التمرين الأول:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = -2$ وبالعلاقة $u_{n+1} = u_n - 3n + 1$ من أجل كل عدد طبيعي n ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة:

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

أثبت أن المتتالية v_n متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

التمرين الثاني:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث:

$$u_n = \frac{2^n}{3^n}$$

1. أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق: $v_n = u_{2n+1}$ متتالية هندسية
2. استنتج المجموع بدلالة n :

$$S_n = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n+1}$$

التمرين الثالث:

لتكن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ أساسها $r > 0$ حيث:

$$a + b + c = 15$$

1. احسب b ثم اكتب a و c بدلالة r و b
2. إذا علمت أنّ $a \times c = 16$ عيّن الأساس ثم استنتج a و c

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$v_n = u_n + 3$$

1. أثبت ان v_n متتالية هندسية وأوجد أساسها
2. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n

☜ ليكن في حالة عدد طبيعي n

$$s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

3. عبر عن s_n بدلالة n

التمرين الخامس:

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - \dfrac{4}{3} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 4$

1. بين أن v_n متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول
2. اكتب كلاً من v_n و u_n بدلالة n
3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

التمرين السادس:

ليكن كل عدد طبيعي n :

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

1. أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان عند كل عدد طبيعي n أن $u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$
2. ليكن في حالة عدد طبيعي n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

عبر عن S_n بدلالة n

التمرين الأول:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = -2$ وبالعلاقة $u_{n+1} = u_n - 3n + 1$ من أجل كل عدد طبيعي n ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة:

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

أثبت أن المتتالية v_n متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أنّ المتتالية v_n حسابية ويتم وفق:

- نشكّل v_{n+1}
- نشكّل الفرق $v_{n+1} - v_n$
- يكون ناتج الفرق لا يحوي n

- نشكّل v_{n+1} وفق:

$$v_{n+1} = u_{(n+1)+1} - u_{n+1}$$
$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$$
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3(n+1) + 1 - u_{n+1}$$
$$v_{n+1} = -3n - 3 + 1$$
$$v_{n+1} = -3n - 2$$

- نشكل الفرق:

$$v_{n+1} - v_n$$
$$= -3n - 2 - u_{n+1} + u_n$$
$$= -3n - 2 - u_n + 3n - 1 + u_n$$
$$= -3$$

إذاً المتتالية v_n حسابية أساسها $r = -3$ وحدها الأول يُحسب وفق:

$$v_0 = u_{0+1} - u_0$$
$$v_0 = u_1 - u_0$$
$$= -1 - 2$$
$$= -3$$

التمرين الثاني:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث:

$$u_n = \frac{2^n}{3^n}$$

1. أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق: $v_n = u_{2n+1}$ متتالية هندسية
2. استنتج المجموع بدلالة n :

$$S_n = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n+1}$$

الطلب الأول:

إثبات v_n متتالية هندسية ويتم وفق:

- نشكّل v_{n+1}
- نشكّل النسبة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$
- يكون ناتج النسبة لا يحوي n

- نشكّل v_{n+1} وفق:

$$v_{n+1} = u_{2(n+1)+1}$$
$$v_{n+1} = u_{2n+3}$$
$$v_{n+1} = \frac{2^{2n+3}}{3^{2n+3}}$$

- نشكّل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2^{2n+3}}{3^{2n+3}}}{\frac{2^{2n+1}}{3^{2n+1}}} = \frac{2^{2n+3}}{3^{2n+3}} \times \frac{3^{2n+1}}{2^{2n+1}}$$
$$= \frac{2^2 . 2^{2n+1}}{3^2 . 3^{2n+1}} \times \frac{3^{2n+1}}{2^{2n+1}}$$
$$= \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

إذاً v_n هندسية أساسها $q = \frac{4}{9}$ ^_^

الطلب الثاني:

حساب المجموع:

$$S_n = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n+1}$$

- أكيد انتبهنا أنو المتتالية u_n ما منعرف نوعها (يعني بدي احسب مجموع لمتتالية نوعها غير معلوم) أيبي والحل؟؟

بسيطة وقت بدي احسب مجموع لمتتالية نوعها غير معلوم فأنا عندي أسلوبين.

الأسلوب الأول: في حال وجود علاقة تعايش

- بالاستفادة من علاقة التعايش نحولها إلى متتالية نوعها معلوم
- نكمل كما سبق في المجموع لمتتالية نوعها معلوم

الأسلوب الثاني: عدم وجود علاقة التعايش

نستخدم التعويض ثم الإصلاح (رح نطبّق عليها بعد شوي)

$$S_n = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n+1}$$

من علاقة التعايش لدينا:

$$v_n = u_{2n+1}$$
$$u_{2n+1} = v_n$$
$$u_1 = u_{2(0)+1} = v_0$$
$$u_3 = u_{2(1)+1} = v_1$$
$$u_5 = u_{2(2)+1} = v_2$$
$$u_{2n+1} = v_n$$

$$\rightarrow S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

المتتالية v_n أثبتناها من شوي أنو هندسية.

$$S_n = \text{الحد الأول} \left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right]$$

نوجد جميع المجاهيل:

- $\text{الحد الأول} = v_0 = u_1 = \frac{2^1}{3^1} = \frac{2}{3}$
- $\text{عدد الحدود} = n - 0 + 1 = n + 1$
- $q = \frac{4}{9}$

$$S_n = \frac{2}{3}\left[\frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{9}}\right]$$

$$S_n = \frac{2}{3}\left[\frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{\frac{5}{9}}\right]$$

$$S_n = \frac{2}{3} \times \frac{9}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right]$$

$$S_n = \frac{6}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right]$$

$$S_n = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$$

التمرين الثالث:

لتكن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ أساسها $r > 0$ حيث:

$$a + b + c = 15$$

١. احسب b ثم اكتب a و c بدلالة r و b

٢. إذا علمت أنّ $a \times c = 16$ عيّن الأساس ثم استنتج a و c

الحل:

الطلب الأول:

لدينا a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإنّ:

$$a + c = 2b$$

نعوّض في العلاقة المُعطاة:

$$a + b + c = 15$$
$$2b + b = 15$$
$$3b = 15$$
$$b = 5$$

كتابة a و c بدلالة r و b ويتم وفق:

$$b = a + r \rightarrow a = b - r$$
$$c = b + r$$

الطلب الثاني:

لدينا:

$$a \times c = 16$$
$$(b - r)(b + r) = 16$$
$$b^2 - r^2 = 16$$
$$5^2 - r^2 = 16$$
$$25 - r^2 = 16$$
$$r^2 = 25 - 16$$
$$r^2 = 9$$

إما $r = 3$

أو $r = -3$

بنص السؤال حاكيلنا $r > 0$, لهيك

رح نقبل قيمة الـ r الموجبة , يعني $r = 3$

استنتاج قيمة a و c وتتم وفق:

$$a = b - r \rightarrow 5 - 3 = 2$$
$$c = b + r \rightarrow 5 + 3 = 8$$

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$$v_n = u_n + 3$$

1. أثبت أن v_n متتالية هندسية وأوجد أساسها
2. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n

☜ ليكن في حالة عدد طبيعي n

$$s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

3. عبر عن s_n بدلالة n

الحل:

الطلب الأول:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 3}{u_n + 3}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}u_n - 2 + 3}{u_n + 3} = \frac{\frac{1}{3}u_n + 1}{u_n + 3}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}(u_n + 3)}{u_n + 3} = \frac{1}{3}$$

إذاً المتتالية v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

الطلب الثاني:

كتابة v_n بدلالة n وتتم وفق:

$$\frac{v_n}{v_0} = q^{n-0}$$
$$v_n = v_0 . q^n \rightarrow v_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

كتابة u_n بدلالة n وتتم وفق:

$$v_n = u_n + 3$$
$$u_n = v_n - 3$$
$$= 4\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

الطلب الثالث:

$$s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

$$s_n = \text{الحد الأول}\left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right]$$

نوجد جميع المجاهيل حيث:

* $\text{الحد الأول} = v_0 = 4$
* $\text{عدد الحدود} = n - 0 + 1 = n + 1$
* $q = \frac{1}{3}$

$$S_n = 4\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right]$$

$$S_n = 4\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right]$$

$$S_n = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$S_n = 6\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$S_n = 6 - 6\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

التمرين الخامس:

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي:

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 4$

١. بين أن v_n متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول

٢. اكتب كلاً من v_n و u_n بدلالة n

٣. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

الحل:

الطلب الأول:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+4}{u_n+4} = \frac{\frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} + 4}{u_n + 4}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}u_n + \frac{8}{3}}{u_n+4} = \frac{\frac{2}{3}(u_n+4)}{u_n+4} = \frac{2}{3}$$

إذاً المتتالية v_n هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

وحدها الأول: $v_0 = u_0 + 4 = 1 + 4 = 5$

الطلب الثاني:

كتابة v_n بدلالة n وتتم وفق:

$$\frac{v_n}{v_0} = q^{n-0}$$

$$v_n = v_0 . q^n \to v_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

كتابة u_n بدلالة n وتتم وفق:

$$v_n = u_n + 4$$
$$u_n = v_n - 4$$
$$= 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$$

الطلب الثالث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

- أكيد انتبهنا أنو المتتالية u_n ما منعرف نوعها (يعني بدي احسب مجموع لمتتالية نوعها غير معلوم) أيبي والحل؟؟

بسيطة وقت بدي احسب مجموع لمتتالية نوعها غير معلوم فأنا عندي أسلوبين.

الأسلوب الأول: في حال وجود علاقة تعايش

- بالاستفادة من علاقة التعايش نحولها إلى متتالية نوعها معلوم
- نكمل كما سبق في المجموع لمتتالية نوعها معلوم

الأسلوب الثاني: عدم وجود علاقة التعايش

نستخدم التعويض ثم الإصلاح (رح نطبّق عليها بعد شوي)

لدينا من علاقة التعايش:

$$v_n = u_n + 4$$
$$u_n = v_n - 4$$
$$u_0 = v_0 - 4$$
$$u_1 = v_1 - 4$$
$$u_2 = v_2 - 4$$

نعوّض في المجموع:

$$S_n = v_0 - 4 + v_1 - 4 + v_2 - 4 + \cdots + v_n - 4$$
$$S_n = \underbrace{v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n}_{S'_n} - (4 + 4 + \cdots + 4)$$

$$S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 5$ وعدد الحدود $n - 0 + 1 = n + 1$.

$$S'_n = \text{الحد الأول}\left[\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right]$$

$$S'_n = 5\left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}\right]$$

$$S'_n = 5\left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right]$$

$$S'_n = 5.\frac{3}{1}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$S'_n = 15\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$S'_n = 15 - 15\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

بالرجوع إلى علاقة S_n

$$S_n = S'_n - (4 + 4 + \cdots + 4)$$
$$= 15 - 15\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - (4 + 4 + \cdots + 4)$$
$$= 15 - 15\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \boxed{- 4(n+1)}$$
$$= 15 - 15\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4n - 4$$
$$= 11 - 15\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4n$$

كيف صارت $4(n+1)$, تعال نتذكر:
أنو مجموع العدد نفسه عدداً من المرات يساوي جداء هذا العدد بعدد المرات. طيب نحنا كم عنا 4 بهاد المقدار $(4 + 4 + \cdots + 4)$ ؟
عندي $(n+1)$ أربعة عشان عدد حدود المقدار $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ هو $(n+1)$.
عشان هيك صارت: $4(n+1)$

التمرين السادس:

ليكن كل عدد طبيعي n :

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

١. أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان عند كل عدد طبيعي n أن $u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$

٢. ليكن في حالة عدد طبيعي n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

عبر عن S_n بدلالة n

الحل:

الطلب الأول:

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

$$u_n = \frac{(2n+1)a + (2n-1)b}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$u_n = \frac{2na + a + 2nb - b}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$u_n = \frac{a - b + (2a+2b)n}{(2n+1)(2n-1)}$$

بالمقارنة:

$$\begin{cases} a - b = 1 & \dots(1) \\ 2a + 2b = 0 & \dots(2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بـ 2 فنجد أنّ:

$$\begin{cases} 2a - 2b = 2 & \dots(1)' \\ 2a + 2b = 0 & \dots(2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$4a = 2 \to a = \frac{1}{2}$$

نعوّض في (1) فنجد أنّ:

$$\frac{1}{2} - b = 1 \to b = -\frac{1}{2}$$

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

$$u_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+1}$$

$$u_n = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}$$

الطلب الثاني:

حساب المجموع:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

- أكيد انتبهنا أنو المتتالية u_n ما منعرف نوعها (يعني بدي احسب مجموع لمتتالية نوعها غير معلوم) أيبي والحل؟؟

بسيطة وقت بدي احسب مجموع لمتتالية نوعها غير معلوم فأنا عندي أسلوبين.

الأسلوب الأول: في حال وجود علاقة تعايش

- بالاستفادة من علاقة التعايش نحولها إلى متتالية نوعها معلوم
- نكمل كما سبق في المجموع لمتتالية نوعها معلوم (طبقنا عليها من شوي تمرينين)

الأسلوب الثاني: عدم وجود علاقة التعايش

نستخدم التعويض ثم الإصلاح (رح نطبّق عليها هلق)

لدينا:

$$u_n = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}$$

$$u_0 = \frac{1}{4(0)-2} - \frac{1}{4(0)+2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$u_1 = \frac{1}{4(1)-2} - \frac{1}{4(1)+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$u_2 = \frac{1}{4(2)-2} - \frac{1}{4(2)+2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

نعوّض في المجموع:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$S_n = -\frac{1}{2} \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{+\frac{1}{2}} \cancel{-\frac{1}{6}} \cancel{+\frac{1}{6}} \cancel{-\frac{1}{10}} \cancel{+\cdots} \cancel{\frac{1}{4n-2}} - \frac{1}{4n+2}$$

نلاحظ أنّ كل حد عم ياخد معو الحد يلي بعدو.
وما في غير الحد الأول والحد الأخير ما بروحوا كع حدا ^_^ .

$$S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$$
$$= \frac{-(2n+1)-1}{2(2n+1)}$$
$$= \frac{-2n-1-1}{2(2n+1)} = \frac{-2n-2}{2(2n+1)}$$
$$= \frac{2(-n-1)}{2(2n+1)} = \frac{-n-1}{2n+1}$$

دُمتم ودُمنا في توفيقٍ من اللّٰه..
إعداد: مُحبّكم الأستاذ أيمن عامر..
💛..