)\;dx$$

$$u=\ln(x)\Rightarrow u'=\frac{1}{x}$$

$$v'=x^2\Rightarrow v=\frac{1}{3}x^3$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{e}}^{1}x^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$=-\frac{1}{9}-\left(-\frac{1}{3e^3}-\frac{1}{9e^3}\right)$$

$$=-\frac{1}{9}+\frac{1}{12e^3}$$

ولا تنسو إشارة الناقص تبع التكامل...

$$=-\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{12e^3}\right)=\frac{1}{9}-\frac{1}{12e^3}$$

السؤال الخامس عشر

-1

-a

$$e^x+e^{-x}-1=\frac{e^{2x}+1-e^x}{e^x}$$

$$=\frac{e^{2x}-2e^x+1+e^x}{e^x}$$

$$=\frac{(e^x-1)^2+e^x}{e^x}>0$$

إذاً التابع f معرف على R

-b

$$f(x)=ln(e^x+e^{-x}-1)$$
$$=ln\left(e^x(1+e^{-2x}-e^{-x})\right)$$
$$f(x)=x+ln(1+e^{-2x}-e^{-x})$$

.a

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}ln(1+e^{-2x}-e^{-x})=0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

وبالتالي المستقيم d مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

.b لدينا f معرف على R ولدينا:

$$f(-x)=ln(e^{-x}+e^{+x}-1)$$
$$=ln(e^x+e^{-x}-1)$$
$$=f(x)$$

إذاً التابع f تابع زوجي

-2

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

$$f'(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}-1}$$

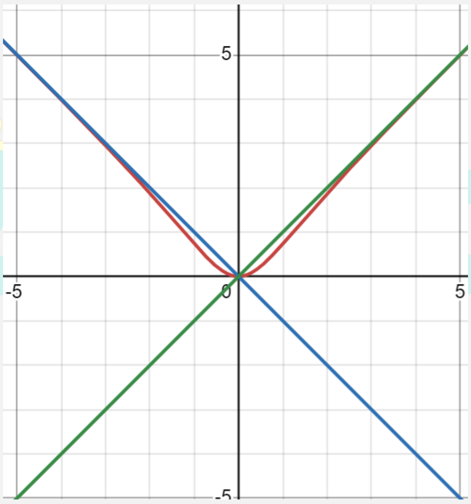
$$f'(x)=0 \Rightarrow e^{x}-e^{-x}=0 \Rightarrow e^{x}=e^{-x}$$
$$\Rightarrow x=0$$

$f(0)=0$ قيمة صغرى محلياً (قيمة حدية)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - - - - - - - - -$	0	$+ + + + + + + + + + +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3- بما أن المستقيم d مقارب للخط C في جوار $+\infty$ والتابع f تابع زوجي إذاً المستقيم الذي معادلته $d':y=-x$ مقارباً مائلاً للخط C بجوار $-\infty$ وذلك لأن C متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب

4-



5-

$$l_1=ln(e^{x}+e^{-x}-1)+ln\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}-1}\right)$$
$$=ln\left((e^{x}+e^{-x}-1)\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}-1}\right)$$
$$=ln(e^{x}+e^{-x}-1)=l_2$$

إذاً التابع g هو حل للمعادلة التفاضلية

$$y+ln(y')=ln(e^{x}-e^{-x})$$

المتتاليات

السؤال الأول

1- لدينا:

$$t_n=t_0+rn$$
$$t_{n+1}=t_0+r(n+1)$$

نعوض في العلاقة:

$$t_0+r(n+1)=2t_0+2rn-3n+4$$
$$rn+(r+t_0)=n(2r-3)+(2t_0+4)$$

نقارن:

$$rn=n(2r-3)$$
$$r=2r-3$$
$$r=3$$

ولدينا أيضاً:

$$r+t_0=2t_0+4$$
$$3+t_0=2t_0+4$$
$$t_0=-1$$

فيكون الحد العام:

$$t_n=-1+3(n+1)$$
$$t_n=3n+2$$

2- لدينا:

$$v_{n+1}=u_{n+1}-t_{n+1}$$
$$=2u_n-3n+4-2t_n+3n-4$$
$$=2u_n-2t_n=2(u_n-t_n)=2v_n$$

هندسية أساسها $q=2$.

3- لدينا:

$$v_n=v_0.q^{n}$$
$$v_0=u_0-t_0=2+1=3$$
$$v_n=3.2^{n}$$

لدينا:

$$u_n=v_n+t_n$$
$$=3.2^{n}+3n+2$$

نحسب نهايتها:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$$

لأن $q>1$, وبما أن نهايتها ∞ فهي متباعدة.

السؤال الثاني

1- لدينا:

$$f(0)=\frac{1}{4}\,,f(1)=1$$

f اشتقاقي على I:

$$f'(x)=\frac{7(x+8)-(7x+2)}{(x+8)^2}$$

$$=\frac{54}{(x+8)^2}$$

الجدول:

x	0	1
$f'(x)$	$++++++++++++$	
$f(x)$	$\frac{1}{4}$ ↗	1

نجد:

$$f(I)=\left[\frac{1}{4},1\right]$$

2- لدينا:

أ- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): 0\le u_n\le 1$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$0\le u_0\le 1 \Rightarrow 0\le 1\le 1$ محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$0\le u_n\le 1$ ...... الفرض

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$0\le u_{n+1}\le 1$ ...... الطلب

البرهان: لدينا من الفرض:

$$0\le u_n\le 1$$

نصور الأطراف في f (متزايد):

$$0<\frac{1}{4}\le u_{n+1}\le 1$$

$$0\le u_{n+1}\le 1$$

فالقضية صحيحة

ب- لدينا:

$$u_1=\frac{7u_0+2}{u_0+8}=1\,,u_2=\frac{7u_1+2}{u_1+8}=1$$

المتتالية ثابتة.

ت- نعم , المتتالية متقاربة ونهايتها تساوي 1.

السؤال الثالث

1- لدينا:

$$P(A_{n+1})=P(A_n\cap A_{n+1})+P(B_n\cap A_{n+1})$$

$$=\frac{4}{5}p_n+(1-p_n)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{5}p_n+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}p_n$$

$$p_{n+1}=\frac{7}{15}p_n+\frac{1}{3}$$

2- لدينا:

$$v_{n+1}=p_{n+1}-\frac{5}{8}$$

$$=\frac{7}{15}p_n+\frac{1}{3}-\frac{5}{8}$$

$$=\frac{7}{15}p_n-\frac{7}{24}=\frac{7}{15}\left(p_n-\frac{\frac{7}{24}}{\frac{7}{15}}\right)$$

$$=\frac{7}{15}\left(p_n-\frac{5}{8}\right)=\frac{7}{15}v_n$$

هندسية وأساسها $q=\frac{7}{15}$.

السؤال الرابع

$$f(x) = xe^{-x} \, ; D_f =]-\infty, +\infty[$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

اشتقاقي f على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

نعدم:

$$1 - x = 0$$

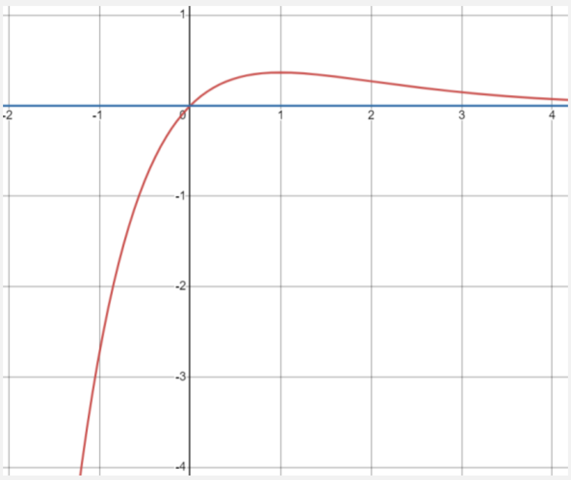
$$x = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{e}$$

الجدول:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+++++$	0	$-----$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى.



2- لدينا:

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \; ; u_0 = 1$$

أ- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$E(n)$:

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$0 \le 1 \le 1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$0 \le u_n \le 1$ ... ... الفرض

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$0 \le u_{n+1} \le 1$ ... ... الطلب

البرهان: لدينا من الفرض:

$$0 \le u_n \le 1$$

نصور الأطراف في التابع f:

$$f(0) \le f(u_n) \le f(1)$$

$$0 \le u_{n+1} \le \frac{1}{e} < 1$$

$$0 \le u_{n+1} \le 1$$

فالقضية صحيحة.

ب- نعرف القضية:

$$E(n): u_{n+1} \le u_n$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\frac{1}{e} \le 1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$u_{n+1} \le u_n$ ... ... الفرض

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ... ... $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$u_{n+1} \leq u_n$$

نصور الأطراف في f:

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

القضية صحيحة والمتتالية متناقصة.

وبما أنها متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 0 فإنها متقاربة.

ت- لتعيين نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$xe^{-x} = x$$

$$xe^{-x} - x = 0$$

$$x(e^{-x} - 1) = 0$$

إما:

$$e^{-x} - 1 = 0$$

$$e^{-x} = 1$$

$$x = 0$$

أو:

$$x = 0$$

مقبولان.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

السؤال الخامس

1- نعرف القضية:

$$E(n): 4^n + 5 = 3k$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$4^0 + 5 = 6$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ... ... $4^n + 5 = 3k$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ... ... $4^{n+1} + 5 = 3m$

البرهان: لجينا من الفرض:

$$4^n + 5 = 3k$$

نضرب الطرفين بـ 4:

$$4^{n+1} + 20 = 15k$$

$$4^{n+1} + 5 + 15 = 15k$$

$$4^{n+1} + 5 = 15k - 15$$

$$4^{n+1} + 5 = 3\underbrace{(5k - 5)}_{m}$$

$$4^{n+1} + 5 = 3m$$

فالقضية صحيحة.

2- نشكل u_{n+1}:

$$u_{n+1} = 4^{n+1} + 5 = 4.4^n + 5$$

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = 4.4^n + 5 - 4^n - 5$$

$$= 3 \times 4^n > 0$$

فالمتتالية متزايدة.

3- لدينا:

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1} - u_n} = \frac{1}{3 \times 4^n}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3 \times 4^{n+1}}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{3 \times 4^{n+1}}}{\frac{1}{3 \times 4^n}} = \frac{1}{4} = q$$

هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ وبما أن $q<1$ فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

السؤال السادس

-1

$$V_{n+1}=U_{n+2}-2U_{n+1}$$

$$=\frac{5}{2}U_{n+1}-U_n-2U_{n+1}=\frac{1}{2}U_{n+1}-U_n$$

$$=\frac{1}{2}(U_{n+1}-2U_n)\Rightarrow V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$$

أي أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

وحدها الأول

$$V_0=U_1-2U_0\Rightarrow V_0=5-2=3\Rightarrow V_0=3$$

ويكون $V_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

-2 إن مجموع $S_n=V_2+V_4+V_6+\cdots+V_{2n}$

هو مجموع حدود متتالية جديدة $(t_n)_{n\geq 1}$

مأخوذة من المتتالية الهندسية السابقة

وعدد حدودها n حد بحيث:

$$t_n=V_{2n}=3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

وبالتالي $(t_n)_{t\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$

والحد الأول $t_1=\frac{3}{4}$ ويكون:

$$S_n=t_1+t_2+t_3+\cdots+t_n=t_n\times\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\leq 1$$

أي المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ محدودة من الأعلى بالعدد 1 وبالتالي العدد 1 عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$

-3

$$S_{n+1}-S_n=t_{n+1}=3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}>0$$

والمتتالية متزايدة تماماً

ومحدودة من الأعلى

فهي متقاربة $((S_n\leq 1))$

السؤال السابع

-1

$$u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

u_n تمثل مجموع n حدا متعاقبا من حدود

متتالية هندسية أساسها: $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول $u_1=\frac{1}{2}$

$$u_n=u_1\times\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

وبالمطابقة مع الشكل $u_n=a+b\left(\frac{1}{2}\right)^n$

نجد أن: $a=1\ ,\ b=-1$

-2 لكون $b=-1\ ,a=1$ فإن: $u_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2^{n+1}}>0$

$$t_{n+1}-t_n=1+\frac{1}{n+1}-1-\frac{1}{n}=\frac{n-n-1}{n(n+1)}=\frac{-1}{n(n+1)}<0$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=1$$

حيث أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$ وذلك كون $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

متتالية هندسية أساسها $-1<q=\frac{1}{2}<1$

ولدينا $\lim_{n\to+\infty}t_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$

إن المتتاليتين متجاورتان لأن

احداهما متناقصة والأخرى

متزايدة وتملكان النهاية ذاتها.

السؤال الثامن

لدينا:

$$a+b+c=39$$

$$a.b.c = 729$$

نلاحظ من المعادلة الثانية:

$$b^3 = 729$$
$$b = 9$$

نعوض:

$$a + c = 30$$
$$a.c = 81$$

من المعادلة الأولى:

$$a = 30 - c$$

نعوض في الثانية:

$$(30 - c)c = 81$$
$$30c - c^2 = 81$$
$$c^2 - 30c + 81 = 0$$
$$\Delta = 900 - 4(1)(81) = 576$$
$$\sqrt{\Delta} = 24$$
$$c_1 = \frac{30 - 24}{2} = 3$$

مرفوض لأن المتتالية متزايدة

$$c_2 = \frac{30 + 24}{2} = 27$$

مقبول.

فيكون a:

$$a = 30 - c = 30 - 27 = 3$$

والثلاث حدود هي:

$$a = 3\,, b = 9\,, c = 27$$

فـ يا ترى... شو هو أساس المتتالية؟!

السؤال التاسع

$$a + b + c = 15$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 107$$

من المعادلة الأولى:

$$3b = 15 \Rightarrow b = 5$$

نعوض في المعادلتين:

$$a + c = 10$$
$$a^2 + c^2 = 82$$

من المعادلة الأولى نجد:

$$a = 10 - c$$

نعوض في الثانية:

$$(10 - c)^2 + c^2 - 82 = 0$$
$$100 - 20c + c^2 + c^2 - 82 = 0$$
$$2c^2 - 20c + 18 = 0$$
$$c^2 - 10c + 9 = 0$$
$$(c - 9)(c - 1) = 0$$

إما:

$c = 9$ مقبول

أو:

$c = 1$ مرفوض

فتكون a:

$$a = 10 - c = 10 - 9 = 1$$
$$(a, b, c) = (1,5,9)$$

بما أن المتتالية حسابية وأساسها 4 وضوحاً و $u_0 = a = 1$:

$$u_n = u_0 + rn = 1 + 4n$$

السؤال العاشر

1- لدينا:

$$u_1^2 = u_0.u_2$$

$$(1+\lambda)^2 = \lambda(3+\lambda)$$
$$1+2\lambda+\lambda^2 = 3\lambda+\lambda^2$$
$$\lambda = 1$$

2- لدينا:

$$u_0 = 1\ ,\qquad u_1 = 2\ ,\qquad u_2 = 4$$

نلاحظ أن أساس المتتالية $q = 2$:

$$u_n = u_0 . q^n = 2^n$$

السؤال الحادي عشر

1- لدينا:

$$a+b+c = 9$$

ولكن:

$$2b = a+c$$
$$\Rightarrow 3b = 9$$
$$\Rightarrow b = 3$$

2- $a.c = -16$

ولكن:

$$c = a+2r$$

فإن:

$$a+a+2r = 9-3$$
$$2a+2r = 6$$
$$\Rightarrow a = 3-r$$

نعوض في المعادلة الثانية:

$$a(a+2r) = -16$$
$$a^2+a2r = -16$$
$$(3-r)^2+(3-r)2r = -16$$
$$(9-6r+r^2)+6r-2r^2+16 = 0$$
$$25-r^2 = 0$$

$\Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$ مقبول

$r = -5$ مرفوض

لأن في الفرض $\boldsymbol{r > 0}$

لحساب $\boldsymbol{a}$:

$$b = a+r \Rightarrow a = b-r$$
$$a = 3-5 = -2$$

لحساب $\boldsymbol{c}$:

$$c = a+2r = -2+10 = 8$$

النتيجة:

$$r = 5\,, a = -2\,, c = 8$$

3- لحساب $\boldsymbol{u_n}$:

$$u_0 = a = -2$$
$$u_n = u_0 + n.r$$
$$= -2+5n$$

4- $S_n = u_0+u_1+\cdots+u_n$

$$S_n = \frac{a+l}{2}\, n$$
$$a = u_0 = -2$$
$$l = u_n = -2+5n$$
$$n = n-0+1 = n+1$$
$$S_n = \frac{-2-2+5n}{2}(n+1)$$
$$= \frac{(-4+5n)(n+1)}{2}$$
$$= \frac{-4n-4+5n^2+5n}{2}$$
$$= \frac{5n^2+n-4}{2}$$

5- لحساب النهاية $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2}}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{5n^2+n-4}{2}}{n^2}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2+n-4}{2n^2} = \frac{5}{2}$$

قراءة الخطوط البيانية والجداول

السؤال الأول

1- حل وحيد

2- قيمة حدية واحدة

3- لدينا:

$$f(1) = 1\,, f'(1) = 0$$
$$y = 1$$

مماس أفقي.

السؤال الثاني

1- لدينا:

$y = 3$ مقارب افقي في جوار $\pm\infty$

$x = -1$ مقارب شاقولي نحو $+\infty$

1 $x = 1$ مقارب شاقولي نحو $\pm\infty$.

2- لا, لأن يوجد مقاربات أفقية.

3- لا, لأن المشتق لم ينعدم وهو يمثل الميل.

4- نلاحظ من الجدول, f مستمر ومتناقص على المجال $]-1,1[$ و:

$$0 \in f(]-1,1[) =]-\infty, +\infty[$$

فيكون للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد.

السؤال الثالث

1- لدينا:

$y = 1$ مقارب افقي في جوار $-\infty$

$y = -3$ مقارب افقي في جوار $+\infty$

$x = -2$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$.

2- لا

3- لا

4- "أصلح السؤال: عند 2" لا ويقبل نصفي مماس

5- $f(2) = 0$ قيمة حدية كبرى.

السؤال الرابع

1- لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

$y = 3$ مقارب أفقي

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$y = 1$ مقارب أفقي

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 3$$

2- لا بسبب وجود مقاربات أفقية في الجوارين.

3- عند دراسة المجال $]-\infty, 1[$ نلاحظ أنه لا يوجد حل, لندرس المجال $]1, +\infty[$, f مستمر ومتزايد على $]1, +\infty[$ و:

$$0 \in f(]1, +\infty[) =]-\infty, 1[$$

فيكون للمعادلة حل وحيد.

4- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{X\to1} f(X)$$

نميز حالتين:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x\to1^-} f(x) = 3$$

5- لدينا:

$$f(x) > 2 :]-\infty, -1[\cup]-1,1[$$

$$f'(x) \geq 0 : [-1,1[\cup]1, +\infty[$$

السؤال الخامس

1- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \,,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

2- $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$

3- لدينا:

$$f(2) = -2 \,, f'(2) = 0$$

4- لدينا:

$$f(]-2,2]) = [-2,0[$$

السؤال السادس

1- لدينا:

$$D_{f'} : \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

2- لدينا:

$$y = 2 \,, y = 1$$

ولا يمكن أن يكون هناك مقاربات مائلة للتابع لأنه يوجد مقاربين أفقيين في كلا الجوارين.

3- حل وحيد

4- لا

5- نعم

السؤال السابع

1- لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e\,,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty\,,\ \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$$

2- لدينا:

$y = e$ مقارب افقي في جوار $-\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو $\pm\infty$

3- نعم يقبل في جوار $+\infty$

4- لدينا:

$$]-\infty,0] \cup [3,+\infty[$$

5- لدينا:

$$]-\infty,1[$$

6- لدينا:

$$\lim_{x\to0} f\big(f(x)\big) = \lim_{X\to1} f(X)$$

نميز حالتين:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty\,,\ \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$$

السؤال الثامن

1- لا

2- $f(2) = -4$ قيمة حدية صغرى

3- لدينا: "تصويب: احذف القسم الثاني بعد كلمة اليساري"

$$y = f'(2^-)(x-2) + f(2)$$

$$y = -3(x-2) - 4$$

$$y = -3x + 6 - 4$$

$$y = -3x + 2$$

4- لدينا:

$$]-\infty,2]$$

5- لدينا:

$$f(]-\infty,3]) = [-4,3[$$

السؤال التاسع

1- لدينا:

$$\lim_{x\to4} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-4} f(x) = +\infty$$

$x = 4$ مقارب شاقولي

$x = -4$ مقارب شاقولي

2- لدينا:

$$f(0) = -2\,,\ f'(0) = 0$$

3- حلّان هما: $x = 3\,,\ x = -3$

4- $]-\infty,0[$

السؤال العاشر

1- لدينا:

$$\lim_{x\to2} f(x) = +\infty\,,\ \lim_{x\to-2} f(x) = -\infty$$

2- لدينا:

$$f(0) = 0$$

$$(1,1)\,,\,(0,0)$$

$$f'(0) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

3- فردي لأن خطه البياني متناظر بالنسبة لمحور الفواصل.

4- لدينا:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = f'(0) = 1$$

وسنعوض النقطة $(0,0)$ فيكون:

$$y - 0 = 1(x - 0)$$

$$y = x$$

السؤال الحادي عشر

1- $f(2) = -1$ قيمة حدية صغرى

2- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3- $x = 1 \,, x = 4$

4- نحدد نقطتين:

$$(1,0) \quad , \quad (0,-1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-0}{0-1} = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = 1(x - 1)$$

$$y = x - 1$$

5- لدينا:

$$f(x) = m \begin{cases} m \in]-\infty, -1[& \text{لا يوجد حلول} \\ m = -1 & \text{حل وحيد} \\ m \in]-1, +\infty[& \text{حلّان} \end{cases}$$

6- هنا سترسم انت على الرسمة, أفتح على الصفحة الأخيرة من الجلسة الامتحانية.

السؤال الثاني عشر

1- لدينا:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty \,, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2- $f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى

$f(3) = -1$ قيمة حدية صغرى

3- $[1,3]$

4- $[-1,1]$

5- $y = 1 \,, y = -1$

السؤال الثالث عشر

1- لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

2- $y_{d_1} = 2 \;,\; y_{d_2} = -3$

3- لدينا:

$$A\left(0, -\frac{1}{2}\right) \quad , \quad B(1,1)$$

$$f'(0) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{3}{2}$$

تكون معادلة المماس:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

السؤال الرابع عشر

1- حل وحيد

2- $[4, +\infty[$

3- نعم, لأننا عندما نأخذ المجال $]0.8,1.2[$ نجد أن النقطة $(1,2)$ هي الأكبر ضمن المجال.

4- 4 قيم حدية

5- صفر

6- لا, لأنه يوجد مماساً شاقولياً.

السؤال الخامس عشر

1- 4 حلول

2- $f'(0) = 0 \, , f(0) = 4$

3- $[0,4]$

4- $[0, +\infty[$

5- ثلاثة

6- لدينا:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - -$	0	$+ + + +$	0	$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

السؤال السادس عشر

1- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \, , \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \, , \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

2- $f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى

$f(3) = 5$ قيمة حدية صغرى

3- حلان

4- نختار نقطتين:

$$(0,1) \ (-1,0)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{0+1} = 1$$

5- لدينا الميل من الطلب السابق, نعوض نقطة ما:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = 1(x - 0)$$

$$y = x + 1$$

6- $I(2,3)$

السؤال السابع عشر

1- لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \, , \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{X\to 1} f(X) = 2$$

2- لا

3- $f'(3) = 0 \, , f(3) = 3$ فتكون المعادلة

$y = 3$ "مماس أفقي"

4- ثلاثة قيم حدية

السؤال الثامن عشر

1- لدينا:

$y = -1$ مماس افقي

بدنا "نحاول" نجيب نقطتين من الرسمة:

$$(-4,0) \quad , \quad (0,4)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-0}{0-(-4)} = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = 1(x - 0)$$

$$y = x + 4$$

غير اشتقاقي عند الصفر لأن يوجد مماس شاقولي.

2- لدينا:

x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$+ + + + + + +$	0	$- - - - - - -$	$\Vert$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3- متناظر بالنسبة للمبدأ , رسموه حبايب.