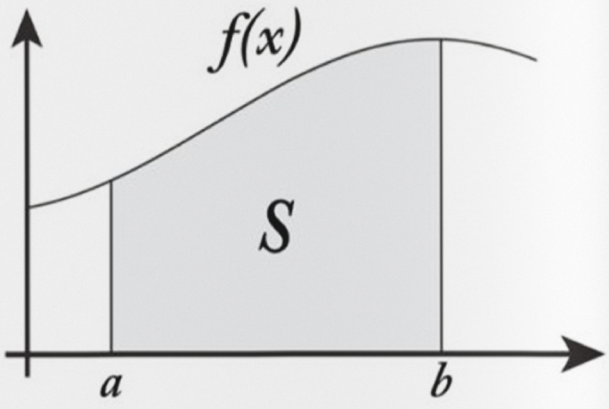
منصة طريقي
مع أنس أحمد
التعليمية الافتراضية

شرح الرياضيات

النهايات



$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2-5x+2\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x^2-x-1}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+2x\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

1

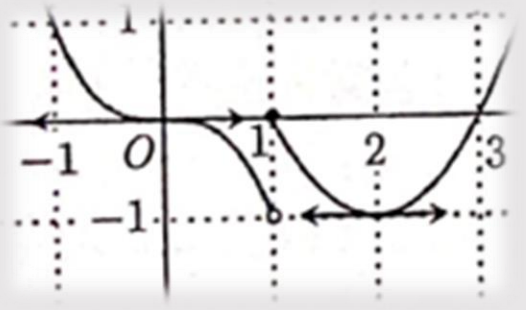
الدرس الأول

مدخل إلى النهايات

Scan me!

بفرض f تابع معرف في جوار لنقطة a . يفيد مفهوم نهاية تابع عند a بدراسة قيم $f(x)$ في هذا الجوار

مثال



.....

.....

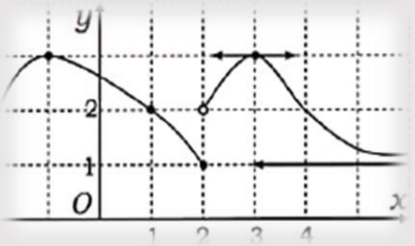
.....

.....

.....

.....

مثال



.....

.....

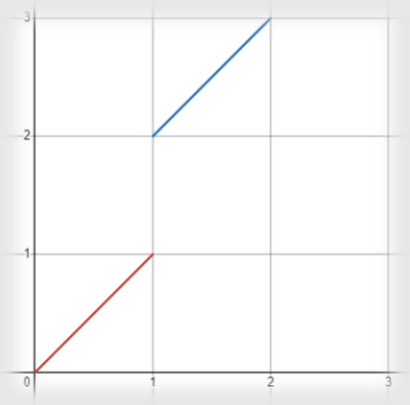
.....

.....

.....

.....

مثال



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

اصطلاح: إذا كانت $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ قلنا أن نهاية التابع f عند a غير موجودة

ملاحظة: إذا كان $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ فنقول إن للتابع نهاية عند a وإذا كانت النهاية المشتركة هي عدد حقيقي نقول إن للتابع نهاية حقيقية عند a مساوية لهذا العدد.

صياغة دقيقة للنهاية الحقيقية عند عدد

بفرض $\lim_{x\to a} f(x) = l$ عندئذٍ من أجل أي عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد حقيقي $\delta > 0$ بحيث

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

عندما $x \in]a-\delta, a+\delta[$

ارسم معي

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

صياغة أخرى: من أجل أي مجال J مركزه l يوجد مجال I مركزه a بحيث يتحقق الشرط :

$f(x) \in J$ عندما $x \in D_f \cap I$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المثال (1)

ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = \sqrt{2x+5}$$

1- جد نهاية f عند $a = 2$

2- جد عدداً حقيقياً δ بحيث

$|f(x) - 3| < 10^{-2}$

عندما $x \in]2-\delta, 2+\delta[$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المثال (2)

ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{3\}$ وفق :

$$f(x)=\frac{x+3}{x-3}$$

1- جد العددين الحقيقين a,b ليكون :

$$f(x)=a+\frac{b}{x-3}$$

2- احسب نهاية $f(x)$ عند $x=4$

3- جد مجالاً I مركزه 4 بحيث يتحقق الشرط :

$f(x)\in]6.9,7.1[$

عندما $x\in I$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المثال (3)

ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=4x^2+1$$

1- جد نهاية $f(x)$ عند $x=\frac{1}{2}$

2- جد مجالاً I مركزه 0.5 بحيث يتحقق الشرط:

$f(x)\in]1.98,2.02[$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ماذا لو واجهنا صفراً في المقام

ندرس إشارة المقام و ننظم جدولاً بها

- نميز حالتين :

a) حالة $x \to a^+$ (من اليمين) :

و هنا نأخذ الإشارة التي على يمين صفر الجدول و نضعها إشارةً للمقام

$$\frac{A}{0^+}$$

b) حالة $x \to a^-$ (من اليسار) :

وهنا نأخذ الإشارة التي على يسار صفر الجدول و نضعها إشارةً للمقام :

$$\frac{A}{0^-}$$

ثم تذكر أن $\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$ مع مراعاة الإشارة

مثال

احسب نهايات التوابع الآتية عند $-\infty, +\infty$ وعند النقطة a

1	$f(x) = \frac{x-3}{x-1}$	$a = 2$ $a = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

2	$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$	$a = 2$ $a = -1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3	$f(x) = \frac{x+2}{(x-2)^2}$	$a = 2$ $a = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4	$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$	$a = 0$ $a = 2$

5	$f(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x + 2}$	$a = -2$

6	$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 4}$	$a = -2$ $a = 2$

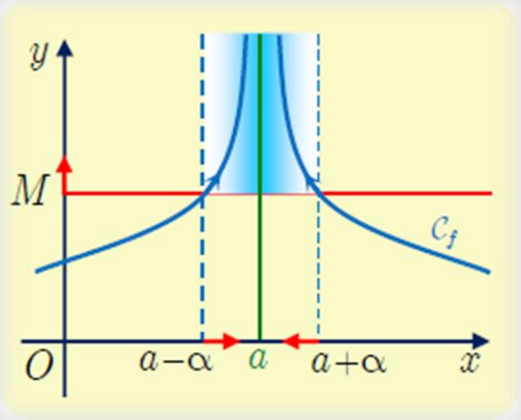
7	$f(x) = \frac{2x^2}{(1 - x)(2 + x)}$	$a = -2$ $a = 1$

8	$f(x) = x^2 - 2x - \frac{4}{(9 - x)^2}$	$a = 9$

9	$f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x + 12}}$	$a = 4$

10	$f(x)=x+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x-2}$	$a=1$ $a=2$

صياغة دقيقة لمفهوم النهاية اللانهائية عند عدد حقيقي



إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ هذا يعني أن المستقيم $x = a$ مقارب شاقولي للخط C_f

- فمن أجل كل عدد $M > 0$ يوجد عدد حقيقي δ بحيث يتحقق الشرط :

$x \in]a-\delta, a+\delta[$ عندما $f(x) > M$

مثال (1)

ليكن f التابع المعرف على $R\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}$ والمطلوب:

1- احسب $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2- جد عدداً حقيقياً α بحيث إذا انتمت x إلى المجال

$]1-\alpha, 1+\alpha[$ تحقق أن $f(x)>10^3$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

ليكن $f(x)=\frac{2x+1}{(x-3)^2}$ المعرف على $R\setminus\{3\}$:

احسب $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ و فسر النتيجة هندسياً

جد عدداً حقيقياً α يحقق أنه إذا انتمت x إلى المجال

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

النهاية عند $\pm\infty$

لحساب نهاية تابع صحيح أو كسري صحيح عند $+\infty$

1- نأخذ الحدود المسيطرة من البسط و المقام

2- نختصر

3- نعوض

وتذكر ان :

$$\frac{A}{\infty}=0 \quad , \quad \frac{\infty}{A}=\infty$$

تدرب

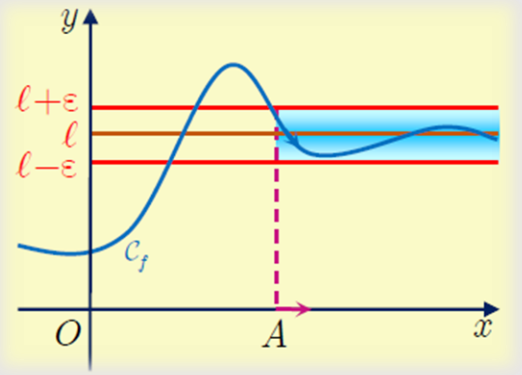
1	نهاية $f(x)=x^2-3x+1$ عند $+\infty$ تساوي:
2	نهاية $f(x)=3x+x^2-x^3$ عند $-\infty$ تساوي:
3	نهاية $f(x)=x^5-3x^6$ عند $-\infty$ تساوي:
4	نهاية $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1}$ عند $-\infty$ تساوي:
5	نهاية التابع $f(x)=\frac{1-x^5}{1+x^6}$ عند $+\infty$ تساوي:

6	نهاية التابع $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ عند $+\infty$ تساوي:
7	نهاية التابع $f(x)=\frac{x^6-1}{x^2+3}$ عند $-\infty$ تساوي:

فكرة: إن نهاية f عند $\pm\infty$ قد تكون نهاية حقيقية (عدد) وقد تكون لانهاية.

ومن هنا يجب دراسة صياغة تعريف دقيقة لكل من الحالتين:

صياغة حقيقية للنهاية الحقيقية عند $+\infty$



كون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ فهذا يُفسر هندسياً بأن المستقيم الأفقي $y=l$ مقارب للخط C_f في جوار $+\infty$

فمن أجل كل عدد حقيقي $\varepsilon>0$ يوجد عدد حقيقي A بحيث يتحقق الشرط :

$|f(x)-l|<\varepsilon$ عندما $x>A$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ولتعيين A نتبع الخطوات التالية:

1- نحدد مركز المجال $l=\frac{b+a}{2}$ (و هي نفسها $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$)

2- نحدد نصف قطر المجال $\varepsilon=b-l$

3- نعوض في القانون $|f(x)-l|<\varepsilon$ ثم نصلح لنصل إلى $x>A$

مثال محلول

ليكن f التابع المعرف على $[1,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{3x+2}{x+1}$ والمطلوب:

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسياً

2- جد عدداً حقيقياً A يحقق أن $f(x)\in]2.99,3.01[$ عندما $x>A$

الحل

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

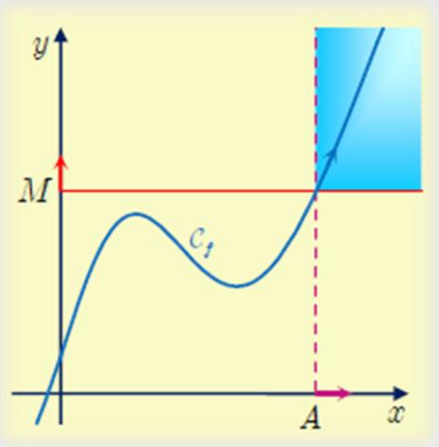
ليكن f التابع المعرف على $]-\infty,0[$ وفق :

$f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$ و المطلوب :

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و ما هو التأويل الهندسي للنتيجة

2- أوجد عدداً حقيقياً A يحقق أن $f(x) \in]0.25,0.75[$ عندما $x > A$

صياغة حقيقية للنهاية اللانهائية عند $+\infty$



.....

.....

.....

.....

.....

من أجل أي عدد حقيقي M يوجد عدد حقيقي A بحيث يتحقق الشرط :

$f(x) > M$ عندما $x > A$

مثال محلول

ليكن $f(x) = x\sqrt{x}$, احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أوجد عدداً حقيقياً A بحيث $f(x) \in]10^3, +\infty[$ عندما $x > A$

الحل

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تذكير: لا نستخدم فكرة الحد المسيطر إلا إذا كان السعي إلى لانهاية والتابع صحيح أو صحيح على صحيح

العمليات على اللهليات

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

$$\frac{\pm\infty}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

$$\frac{\ell}{0^{\pm}} = \infty$$

$$\frac{\ell}{\pm\infty} = 0$$

بنوك الأسئلة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1- إن نهاية التابع $f(x)=x^3+5x^2+1$ عند $-\infty$:

a		b		c		d	
$-\infty$		$+\infty$		0		1	

2- إن نهاية التابع $f(x)=\frac{4x^2+2x}{x^2+1}$ عند $+\infty$:

a		b		c		d	
2		4		0		$+\infty$	

3- إن نهاية التابع $f(x)=\frac{3x^2+1}{x+2}$ عند $+\infty$:

a		b		c		d	
3		$+\infty$		$-\infty$		0	

4- إن نهاية التابع $f(x)=7+x^2+4x$ عند $-\infty$:

a		b		c		d	
$-\infty$		4		0		$+\infty$	

5- إن نهاية التابع $f(x)=\frac{2x-1}{(x-2)^2}$ عند $+\infty$:

a		b		c		d	
$-\infty$		$+\infty$		0		1	

6- إن نهاية التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق $f(x)=\frac{x(x-1)}{x-2}$ عند $a=2^-$:

a		b		c		d	
$-\infty$		$+\infty$		0		1	

7- إن نهاية التابع $f(x)=-\frac{3}{x^2}$ عند $a=0^+$:

a		b		c		d	
$-\infty$		$+\infty$		0		1	

8- إن نهاية التابع $f(x)=\sqrt{3x^2+x+1}$ عند $-\infty$:

a		b		c		d	
3		$+\infty$		$-\infty$		0	

9- إن نهاية التابع $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ عند $-\infty$:

a		b		c		d	
$-\infty$		4		0		$+\infty$	

10- إن نهاية التابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$ عند $a=3$:

a	3	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	0

11- نفرض أن C الخط البياني لتابع f معرف على المجال $]1,+\infty[$ وأن A عدد حقيقي مثبت وأنه من أجل كل $x>A$ يحقق أن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1,99,2.01[$ عندئذٍ

a	$x=1$ مقارب شاقولي للخط C نحو $+\infty$	b	$x=1$ مقارب شاقولي للخط C نحو $-\infty$
c	$y=1$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$	d	$y=2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

12- إذا كان f تابعاً يحقق أنه من أجل أي عدد حقيقي M يوجد عدد حقيقي A بحيث مهما يكن $x>A$ فإن $f(x)>M$ عندئذٍ:

a	$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	b	$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
c	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	d	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

A	1
B	2
B	3
D	4
C	5
A	6
A	7
B	8
D	9
B	10
D	11
C	12

2

الدرس الثاني

حالات عدم التعيين

الحالة الأولى: $\frac{\infty}{\infty}$

نخرج عاملاً مناسباً (أقوى حد من البسط وأقوى حد من المقام)

1- نختصر

2- نوجد النهاية

أمثلة

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي، نهاية f عند قيمة a الموافقة في كل مما يلي هي:

$f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x}+1}\ ;a=+\infty$	1

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$f(x)=\frac{x\left(\sqrt{x}+1\right)}{x^2-1}\ ;a=+\infty$	2

.....

.....

.....

.....

$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\ ;a=+\infty$	3

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$f(x)=\frac{x^3-3}{x+1}\ ;a=+\infty$	4

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5	$f(x)=\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}; a=+\infty$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الحالة الثانية: $\infty-\infty$

ولإزالتها سنميز حالتين:

الحالة الأولى: أكبر حد مسيطر ذو الإشارة الموجبة يساوي أكبر حد مسيطر ذو الإشارة السالبة (نهاية سعيدة)

- نضرب البسط والمقام بمرافق المقام حيث:
- .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- نبسّط
- نوجد النهاية

أمثلة

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي, نهاية f عند قيمة a الموافقة في كل مما يلي هي:

1	$f(x)=\sqrt{x^2-1}-x \; ; a=+\infty$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2	$f(x)=x-\sqrt{x^2-4}\; ; a=+\infty$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 - 1}\ ; a = -\infty$	3

$f(x) = 3x - \sqrt{9x^2 + 3}\ ; a = +\infty$	4

$f(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{2x^2 + 3}; a = +\infty$	5

الحالة الثانية: أكبر حد مسيطر ذو الإشارة الموجبة لا يساوي أكبر حد مسيطر ذو الإشارة السالبة (نهاية حزينة)

- نظهر الحد المسيطر على الحدود ذو الإشارة الموجبة والحد المسيطر على الحدود ذات الإشارة السالبة
- نخرج عامل مشترك
- نوجد النهاية
-

فكرة مساعدة:

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & : x > 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

أمثلة

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي، نهاية f عند قيمة a الموافقة في كل مما يلي هي:

1	$f(x) = x - x\sqrt{x}\ ; a = +\infty$

2	$f(x) = \sqrt{x} - x\sqrt{x}\ ; a = +\infty$

3	$f(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1}\ ; a = -\infty$

4	$f(x) = 3x - \sqrt{2x^2 + 3}\ ; a = +\infty$

.....

.....

.....

.....

.....

الحالة الثالثة: $\frac{0}{0}$

و لإزالتها يوجد أساليب متعددة:

1- **في حال وجود جذر:**

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

أمثلة

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي، نهاية f عند قيمة a الموافقة في كل مما يلي هي:

1	$f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\ ;a=4$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2	$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\ ;a=0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

في حال عدم وجود جذر: نحلل البسط والمقام إلى جداء أقواس أحدها $(x-a)$

أمثلة

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي، نهاية f عند قيمة a الموافقة في كل مما يلي هي:

1	$f(x)=\frac{x^2+x}{2x^2+x}\ ;\ a=0$

.....

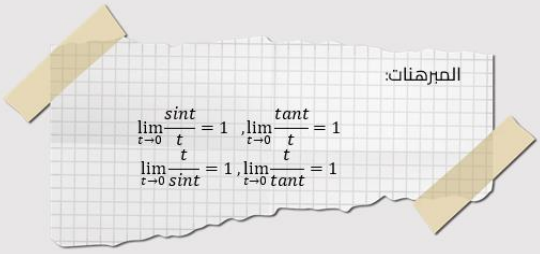
.....

$f(x)=\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}\ ;a=1$	2

$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}\ ;a=1$	3

في حال كان الصفر ناتج عن $sin(0)$ أو $cos(0)$:

نغير صياغة التابع ثم نستفيد من



أمثلة

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي، نهاية f عند قيمة a الموافقة في كل مما يلي هي:

$f(x)=\frac{\sin 3x}{x}\ ;\ a=0$	1

الحالة الرابعة: $0 \times \infty$

يوجد أسلوبان:

1- تغيير المتحول:

في حال كان الصفر ناتج عن $\sin(0)$ أو $tan(0)$

- نفرض مضمون sin أو tan متحولاً جديداً t
- نغير المسعى من $x \to a$ إلى $t \to 0$
- نعزل x بدلالة t

أمثلة

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي, نهاية f عند قيمة a الموافقة في كل مما يلي هي:

1	$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{x} \; ; a = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2	$f(x) = \frac{2x}{\tan(x)} \; ; a = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2	$f(x)=\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\ ;a=0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3	$f(x)=\frac{\sin(x-1)}{1-x^2}\ ;\ a=1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2- مهارات متنوعة:

مرافق – عامل مشترك – توحيد مقامات.....

أمثلة

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي، نهاية f عند قيمة a الموافقة في كل مما يلي هي:

1	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2	$\lim\limits_{x\to0^+} sinx\,.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

بنوك الأئمة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، نهاية f عند a الموافقة له هي:

1- $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\ ;\ a=+\infty$:

a	$-\infty$	b	$+\infty$	c	0	d	1

2- $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\ ;\ a=-\infty$:

a	3	b	-1	c	$-\infty$	d	0

3- $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\ ;\ a=0$:

a	$\frac{1}{2}$	b	$+\infty$	c	0	d	1

4- $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}\ ;\ a=+\infty$:

a	1	b	0	c	$\frac{9}{4}$	d	-1

قال اللي بيعرف بيعرف و اللي ما بيعرف بقول مرافق (مرافق حتى الموت)

5- $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}\ ;\ a=2$:

a	4	b	8	c	12	d	$+\infty$

6- $f(x)=\frac{x^2-3x}{x-3}\ ;\ a=3$:

a	$+\infty$	b	1	c	$-\infty$	d	3

7- $f(x)=\sqrt{9x^2+1}-3x\ ;\ a=+\infty$:

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

-8 $a = +\infty \; ; f(x) = \sqrt{3x^2+1} - \sqrt{3x^2+2}$:

a	$+\infty$	b	0	c	$-\infty$	d	غير ذلك

-9 $a = +\infty \; ; f(x) = \sqrt{5x+1} - x$:

a	$-\infty$	b	$+\infty$	c	1	d	$\sqrt{5}$

-10 $a = \pi \; ; f(x) = \frac{\sin x}{x}$:

a	0	b	$+\infty$	c	-1	d	1

صفر على عدد أديش يا عيوني !؟

-11 $a = 0 \; ; f(x) = \frac{sin(4x)}{x}$:

a	2	b	4	c	0	d	$+\infty$

-12 $a = 0 \; ; f(x) = \frac{sin(6x)}{2x}$:

a	-3	b	3	c	2	d	0

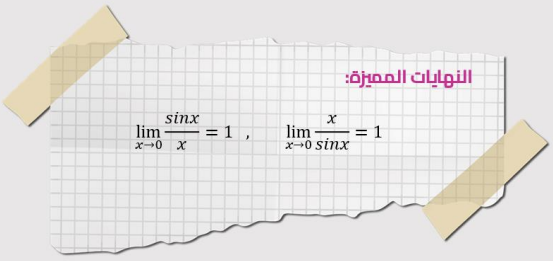
C	1
B	2
A	3
A	4
C	5
D	6
A	7
B	8
A	9
A	10
B	11
B	12

3

الدرس الثالث

النهايات المثلثية

أولاً: النهايات الشهيرة:



و بالتالي هنا يجب جعل مضمون الساين نفسه المقام (أو نفسه البسط إذا كانت الساين في المقام) و المضمون يسعى إلى الصفر

مثال (1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x}$$

نحن أمام حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{sinx}=\lim_{x\to 0}x^2\frac{x}{sinx}=0(1)=0$$

مثال (2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{x}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}2\frac{sin2x}{2x}=2(1)=2$$

مثال (3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\,2x}{sin\,x}$$

في البسط : نضرب البسط و المقام بـ $2x$

وفي المقام: نضرب البسط و المقام بـ x

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2x\frac{\sin 2x}{2x}}{x\frac{\sin x}{x}}$$

نختصر :

$$\lim_{x\to 0}2\frac{\frac{sin2x}{2x}}{\frac{sinx}{x}}=2\frac{1}{1}=2$$

مثال (4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\,(4x)}{3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\,(4x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3}\frac{\sin(4x)}{4x}=\frac{4}{3}$$

مثال (5)

$$\lim_{x\to 3}\frac{sin(x-3)}{3-x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (6)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

.....

.....

.....

مثال (7)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

مثال (8)

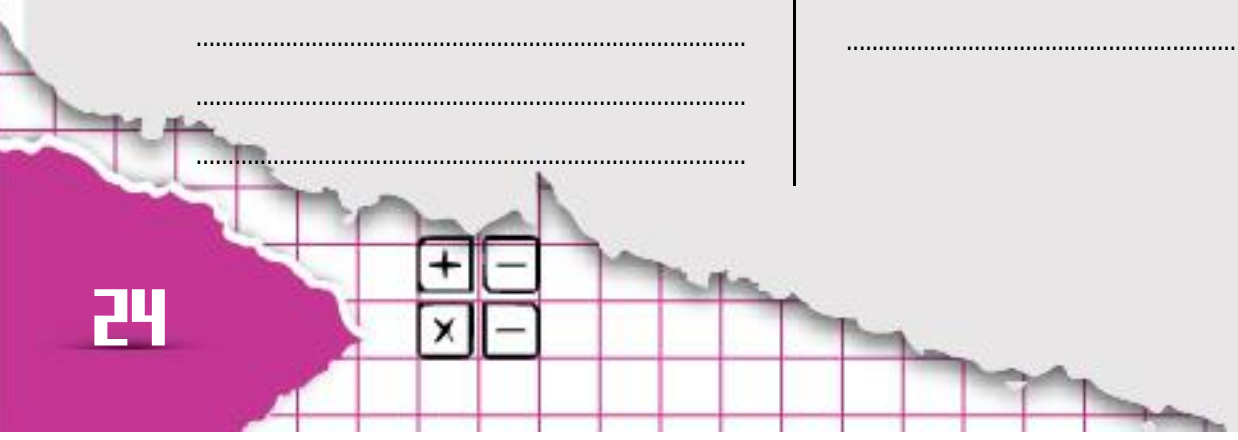
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\sqrt{x})}{x}$$

مثال (9)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{\sqrt{x+1}-1}$$

مثال (10)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$$



.....

.....

.....

.....

$$\lim_{Natheer \to 0} \frac{\sin Natheer}{Natheer} = 1$$

الدساتير المثلثية

أحياناً قد لا يكون شكل المبرهنة السابقة واضح لذلك نلجأ لاستخدام بعض المطابقات المثلثية لتبسيط شكل التابع, **و سنسرد المطابقات من خلال المجموعات التالية :**

المجموعة الأولى

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

ولدينا:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \qquad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

مثال (1)

احسب نهاية f عند a :

$$f(x) = \frac{xsinx}{1-\cos^2(2x)} \quad a = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{tanx}{x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

♦ **يمكن حفظ النتيجة التالية:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

مثال (3)

احسب نهاية f عند a

$$f(x) = \frac{x + tanx}{x + sinx} \quad a = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (4)

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x^3}{3 - 3\cos^2 x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (5)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (6)

$$\lim_{x \to 0} \frac{4\cos^2 x - 4}{sinx} + \frac{3}{2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Results

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

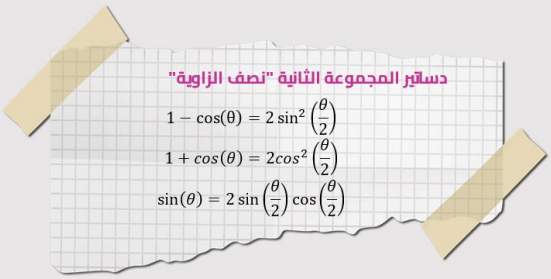
.....

.....

.....

.....

المجموعة الثانية



مثال (1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos2x}{sinx}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{3-3cos2x}{x^2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x^2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-xcosx}{\sin(2x)}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+6cosx-6}{\sqrt{4+2x}-2}$$

.....

.....

Trick By Natheer

المجموعة الثالثة

دساتير المجموعة الثالثة "جموع إلى جداء"

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

شرح توضيحي لتسهيل الحفظ:

مثال (1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{2x^2}$$

مثال (2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-\sin(x)}{x}$$

المسألة VIE

احسب $\lim_{x\to+\infty} xsin\left(\frac{1}{x}\right)$

هكذا نكون قد وصلنا إلى نهاية فكرتنا

وبقي علينا أن نصل إلى حلمنا وذلك باتباع الخطوات التالية:

- أن تثق بنفسك وقدراتك وتثق بأن الله لن يضيع تعبك وسهرك
- التدرب والتكرار المتباعد للأفكار
- المتابعة معي ^-^ والمحافظة على أكبر قدر ممكن من مدرسي الرياضيات

لا تتسبب بانتحارهم ^_^

بنوك الأئمة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، نهاية f عند a الموافقة له هي:

1- $f(x)=\frac{\sin x}{x}\ ;a=\pi$

a	0	b	$+\infty$	c	-1	d	1

صفر على عدد أديش يا عيوني !؟

2- $f(x)=\frac{sin(4x)}{x}\ ;a=0$

a	2	b	4	c	0	d	$+\infty$

3- $f(x)=\frac{sin(6x)}{2x}\ ;a=0$

a	-3	b	3	c	2	d	0

4- $f(x)=\frac{xsinx}{1-cos(2x)}\ ;a=0$

a	$\frac{1}{4}$	b	4	c	2	d	$\frac{1}{2}$

5- $f(x)=\frac{cos(x)-1}{sin(x)}\ ;a=0$

a	2	b	-1	c	0	d	1

6- $f(x)=\frac{cos(3x)-cos(x)}{xsinx}\ ;a=0$

a	-4	b	4	c	2	d	1

7- $f(x)=\frac{sin3x+sinx}{sin5x-sinx}\ ;a=0$

a	1	b	$\frac{1}{4}$	c	0	d	$\frac{1}{2}$

هلأ إذا سحبنا x شو بصير ؟!

-8 $:f(x)=\frac{tan(7x)}{x}\ ;a=0$

0	d	$-\infty$	c	7	b	0	a

-9 $:f(x)=\frac{sin(2x)}{\sqrt{x+1}-1}\ ;a=0$

4	d	-1	c	0	b	1	a

-10 $:f(x)=sinx\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ ;a=0^+$

غير ذلك	d	-1	c	1	b	0	a

A	1
B	2
B	3
D	4
C	5
A	6
A	7
B	8
D	9
B	10

4

الدرس الرابع

مبرهنات المقارنة

وتترتب

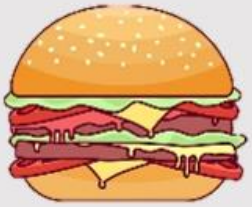
الفوضى

التي بداخلك

بقولِ تعالى

"وأن سعيهُ

سوف يرى"



لتعرف قصة البرغر

Scan me!

المقارنة (1)

إذا كان f , g , h ثلاث توابع معرفة على مجال من النمط: $]a , +\infty[$ و بحيث :

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

فإذا كان $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$ و $\lim_{x\to x_0} h(x) = l$

عندئذٍ يكون $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

مثال (1)

بفرض f تابع يحقق :

$$\frac{2x}{3x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x}{3x-2}$$

فبملاحظة أن :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x-1} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x-2} = \frac{2}{3}$$

فحسب نظرية المقارنة (1) فإن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{3}$$

تستخدم هذه المبرهنة لحساب نهايات تحوي sin أو cos بشرط أن مضمونها يسعى الى ∞ .

تذكر الـ $menu$ ^_^

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1$$
$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$
$$0 \leq \sin^2\theta \leq 1$$
$$0 \leq \cos^2\theta \leq 1$$
$$0 \leq |\sin\theta| \leq 1$$
$$0 \leq |\cos\theta| \leq 1$$

مثال (1)

احسب كلاً من النهايات التالية:

1- $lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

يجب الانتباه الى النقاط التالية:

1- عند ضرب طرفي المتراجحة بمقدار سالب تقلب إشارة المتراجحة.

2- عند القسمة لطرفي المتراجحة على عدد سالب تقلب إشارة المتراجحة.

-2 $lim_{x\to\infty} \frac{2\sin x}{\sqrt{x}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

-3 $lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2 x}{x+1}$

.....

.....

.....

.....

.....

-4 $lim_{x\to\infty} \frac{x-|\cos x|}{x^2+7}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

f تابع يحقق أن:

$$\frac{3x+\cos x}{x} \le f(x) \le \frac{3x+7}{x-1}$$

أياً كان $x > 1$ فما نهاية f عند $+\infty$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المقارنة (2)

ليكن f, g تابعين معرفين على مجال من النمط $I =]b, +\infty[$ ولنفرض ان $|f(x) - l| \leq g(x)$

وأن $lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

عندئذٍ يكون $lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

مثال (1)

f تابع يحقق أن:

$$|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x+1}$$

أياً كان $x > 0$ فنهاية $f(x)$ عند $+\infty$

الحل

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$lim_{x\to+\infty} g(x)$$

$$= lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

فحسب المقارنة 2 تكون $lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

مثال (2)

بفرض $|f(x) + 600| \leq \frac{1-\cos 2x}{x}$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المقارنة (3)

1- إذا كان لدينا $f(x) \geq g(x)$

وكانت $lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ فإن

$lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

2- إذا كانت $f(x) \leq g(x)$ وكانت

$lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

فإن $lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

كيف نستخدمها؟؟؟

1- نطبق احد متراجحات الإحاطة ونحصل على متراجحة من الشكل:

$$h(x) \le f(x) \le g(x)$$

2- نحسب نهايات الأطراف ونميز حالتين:

أ) اذا كانت النهايات $+\infty$ نحذف الجزء الأكبر ((أي $g(x)$))

ب) اذا كانت النهايات $-\infty$ نحذف الجزء الأصغر ((أي $h(x)$))

مثال

احسب نهاية التابع f المعرف بالشكل $f(x) = x + \cos x$ عند $-\infty$, $+\infty$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الخلاصة: الأكبر من $+\infty$ هي $+\infty$

الأصغر من $-\infty$ هي $-\infty$

السؤال (1)

f تابع يحقق ان $f(x) \ge \frac{1}{4}x^2$ اياً كانت $x < 0$

احسب نهاية f عند $-\infty$

الحل

$$lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4}x^2 = +\infty$$

⇐ حسب المقارنة 3

$$lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

السؤال (2)

اثبت ان $x^2 - 5\sin x \ge x^2 - 5$

واحسب النهاية عند $-\infty$, $+\infty$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال (3)

احسب نهاية كل من التوابع التالية عند قيم a الموافقة لـ:

$f(x) = 2x + \sin x$	$a = +\infty$ $a = -\infty$
$f(x) = \frac{2x + \sin x}{x - 1}$	$a = +\infty$ $a = -\infty$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Special Exercises

المسألة (1)

ليكن f التابع المعرف على $[0 , +\infty[$

بالشكل: $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

1- اثبت ان $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

2- استنتج ان $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3- وما نهاية f عند $+\infty$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المسألة (2)

ليكن f التابع المعرف وفق:

$$f(x) = \sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+1}$$

1- أثبت أن $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+1}}$

2- أثبت صحة المتراجحة :

$$\frac{1}{\sqrt{2x+3}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

3- استنتج نهاية f عند $+\infty$

الحل

المسألة (3)

احسب نهاية التابع

$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ في جوار الصفر

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

طريقة 2:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المسألة (4)

ليكن g التابع المعرف على R بالشكل:

$$g(x) = \frac{1}{3 + 2\sin x}$$

1- اثبت محدودية التابع g

2- استنتج $lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3+2\sin x}\right)$

3- استنتج $lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sin x}{3+2\sin x}\right)$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

المسألة (5) سلوك تابع

ليكن $f(x) = \frac{x}{2} + 2\sin(x)$

1- احصر التابع f بين تابعين

2- أوجد مجالاً يحصر القيمة $f(1000)$

الحل

المسألة (6) سلوك تابع

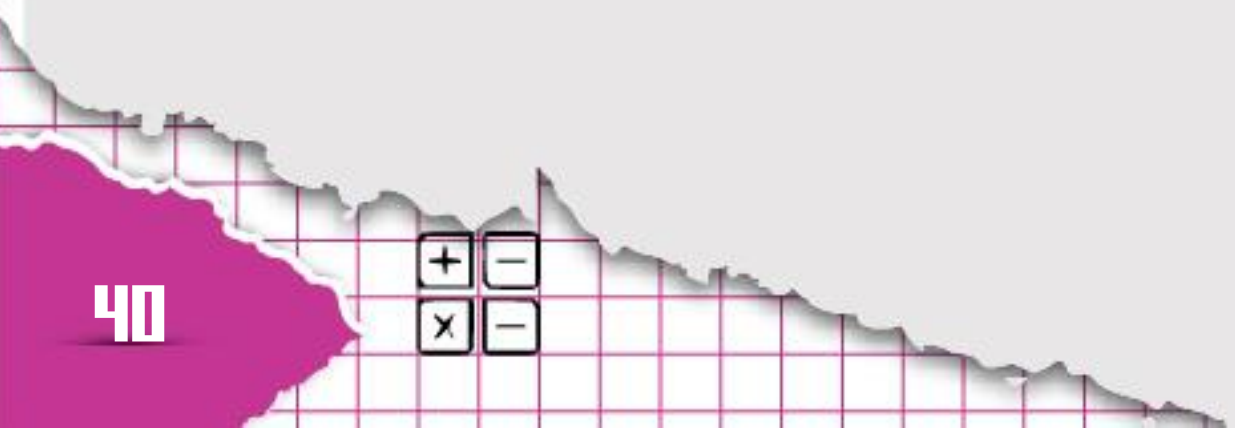
ليكن $f(x) = \frac{x+3\cos^2 x}{2}$

1- احصر التابع f بين تابعين

2- احسب نهاية $f(x)$ عند $+\infty$

3- أوجد مجالاً يحصر القيمة $f(1000)$

الحل



بنوك الأئمة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة، نهاية f عند a في كل من الحالات الآتية تساوي:

1- $a=+\infty \ ; \ \frac{x-1}{x+5} \le f(x) \le \sqrt{x^2+2x}-x$:

a	$-\infty$	b	$+\infty$	c	1	d	0

2- $a=-1 \ ; \ f(x) \le \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$:

a	3	b	$-\infty$	c	-1	d	0

3- $a=0 \ ; \ \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \le f(x) \le \frac{1-\cos(2x)}{x}$:

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	1

4- $a=+\infty \ ; \ |f(x)+1| \le \sqrt{x^2+1}-x$:

a	-1	b	0	c	$\frac{9}{4}$	d	1

5- $a=+\infty \ ; \ f(x)=\frac{sinx}{x+1}$:

a	4	b	8	c	0	d	$+\infty$

6- $a=+\infty \ ; \ f(x)=\frac{x-\sin(x)}{x+5}$:

a	$+\infty$	b	-1	c	$-\infty$	d	1

7- $a=+\infty \ ; \ f(x)=\frac{3x-sinx}{\sqrt{1+x^2}}$:

a	3	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

8- $a=+\infty \ ; \ f(x)=x+\frac{2\sin^2 x}{5}$:

a	0	b	$+\infty$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

9- $a=0 \ ; \ \frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)} \le f(x) \le \frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}$:

a	0	b	$+\infty$	c	1	d	$\sqrt{5}$

10- التابع f المعرف بالشكل $f(x) = sinx + 2 + x$ محصور بين المستقيمين:

a	$y = 3 + x$ $y = 1 + x$	b	$y = 3 - x$ $y = 1 + x$	c	$y = 3 + x$ $y = +x$	d	غير ذلك

11- إن القيمة $f(1000)$ في التابع $f(x) = \sin^2 x + \frac{x}{2} - 1$ تقع في المجال:

a	$[0, +\infty[$	b	$[-499. -500]$	c	$[499,500]$	d	$[-410,510]$

12- التابع f المعرف وفق $f(x) = \frac{3}{2} + 4\cos^2 x$ أحد حدوده الراجحة عليه هي:

a	6	b	1	c	$\frac{9}{2}$	d	$\frac{5}{4}$

13- إذا كان التابع f يحقق المتراجحة $|f(x) - 3| \leq \frac{x^2-1}{x^2+1}$ فإن نهاية f:

a	3	b	4	c	2	d	لا يمكن حسابها

14- إذا كان التابع f يحقق المتراجحة $|f(x) + 4| 2 \leq \frac{\sqrt{2\sin^3 x+9} - \sqrt{\sin^3 x+9}}{1-\cos(2x)}$ فإن نهاية f:

a	4	b	-4	c	2	d	لا يمكن حسابها

15- إذا كان التابع f يحقق المتراجحة $|2f(x) - 4| \leq \frac{3+\sin(x)-x}{x^2}$ فإن نهاية f:

a	4	b	-4	c	2	d	لا يمكن حسابها

16- ليكن f التابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{(\sin^2 x - 2\sin(x)+1)\left(\sqrt{2-\cos(2x)}-1\right)}{x}$ وليكن $g(x)$ التابع الذي يحقق $|g(x)| \leq f(x)$ فإن نهاية g عند $+\infty$:

a	4	b	0	c	2	d	لا يمكن حسابها

A	9	C	1
A	10	B	2
C	11	A	3
A	12	A	4
D	13	C	5
B	14	D	6
C	15	A	7
B	16	B	8

5

الدرس الخامس

الاستمرار والجزء الصحيح

مقدمة:

التابع ذو الأفرع: هو تابع تتغير قاعدة ربطه من مجال لمجال آخر

مثال (1)

التابع f المعرف بالشكل :

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & ;x\geq 0\\ x^2+1 & ;x<0\end{cases}$$

هو تابع ذو فرعين :

الفرع الأول : $x\mapsto 2x+1$

معرف على المجال $[0,+\infty[$

والفرع الثاني : $x\mapsto x^2+1$

معرف على المجال $]-\infty,0[$

ويكون خطه البياني ⇐

فهو على المجال $[0,+\infty[$ يمثل المستقيم $y=2x+1$

وعلى المجال $]-\infty,0[$ يمثل القطع المكافئ

ونلاحظ من الرسم أنه مستمر " لا يوجد نقاط انقطاع "

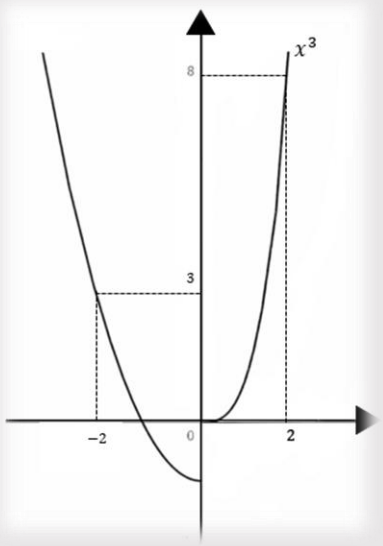
مثال (2)

التابع :

$$g(x)=\begin{cases}x^3 & ;0\leq x\leq 2\\ x^2-1 & ;-2\leq x\leq 0\end{cases}$$

ونلاحظ أن التابع هنا غير مستمر عند $x=0$

" التابع ينقطع عند الصفر "



الاستمرار عند نقطة a

شرط الاستمرار للتابع f عند النقطة a هو

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

وبالتالي لدراسة استمرار التابع f عند النقطة a

1. نحسب الصورة $f(a)$
2. نحسب نهاية التابع f عندما $x\to a$ أي $\lim_{x\to a} f(x)$

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$	$\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$
التابع مستمر عند a	التابع غير مستمر عند a

مثال (1)

ادرس استمرار التابع f عند $a=2$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & ;x\neq 2\\ 4 & ;x=2\end{cases}$$

.....

.....

.....

تعيين ثابت الاستمرار

قد يرد سؤال يطلب فيه إيجاد قيمة ثابت مجهول ليكون f مستمر

1. نحسب $f(a)$ كما سبق
2. نحسب $\lim_{x\to a} f(x)$
3. بما أن f مستمر عند a فهو يحقق أن

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

نقوم بحسابهم سابقاً

4. نحصل على معادلة بالمجهول المطلوب ونقوم بحلها.

مثال (1)

جد قيمة الثابت A ليكون التابع f مستمر عند $a = 0$

حيث

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & ;x \neq 0 \\ A+2 & ;x = 0 \end{cases}$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

ادرس استمرار f عند $a = 0$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin\, x}{\sqrt{1+x}-1} & ;x \neq 0 \\ \dfrac{3}{2} & ;x \neq 0 \end{cases}$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

انتبه:

أحياناً لا يحدد لنا في نص السؤال قيمة a لذلك يمكن أن نحددها من نقاط تفرع التابع

مثال1: ليكن f المعرف على R وفق :

$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) : x \neq 0$

و $f(0) = 0$ أي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ m & ; m = 0 \end{cases}$$

جد قيمة m ليكون f مستمر على $\mathbb{R}$

♦ **تفكير:** نلاحظ أن f له نقطة تفرع واحدة هي $a = 0$ لذلك ندرس الاستمرار عند $a = 0$

الحل

الجزء الصحيح

$$E(x) = n \ ; \ n \leq x < n + 1$$

مثلاً:

$$E(3.14) = 3 \ ; \ 3 \leq 3.14 < 4$$
$$E(2.16) = 2 \ ; \ 2 \leq 2.16 < 3$$
$$E(5) = 5 \ ; \ 5 \leq 5 < 6$$
$$E(-2.3) = -3 \ ; \ -3 \leq -2.3 < -2$$

مترجحة هامة:

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

نهاية تابع مركب

بنوك الأئمة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1- ليكن التابع المعرف وفق $f(x)=\begin{cases}\frac{2x+1}{x-1} & ;x\neq 1\\ 2 & ;x=1\end{cases}$, إن $f(2)$ تساوي:

a	2	b	5	c	1	d	غير ذلك

2- لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x+4}-6x & ;x\neq 0\\ 2\sqrt{3} & ;x=0\end{cases}$, إن $f(0)$ يساوي:

a	$2\sqrt{3}$	b	$-2\sqrt{3}$	c	2	d	$\sqrt{5}$

3- إن التابع f المعرف وفق $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} & ;x\neq 2\\ 4 & ;x=2\end{cases}$, هل التابع f مستمر عند $a=2$؟

a	نعم	b	لا

4- إن التابع f المعرف وفق $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x+2}{x-1} & ;x\neq 1\\ 5 & ;x=1\end{cases}$, هل التابع f مستمر عند $a=1$؟

a	نعم	b	لا

5- ليكن التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x} & ;x\neq 0\\ m-1 & ;x=0\end{cases}$, إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند 0 هي:

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{1}{4}$	c	1	d	2

6- ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} & ;x\neq 0\\ m+1 & ;x=0\end{cases}$, إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند 0 هي:

a	$\frac{9}{8}$	b	$-\frac{1}{8}$	c	$-\frac{9}{8}$	d	غير ذلك

7- ليكن التابع المعطى بالعلاقة $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2+2\cos x}-\sqrt{3+\cos x}}{x^2} & ;x\neq 0\\ 2m-1 & ;x=0\end{cases}$, إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند 0 هي:

a	$-\frac{7}{16}$	b	$\frac{7}{16}$	c	$\frac{1}{2}$	d	غير ذلك

8- ليكن لدينا التابع المعرف وفق $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & ; x \neq 1 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$ ، إن نهاية التابع عند $a = 1$ هي:

a	0	b	$+\infty$	c	1	d	$\sqrt{5}$

9- هل التابع f مستمر عند $a = 1$؟

a	نعم	b	لا

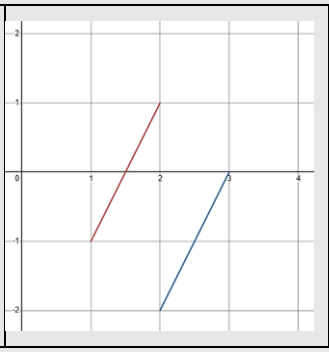
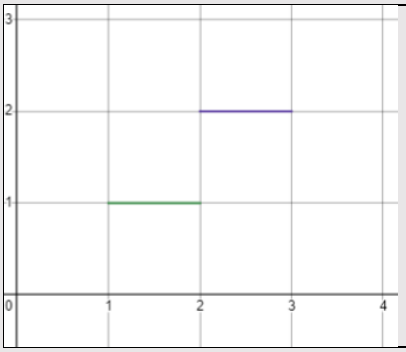
10- هل التابع f مستمر على $\mathbb{R}$؟

a	نعم	b	لا

11- ليكن التابع f المعرف على $[1,3[$ وفق $f(x) = 2x - 3E(x)$ ، إن عبارة f بصيغة مستقلة عن $E(x)$ نعطى بالشكل:

a	$\begin{cases} 2x-3 ; x \in [1,2[\\ 2x-6 ; x \in [2,3[\end{cases}$	B	$\begin{cases} 1 ; x \in [1,2[\\ 2 ; x \in [2,1[\end{cases}$	c	$\begin{cases} 2x+3 ; x \in [1,2[\\ 2x-6 ; x \in [2,1[\end{cases}$	d	$\begin{cases} 2x-3 ; x \in [1,2[\\ 2x+6 ; x \in [2,1[\end{cases}$

12- إن خطه البياني هو:

a		b		c	

13- إن نهاية التابع $\frac{f(x)}{x^2}$ عند $+\infty$:

a	1	b	0	c	$-\infty$	d	غير ذلك

14- هل f مستمر عند $a = 2$؟

a	نعم	b	لا

15- ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $[0,2]$ وفق $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$, إن عبارة fبصيغة مستقلة عن $E(x)$ تعطى بالشكل:

a	$\begin{cases} x^2 ; x \in [0,1[\\ 1 + (x-1)^2 ; x \in [1,2[\\ 2 \quad ; x = 2 \end{cases}$	b	$\begin{cases} x \quad ; x \in [0,1[\\ x - 1 \ ; x \in [1,2[\\ 0 \quad ; x = 2 \end{cases}$	c	$\{-x^2 ; x \in [0,2]$	d	غير ذلك

16- هل f مستمر على المجال $[0,2]$؟

a	نعم	b	لا

17- إن نهاية التابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+E(x)}{x}$ عند $+\infty$:

a	1	b	$+\infty$	c	0	d	2

A	9	B	1
A	10	A	2
A	11	A	3
A	12	B	4
B	13	A	5
B	14	C	6
A	15	D	7
A	16	A	8
A		17	

6

الدرس السادس

المقارب المائل

قاوم حتى

لو وصلت

ممزقاً..

فلذة

الوصول

سترممك

تمهيد: إن أي مستقيم مائل تُكتب معادلته بالشكل $y = ax + b$

ويمثل العدد a هنا ميل هذا المستقيم

مثلاً:

1- المعادلة $y = 2x - 1$ تمثل مستقيماً مائلاً ميله 2

2- المعادلة $y = \frac{x}{2}$ تمثل مستقيماً مائلاً ميله $\frac{1}{2}$

3- المعادلة $y = 1 - x$ تمثل مستقيماً ميله -1

4- المعادلة $y = \frac{3x-1}{2}$ تمثل مستقيماً ميله $\frac{3}{2}$

■ **الإثبات:**

لإثبات أنّ مستقيماً ما Δ معادلته:

$$\Delta: y = ax + b$$

مقارب مائل للخط c_f عند $+\infty$

نتبع الخطوات التالية:

1- نشكل تابع الفرق: $f(x) - y_\Delta$

2- نثبت أن

$$lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

وبنفس الأسلوب نعرف المقارب المائل في جوار $-\infty$

الوضع النسبي

نقصد بدراسة الوضع النسبي للخط c_f مع مقاربه Δ معرفة :

المجال الذي يكون عليه C_f فوق Δ

و المجال الذي يكون عليه C_f تحت Δ

و نقاط تقاطع C_f مع Δ (النقاط المشتركة)

و لدراسة الوضع النسبي :

ندرس إشارة الفرق (إما عن طريق تشكيل جدول إشارة أو أن يكون واضح الإشارة كمثل

$$\frac{1}{x^2}\ ,\ -\frac{2}{x^2+1}\ ,\ \frac{1}{x^2+9}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{x}}\ ,\ e^x\ ,\ -\frac{1}{(x-3)^2}$$

مثال (1)

أثبت ان المستقيم Δ

$$\Delta: y = x + 1$$

مقارب مائل للخط البياني c_f للتابع f المعرف بالشكل:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}$$

في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط C_f مع مقاربه

الحل

1- نشكل تابع الفرق:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} - (x + 1)$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 1 - (x + 1)(x + 2)}{x + 2}$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 1 - x^2 - 3x - 2}{x + 2}$$

$$= \frac{-1}{x + 2}$$

2- نأخذ النهاية:

$$lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x + 2} = 0$$

$\Leftarrow \Delta$ مقارب للخط c_f في جوار $+\infty$

لندرس الوضع النسبي بينهما:

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{1}{x+2}$$

البسط $-1 < 0$

المقام $x + 2 = 0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
-1	$----$	$----$	
$x+2$	$----$	0 $++++$	
$f(x) - y_\Delta$	$-----$	$\|\|$ $+++++$	
الوضع النسبي	C تحت Δ		C فوق Δ

$$\Rightarrow x = -2$$

التمرين (1)

فيما يأتي بين معللاً إجابتك إذا كانت المستقيم Δ مقارباً مائلاً للخط البياني c_f

عند $+\infty$ او $-\infty$ وادرس بعدئذٍ الوضع النسبي للخط c_f ومقاربه Δ

-1 $f(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x+1}$

, $\Delta: y = 2x + 3$

f معرف على $R/\{-1\}$

$$f(x) - y_\Delta = 2x + 3 + \frac{10}{x+1} - (2x+3)$$
$$= \frac{10}{x+1}$$

$$lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0 \ ,$$
$$lim_{x\to-\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

$\Delta \Leftarrow$ مقارب مائل للخط c_f في جوار $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{10}{x+1}$$

البسط: $10 > 0$

المقام: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
10	$++++$	$++++$	
$x+1$	$----$	0 $++++$	
$f(x) - y_\Delta$	$-----$	$\|\|$ $++++$	
الوضع النسبي	C تحت Δ		C فوق Δ

-2 $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x^2}$, $\Delta: y = -x + 1$

f معرف على R^*

$$f(x) - y_\Delta$$
$$= -x + 1 - \frac{1}{x^2} - (-x+1)$$
$$= -\frac{1}{x^2}$$

$$lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0 \ ,$$
$$lim_{x\to-\infty}(f(x) - y_\Delta = 0$$

$\Delta \Leftarrow$ مقارب مائل في جوار $-\infty, +\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{1}{x^2} < 0$$

ومن الواضح انه سالب دوماً

C_f تحت Δ دوماً

-3 $f(x) = 3x + 7 - \frac{5}{\sqrt{|x|}}$

$\Delta: y = 3x + 7$

f معرف على R^*:

$$f(x) - y_\Delta =$$
$$3x + 7 - \frac{5}{\sqrt{|x|}} - (3x+7)$$
$$= -\frac{5}{\sqrt{|x|}}$$

$$lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0 \ ,$$
$$lim_{x\to-\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{5}{\sqrt{|x|}} < 0$$

من الواضح انه سالب دوماً

و منه C يقع دائماً تحت Δ

-4 $f(x) = \frac{x^3-3x-5}{(x+1)^2}$

, $\Delta: y = x - 2$

f معرف على $R\backslash\{-1\}$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x^3 - 3x - 5}{(x+1)^2} - (x-2)$$

$$= \frac{x^3 - 3x - 5 - (x-2)(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x^3 - 3x - 5 - (x-2)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^3 - 3x - 5 - x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0 \ ,$$
$$lim_{x\to-\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

$\Delta \Leftarrow$ مقارب مائل عند $+\infty, -\infty$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = -\frac{3}{(x+1)^2} < 0$$

C يقع تحت Δ دوماً .

-5 $f(x) = \frac{-x^2-4x+\sin x}{x}$, $\Delta: y = -x - 4$

f معرف على R^*:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{-x^2 - 4x + \sin x}{x} - (-x-4)$$

$$= -\frac{-x^2 - 4x + \sin x - x(-x-4)}{x}$$

$$= \frac{-x^2 - 4x + \sin x + x^2 + 4x}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x}$$

لحساب $lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta)$ فإننا نعلم ان :

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نقسم على $x > 0$ (لان $x \to +\infty$)

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \ , \qquad lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\Longrightarrow lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Δ مقارب مائل للخط c_f في جوار $+\infty$

لحساب $lim_{x\to-\infty}(f(x) - y_\Delta)$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نقسم على $x < 0$ $(x \to -\infty)$

$$-\frac{1}{x} \ge \frac{\sin x}{x} \ge \frac{1}{x}$$

$$lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0 \ ,$$
$$lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

الوضع النسبي:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (2)

في كل من الحالات التالية: أثبت أن Δ مقارب مائل للخط C_f ثم ادرس الوضع النسبي للخط البياني مع مقاربة

1- $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}$, $\Delta: y=2x+1$

2- $f(x)=x+\frac{sinx}{x}$, $\Delta: y=x$

3- $f(x)=\frac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}}{2x+1}$, $\Delta: y=\frac{x}{2}+1$

الحل

سؤال دورة 2021 - تكميلي

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]-\infty, 0[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^2 + \cos^2 x}{x}$$

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته

$$y = 2x$$

مقارب مائل وادرس الوضع النسبي له مع مقاربه

الحل

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2x^2 + \cos^2 x}{x} - 2x$$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\cos^2 x}{x}$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

و لما كانت $x \to -\infty$ فإن $x < 0$:

$$0 \geq \frac{\cos^2 x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

فحسب الإحاطة

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

و عليه Δ مقارب مائل في جوار $-\infty$

اما بخصوص الوضع النسبي :

$\cos^2 x \geq 0$

و $x < 0$ على المجال $]-\infty, 0[$

فإن $f(x) - y_\Delta = \frac{\cos^2 x}{x} < 0$ على I

و بالتالي c تحت Δ على كامل المجال I

إيجاد معادلة المقارب المائل

في الفقرة السابقة كان يعطى المقارب المائل في نص السؤال ويطلب اثبات انه مقارب مائل, في الفقرة التالية سنتعلم كيف نوجد معادلة المقارب المائل بأنفسنا, ثم اثبات انه مقارب مائل.

إيجاد معادلة المقارب المائل:

لإيجاد معادلة المقارب المائل للخط البياني c_f للتابع f فإننا نميز الحالات:

- **الحالة الخاصة 1:**

التابع f معرف بالشكل:

$$f(x) = ax + b + u(x)$$

عندئذٍ نضع $\Delta: y = ax + b$

ونثبت انه مقارب مائل كما مر معنا سابقاً.

مثال

f تابع معرف على R^* بالشكل:

$$f(x) = 3x + 1 + \frac{2023}{x^4}$$

أوجد معادلة المقارب المائل للخط c_f في جوار $+\infty$, وادرس الوضع النسبي.

الحل

نضع $\Delta: y = 3x + 1$ عندئذٍ نلاحظ:

$$f(x) - y_\Delta = 3x + 1 + \frac{2023}{x^4} - (3x + 1) = \frac{2023}{x^4}$$

$$lim_{x \to +\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

$\Delta \Leftarrow$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

الوضع النسبي: نلاحظ ان:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2023}{x^4} > 0 \ : x \in R^*$$

- **الحالة الخاصة 2:** التابع f معرف بشكل كسر درجة بسطه اكبر من درجة مقامه بدرجة واحدة عندئذٍ نقسم البسط على المقام قسمة اقليدية ثم نتبع طريقة التقليد.

فائدة: عند اجراء القسمة $\frac{u(x)}{v(x)}$ فإن الناتج يكون بالشكل:

$$\text{ناتج القسمة} + \frac{\text{باقي القسمة}}{\text{المقسوم عليه}}$$

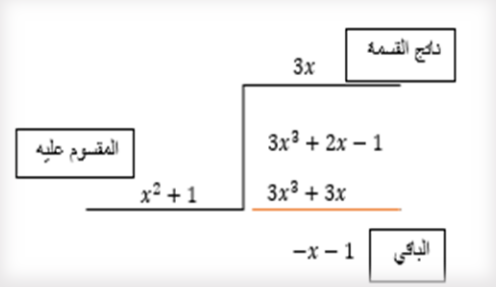
مثال

اوجد معادلة المقارب المائل للخط البياني c_f للتابع f المعرف بالشكل:

$$f(x) = \frac{3x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1}$$

الحل

f معرف على R^*



$$f(x) = 3x + \frac{-x-1}{x^2+1}$$

نضع $\Delta: y = 3x$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{-x-1}{x^2+1}$$

$$lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{x^2}$$

$$= lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$lim_{x\to-\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

Δ مقارب مائل عند $-\infty$, $+\infty$ $\Leftarrow$

دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - y_\Delta = -x - 1$$

البسط: $-x - 1 = 0 \to x = -1$

المقام: $x^2 + 1 > 0$

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ $+\infty$
$-x-1$	$+++++0-----$
x^2+1	$+++++\quad +++++$
$f(x) - y_\Delta$	$++++0----$
الوضع النسبي	C تحت Δ $\quad$ C فوق Δ

والنقطة $A(-1,0)$ نقطة مشتركة

حيث فواصلها هي النقطة التي عدمت الفرق وتراتيبها تُحسب من تعويض هذه الفاصلة في معادلة Δ

ملاحظة: أحياناً قد لا تنفع القسمة الاقليدية ويكون البديل تفريق البسط على المقام

مثال

بفرض $f(x) = \frac{x^2+2+\sin^2 x}{x}$ المعرف على R^*

جد معادلة المقارب المائل للخط c_f و ادرس الوضع النسبي له مع c_f

الحل

$$f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{2}{x} + \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$= x + \frac{2}{x} + \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$= x + \frac{2 + \sin^2 x}{x}$$

نضع $\Delta: y = x$,

فيكون:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- **الحالة الخاصة 3 (مهارة الإتمام):**

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R بالشكل : $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$

1- ادرس نهاية f عند $+\infty, -\infty$

2- اكتب $4x^2 - 4x + 3$ بالشكل القانوني (مربع كامل)

3- ادرس نهاية التابع h المعرف وفق:

$h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$

عند $+\infty, -\infty$

4- استنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلتيهما .

الحل

1- لنحسب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

2- الكتابة بالشكل القانوني تعني الإتمام إلى مربع كامل :

$$4x^2 - 4x + 3$$
$$= 4(x^2 - x) + 3$$
$$= 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 3$$
$$= 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 3$$
$$= 4\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 - 1 + 3$$
$$= (2x-1)^2 + 2$$

3- نلاحظ الآن أنّ:

$$h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$$
$$= \sqrt{(2x-1)^2 + 2} - \sqrt{(2x-1)^2}$$

سنكون هنا أمام حالة عدم تعيين من الشكل : $\infty - \infty$, لذلك نضرب البسط و المقام بالمرافق :

$$h(x) = \frac{\left(\sqrt{(2x-1)^2+2} - \sqrt{(2x-1)^2}\right)\left(\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}\right)}{\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}}$$
$$= \frac{(2x-1)^2 + 2 - (2x-1)^2}{\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}}$$

و بالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0 \quad \& \quad \lim_{h\to-\infty} h(x) = 0$$

4- نستنتج ما يلي :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - |2x-1|) = 0$$

و بما أن $x \to +\infty$ فإن

$|2x-1| = 2x-1$ إذن :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (2x-1)\right) = 0$$

و بالتالي $d_1: y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

أما عندما $x \to -\infty$ فإن:

$|2x-1| = -2x+1$ و بالتالي

$$\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - (-2x+1)\right) = 0$$

مما يعني أن المستقيم $d_2: y = -2x + 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

إضافي: لدراسة الوضع النسبي :

$$f(x) - y_{d_1,d_2} = \frac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2} + \sqrt{(2x-1)^2}} > 0$$

و بالتالي C فوق مقاربيه.

- **الحالة العامة:**

في حال لم تتحقق أي حالة من الحالات الخاصة السابقة فإننا لايجاد معادلة المقارب المائل نتبع الخطوات التالية:

1- نثبت ان $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ او $lim_{x\to+\infty} = -\infty$

2- نفرض معادلة المقارب المائل $\Delta: y = ax + b$

3- نحسب a من القانون $a = lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

4- نحسب b من القانون $b = lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$

نثبت ان $\Delta: y = ax + b$ مقارب مائل وبشكل مماثل عند $-\infty$

مثال

ليكن f التابع المعرف على R بالشكل:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

اوجد معادلة المقارب المائل عند $+\infty$

الحل

$$lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

نفرض $\Delta: y = ax + b$

$$a = lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$= lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}$$

$$= lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}{x}$$

$$lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}$$

$|x| = x$ لان $x > 0$ حيث $x \to +\infty$

$$a = lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}} = 1$$

$$b = lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$$

$$lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4} - x\right)$$

نضرب بالمرافق:

$$= lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+4-x^2}{\sqrt{x^2+2x+4}+x}$$

$$= lim_{x\to+\infty} \frac{2x+4}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+x}$$

$$= lim_{x\to+\infty} \frac{2x+4}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+x}$$

حيث $x > 0$

$$= lim_{x\to+\infty} \frac{x[2+\frac{4}{x}]}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right]} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \Delta: y = x + 1$$

السؤال (1)

أوجد معادلة المقارب المائل للخط c_f بجوار $+\infty$

إذا علمت أن: $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$

ثم ادرس النسبي للخط البياني مع مقاربة

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال (2)

فيما يلي C الخط البياني للتابع f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه D_f. بين في كل حالة إن كان ثمة مستقيمات مقاربة (أفقية أو شاقولية أو مائلة) للخط C

-1 $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$

-2 $f(x)=-x+3+\frac{2}{x^2+1}$

-3 $f(x)=1-\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$

-4 $f(x)=1-x+\frac{3x}{x^2+2}$

-5 $f(x)=\frac{x^2+2+sinx}{x}$

-6 $f(x)=\frac{2x^2+5x-4}{x}$

-7 $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$

-8 $f(x)=\frac{x^2+6x+1}{x^2-1}$

-9 $f(x)=\frac{3x^3+2x-1}{x^2+1}$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال (3)

ليكن f التابع المعرف وفق

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$$

-1 احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

-2 احسب

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)$$

3- استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C للتابع f في جوار $+\infty$

4- ادرس وضع المقارب Δ مع الخط C

5- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

6- أثبت وجود عددين حقيقين a, b يحققان أن :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$
$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = b$$

7- استنتج معادلة مقارب مائل Δ' في جوار $-\infty$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال (4)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- A) اكتب ثلاثي الحدود $x^2 + 4x + 5$ بالصيغة القانونية

B) استنتج وجود مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$. اكتب معادلته و ادرس وضعه النسبي مع C

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تابع القيمة المطلقة

هو تابع معرف على R بالشكل:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

مثال

$$|3| = 3$$

$$|-5| = -(-5) = +5$$

$$|-3| = -(-3) = 3$$

$$\left| \overbrace{1}^{\text{صغير}} - \overbrace{\underbrace{\sqrt{2}}_{\approx 1.4}}^{\text{كبير}} \right| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2}$$

$$\left| 5 - 2\underbrace{\sqrt{3}}_{\approx 1.7} \right| = 5 - 2\sqrt{3}$$

كيف نتخلص من القيمة المطلقة؟

بفرض لدين المقدار $|u(x)|$ و أردنا التخلص من القيمة المطلقة فإننا **نقوم بالخطوات التالية:**

① نعدم المضمون $u(x) = 0$

② ننظم جدول

x		الحل	
$u(x)$	$-$	0	$+$
$\|u(x)\|$	$-u(x)$		$u(x)$

مثال (1)

اكتب بعبارة مستقلة عن القيمة المطلقة المقدار $|6x - 3|$:

نعدم المضمون :

$$6x - 3 = 0$$

$$6x = 3$$

$$x = \frac{3}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ننظم جدول إشارة

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$6x - 3$	$-$	0	$+$
$\|6x - 3\|$	$-6x + 3$		$6x - 3$

و بالتالي نكتب :

$$|6x - 3| = \begin{cases} 6x - 3 & ; x \in [\frac{1}{2}, \infty[\\ -6x + 3 & ; x \in]-\infty, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

مثال (2)

اكتب المقدار $|4x^2 - 1|$ بعبارة لا تحوي قيمة مطلقة

نعدم المضمون:

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

نجذر

$$x = \frac{1}{2} \ , x = -\frac{1}{2}$$

x		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	
$4x^2-1$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\lvert 4x^2-1\rvert$	$4x^2-1$		$-4x^2+1$		$4x^2-1$

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-1 & ;\ x\in]-\infty,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},+\infty[\\ -4x^2+1 & ;x\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\end{cases}$$

المعادلات التي تحوي قيمة مطلقة

- $|u(x)|=k$ (عدد سالب) مستحيلة الحل

مثال

$$|x-3|=-2$$

معادلة مستحيلة الحل

- $|u(x)|=0$

$$\Rightarrow u(x)=0$$

مثال

$$|x-3|=0$$

$$x-3=0\Rightarrow x=3$$

- $|u(x)|=k$ (عدد موجب)

مثال

$$|2x-4|=2$$

$$2x-4=2$$

$$2x=6$$

$$x=3$$

- **الطرف الثاني مقدار يحوي x اي :**

$$|u(x)|=v(x)$$

❶ نضع الشرط $E: v(x)\geq 0$

❷ $u(x)=v(x)$

أو $u(x)=-v(x)$

❸ تقبل الحلول الموجودة في E

مثال

حل المعادلة:

$$|4x-2|=-2x$$

① بشرط

$$-2x>0\Rightarrow x<\frac{0}{-2}$$

إما

$$4x-2=-2x$$

$$4x+2x=2$$

$$6x=2$$

$$x=\frac{1}{3}\Rightarrow E \text{ مرفوض حسب}$$

أو:

$$4x-2=-(-2x)$$

$$4x-2=+2x$$

$$4x-2x=2$$

$$2x=2$$

إما	أو
$u(x)=k$	$u(x)=-k$

$x=1$ مرفوض

⇐ هنا لا يوجد حلول.

المسألة (1)

ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$$

① احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

② a. احسب $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3x)$

b. احسب $\lim_{x\to-\infty} (f(x) + x)$

③ استنتج أن للخط البياني للتابع f مقاربين مائلين عند $+\infty$ و $-\infty$ وادرس الوضع النسبي لهما .

ملاحظة: لدراسة نهاية ومشتق تابع يحوي قيمة مطلقة يفضل التخلص من القيمة المطلقة أولاً

الحل

$$4x^2 - 1 = 0$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{أو} \quad x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert 4x^2 - 1\rvert$	$4x^2 - 1$		$-4x^2 + 1$		$4x^2 - 1$		

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{4x^2 - 1}\,; x \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[\\ x + \sqrt{-4x^2 + 1}\,; x \in]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}[\end{cases}$$

① في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$$
$$\lim_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt{4x^2 - 1}\right) = +\infty$$

في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$$
$$\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{4x^2 - 1}\right) : -\infty + \infty$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(x^2 \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(x + |x| \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(x - x \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x \left(1 - \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}\right) = -\infty(-1) = +\infty$$

② a.

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt{4x^2 - 1} - 3x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 1} - 2x\right) :$$
$$+\infty - \infty$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 - 1} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2 - 1} + 2x\right)}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} = 0$$

b.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{4x^2-1}+x\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right):$$
$$+\infty-\infty$$

نضرب بالمرافق لنصل إلى

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}-2x}\right)=0$$

③ بما أن

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=0$$

فلو وضعنا

$$\Delta_1: y=3x$$

فإن

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_{\Delta1})=0$$

إذن Δ_1 مقارب مائل في جوار $+\infty$

كما وجدنا :

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x))=0$$

نضع $\Delta_2: y=-x$

نلاحظ أنه مقارب مائل في جوار $-\infty$

المعادلة الجذرية

① سالب $\sqrt{u(x)}=k$

مستحيلة

② $\sqrt{u(x)}=0$

$u(x)=0 \leftarrow$

③موجب $\sqrt{u(x)}=k$

نربع

④ $\sqrt{u(x)}=v(x)$

- نضع شرط $E: v(x)>0$
- نربع
- نقبل ونرفض

والآن نعود للمثال:

③ الوضع النسبي ل Δ_1 :

❶ نشكل الفرق

$$f(x)-y_{\Delta1}=f(x)-3x$$
$$=x+\sqrt{|4x^2-1|}-3x$$
$$=\sqrt{|4x^2-1|}-2x$$

❷ نعدم

$$\sqrt{|4x^2-1|}-2x=0$$
$$\sqrt{|4x^2-1|}=2x$$

نضع الشرط $2x>0$

$$E: x>0$$
$$|4x^2-1|=4x^2$$

إما :

$$4x^2-1=4x^2$$
$$-1=0$$

أو:

$$4x^2-1=-4x^2$$
$$8x^2=1$$

$$x^2 = \frac{1}{8}$$

$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ مقبول ، $x = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$ مرفوض

x	$-\infty$		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$+\infty$
$\sqrt{\lvert 4x^2-1\rvert} - 2x$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	C فوق Δ			C تحت Δ	

دراسة الوضع النسبي لـ Δ_2 :

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

المسألة (2)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق :

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$$

①أثبت أن المستقيم $d_1 : y = x + 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لهما

$$x + \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - (x+1)$$

$$f(x) - y_{d_1} =$$

$$x + \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - x - 1$$

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - 1$$

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{x - \sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}} : +\infty - \infty$$

بالمرافق

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{(x - \sqrt{9+x^2})(x + \sqrt{9+x^2})}{(\sqrt{9+x^2})(x + \sqrt{9+x^2})}$$

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{x^2 - (9+x^2)}{(\sqrt{9+x^2})(x + \sqrt{9+x^2})}$$

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{x^2 - 9 - x^2}{(\sqrt{9+x^2})(x + \sqrt{9+x^2})}$$

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{-9}{(\sqrt{9+x^2})(x + \sqrt{9+x^2})}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_{d_1}) = \frac{-9}{+\infty} = 0$$

الوضع النسبي :

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{\overbrace{-9}^{\text{سالب}}}{\underbrace{(\sqrt{9+x^2})}_{\text{موجب}} \underbrace{(x + \sqrt{9+x^2})}_{\text{موجب}}} < 0$$

C تحت d_1

②أثبت أن المستقيم $d_2 : y = x - 1$ مقارب في جوار $-\infty$ و ادرس الوضع النسبي لهما

$$f(x) - y_{d_2} = x + \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - x + 1$$

$$f(x) - y_{d_2} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + 1 = \frac{x + \sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$: -\infty + \infty$$

بالمرافق

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{x^2 - (9+x^2)}{(\sqrt{9+x^2})(x - \sqrt{9+x^2})}$$

$$f(x) - y_{d_1} = \frac{\overbrace{-9}^{\text{سالب}}}{\underbrace{(\sqrt{9+x^2})}_{\text{موجب}}\underbrace{(x+\sqrt{9+x^2})}_{\text{سالب}}} \geq 0$$

C فوق d_2

المسألة (3)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق :

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

① احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و ما هو التأويل الهندسي

②أثبت أن المستقيم $\Delta: y = 2x$ مقارب مائل و ادرس الوضع النسبي لهما

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

رسالة من أستاذك:

كل يوم يخاطبك فيقول

أنا يوم جديد على عملك شهيد فاغتنمني ..فوالله لن أعود إلى يوم يبعثون

بنوك الأسئلة

1- هل المستقيم $y = 2x + 7$ مقارب مائل للخط البياني $f(x) = 2x + 7 + \frac{2}{x-1}$ عند $+\infty$:

a	نعم	b	لا

2- هل المستقيم $y = x + 7$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = \frac{x^2+3x+6}{x+2}$؟

a	نعم	b	لا

3- هل المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = x + 1 + \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$؟

a	نعم	b	لا

4- هل المستقيم الذي معادلته $y = 2x + 3$ مقارب مائل للتابع f عند $+\infty$ بحيث $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$؟

a	نعم	b	لا

5- هل المستقيم $y = -x$ مقارب مائل للخط C للتابع $f(x) = -x + \frac{3x+\cos x}{x^2}$ عند $+\infty$؟

a	نعم	b	لا

6- هل المستقيم الذي معادلته $y = -2x + 1$ مقارب مائل للتابع $f(x) = \frac{-2x^2+x+2\cos(\sqrt{x})-2}{x}$ عند $+\infty$؟

a	نعم	b	لا

7- ليكن لدينا التابع المعرف على المجال $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ وفق: $f(x) = 3x - 1 + \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-1}$, إن معادلة المقارب المائل للخط البياني f هي:

a	$y = 3x - 1$	b	$y = x + 1$	c	$y = -x + 1$	d	غير ذلك

8- إن وضع المقارب مع الخط البياني للتابع على المجال $]-1,1[$ هو:

a	C يسار مقاربه	b	C تحت مقاربه	c	C يمين مقاربه	d	C فوق مقاربه

9- ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{2x^2-5x+4}{x-2}$ المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ فإن معادلة المقارب المائل للخط البياني عند $-\infty$ هي:

a	$y = 2x - 1$	b	$y = -x + 3$	c	$y = x - 3$	d	$y = -2x + 1$

10- إن الوضع النسبي للخط البياني مع مقاربه المائل على المجال $]-\infty,2[$:

a	C يسار مقاربه	b	C فوق مقاربه	c	C يمين مقاربه	d	C تحت مقاربه

11- إن الوضع النسبي للخط البياني مع مقاربه المائل على المجال $]-\infty, 2[$:

a	C يسار مقاربه	b	C فوق مقاربه	c	C يمين مقاربه	d	C تحت مقاربه

12- ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 3}$, إن معادلة المقارب المائل للخط البياني عند $+\infty$ هي:

a	$y = 3x - 1$	b	$y = x + 1$	c	$y = -3x + 1$	d	غير ذلك

13- إن الوضع النسبي للخط البياني مع مقاربه على $\mathbb{R}$:

a	C يسار مقاربه	b	C فوق مقاربه	c	C يمين مقاربه	d	C تحت مقاربه

14- ليكن التابع $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$ وبفرض $b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax$, $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ إن قيمة a:

a	0	b	$\sqrt{2}$	c	$-\infty$	d	غير ذلك

15- إن قيمة b:

a	0	b	$+\infty$	c	1	d	$\sqrt{5}$

16- إن معادلة المقارب المائل للخط البياني C عند $+\infty$:

a	$y = \sqrt{2}x$	b	$y = x$	c	$y = 2x + 1$	d	غير ذلك

17- إذا علمت أن $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ فإن معادلة المقارب المائل للخط c_f

a	$y = -\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}$	b	$y = \sqrt{2}x$	c	$y = -\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$	d	$y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$

A	9	A	1
B	10	B	2
D	11	A	3
A	12	A	4
B	13	A	5
B	14	A	6
A	15	A	7
A	16	D	8
D		17	

7

الملف الأخير

أسئلة الوحدة

السؤال الأول

ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند اطراف مجموعة تعريفه, وعند اللزوم ادرس النهاية من اليمين ومن اليسار.

1	$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$	2	$f(x)=2-\frac{4}{x^2}$
3	$f(x)=x^2+3x-\frac{1}{x+3}$	4	$f(x)=x+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x+2}$
5	$f(x)=(2x-3)(5-\sqrt{x})$	6	$f(x)=\cos x+\frac{1}{x}$
7	$f(x)=2x+\sin x$	8	$f(x)=x^2+2x-\frac{1}{x}$
9	$f(x)=x-2\sqrt{x}+3$	10	$f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثاني

أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ عند 1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$, ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثالث

أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{-2x}{x+1}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وعند -1. ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الرابع

f هو التابع المعرف على المجال $]1, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{2x+\sin(x)}{x-1}$.

1- أثبت أن $\frac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x-1}$ أيا كان $x > 1$.

2- استنتج نهاية التابع f عند $+\infty$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال السادس (تغيير المتحول)

نتأمل التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$. ادرس نهاية f عند الصفر.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال السابع (التابع $\sqrt{ax^2 + bx + c}$)

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$. وليكن C خطه البياني.

المطلوب هو إثبات أن الخط C يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$, وكذلك الأمر في جوار $-\infty$.

.....

.....

.....

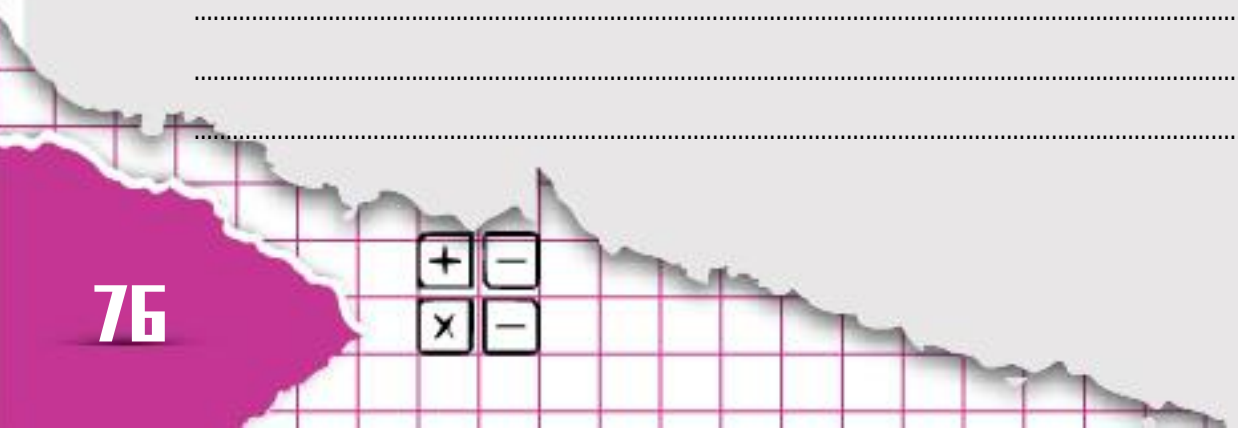
.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

السؤال الثامن (كثيرات الحدود ذي الدرجة الثانية)

من المعلوم أن كثير الحدود P من الدرجة n يكتب بالصيغة

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \text{ حيث } a_n \neq 0$$

نهدف إلى إثبات أنه إذا كان n عدداً فردياً, قَبِلَ P جذراً حقيقياً على الأقل.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال التاسع

ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a, وادرس عند الضرورة النهاية من اليمين ومن اليسار.

1	$f(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+5}\ ; a = -\infty, 1{,}5, +\infty$	2	$f(x) = \frac{x^2-4x-12}{x^2-4}\ ; a = -\infty, -2{,}2, +\infty$
3	$f(x) = \frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}\ ; a = -\infty, -2{,}1, +\infty$	4	$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-9}\ ; a = -\infty, -3{,}3, +\infty$
5	$f(x) = \frac{x^4-1}{x^3-1}\ ; a = -\infty, 1, +\infty$	6	$f(x) = 2x + \sin^2 x\ ; a = -\infty, +\infty$
7	$f(x) = x^3(2+\cos x)\ ; a = -\infty, +\infty$	8	$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}\ ; a = 1, +\infty$

.....

.....

.....

السؤال العاشر

ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(X) = \frac{1}{3+2\sin(x)}$.

1- أثبت أن g محدود.

2- استنتج كلاً من النهايتين $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+2\sin(x)}$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{3+2\sin(x)}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الحادي عشر

ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$.

1- عين D_f مجموعة تعريف التابع f.

2- أوجد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$, أياً تكن x من D_f.

3- ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف D_f.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثاني عشر

ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$.

1- ادرس نهاية f في جوار 1.

2- أوجد مجالاً I مركزه 1 ويحقق $f(x) > 10^6$, أياً تكن x من $I\backslash\{1\}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثالث عشر

ادرس في كل حالة نهاية التابع f, عند a.

$f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x\,;a=+\infty$	1	$f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x\ ;a=-\infty$	2
$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\,;a=3$	3	$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}\ ;a=0$	4
$f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}\,;a=+\infty,1$	5	$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\,;a=-1,+\infty$	6

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الرابع عشر

ادرس في كل حالة نهاية التابع f.

1	$f(x)=\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\ ;a=0,+\infty$	2	$f(x)=\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\ ;a=0$
3	$f(x)=\frac{xsin(x)}{1-\cos(x)}\ ;a=0$	4	$f(x)=\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}\ ;a=2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الخامس عشر

ليكن g التابع المعرف على المجال $]3,+\infty[$ وفق $g(x)=\frac{3x-1}{x-3}$.

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} g\big(g(x)\big)$.

2- أعد حساب $\lim_{x\to+\infty} g\big(g(x)\big)$ بعد كتابة $g\big(g(x)\big)$ بدلالة x.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال السادس عشر

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$ jجد الأعداد الحقيقية a و b و c و d علماً أن الخواص الآتية محققة:

- المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = 3$ مقارب C.
- المستقيم المائل الذي معادلته $2x - 5$ مقارب للخط C عند $+\infty$ و $-\infty$.
- تنتمي النقطة $A(1,2)$ إلى الخط C.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال السابع عشر

فيما يأتي C هو الخط البياني للتابع f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه D_f. بين، في كل حالة , إن كان ثمة مستقيمات مقاربة (أفقية أو شاقولية أو مائلة) للخط C.

$f(x)=\frac{x+1}{x-3}$	1	$f(x)=-x+3+\frac{2}{x^2+1}$	2
$f(x)=1-\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$	3	$f(x)=1-x+\frac{3x}{x^2+2}$	4
$f(x)=\frac{2x^2+5x-4}{x}$	5	$f(x)=\frac{x^2+2+\sin(x)}{x}$	6
$f(x)=\frac{x^2+6x+1}{x^2-1}$	7	$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$	8
$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$	9	$f(x)=\frac{3x^3+2x-1}{x^2+1}$	10

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثامن عشر

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$.

1- a. احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - (x+1)\big)$.

b. استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

c. ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

2- a. احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b. أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ وأن نهاية $f(x) - ax$ عند $-\infty$ عدد حقيقي b.

c. استنتج وجود مقارب مائل Δ' للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال التاسع عشر

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$.

1- احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2- a. اكتب ثلاثي الحدود $x^2 + 4x + 5$ بالصيغة القانونية (متمماً إلى مربع كامل)

b. استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$. اكتب معادلته.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال العشرون

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

1- ادرس نهاية f عند $-\infty$, اشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة.

2- أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

3- ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الواحد والعشرون

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$.

1- ادرس نهاية التابع عند $+\infty$ و $-\infty$.

2- a. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3x)$.

b. احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x)$.

3- a. استنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ_1 و Δ_2 يطلب إيجاد معادلتيهما.

b. ادرس الوضع النسبي للخط C وكل من المقاربين Δ_1 و Δ_2.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثاني والعشرون

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$.

1- ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2- a. اكتب $4x^2 - 4x + 3$ بالشكل القانوني.

b. ادرس نهاية التابع h المعرف وفق $h(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

c. استنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلتيهما.

3- أثبت أن الخط C يقع فوق كل من هذين المقاربين.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثالث والعشرون

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

1- a. أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

b. ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

2- أصحيحٌ أن المستقيم Δ' الذي معادلته $y = x - 1$ نقارب للخط C في جوار $-\infty$؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثامن والعشرون

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & ;x\neq 0\\ 0 & ;x=0\end{cases}$$

1- احسب نهاية f عند الصفر.

2- هل f مستمر عند الصفر؟ هل هو مستمر على $\mathbb{R}$؟ علل إجابتك.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال التاسع والعشرون

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & ;x\neq 0\\ m & ;x=0\end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على $\mathbb{R}$؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثلاثون

يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x. ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق $f(x) = x - E(x)$.

1- ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$.

2- هل f مستمر على المجال $[0,2]$؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الواحد والثلاثون

يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x. ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$.

1- اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$).

2- أثبت أن f مستمر على المجال $[0,2]$؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

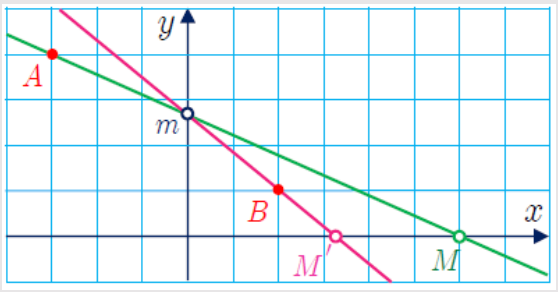
.....

.....

.....

السؤال الثامن والثلاثون

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ لدينا النقطتان الثابتتان $A(-3,4)$ و $B(2,1)$ والنقطة المتحولة $M(x,0)$. نقرن بكل نقطة M النقطة M' التي نعرفها كما يأتي:



- يقطع المستقيم (AM) المحور $(O;\vec{\imath})$ في M.
- يقطع المستقيم (BM) المحور $(O;\vec{\imath})$ في M'.

نرمز إلى فاصلة M' بالرمز $f(x)$.

1- بدون حساب, خمن نهاية f عند $+\infty$.

2- أثبت $f(x)=\frac{8x}{3x-3}$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3, ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$.

3- a. ادرس نهاية f عند $-\infty$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

b. ادرس نهاية f عند $x=1$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

4- عندما $x=-3$, يكون المستقيم (AM) موازياً $(O,\vec{\jmath})$ وتكون m << في اللانهاية >> . يمكن أن نقول في هذه الحالة أن (BM) يوازي $(O,\vec{\jmath})$ وأن m' تقع في $(2,0)$. نعرف عندئذ التابع g وفق $g(x)=f(x)$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3, $g(-3)=2$. لماذا يكون g مستمراً عند -3؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....