السؤال الأول

$$f(x)=\sqrt{4x^2+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

لحساب النهاية:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{4x^2+5}}{x}=\frac{\sqrt{x^2+\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\frac{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x}$$

في جوار $+\infty$ إن $|x|=x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$

لحساب النهاية:

$$f(x)-2x=\sqrt{4x^2+5}-2x$$

$$=\frac{(\sqrt{4x^2+5}-2x)(\sqrt{4x^2+5}+2x)}{\sqrt{4x^2+5}+2x}$$

$$=\frac{4x^2+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+5}+2x}=\frac{5}{\sqrt{4x^2+5}+2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=0$$

وبفرض:

$$y_\Delta=ax+b$$

تكون:

$$y=2x$$

ويكون:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=0$$

السؤال الثاني

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1- النهايات:

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=x+\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

2- نشكل الفرق:

$$f(x)-y_d=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$$

$$=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\frac{x^2-x^2-1}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_d=0$$

إذن d مقارب مائل في جوار $+\infty$.

3- نلاحظ من الطلب السابق أن:

$$f(x)-y_d<0$$

C تحت d.

4- الشرط الأول:

$$x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$$

الشرط الثاني:

$$f(-x)=-x-\frac{x}{\sqrt{(-x)^2+1}}$$

$$=-\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=-f(x)$$

السؤال الثالث

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

1- بالقسمة الإقليدية للتابع نجد:

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x+3}$$

بالمقارنة نجد:

$$a=1\ ,b=-1\ ,c=1$$

2- بفرض $y_d=x-1$:

$$f(x)-y_d=\frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

إذن d مقارب مائل في جوار $\pm\infty$.

الوضع النسبي:

عندما $x < -3$ يكون C تحت d.

عندما $x > -3$ يكون C فوق d.

السؤال الرابع

لحساب النهاية:

$$x(lnx)^2 = \left(\sqrt{x}lnx\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2 = \left(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\left(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2 = 0$$

السؤال الخامس

$$f(x) = \frac{3}{2+\cos x}$$

1- لدينا:

$$-1 \le \cos x \le 1$$

نضيف 2:

$$1 \le 2 + cosx \le 3$$

نقلب:

$$1 \ge \frac{1}{2+cosx} \ge \frac{1}{3}$$

نضرب بـ 3:

$$3 \ge \frac{3}{2+cosx} \ge 1$$

$$3 \ge f(x) \ge 1$$

2- نضرب المتراجحة السابقة بـ $x^2 > 0$:

$$3x^2 \ge \frac{3x^2}{2+cosx} \ge x^2$$

بما أن:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

فحسب مبرهنة الإحاطة الثالثة:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = +\infty$$

السؤال السادس

$$f(x) = \frac{2+\ln x}{1+\ln x}$$

1- النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(\frac{2}{\ln x}+1\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)} = 1$$

لدينا:

$$\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$$r = \frac{1.1-0.9}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

نعوض في القانون:

$$|f(x) - l| < r$$

$$\left|\frac{2+lnx}{1+lnx} - 1\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{2+lnx-1-lnx}{1+lnx}\right| < 10$$

$$\left|\frac{1}{1+lnx}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{1+lnx} < \frac{1}{10}$$

نقلب:

$$1 + lnx > 10$$

$$lnx > 9$$

$$x > e^9$$

2- النهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{X\to 1} f(X) = 2$$

السؤال السابع

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xsinx}{\sqrt{x^2+1}-1} & ; x \ne 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$$

شرط الاستمرار عند الصفر:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = m$$

نوجد النهاية:

$$f(x) = \frac{xsinx}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$= \frac{xsinx\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \frac{xsinx\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}$$

$$= \frac{xsinx\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2}$$

$$= \frac{sinx}{x}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1(2) = 2$$

بالتعويض في قانون الاستمرار نجد:

$$m = 2$$

السؤال الثامن

نعرف تابعاً:

$$f(x) = \ln(1+sinx)$$

$$f(0) = 0$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{cosx}{1+sinx}$$

$$f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

حسب تعرف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+sinx)}{x}$$

$$= f'(0) = 1$$

السؤال التاسع

$$f(x) = \frac{2x^2-7x-3}{x-3}$$

1- لدينا:

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{2x^2-7x-3}{x-3}}{x} = \frac{2x^2-7x-3}{x^2-3x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x$$

$$f(x) - 2x = \frac{2x^2-7x-3}{x-3} - 2x$$

$$= \frac{2x^2-7x-3-2x^2+6x}{x-3} = \frac{-x-3}{x-3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = -1$$

2- بفرض:

$$y = ax + b = 2x - 1$$

نشكل الفرق:

$$f(x) - y = \frac{2x^2-7x-3}{x-3} - (2x-1)$$

$$= \frac{2x^2-7x-3-(2x^2-7x+3)}{x-3}$$

$$= \frac{2x^2-7x-3-2x^2+7x-3}{x-3}$$

$$= \frac{-6}{x-3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$$

إذن هو مقارب مائل في جوار $+\infty$.

الوضع النسبي:

نلاحظ أن عندما $x > 3$ يكون C تحت المقارب.

وعندما $x < 3$ يكون C فوق المقارب.

السؤال العاشر

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

1- النهاية:

$$\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$$

2- لدينا:

$$f(x) > 10^2$$

$$\frac{x+2}{(x+1)^2} > 10^2$$

عندما $x \to -1$ يكون البسط ≈ 1:

$$\frac{1}{(x+1)^2} > 10^2$$

نقلب:

$$(x+1)^2 < 10^{-2}$$

نجذر:

$$|x+1| < 0.1$$

وهذا يكافئ:

$$x \in]-1-0.1\,,-1+\ 0.1[$$

$$x \in]-1.1\,,-0.9[$$

$$I =]-1.1\,,-0.9[$$

السؤال الحادي عشر

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{cosx - 1}{x^2} + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$= -2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$= -2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2} = 0$$

السؤال الثاني عشر

$$\boldsymbol{f(x) = 2e^{-x} + x - 2}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = x^{-1}\left(\frac{2e^{-x}}{x^{-1}} + \frac{x}{x^{-1}} - \frac{2}{x^{-1}}\right)$$

$$= x^{-1}\left(2xe^{-x} + x^2 + \frac{2}{x^{-1}}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty(0 + \infty + 0) = +\infty$$

2- نشكل الفرق:

$$f(x) - y_d = 2e^{-x} = \frac{2}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_d = 0$$

إذن d مقارب مائل في جوار $+\infty$.

3- الوضع النسبي:

نلاحظ أن $f(x) - y_d > 0$ وبالتالي C فوق d.

السؤال الثالث عشر

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}}$$

عند $-\infty$ تكون $|x| = -x$:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

السؤال الرابع عشر

$$\boldsymbol{g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

1- لدينا:

$$g(x) = x^2\left(\frac{\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = x\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty(1) = +\infty$$

2- لدينا:

$$f(x) = \frac{g(x)}{x} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

لدينا:

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

نضرب بـ $x > 0$ في جوار 0^+.

$$-x \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x$$

$$\lim_{x\to 0^+} -x = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

ولدينا:

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

نضرب بـ $x < 0$ عند 0^-:

$$-x \ge x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ge x$$

$$\lim_{x\to 0^-} -x = \lim_{x\to 0^-} x = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

بما أن:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

فإن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

السؤال الخامس عشر

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$D_f =]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$$

$$f(x) = \frac{1 + lnx}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

السؤال السادس عشر

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

$$\frac{(x+1)^2}{e^x} = \frac{x^2+2x+1}{e^x}$$

$$= \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{e^x} = \frac{x^2}{e^x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right) = 0$$

السؤال السابع عشر

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(1+\ln x)$$

$$e^{-x}(1+lnx) = xe^{-x}\left(\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x}\right)$$

$$= \frac{x}{e^x}\left(\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\left(\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x}\right)\right) = 0$$

حلول أسئلة دورات - الاشتقاق

السؤال الأول

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

1- لدينا:

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - 1(2x-3)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x-2-2x+3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2}$$

2- لدينا:

$$g(x) = f\left(\sqrt{x}\right)$$

لدينا التابع $x \mapsto \sqrt{x}$ معرف على $[0,+\infty[$ واشتقاقي على $]0,+\infty[$ وبالتالي التابع g اشتقاقي على $J =]1+\infty[$ ويكون المشتق:

$$g'(x) = f'\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(x-1)^2\sqrt{x}}$$

السؤال الثاني

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$$

$$f(-1) = 0$$

$$f'(-1) = 0$$

لدينا:

$$f(-1) = \frac{a-b+1}{-2}$$

$$0 = a-b+1$$

$$a-b = -1$$

ولدينا:

$$f'(-1) = 0$$

$$f'(x)$$

$$= \frac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{(-2a+b)(-2)-a+b-1}{4}$$

$$0 = \frac{-4a-2b-a+b-1}{4}$$

$$-5a-b = 1$$

$$a-b = -1$$

بالطرح نجد:

$$-6a = 2$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

فتكون b:

$$-\frac{1}{3} - b = -1$$

$$b = \frac{2}{3}$$

السؤال الثالث

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases}$$

1- ليكون اشتقاقي:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x sin\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \text{إحاطة}$$

لدينا:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

نضرب بـ $x > 0$ عند 0^+:

$$-x \leq x sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$\lim_{x\to 0^+} x = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

حسب الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

وعند 0^- نضرب بـ $x < 0$:

x	3	$+\infty$
$f'(x)$	0	$- - - - - - - - - - - - - - -$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-\infty$

$$-x \geq x sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$$

$$\lim_{x\to 0^-} x = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

فالتابع اشتقاقي عند $a = 0$.

2- لدينا:

$$f'(x) = 2x sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

3- لدينا:

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} x \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

السؤال الرابع

$$\boldsymbol{f(x) = x - \sin x}$$

التابع معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} > 0$$

المشتق موجب فالتابع متزايد.

السؤال الخامس

$$\boldsymbol{f(x) = x - 4 + \sqrt{x - 2}} \ ; \ ]\boldsymbol{2}, +\infty[$$

1- نوجد النهايات:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 - 4 + 0 = -2$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

التابع اشتقاقي على $]\boldsymbol{2}, +\infty[$.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x-2} + 1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2\sqrt{x-2} + 1}{2\sqrt{x-2}} = 0$$

$$2\sqrt{x-2} + 1 = 0$$

$$2\sqrt{x-2} = -1$$

$$\sqrt{x-2} = -\frac{1}{2}$$

مستحيلة.

x	3	$+\infty$
$f'(x)$	0	$- - - - - - - - - - - - - - -$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-\infty$

نجد من جدول التغيرات السابق أن للمعادلة $\boldsymbol{f(x) = 0}$ حلاً وحيداً.

2- نعوض في قانون معادلة المماس:

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$

$$= \frac{7}{2}(x - 3) + 0$$

$$= \frac{7}{2}x - \frac{21}{2}$$

السؤال السادس

$$f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x} \; ; x \in]0, +\infty[$$

1- لدينا:

$$f(1) = 0 \, , f'(1) = 3$$

$$f(1) = a + b$$

$$a + b = 0$$

وأيضاً:

$$f'(x) = a - \frac{\frac{1}{x}x - lnx}{x}$$

$$= \frac{ax - lnx - 1}{x}$$

$$f'(1) = a - 1$$

$$a - 1 = 3$$

$$a = 4$$

نعوض:

$$4 + b = 0$$

$$b = -4$$

2- لدينا:

$$f(x) - y_d = -\frac{lnx}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_d = 0$$

بالتالي المستقيم d مقارب مائل.

لدينا:

$$f(x) - y_d = -\frac{lnx}{x}$$

$$f(x) - y_d = 0$$

$$lnx = 0$$

$$x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$-\frac{lnx}{x}$	$+++++$	0	$------$
الوضع	Δ فوق C		Δ تحت C

السؤال السابع

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \; ; D_f = \mathbb{R}$$

1- النهايات:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = -\infty$$

2- لدينا:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$= \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{x^2 - x^2 - 1}{\sqrt{x^2+1}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

إذن Δ مقارب مائل للتابع.

3- نلاحظ أن:

$$f(x) - y_\Delta < 0$$

Δ تحت C

السؤال الثامن

$$g(x) = \frac{x^2 + bx + a}{x - 1}$$

أولاً:

$$f(0) = 2$$

$$f'(0) = 0$$

$$f(0) = \frac{a}{-1}$$

$$\frac{a}{-1} = 2$$

$$a = -2$$

ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(2x+b)(x-1) - (x^2+bx+a)}{(x-1)^2}$$

$$f'(0)=\frac{-b-a}{1}$$

$$0=-b-a$$

$$b=2$$

ثانياً:

$$f(x)=x+3+\frac{1}{x-1}$$

1- لدينا:

$$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=0$$

إذن Δ مقارب مائل في جوار $\pm\infty$.

2- لدينا:

$$D_f=]-\infty.1[\cup]1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=4+\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=4+\frac{1}{0^-}=-\infty$$

3- f اشتقاقي على $]-\infty.1[\cup]1,+\infty[$:

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+1-1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

نعدم:

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

إما:

$$x=0$$

أو:

$$x-2=0$$

$$x=2$$

$$f(0)=2\,,f(2)=6$$

الجدول:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$			0		‖		0		
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	6	↗	$+\infty$

4- لدينا:

التابع معرف ومستمر ومتزايد على المجال $]-3,-2[$ و:

$$0\in f(]-3,-2[)=]f(-3),f(-2)[$$

$$=]-\frac{1}{4},\frac{2}{3}[$$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً على المجال $]-2,-3[$.

حلول بنك المتتاليات

المسألة الأولى

$$x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+2\quad,\quad x_0=4$$

1- لحساب الحدود:

$$x_1=\frac{3}{4}(4)+2=5$$

$$x_2=\frac{3}{4}(5)+2=\frac{15+8}{4}=\frac{23}{4}$$

2- لدينا:

$$y_n=x_n-8$$

أ) **نوجد y_{n+1}:**

$$y_{n+1}=x_{n+1}-8$$

$$=\frac{3}{4}x_n+2-8=\frac{3}{4}x_n-6$$

نشكل النسبة:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{\frac{3}{4}x_n-6}{x_n-8}=\frac{\frac{3}{4}(x_n-8)}{x_n-8}$$

$$=\frac{3}{4}=q$$

هندسية وأساسها $\frac{3}{4}$.

ب) **لإيجاد حدها العام:**

$$y_n=y_0.q^n$$

$$y_0=x_0-8=4-8=-4$$

$$\Rightarrow y_n=-4\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ت) لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n=0$$

لأن $-1<q<1$.

ولدينا:

$$y_n=x_n-8\Rightarrow x_n=y_n+8$$

$$=-4\left(\frac{3}{4}\right)^n+8$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 8$$

المسألة الثانية

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}\ ;\ u_0 = \frac{1}{2}$$

1- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ...... $0 < u_n < 1$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ...... $0 < u_{n+1} < 1$

البرهان: نعرف التابع f على المجال $]-\infty, 2[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x}{2-x}$$

f اشتقاقي على $]-\infty, 2[$:

$$f'(x) = \frac{2-x+x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$$

التابع متزايد, لدينا من الفرض:

$$0 < u_n < 1$$

نصور الأطراف في التابع f:

$$f(0) < f(u_n) < f(1)$$

$$0 < u_{n+1} < 1$$

القضية صحيحة.

2- المتتالية $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$:

أ) لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1$$

$$= \frac{1}{\frac{u_n}{2-u_n}} - 1 = \frac{2-u_n}{u_n} - 1$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2-u_n}{u_n} - 1}{\frac{1}{u_n} - 1} = \frac{\frac{2-u_n-u_n}{u_n}}{\frac{1-u_n}{u_n}}$$

$$= \frac{2(1-u_n)}{1-u_n} = 2 = q$$

هندسية وأساسها $q = 2$.

الحد العام:

$$v_n = v_0 . q^n = 1.2^n = 2^n$$

ب) لكتابة الحد العام لـ u_n:

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1$$

$$\frac{1}{u_n} = v_n + 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n + 1} = \frac{1}{2^n + 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

3- نهاية المتتالية v_n:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

لأن $q > 1$.

المسألة الثالثة

$$x_n = \frac{4n+5}{n+1}\quad ,\quad y_n = \frac{4n+1}{n+2}$$

ندرس اطراد كل من المتتاليتين:

دراسة اطراد x_n:

نعرف التابع:

$$f(x) = \frac{4x+5}{x+1}$$

f اشتقاقي على $[0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4x+4-4x-5}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

المتتالية متناقصة.

دراسة إطراد y_n:

نعرف التابع:

$$f(x) = \frac{4x+1}{x+2}$$

f اشتقاقي على $[0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4x+8-4x-1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$$

المتتالية متزايدة.

نشكل الفرق:

$$x_n - y_n = \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{(4n+5)(n+2) - (4n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{4n^2 + 8n + 5n + 10 - 4n^2 - 4n - n - 1}{n^2 + 3n + 2}$$

$$= \frac{8n+9}{n^2+3n+2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n - y_n = 0$$

المتتاليتان متجاورتان.

المسألة الرابعة

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \cdots + 15$$

نضرب بالعدد 3:

$$3S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 45$$

نلاحظ أنه مجموع متتالية حسابية أساسها $r = 1$ و $a = 1$ و $l = 45$ و $n = 45$:

$$3S = \frac{1+45}{2}(45)$$

$$3S = 23(45)$$

$$\Rightarrow S = 23(15) = 345$$

المسألة الخامسة

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots \frac{n}{e^n}$$

1- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$1 < 2$$

محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ...... $n \le 2^n$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ...... $n + 1 \le 2^{n+1}$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$n \le 2^n$$

نضرب بالعدد 2:

$$n \le 2n \le 2^{n+1}$$

$$n \le 2^n$$

فالقضية صحيحة.

2- لدينا من الطلب السابق:

$$n \le 2^n$$

نقسم على e^n:

$$\frac{n}{e^n} \le \frac{2^n}{e^n}$$

نبدأ بالتعويض في المتراجحة من $n = 1$ إلى n ثم نجمع المتراجحات:

$$u_n \le \frac{2}{e} + \frac{2^2}{e^2} + \cdots + \frac{2^n}{e^n}$$

نلاحظ أنها متتالية هندسية وأساسها $q = \frac{2}{e}$ وحدها الأول $\frac{2}{e}$:

$$S_q = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{2}{e}\frac{\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{e}}$$

$$= \frac{2}{e}\frac{\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}{\frac{e-2}{e}} = \frac{2}{e-2}\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)$$

نعوض:

$$u_n \le \frac{2}{e-2}\underbrace{\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)}_{\text{يهمل}} < \frac{2}{e-2}$$

وبالتالي $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية.

3- لدينا:

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots \frac{n}{e^n}}_{u_n} + \frac{n+1}{e^{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$$

متزايدة.

بما أنها محدودة من الأعلى ومتزايدة فهي متقاربة.

المسألة السادسة

$$f(x) = \frac{x^2+2}{2x}\ ; x \in]0, +\infty[$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x(2x) - 2x^2 - 4}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 2x^2 - 4}{4x^2} = \frac{2x^2 - 4}{4x^2}$$

نعدم:

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2$$

$x = +\sqrt{2}$ مقبول

$x = -\sqrt{2}$ مرفوض

$$f(\sqrt{2}) = \frac{2+2}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

الجدول:

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-----$	0	$+++++$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2- لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}\ ; u_0 = 2$$

أ) نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$\sqrt{2} \le \frac{3}{2} \le 2$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ... ... $\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ... ... $\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\sqrt{2} \le u_{n+1} \le u_n$$

نصور الأطراف في f:

$$\sqrt{2} \le u_{n+2} \le u_{n+1}$$

القضية صحيحة.

ب) من الطلب السابق أثبتنا أن:

$$u_{n+1} \le u_n$$

فهي متناقصة وبما أنها محدودة من الأدنى فهي متقاربة.

ت) لحساب نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

$$\frac{x^2+2}{2x} = x$$

$$x^2 + 2 = 2x^2$$

$$x^2 = 2$$

$x = \sqrt{2}$ مقبول

$x = -\sqrt{2}$ مرفوض

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$$