السؤال الأول:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\ln(x) + 2}{\ln(x) + 1}} \; ;]\boldsymbol{e^{-2}}, +\infty[$$

1- لحساب النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)\left(1 + \frac{2}{\ln(x)}\right)}{\ln(x)\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)} = 1$$

2- لإيجاد العدد A:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$
$$l = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$
$$\varepsilon = b - l = 0.1 = \frac{1}{10}$$

نعوض:

$$\left|\frac{\ln(x) + 2}{\ln(x) + 1} - 1\right| < \frac{1}{10}$$
$$\left|\frac{\ln(x) + 2 - \ln(x) - 1}{\ln(x) + 1}\right| = \frac{1}{10}$$
$$\frac{1}{\ln(x) + 1} < \frac{1}{10}$$

نقلب:

$$\ln(x) + 1 > 10$$
$$\ln(x) > 9$$
$$x > e^9$$
$$A = e^9 \text{ نختار}$$

3- لاستنتاج النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{X\to 1} f(X) = 2$$

السؤال الثاني:

<u>المعادلة الأولى:</u>

$$\ln(x^2 + 1) = \ln(7x)$$

$$E_1 =]-\infty, +\infty[\, , E_2 =]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow E = E_1 \cap E_2 =]0, +\infty[$$

$$x^2 + 1 = 7x$$

$$x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4(1)(1) = 45 > 0$$

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{45}}{2} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \text{ مقبول}$$

$$x_2 = \frac{7 - \sqrt{45}}{2} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \text{ مقبول}$$

والحلان مقبولان حسب شرط الحل.

المعادلة الثانية:

$$\ln(x^2-4)=\ln(2x-4)$$

$$E_1=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$$

$$E_2=]2,+\infty[$$

$$\Rightarrow E=E_1\cap E_2=]2,+\infty[$$

$$x^2-4=2x-4$$

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

إما:

$x=0$ مرفوض

أو:

$x-2=0\Rightarrow x=2$ مرفوض

السؤال الثالث:

$$\boldsymbol{f(x)=2x-2+\frac{\ln(x)}{x}\ ;D_f=]0,+\infty[}$$
$$\boldsymbol{g(x)=2x^2+1-\ln(x)\ ;D_g=]0,+\infty[}$$

أولاً:

1- النهايات:

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(2x+\frac{1}{x}-\frac{lnx}{x}\right)$$
$$=+\infty(+\infty+0-0)=+\infty$$

اشتقاقي على $]0,+\infty[$: g

$$g'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}$$
$$g'(x)=0\Rightarrow 4x^2-1=0$$
$$4x^2=1$$
$$x^2=\frac{1}{4}$$
$x=\frac{1}{2}$ مقبول

$x=-\frac{1}{2}$ مرفوض

الجدول:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-----$	0	$+++++$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}+\ln(2)$	↗	$+\infty$

2- نلاحظ أن:

$$g(x) \geq \frac{3}{2} + \ln(2) > 0$$

$$g(x) > 0$$

ثانياً:

1) لحساب النهايات:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2) f اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 2 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$
$$= \frac{2x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$$

الجدول:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+ + + + + + + + +$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

ثالثاً:

1) نوجد النهايات:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x.x}\right)}{x}$$
$$= 2 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 = a$$
$$f(x) - 2x = 2x - 2 + \frac{\ln(x)}{x} - 2x$$
$$= -2 + \frac{\ln(x)}{x}$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x = -2 = b$$

2) المعادلة:

$$y_\Delta = 2x - 2$$
$$f(x) - y_\Delta = \frac{\ln(x)}{x}$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

إذن هو مقارب مائل.

$$f(x) - y_{\Delta} = 0$$

$$\ln(x) = 0$$

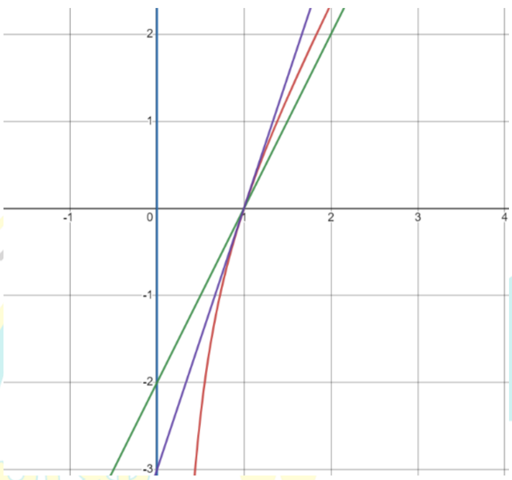
$$x = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$\frac{\ln(x)}{x}$	‖	$- - - - -$	0	$+ + + + +$	
وضع	‖	تحت		فوق	

3) لكتابة معادلة المماس:

$$y_d = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$f'(1) = 3$$
$$f(1) = 0$$
$$\Rightarrow y_d = 3(x-1) + 0 = 3x - 3$$

رابعاً: الرسم:



السؤال الرابع:

$$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n}\ ; u_0 = 0}$$

$$\boldsymbol{v_n = u_{n+1} - u_n}$$

1- لإثبات أن المتتالية هندسية:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n} = v_n$$
$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n.2}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2^n.2}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} = q$$

المتتالية هندسية وأساسها $q = \frac{1}{2}$, وحدها العام $v_n = \frac{1}{2^n}$.

2- لدينا:

$$w_n = \ln(v_n)$$

أ- نوجد w_{n+1}:

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$$

نوجد الفرق:

$$w_{n+1} - w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$
$$= \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) = r$$

فالمتتالية حسابية وأساسها $r = -\ln(2)$.

ب- لإيجاد الحد العام نعوض في:

$$w_n = w_0 + n.r = \ln(1) - n.\ln(2) = n.\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

ت- لحساب قيمة المجموع:

$$S = 1 - \frac{w_1}{\ln(2)} - \frac{w_2}{\ln(2)} - \cdots - \frac{w_5}{\ln(2)}$$
$$= 1 - \left(\frac{w_1}{\ln(2)} + \frac{w_2}{\ln(2)} + \cdots + \frac{w_5}{\ln(2)}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{\ln(2)}(w_1 + w_2 + \cdots + w_5)$$

ونلاحظ أن لدينا مجموع متتالية حسابية وهو:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$$
$$S = n.\frac{a+l}{2}$$
$$n = 5 - 1 + 1 = 5$$
$$a = w_1 = 0$$
$$l = w_5 = 5\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow w_1 + w_2 + \cdots + w_5 = 5.\frac{0 + 5\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{\ln(2)}{2}$$

نعوض في S:

$$S = 1 - \frac{1}{\ln(2)}\left(-\frac{\ln(2)}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

السؤال الخامس:

$$\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x} - \ln(x)\ ;\ D_g =]0, +\infty[}$$

g اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$
$$g'(x) = 0$$
$$\Rightarrow x - \sqrt{x} = 0$$
$$x = \sqrt{x}$$

نربع الطرفين بشرط $x > 0$ وهي كذلك على مجموعة التعريف:

$$x^2 = x$$
$$x^2 - x = 0$$
$$x(x-1) = 0$$

إما:

$x = 0$ مرفوض

أو:

$x = 1$ مقبول

الجدول:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$- - -$	0	$+ + +$	
$g(x)$	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

نلاحظ أن:

$$\sqrt{x} \geq \ln(x)$$

$$\sqrt{x} - \ln(x) \geq 0$$

$$g(x) \geq 0$$

من الجدول نلاحظ أن حلها:

$$s = [1, +\infty[$$