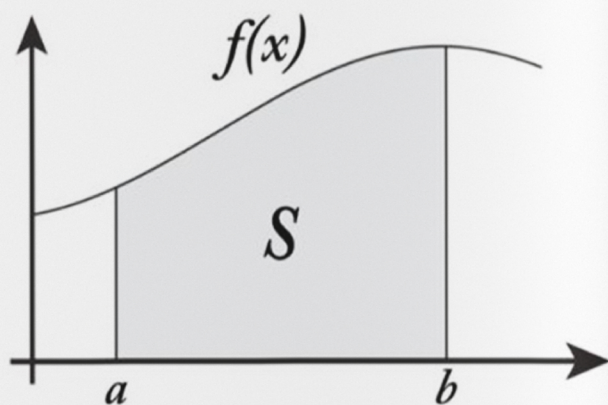


$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - m)^2}{n}}$$

كشف الرياضيات

المتتاليات



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5x + 2)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x - 3}{x - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + 1}{2x^2 - x - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} + 2x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$

المتاليات الشهيرة

هدية لقلبك.



كل دقيقة
تستثمرها في
الدراسة هي
استثمار في
مستقبلك.

تعريف المتتالية:

هي تابع مجموعة تعريفه مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو مجموعة جزئية منها من النمط $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$

نرمز للمتتالية بالرمز $(u_n)_{n \geq n_0}$ أو $(v_n)_{n \geq n_0}$ أو $(x_n)_{n \geq 0}$ أو $(y_n)_{n \geq 0}$ أو $(w_n)_{n \geq 0}$

مثال (1)

لنضع $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية الأعداد الزوجية التي تبدأ بالصفر.

$$u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6, \dots$$

مثال (2)

لنضع $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية الأعداد الفردية الموجبة.

$$v_0 = 1, v_1 = 3, v_2 = 5, \dots$$

طرائق التعريف عن المتتالية

• طريقة الحد العام: $u_n = f(n)$

في هذه الحالة تُعطى u_n بدلالة n

مثال (1)

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{2n}{n+1}$

مثال (2)

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بالشكل $u_n = 2^{n-1}$

مثال (3)

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة $u_0 = (-1)^n$

• التعريف بالتدريج:

$$u_0 = a \text{ و } u_{n+1} = f(u_n)$$

أي أن كل حد u_{n+1} ينتج عن سابقه u_n بتعويضه في صيغة التابع f (أي إذا أردنا حساب u_6 في العلاقة التدرجية نعوض u_5 في عبارة u_{n+1} و إذا أردنا u_1 نعوض u_0 وهكذا.....)

مثال (1)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالشكل :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

مثال (2)

لنأخذ المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$:

$$v_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

الحل

.....

.....

.....

.....

مثال (3)

لنأخذ المتتالية $(x_n)_{n \geq 0}$:

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

.....

.....

.....

.....

مثال (4)

لنأخذ المتتالية $(y_n)_{n \geq 0}$:

$$y_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالشكل

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + u_n} \end{cases}$$

احسب الحدود u_1, u_2, u_3

الحل

.....

.....

.....

.....

• متتالية المجاميع:

تكون المتتالية معطاة على شكل مجموع متته بدلالة n أي :

$$u_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

و هي تعني أنه مجموع الحدود a_i ابتداءً من i و حتى $1 a_n$

مثال (1)

لنتأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$:

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

الحل

.....

.....

.....

.....



مثال (1)

الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول 2
و أساسها 3 :

$$u_n = u_0 + r(n - 0)$$

$$u_n = 2 + 3n$$

مثال (2)

الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول 5
وأساسها -5 هو

$$u_n = u_0 + rn$$

$$u_n = 5 - 5n$$

مثال (3)

الحد العام لمتتالية الحسابية التي حدها الأول 1
وأساسها 1

$$u_n = u_0 + rn$$

$$u_n = 1 + n$$

• معيار الكشف عنها :

لإثبات أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ حسابية:

1- نحسب u_{n+1} بأن نبدل كل n بـ $(n+1)$ في
عبارة u_n

2- نشكل الفرق $u_{n+1} - u_n$

فإذا كان الناتج عدداً ثابتاً لا يحوي n تكون
حسابية أي :

$$u_{n+1} - u_n = \text{constant} = r$$

ويكون ناتج الطرح هو أساس المتتالية آنذاك.

المتتالية الحسابية

- **تعريفها:** هي متتالية كل حد فيها ينتج عن
سابقه بإضافة عدد ثابت r ندعوه أساس
المتتالية أي:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

مثلاً:

المتتالية 2,4,6,8,10 متتالية حسابية لأن كل
حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد ثابت $r = 2$ فهي
تعرف تدريجياً بالشكل :

$$u_{n+1} = u_n + 2, u_0 = 2$$

كذلك المتتالية ... -15, -10, -5, 0, 5

متتالية حسابية لأن كل حد فيها ينتج عن سابقه
إضافة عدد ثابت $r = -5$ وحدها الأول 5

$$u_{n+1} = u_n - 5, u_0 = 5$$

- **حدها العام:** يعطى الحد العام
للمتتالية الحسابية بالشكل

$$u_n - u_m = (n - m)r$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

- **علاقة الحدين :** إذا كانت $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية فإنه يوجد علاقة تربط بين أي حدين من هذه المتتالية تُعطى بالشكل :

$$u_n - u_m = (n - m)r$$

وتستخدم هذه العلاقة في الحالات التالية :

👉 معنا حدين من المتتالية و مطلوب حساب الأساس

👉 معنا حدّ من المتتالية و الأساس و المطلوب تعيين حد آخر

👉 معنا حدين من المتتالية و المطلوب تعيين حد آخر مختلف عنهما . (يجب إيجاد r أولاً)

👉 لتعيين الحد العام u_n بدلالة n و لكن u_0 غير معلوم.

مثال (1)

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_4 = 12$ و $u_2 = 4$ ' عين أساس هذه المتتالية

مثال (1)

أثبت أن المتتالية التي حدها العام

$$u_n = 3n - 4$$

حسابية وعين أساسها

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

أثبت أن المتتالية $u_n = \frac{1-n}{4}$ حسابية وعين أساسها

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (3)

أثبت أن المتتالية المعرفة تدريجياً بالشكل :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 12 \\ u_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

حسابية و عين أساسها



ملاحظة: لقد استخدمنا u_3 وقد كان بالإمكان

استخدام u_7 ونصف إلى نفس النتيجة: شاهد:

$$u_{10} = u_7 + (10 - 7)5$$

$$u_{10} = 30 + 15 = 45$$

مثال (4)

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ وفيها $u_4 = -11$

و $u_1 = -2$ احسب u_n بدلالة n (أو عين الحد

العام بدلالة n)

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

• مجموع حدود متتالية حسابية :

إذا كانت $(u_n)_{n \geq 0}$ حسابية و طلب حساب مجموع الحدود :

$$S = u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + \dots + u_j$$

فإنه يحسب من القانون :

$$S = \frac{a + l}{2} \times (\text{عدد الحدود})$$

حيث :

$a = u_i$ أول حد في المجموع

$l = u_j$ آخر حد في المجموع

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_3 = 7$ و

أساسها 2 ، احسب u_{100}

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (3)

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ حسابية فيها

$u_3 = 10$ و $u_7 = 30$ احسب u_{10}

الحل

.....

.....

.....

.....

.....



$$2S = \frac{1 + 20}{2} \times 20$$
$$2S = 210$$
$$\boxed{S = 105}$$
[illegible]

مثال (1)

احسب المجموع

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \dots + 30$$

الحل

المتتالية الهندسية

تعريفها: هي متتالية كل حد فيها ينتج عن سابقه بضربه بعدد ثابت q ندعوه أساس المتتالية أي:

$$u_{n+1} = q \cdot u_n$$

مثلاً: المتتالية 2,4,8,16,32 متتالية هندسية لأن كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد ثابت $q = 2$ فهي تعرف تدريجياً بالشكل :

$$u_{n+1} = 2u_n, u_0 = 2$$

كذلك المتتالية ... -625, -125, 5

متتالية هندسية لأن كل حد فيها ينتج عن سابقه بضربه عدد ثابت $r = -5$ وحدها الأول 5

$$u_{n+1} = -5u_n, u_0 = 5$$

حدها العام: يعطى الحد العام للمتتالية الحسابية بالشكل

مثال (2)

جد قيمة المجموع

$$S = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} + \frac{1}{2} + \dots + 1$$

الحل



$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{constant} = q$$

ويكون ناتج القسمة هو أساس المتتالية آنذاك.

مثال (1)

أثبت أن المتتالية التي حدها العام

$$u_n = 4 \times 3^n$$

هندسية و عين أساسها

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

أثبت أن المتتالية $u_n = \frac{1}{5^{n-1}}$ هندسية وعين أساسها

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\frac{u_n}{u_m} = q^{(n-m)}$$

مثال (1)

الحد العام للمتتالية الهندسية التي حدها الأول $u_0 = 2$ و أساسها 3 :

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

الحد العام للمتتالية التي حدها الأول $u_0 = 5$ و أساسها -5 هو

.....

.....

.....

.....

.....

معياري الكشف عنها : لإثبات أن المتتالية

$(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية :

1- نحسب u_{n+1} بأن نبدل كل n بـ $n+1$ في عبارة

u_n

2- نشكل النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ فإذا كان الناتج عدداً ثابتاً

لا يحوي n تكون هندسية أي:



تستخدم هذه العلاقة في الحالات التالية :

👉 معنا حدين من المتتالية و مطلوب حساب الأساس

👉 معنا حدّ من المتتالية و الأساس و المطلوب تعيين حد آخر

👉 معنا حدين من المتتالية و المطلوب تعيين حد آخر مختلف عنهما . (هنا يجب حساب q أولاً)

👉 لتعيين الحد العام u_n بدلالة n و لكن u_0 غير معلوم.

مثال (1)

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_4 = 16$ و $u_2 = 4$ ' عين أساس هذه المتتالية

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_3 = 27$ و أساسها 3, احسب u_5

الحل

.....

.....

.....

مثال (3)

أثبت أن المتتالية المعرفة تدريجياً بالشكل :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 12u_n \\ u_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

هندسية و عين أساسها

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (4)

أثبت أن المتتالية المعرفة وفق : $u_n = \frac{1}{2^n}$ هندسية

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

علاقة الحدين: إذا كانت $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية فإنه يوجد علاقة تربط بين أي حدين من هذه المتتالية تُعطى بالشكل :

$$\frac{u_n}{u_m} = q^{(n-m)}$$



• **مجموع حدود متتالية هندسية :**

إذا كانت $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية و طُلب حساب مجموع الحدود :

$$S = u_i + u_{i+1} + u_{i+2} + \dots + u_j$$

فإنه يحسب من القانون :

$$S = a \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

حيث:

$a = u_i$ أول حد في المجموع

عدد الحدود $= j - i + 1$

(آخر دليل ناقص أول دليل + 1)

مثال (1)

لتكن لدينا المتتالية $u_n = 2 \times 3^n$ و المطلوب :

1- أثبت أنها هندسية

2- احسب قيمة المجموع

$$S = u_2 + u_3 + \dots + u_{10}$$

3- احسب المجموع :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

الحل

مثال (3)

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية فيها

$$u_3 = 8 \text{ و } u_7 = 128 \text{ احسب } u_{10}$$

الحل

ملاحظة: لقد استخدمنا u_7 و قد كان بالإمكان استخدام u_3 و نصف إلى نفس النتيجة : شاهد:

$$u_{10} = u_3 + 2^{(10-3)}$$

$$u_{10} = 8 \times 2^7 = 1024$$

مثال (5)

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية و فيها

$$u_4 = 81$$

و $u_2 = 9$ احسب u_n بدلالة n (أو عين الحد العام

بدلالة n)

الحل



[illegible]

مثال (2)

بفرض $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها

$u_1 = 3$ و $q = 2$ فيها

1- اكتب u_n بدلالة n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
[illegible]

مجموع ممیز



إذا صادفنا مجموع من الشكل:

$$S = q + q^2 + \dots + q^n$$

• **فائدة هامة (مجموع مع قفزات) :**

أحياناً نواجه تمارين تطلب جمع حدود من متتالية ما ولكنها ليست متعاقبة (يوجد قفزات في الأدلة) مثلاً:

$v_2 + v_4 + v_6 + \dots + v_{2n}$ فهنا نلاحظ أن الأدلة ليست اعداد طبيعية متتالية و إنما هنالك قفزات كل منها 2

و كذلك لو نظرنا للمجموع

$$u_3 + u_6 + u_9 + \dots + u_{3n}$$

فهنا القفزة قدرها 3 .

1- الأساس الجديد في الهندسية

$$q' = q^{\text{القفزة}}$$

وفي الحسابة القفزة $r' = r \times$

2- عدد الحدود + 1 $\frac{\text{أول متغير} - \text{آخر متغير}}{\text{طول القفزة}}$

مثال (1)

$(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 3 و فيها $u_1 = -2$

1- احسب u_n بدلالة n

2- احسب قيمة المجموع

$$u_1 + u_2 + \dots + u_7$$

3- احسب قيمة المجموع

$$u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{2n}$$

الحل

مثال (3)

بسط المجموع

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2^n}$$

الحل

دورة 2021 تكميلي

مثال

بفرض $u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$

أثبت أن $u_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5^n} \right)$

الحل





و أحياناً يذكر لنا أساسها و أحياناً لا يذكر الأساس فهنا يجب التفريق :

- إذا ذكر الأساس فإننا نكتب القوانين التالية :

هندسية أساسها q	حسابية أساسها r
$b = aq$ $c = aq^2$	$b = a + r$ $c = a + 2r$

[illegible][illegible]

مثال (2)

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالشكل

$$u_n = 2n + 1$$

- 1- أثبت أنها حسابية و عين أساسها
- 2- احسب قيمة المجموع $u_3 + u_6 + u_9 + \dots + u_{3n}$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....



- إذا لم يذكر الأساس فإننا نكتب القوانين التالية :

هندسية لم يذكر أساسها	حسابية لم يذكر أساسها
$b^2 = ac$ و تقرأ : الأول بالأخير يساوي مربع الأوسط	$2b = a + c$ و تقرأ : الأول + الأخير =ضعفي الأوسط

☺ غالباً ما تكون الحالة الثانية يُطلب فيها إيجاد a, b, c لذلك نعوض قيمة b بدلالة a, c وفق القوانين المكتوبة للوصول إلى معادلتين بمجهولين a, c ثم نحلها حلاً مشتركاً

مثال (2)

بفرض a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من هندسية و تحقق :

$$\begin{cases} a \cdot b \cdot c = -27 \\ 3a + 2b + c = -18 \end{cases}$$

احسب a, b, c

الحل

مثال (1)

بفرض a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية تحقق:

$$\begin{cases} 3a + b - c = 12 \\ a + 2b + c = 32 \end{cases}$$

احسب a و b و c

الحل



☺ غالباً ما يكون المطلوب في الحالة الاولى
حساب أساس.

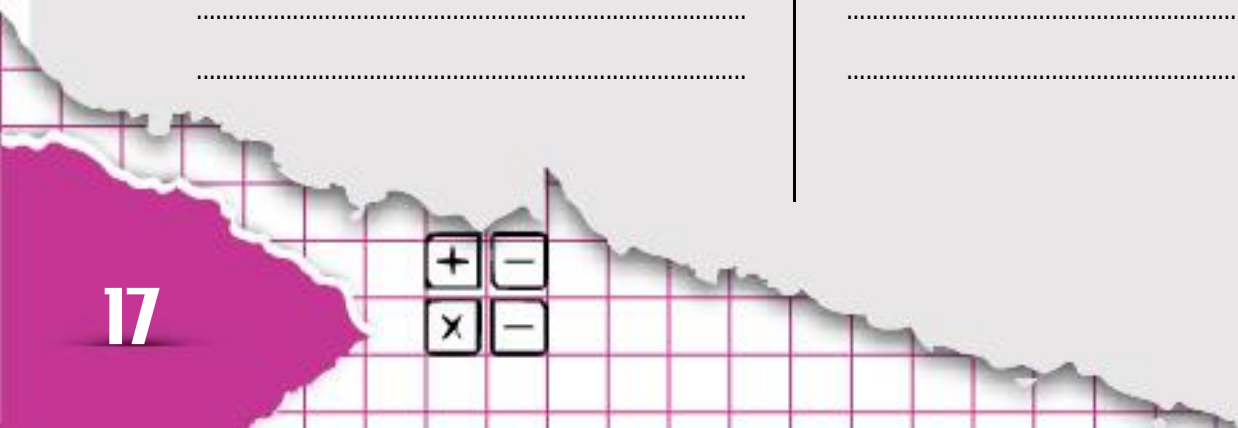
مثال (3)

بفرض a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية
هندسية أساسها q و $q \neq 0$.

و $3a$ و $2b$ و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية
حسابية. احسب q

الحل



This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.[illegible]

مسائل وتمارين

التمرين (1)

ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$, أثبت أنها هندسية .

الحل

التمرين (2)

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل $u_n = 3 - n$, أثبت أنها حسابية .

الحل

التمرين (3)

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$, احسب u_{20}

الحل



This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.[illegible]

التمرين (7)

$cgba$ ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية
و $a \neq 0$ وأساس المتتالية q ونعلم أن $3a$ و $2b$
و c هي ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية ,
احسب q

الحل

[illegible]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (3)

بفرض $v_0 = 1$ و $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$

و لتكن $u_n = \frac{1}{v_n}$

1- أثبت أن u_n حسابية

2- اكتب u_n بدلالة n

3- استنتج v_n بدلالة n

4- احسب المجموع :

$$S = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (2)

بفرض $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$$

$$u_0 = 2$$

و نتأمل المتتالية $(x_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق :

$$x_n = u_n + 2$$

1- أثبت أن المتتالية (x_n) هندسية

2- اكتب x_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3- احسب المجموع

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

4- استنتج المجموع :

$$S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



[illegible]

نعطى عددين حقيقيين a و b و $a \neq 0$ تأمل

المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ التي تحقق $v_{n+1} = av_n + b$

المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ التي تحقق $v_{n+1} = av_n + b$

2- احسب $f(x)$ حل المعادلة

l أثبت أن $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية واستنتج u_n

الحل

[illegible]

بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1- هل المتتالية $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots$

a	حسابية أساسها $r = 12$	b	حسابية أساسها $r = \frac{1}{12}$	c	هندسية أساسها $q = 2$	d	ليست حسابية ولا هندسية
---	------------------------	---	----------------------------------	---	-----------------------	---	------------------------

2- هل المتتالية $\frac{1}{9}, \frac{2}{9^2}, \frac{3}{9^3}, \frac{4}{9^4}, \dots$

a	حسابية أساسها $r = \frac{1}{9}$	b	حسابية أساسها $r = 9$	c	هندسية أساسها $q = \frac{1}{9}$	d	ليست حسابية ولا هندسية
---	---------------------------------	---	-----------------------	---	---------------------------------	---	------------------------

3- ليكن لدينا المتتالية $(v_n)_n \geq 0$ المعطاة وفق: $v_n = n^2$ ، هل المتتالية v_n ؟

a	حسابية أساسها $r = 2$	b	حسابية أساسها $r = 8$	c	هندسية أساسها $q = 4$	d	ليست حسابية ولا هندسية
---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	------------------------

4- لتكن لدينا المتتالية $(v_n)_n \geq 0$ المعطاة وفق $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$

ولدينا المتتالية $(u_n)_n \geq 1$ المعطاة وفق: $u_n = \frac{1}{v_n}$ هل المتتالية u_n ؟

a	حسابية أساسها $r = 1$	b	حسابية أساسها $r = -1$	c	هندسية أساسها $q = 3$	d	ليست حسابية ولا هندسية
---	-----------------------	---	------------------------	---	-----------------------	---	------------------------

5- ليكن لدينا $(u_n)_n$ متتالية حسابية فيها $r = -2$ ، $u_1 = -2$ فإن u_{10} تساوي:

a	$u_{10} = 20$	b	$u_{10} = -16$	c	$u_{10} = -20$	d	$u_{10} = 16$
---	---------------	---	----------------	---	----------------	---	---------------

6- لتكن لدينا $(u_n)_n \geq 0$ متتالية حسابية فيها $u_0 = -1$ ، $u_{10} = 59$ فإن أساس المتتالية r يساوي:

a	$r = 6$	b	$r = 3$	c	$r = -6$	d	$r = \frac{1}{6}$
---	---------	---	---------	---	----------	---	-------------------

7- إذا كان لدينا u_n متتالية حسابية فيها $u_4 = 25$ ، $r = 6$ فإن u_n تساوي:

a	$u_n = 2n - 2$	b	$u_n = 6n + 1$	c	$u_n = 6n + 2$	d	$u_n = 3n - 1$
---	----------------	---	----------------	---	----------------	---	----------------

8- لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_n \geq 0$ متتالية حسابية فيها $u_0 = 3$, $r = 2$ فان مجموع المتتالية

$$S = u_3 + u_4 + \dots + u_8$$

a	$S = 28$	b	$S = 80$	c	$S = 84$	d	$S = 56$
---	----------	---	----------	---	----------	---	----------

9- هل المتتالية $\dots, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$

a	حسابية أساسها $r = 2$	b	حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$	c	هندسية أساسها $q = 2$	d	ليست حسابية ولا هندسية
---	--------------------------	---	------------------------------------	---	--------------------------	---	---------------------------

10- هل المتتالية $1, 4, 8, 16, \dots$

a	حسابية أساسها $r = 12$	b	حسابية أساسها $r = \frac{1}{12}$	c	هندسية أساسها $q = 2$	d	ليست حسابية ولا هندسية
---	---------------------------	---	-------------------------------------	---	--------------------------	---	---------------------------

11- لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_n \geq 0$ المعطاة وفق: $u_n = \frac{2}{3^n}$ هي متتالية ؟

a	حسابية أساسها $r = -\frac{1}{3}$	b	حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$	c	هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$	d	ليست حسابية ولا هندسية
---	-------------------------------------	---	------------------------------------	---	------------------------------------	---	---------------------------

12- ليكن لدينا $(u_n)_n \geq 0$ متتالية هندسية فيها $u_1 = -2$, $q = 3$ فان u_4 تساوي :

a	$u_4 = 54$	b	$u_4 = -54$	c	$u_4 = 27$	d	$u_4 = -27$
---	------------	---	-------------	---	------------	---	-------------

13- لتكن لدينا $(u_n)_n \geq 0$ متتالية هندسية فيها $u_2 = 3$, $u_5 = 81$ فان أساس المتتالية q تساوي:

a	$q = 2$	b	$q = 3$	c	$q = -3$	d	$q = 27$
---	---------	---	---------	---	----------	---	----------

14- اذا كان لدينا $(u_n)_n \geq 0$ متتالية هندسية فيها $u_1 = 2$, $q = 3$ فان u_n تساوي:

a	$u_n = 2 \cdot 3^{n-1}$	b	$u_n = 2 \cdot 3^{n+1}$	c	$u_n = \frac{2}{3} \cdot 3^n$	d	$(a \text{ g } b)$
---	-------------------------	---	-------------------------	---	-------------------------------	---	--------------------

15- لتكن لدينا متتالية $(u_n)_n \geq 0$ متتالية هندسية فيها $u_4 = 12$, $q = 3$ ولدينا

$S = u_4 + u_5 + u_6 + \dots + u_9$ فان قيمة S تساوي :

a	$S = 3 - 6(3)^6$	b	$S = 6 - 6(3)^6$	c	$S = -6 + 6(3)^6$	d	$S = 6 - 3(6)^3$
---	------------------	---	------------------	---	-------------------	---	------------------

16- $S = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9^2} - \frac{1}{9^3} - \dots - \frac{1}{9^n}$

a	$S = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right)^n$	b	$S = \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 9^n}$	c	$S = \frac{7}{8} + \left(\frac{1}{9}\right)^n$	d	$S = -\frac{7}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{9}\right)^n$
---	--	---	---	---	--	---	---

17- لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق: $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{6u_n - 4}{u_{n+1}} \\ u_0 = 2 \end{cases}$

في حالة $n \geq 0$ نعرف المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ وفق: $v_n = \frac{u_n - 4}{u_{n-1}}$ والمطلوب:

ان المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$:

a	حسابية أساسها $r = \frac{2}{5}$	b	حسابية أساسها $r = \frac{5}{2}$	c	هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$	d	ليست حسابية ولا هندسية
---	------------------------------------	---	------------------------------------	---	------------------------------------	---	---------------------------

18- ان الحد الأول للمتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ هو:

a	$v_0 = -2$	b	$v_0 = 2$	c	$v_0 = \frac{1}{2}$	d	$v_0 = -\frac{1}{2}$
---	------------	---	-----------	---	---------------------	---	----------------------

19- ان الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ هو:

$v_n = -2\left(\frac{2}{5}\right)^n$	b	$v_n = -\frac{2^n + 1}{5^n}$	a
$(a \text{ g } b)$	d	$v_n = 2\left(\frac{5}{2}\right)^n$	c

20- ان الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هو:

$\frac{4.5^n + 2^{n+1}}{5^n + 2^{n+1}}$	b	$\frac{4 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n}$	a
$(a \text{ g } b)$	d	$\frac{4.5^n - 2^{n+1}}{5^n - 2^{n+1}}$	c

21- ان مجموع $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$ يساوي:

$\frac{10}{3} - \frac{10}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$	b	$-\frac{10}{3} + \frac{10}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$	a
$\frac{10}{3} + \frac{10}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^n$	d	$-\frac{10}{3} - \frac{10}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$	c

22- لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق: $\begin{cases} u_n + 1 = \frac{2u_{n-1}}{u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$

في حالة $n \geq 0$ نعرف المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ وفق: $v_n = \frac{2}{u_{n-1}}$ ، إن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$:

ليست حسابية ولا هندسية	d	هندسية أساسها $q = 2$	c	حسابية أساسها $r = -2$	b	حسابية أساسها $r = 2$	a
------------------------	---	-----------------------	---	------------------------	---	-----------------------	---

23- ان الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ هو:

$v_n = -2 + 2n$	b	$v_n = 1 + n$	a
$v_n = 2n + 2$	d	$v_n = 2n$	c

24- ان الحد الأول للمتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ هو:

$v_0 = 2$	b	$v_0 = -4$	a
$v_0 = -2$	d	$v_0 = 4$	c

25- ان الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هو:

$u_n = \frac{2+n}{1+n}$	b	$u_n = \frac{1+n}{2+n}$	a
$u_n = \frac{1-n}{2-n}$	d	$u_n = \frac{-2+n}{-1+n}$	c

26- ان مجموع $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يساوي:

$(n-1)(2+n)$	b	$n^2 + 3n + 2$	a
$(a \text{ g } b)$	d	$(n^2 - 3n + 2)$	c

27- لدينا a, b, c وثلاث اعداد حقيقية غير معدومة تمثل حدود متعاقبة من المتتالية الحسابية

$(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماما حيث انها تحقق: $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ a + b + c = 6 \end{cases}$ فان قيمة a, b, c هي:

$(a \text{ g } B)$	d	$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$	c	$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$	b	$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$	a
--------------------	---	---	---	---	---	---	---

28- ان أساس المتتالية r هو:

$r = 1$	d	$r = \frac{1}{2}$	c	$r = -1$	b	$r = -\frac{1}{2}$	a
---------	---	-------------------	---	----------	---	--------------------	---

29- ان الحد العام للمتتالية u_n اذا علمت ان $u_0 = a$ هو:

$u_n = 1 - n$	a	$u_n = 1 + n$	b	$u_n = -1 + n$	c	$u_n = -1 - n$	d
---------------	---	---------------	---	----------------	---	----------------	---

30- لدينا a, b, c ثلاث اعداد حقيقية غير معدومة تمثل حدود متعاقبة من متتالية هندسية

$(u_n)_{n \geq 0}$ متزايد تماما حيث انها تحقق: $\begin{cases} a + b + c = 7 \\ a \cdot b \cdot c = 8 \end{cases}$ فان قيمة a, b, c هي:

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$	a	$\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$	b	$\begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}$	c	$(a \text{ g } b)$	d
---	---	---	---	--	---	--------------------	---

31- ان أساس المتتالية q هو:

$q = -\frac{1}{2}$	a	$q = 2$	b	$q = -2$	c	$q = \frac{1}{2}$	d
--------------------	---	---------	---	----------	---	-------------------	---

32- ان الحد العام للمتتالية u_n اذا علمت ان $u_0 = a$ هو:

$u_n = -2^{n+1}$	a	$u_n = 2^n$	b	$u_n = 2^{n+1}$	c	$u_n = -2^n$	d
------------------	---	-------------	---	-----------------	---	--------------	---

33- ان المجموع $S = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{20}$ يساوي:

$S = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}(4)^{10}$	a	$S = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}(4)^{10}$	b	$S = -\frac{4}{3} + \frac{4^{11}}{3}$	c	$(a \text{ g } b)$	d
---	---	--	---	---------------------------------------	---	--------------------	---

34- لدينا a, b, c ثلاث اعداد حقيقية غير معدومة تمثل حدود متعاقبة من متتالية هندسية فان

$$(a + b + c)(a - b + c) =$$

$a^2 + b^2 + c^2$	a	$a^2 + b^2 - c^2$	b	$a^2 + c^2 - b^2 + 2ac$	c	$(a \text{ g } b)$	d
-------------------	---	-------------------	---	-------------------------	---	--------------------	---

35- لدينا a, b, c ثلاثة حدود متوالية غير معدومة من متتالية هندسية أساسها q كما لدينا $12a$ و $5b$

و $2c$ ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية فان q تساوي:

$\begin{cases} q = -2 \\ q = 3 \end{cases}$	a	$\begin{cases} q = -3 \\ q = 2 \end{cases}$	b	$\begin{cases} q = -3 \\ q = -2 \end{cases}$	c	$\begin{cases} q = 2 \\ q = 3 \end{cases}$	d
---	---	---	---	--	---	--	---

1	B	13	B	25	B
2	D	14	D	26	A
3	D	15	C	27	D
4	A	16	B	28	D
5	C	17	C	29	B
6	A	18	A	30	A
7	B	19	D	31	B
8	C	20	D	32	B
9	B	21	A	33	D
10	D	22	A	34	D
11	C	23	D	35	D
12	B	24	B		



الدرس الثاني

اطراد المتتالية



الدراسة هي
مفتاح لتفريق
أعلامك،
فاستغل كل
فرصة للتعلم.

$$u_n = \frac{n+1}{n+2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تعريف ورموز:

$u_{n+1} \geq u_n$	المتتالية المتزايدة
$u_{n+1} > u_n$	المتتالية المتزايدة تماماً
$u_{n+1} \leq u_n$	المتتالية المتناقصة
$u_{n+1} < u_n$	المتتالية المتناقصة تماماً
$u_{n+1} = u_n$	المتتالية الثابتة

طرق دراسة اطراد متتالية

أولاً: طريقة الفرق (نقارن مع الصفر):

- 1- نحسب u_{n+1}
 - 2- نشكل الفرق $u_{n+1} - u_n$
 - 3- نميز حالتين:
- ❖ إذا كان $u_{n+1} - u_n \geq 0$ متزايدة
- ❖ إذا كان $u_{n+1} - u_n \leq 0$ متناقصة

مثال

ادرس اطراد كل من المتتاليات الآتية

$$u_n = 2n + 5$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....



$$u_n = \frac{n}{3^n}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ثالثاً: طريقة الاشتقاق:

إذا كان $u_n = f(n)$ حيث $n \geq n_0$ وكان f اشتقائي على المجال $[n_0, +\infty[$ عندها

❖ إذا كان $f'(x) \geq 0$ على المجال $[n_0, +\infty[$ فإن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة . $\forall n \geq n_0$

❖ إذا كان $f'(x) \leq 0$ على المجال $[n_0, +\infty[$ فإن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة . $\forall n \geq n_0$

مثال

ادرس اطراد كل من المتتاليات التالية

$$u_n = \frac{3}{n^2} ; n \geq 1$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ثانياً: طريقة النسبة (نقارن مع الواحد):

1- نحسب u_{n+1}

2- نشكل النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

3- نميز حالتين:

❖ إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (متزايدة)

❖ إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (متناقصة)

يجب أن يكون

$$u_n > 0$$

مثال

ادرس اطراد كل من المتتاليات الآتية

$$u_n = \frac{10^n}{n!}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



$$u_n = -3n + 1 ; n \geq 0$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{n^2} ; n \geq 0$$

$$u_n = \sqrt{3n+1} ; n \geq 0$$

$$u_n = \frac{2n-1}{n+4} ; n \geq 0$$

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} ; n \geq 0$$

$$u_n = \frac{3n+1}{n-1} ; n \geq 2$$



مثال

ادرس اطراد المتتاليات التالية:

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2, u_0 = 2$$

$$u_n = \frac{n+1}{n+2}; n \geq 0$$

رابعاً: طريقة تعريف قضية:

إذا كانت المتتالية معرفة بالتدريج:

❖ لإثبات أنها متزايدة:

1- نعرف القضية

$$E(n): u_{n+1} \geq u_n$$

2- نثبت القضية بالتدريج

❖ لإثبات أنها متناقصة

1- نعرف القضية

$$E(n): u_{n+1} \leq u_n$$

2- نثبت القضية بالتدريج

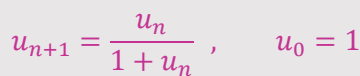
❖ لدراسة الاطراد:

1- نحسب الحدود u_0, u_1, u_2

2- نتوقع جهة الاطراد ونعرف القضية المناسبة

3- نثبت القضية بالتدريج.





بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1- ان المتتالية $v_n = \frac{1}{n+1}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

2- ان المتتالية $u_n = -\frac{1}{2n+4}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

3- ان المتتالية $v_n = \frac{2n+3}{n+1}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

4- ان المتتالية $u_n = \frac{2n-3}{n+1}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

5- ان المتتالية $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

6- ان المتتالية $u_n = \frac{10^n}{n}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

7- ان المتتالية $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

8- ان المتتالية $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 7 \\ u_0 = 1 \end{cases}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

9- ان المتتالية $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n \\ u_0 = 2 \end{cases}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

10- ان المتتالية $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 3) \\ u_0 = 2 \end{cases}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------



11- المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق $u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$ هي متتالية:

a	ثابتة	b	متناوبة	c	متناقصة	d	متزايدة
---	-------	---	---------	---	---------	---	---------

12- المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق $u_0 = 8$ و $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$

a	ثابتة	b	متناوبة	c	متناقصة	d	متزايدة
---	-------	---	---------	---	---------	---	---------

13- المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$

a	ثابتة	b	متناوبة	c	متناقصة	d	متزايدة
---	-------	---	---------	---	---------	---	---------

A	1
B	2
A	3
B	4
B	5
B	6
B	7
A	8
B	9
B	10
A	11
A	12
A	13



الدرس الثالث

3

الاثبات بالتدريج

فتاح الجوال بسرعة !!



خطط لوقتك،
وستجد أن لديك
وقتاً أكثر مما
تعتقد.

يعني أول مرتبة صح و (كل صحيح بعدو صحيح)



① نرّمز للقضية $E(n)$

③ نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة ... (الفرض)

- النمط الأول من التمارين: المضاعفات

أنت صحة الخاصة

$E(n)$: "العبد $4^n + 5$ للعبد مضاعف 3"
 $n \geq 1$

الحل

تمديد:

[illegible]

مبدأ الإثبات بالتدريج

الإثبات صحة القضية $E(n)$ يكفي أن نثبت الشرطين الآتيين:

1- القضية صحيحة من أجل دليل البدء n_0



[illegible]

أثبت صحة الخاصة : (مميز) (تأجيل لآخر مثال)

$E(n) : " 3 \text{ مضاعف للعدد } n^3 + 2n "$

الحل

[illegible][illegible]

أثبت صحة الخاصة :

$E(n)$: " $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7 "

الحل

[illegible]

[illegible][illegible]

أثبت صحة الخاصة :

$E(n)$: "7 مضاعف للعدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ "

الحل

[illegible]

التمرين (1)



أثبت بالتدريج أن المقدار $5^n - 3^n$ زوجي مهما
يكن العدد $n \geq 1$

الحل

التمرين (2)

أثبت بالتدريج أن $3^{2n} - 1$ من مضاعفات العدد 8

الحل



• النمط الثاني: صحة مساواة

① أثبت بالتدريج صحة القضية :

$$E(n): 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

② أثبت بالتدريج صحة القضية :

$$E(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



التمرين (1)

نضع $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

1- احسب S_1, S_2, S_3

2- احسب S_{n+1} بدلالة S_n

3- أثبت بالتدريج أن $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

الحل

إضافي أثبت أن:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

الحل



التمرين (2)

نضع $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$

-1 احسب S_1, S_2, S_3

-2 احسب S_{n+1} بدلالة S_n

-3 أثبت بالتدريج أن $S_n = n^2$

الحل



[illegible][illegible][illegible][illegible]

ملاحظة: العالمي:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 2.1$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

ولدينا اصطلاحاً:

$$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1$$

ومن الخواص المهمة:

$$(n + 1)! = (n + 1)n!$$

$$(n + 2)! = (n + 2)(n + 1)!$$

املا الفراغ الآتي:

$$\dots \times n! = (n+1)!$$

$$\dots \times (n-1)! = n!$$

$$\dots \times (n+1)! = (n+2)!$$

التمرين (3)

أثبت أن:

$$1 + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$$



التمرين (4)

أثبت أن:

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

[illegible][illegible]

• النمط الثالث من التمارين المتراجحات :

قبل البدء بالمتراجحات تعرف على خاصية التعدي:

إذا كان $a > b > c$ فإن $a > c$ وبالتالي في مرحلة البرهان قد نحتاج إلى تكبير الكبير أو تصغير الصغير.

أمثلة:

$$\frac{n}{n+1} > \frac{n-1}{n+1} > \frac{n-2}{n+1}$$

وهي نوعان:

■ النوع الأول : متراجحات متعلقة بـ n

$$2^n \geq n ; n \geq 1$$

الحل

$$E(n): (1+x)^n \geq 1+nx \quad 2$$

الحل



$$E(n): n! \geq 2^{n-1} \quad \textcircled{3}$$

و هنا نميز حالتين:

أ- الحالة الأولى:

u_n ذكرت مرة واحدة فقط في عبارة u_{n+1}
عندها ننطلق من (الفرض) ونطبق عمليات
جبرية (ضرب، جمع، طرح) للوصول لشكل u_{n+1}

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ لتكن

أثبت أن $0 \leq u_n \leq 2$ أيًا كان $n \geq 0$

الحل

الحل

■ النوع الثاني: متراجحات متعلقة بـ u_n

أى تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة بعلاقة

تدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$



الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ب- الحالة الثانية : $u_{n+1} = f(u_n)$ و u_n ذكرت
أكثر من مرة عندها

① نعرف التابع $f(x)$

② نحسب $f'(x)$

③ نثبت أن f متزايد أي $f'(x) \geq 0$

④ نصور به أطراف المتراجحة

بفرض $(u_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{1 + u_n}$$

$$u_0 = 1$$

أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ مهما يكن $n \geq 0$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$

و $u_0 = \frac{3}{2}$ أثبت بالتدريج أن :

$$1 \leq u_n \leq 2$$



التمرين (1)

$(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = g(u_n)$

عند كل $n \geq 0$ $\frac{3u_n+2}{2u_n+6}$

أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج

أن $1 \geq u_n > \frac{1}{2}$ أيّاً كان العدد n .

الحل

التمرين (2)

بفرض $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + u_n}, \quad u_0 = 1$$

أثبت أن $0 < u_n \leq 1$

الحل



ملاحظة نذرية:

تخمين المتتالية

في بعض أشكال المتتاليات المعرفة بالتدريج
يمكن تخمين شكل حدها العام

و تحديد المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$
الخطوات:

التمرين (3)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالشكل :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2, u_0 = \frac{3}{2}$$

أثبت أن $1 \leq u_n \leq 2$

الحل

1- نحسب u_0, u_1, u_2, u_3, u_4

2- ننظم الجدول:

n	0	1	2	3	4
u_n	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
a^n	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4

3- نلاحظ أن مجموع الحقلين الثاني و الثالث

دائماً يعطي العدد ذاته l

$$u_n + a^n = l$$

$$\Rightarrow u_n = -a^n + l$$

4- نعرف القضية :

$$E(n): u_n = -a^n + l$$

و نثبتها بالتدريج .

مثال (1)

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق $u_{n+1} = 2u_n -$

$$u_0 = 2 \text{ و } 3$$

خمن عبارة u_n بدلالة n ثم أثبت صحة تخمينك.

الحل



بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1- ان المتتالية $v_n = \frac{1}{n+1}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

2- ان المتتالية $u_n = -\frac{1}{2n+4}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

3- ان المتتالية $v_n = \frac{2n+3}{n+1}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

4- ان المتتالية $u_n = \frac{2n-3}{n+1}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

5- ان المتتالية $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

6- ان المتتالية $u_n = \frac{10^n}{n}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

7- ان المتتالية $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

8- ان المتتالية $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 7 \\ u_0 = 1 \end{cases}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

9- ان المتتالية $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n \\ u_0 = 2 \end{cases}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------

10- ان المتتالية $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 3) \\ u_0 = 2 \end{cases}$:

a	متناقصة	b	متزايدة	c	ثابتة
---	---------	---	---------	---	-------



11- المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق $u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$ هي متتالية:

a	ثابتة	b	متناوبة	c	متناقصة	d	متزايدة
---	-------	---	---------	---	---------	---	---------

12- المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق $u_0 = 8$ و $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$

a	ثابتة	b	متناوبة	c	متناقصة	d	متزايدة
---	-------	---	---------	---	---------	---	---------

13- المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$

a	ثابتة	b	متناوبة	c	متناقصة	d	متزايدة
---	-------	---	---------	---	---------	---	---------

A	1
B	2
A	3
B	4
B	5
B	6
B	7
A	8
B	9
B	10
A	11
A	12
A	13



الملف الفاصل

المتاليات



مسائل

الوحدة

الخاصة

بالمتاليات



يُبين أي المتتاليات $(u_n)_{n \geq 0}$ الآتية مَظَرْدَة (ربما بدءاً من حد معين n_0).

$$u_n = -3n + 1 \quad (1$$

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} \quad (2)$$

$$u_n = 2^n \quad (3)$$

$$u_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n \quad (4)$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{n^2} \quad (5)$$

$$u_n = \frac{n^2}{n!} \quad (6)$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \quad (7)$$

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases} \quad (9)$$

تذكر أن $n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 1$ في حالة عدد طبيعي n موجب تماماً وأن $0! = 1$.

[The page contains horizontal dotted lines for writing.]

السؤال الثالث

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = -u_n + 4$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n .
احسب u_5, u_4, u_3, u_2, u_1 و تخمن عبارة u_n بدلالة n ثم حدد u_n بدلالة n .



السؤال الرابع

أثبت بالتدريج صحة الخاصتين الآتيتين:

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! = (n + 1)! - 1 \quad (1)$$

$$n! \geq 2^{n-1} \quad (2)$$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال السادس

a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a \neq 0$. نعلم أن a و b و c هي ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية، نرسم إلى أساسها بالرمز q . كما نعلم أن $3a$ و $2b$ و c هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية. احسب q .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





السؤال السابع

صغ افتراضاً ثم تحقق من صحته

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = 10u_n - 18$ عند كل عدد طبيعي n . نهدف في هذا التمرين إلى التعبير عن u_n بدلالة n .

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

السؤال الثامن متتالية هندسية متخفية

نأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق $u_0 = a$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n$ عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية P بحيث تحقق المتتالية $(t_n)_{n \geq 0}$ التي حددها العام $t_n = P(n)$ العلاقة التدرجية نفسها أي $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ أياً كانت n .



(2) أثبت المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ هي متتالية هندسية.

(3) اكتب عبارة v_n ثم u_n بدلالة a و n .

[illegible]



السؤال التاسع

نُعطى عددين حقيقيين a و b ونفترض أن $a \neq 1$. نتأمل المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ التي تحقق

$$v_{n+1} = av_n + b, \text{ أيّاً كان العدد الطبيعي } n.$$

(1) عيّن تابعاً f يحقق $v_{n+1} = f(v_n)$ أيّاً كانت قيمة $n \geq 0$.

(2) احسب l حل المعادلة $f(x) = x$.

(3) نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ حيث $u_n = v_n - l$. أثبت أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية، واستنتج u_n

بدلالة n و a و b و v_0 . ثم استنتج v_n بدلالة هذه المُعاملات.



السؤال العاشر

نتأمل متتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة بالتدريج وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 2, & u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

(1) عيّن عددين حقيقيين a و b يحققان $a + b = 5$ و $ab = 6$.

(2) لتكن $(v_n)_{n \geq 0}$ المتتالية $v_n = u_{n+1} - au_n$. أثبت أن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها b .

(3) لتكن $(w_n)_{n \geq 0}$ المتتالية $w_n = u_{n+1} - bu_n$. أثبت أن $(w_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها a .



[illegible]



(2) نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية " $3^n \geq 2^n + 5 \times n^2$ "

2. أثبت أن $E(n)$ صحيحة، أيّاً كان العدد الطبيعي n الذي يحقق الشرط $n \geq 5$.

[illegible]

السؤال الثاني عشر

نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية " $3^n \geq (n + 2)^2$ "

(1) أتكون القضايا $E(4), E(3), E(1), E(0)$ صحيحة؟

(2) أثبت بالتدريج أن القضية $E(n)$ صحيحة عند كل عدد طبيعي n يحقق الشرط $n \geq 3$.





السؤال الثالث عشر

أثبت بالتدريج، صحة كل من الخواص الآتية أياً كان العدد الطبيعي n .

(1) " $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3 "

" $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7 " (2)

" $n^3 + 2n$ مضاعف للعدد 3 " (3)

" $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 " (4)

[illegible]



السؤال الرابع عشر

نرمز إلى القضية " يقسم العدد 9 العدد $10^n + 1$ " بالرمز $E(n)$, في حالة $n \in N$.

(1) أثبت أنه إذا كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد n , كانت عندئذ $E(n + 1)$ صحيحة.

(2) أكنون القضية $E(n)$ صحيحة على N ؟ برر إجابتك.





السؤال السادس عشر

$(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{3n+2}{2u_n+6}$ عند كل $n \geq 0$.

(1) أثبت أن التابع $x \mapsto \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $1 < u_n \leq \frac{1}{2}$ ايّ كان العدد n .

(2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً.



السؤال السابع عشر

ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$. ثم نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق

$$u_0 = 2 \cos \theta \text{ و } u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \text{ في حالة } n \in \mathbb{N}.$$

(1) احسب u_1 و u_2 .

(2) احسب بالتدريج، أن $u_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.



This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

السؤال الثامن عشر

في مستوي P ، محدّد بمعلم متجانس، H هي مجموعة النقاط $M(x, y)$ التي تحقق إحداثياتها المعادلة $x^2 - 5y^2 = 1$. ليكن f التابع الذي يقرن بكل نقطة $M(x, y)$ من المستوي P النقطة $(9x + 20y, 4x + 9y)$ ، أي $f(M) = M'$. لتكن S_0 النقطة التي إحداثياتها $(1, 0)$ ، ثم لتأمل في المستوي P متتالية النقاط $(S_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق: $S_{n+1} = f(S_n)$. أثبت أن S_n نقطة من المجموعة H وأن إحداثياتها أعداد صحيحة.

.....

.....

.....

.....



السؤال التاسع عشر

يرمز x إلى عدد حقيقي ويرمز n إلى عدد طبيعي غير معدوم. نضع

$$S_n = \cos x + \cos(3x) + \cos(5x) + \dots + \cos((2n-1)x)$$

(1) باستعمال دساتير مثلثاتية تعرفها، أثبت أن:

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \quad \text{و} \quad \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

(2) حوّل كلّاً ممن العبارتين الآتيتين من جداء نسبتين مثلثيتين إلى مجموع نسبتين مثلثيتين.

$$\sin nx \cdot \cos nx \quad \text{و} \quad \sin x \cdot \cos((2n+1)x)$$

(3) أثبت أن $S_n = \cos(nx) \times \frac{\sin(nx)}{\sin x}$ ، أيّاً يكن $n \geq 1$ و $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.







الدرس الرابع

نهاية متتالية ومفهوم التقارب

اربطوا

الألزمية...

نحن على

وشك حساب

نهاية متتالية!



إذا كانت النهاية عدد فهي متقاربة من هذا العدد وإذا كانت النهاية غير ذلك فهي متباعدة (غير متقاربة)

أنماط أسئلة التقارب

1 دراسة تقارب متتالية معطاة بحد عام

$$u_n = f(n)$$

فإنه يكفي أن نوجد النهاية عندما $n \rightarrow +\infty$ كما كنا نفعل في التتابع (وكل ما كنت تفعله في التتابع مجازاً من إحاطة و مقارنة و طرق لإزالة عدم التعيين....)

مثال

في كل من الحالات الآتية، أوجد نهاية المتتالية u_n و هل هي متقاربة .

$u_n = n + 1 - \cos n$	2	$u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$	1
$u_n = \frac{5n-3}{3n-5}$	4	$u_n = \frac{2n+1}{n-3}$	3
$u_n = \frac{5n^2-3n+1}{n^2-n+1}$	6	$u_n = n - \frac{1}{n+1}$	5
$u_n = \frac{n}{4} + \frac{n^2}{n^2+1}$	8	$u_n = \frac{-2n^2+n+1}{2(n+1)^2}$	7
$u_n = \sqrt{\frac{4n-1}{n+1}}$	10	$u_n = \frac{10n}{n+1}$	9
$u_n = \cos\left(\frac{2n\pi+1}{3n+1}\right)$	12	$u_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{3n+1}}$	11
$u_n = \sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2}$	14	$u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$	13
$u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$	16	$u_n = \sqrt{2n^2-5} - n\sqrt{2}$	15
$u_n = \frac{3n - \sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$	18	$u_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$	17
$u_n = \frac{n!-2}{n!}$	20	$u_n = n^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{2} \right)$	19

مفهوم التقارب

لننظر في المتتالية التالية:

$$5, 0.5, 0.05, 0.005, 0.0005, \dots$$

فإنه من الواضح أنها تصغر وتصغر وتصغر ... حتى تكاد أن تكون صفراً (لن تصبح أبداً صفر ولكن ستقترب جداً من الصفر و لكن لن تصله ... لن تصله ... أكرر لن تصله ...)

هنا يمكن أن نقول إن المتتالية متقاربة من

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ الصفر و نكتب } 0$$

عندما نتكلم عن المتتالية

$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$ فنحن نعلم أن هذه المتتالية غير منتهية و لكن هل هذه المتتالية قيم حدودها تقترب من قيمة معينة l ؟ أم أنها تتعاضم و تتعاضم نحو $+\infty$ مثل $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ ؟

أم أنها تتضائل و تتضائل حتى $-\infty$

هامش: فسر كتابة الهمزة على هذا

الشكل في كلمة "تضائل"

^ _ ^

و بالتالي نجد أنه من الممكن أن نواجه إحدى الحالات التالية :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= l \quad \text{or} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= +\infty \quad \text{or} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= -\infty \end{aligned}$$

Hints:

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (2)

ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالشكل

$$u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n};$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 نهاية متتالية هندسية

مسائل وتمارين

التمرين (1)

احسب نهاية كل من المتتاليات التالية:

$$x_n = \frac{4^n}{3^n}, \quad y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n}$$

$$, \quad t_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



$n > A$ فنختار $n_0 \geq A$ يتم المطلوب

(بدها مثال مو !!)

مثال (1)

أوجد عدداً طبيعياً n_0 بحيث يكون $u_n \in]1.9, 2, 1[$

عندما $n > n_0$ حيث:

$$u_n = \frac{2n-1}{n+3}$$

الحل

[illegible][illegible]

التمرين (3)

ادرس تقارب المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالشكل

$$v_n = \frac{10^n - 1}{10^n + 1}$$

[illegible]

3 حصر المتتالية ضمن مجال

حصر المتتالية ضمن مجال من الشكل $]a, b[$:

-نوجد نصف قطر المجال $r = \frac{b-a}{2}$

-نوجد مركز المجال $l = \frac{b+a}{2}$ (أو يُحسب المركز

بطريقة أخرى حيث $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

-نعوض فى القانون :

$$|u_n - l| < r$$



مثال (2)

أوجد عدداً طبيعياً n_0 بحيث يكون $- \infty < u_n < 10^{-3}$ عندما $n > n_0$ حيث

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

الحل

مثال (3)

لتكن المتتالية $u_n = n\sqrt{n}$, عين عدداً طبيعياً n_0 بحيث تنتمي حدود المتتالية إلى المجال $[10^3, +\infty[$ بدءاً من n_0

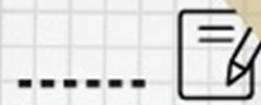
الحل



الدرس الخامس

5

محدودية متتالية



**Always
Keep
Trying
You will
Arrive soon**



مثال

لنأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بشرط البدء

$$u_0 = 1 \text{ و}$$

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

1- أثبت أنها متزايدة

2- أثبت أن $u_n \leq 2$

3- استنتج أنها متقاربة و احسب نهايتها

الحل

1- نعرف القضية :

$$E(n): u_{n+1} \geq u_n$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2- نعرف القضية $E(n): u_n \leq 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

① المتتالية المحدودة من الأعلى: نقول عن

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ إنها محدودة من الأعلى، إذا

وجد عدد مناسب M بحيث تكون جميع عناصر

المتتالية أصغر منه أي

$$u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \text{ وندعو } M \text{ عندئذٍ عنصراً}$$

راجداً على (u_n)

② المتتالية المحدودة من الأدنى: نقول عن

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ إنها محدودة من الأدنى، إذا

وجد عدد مناسب m بحيث تكون جميع عناصر

المتتالية أكبر منه أي

$$u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N} \text{ وندعو } m \text{ عندئذٍ عنصراً}$$

قاصراً عن (u_n)

③ المتتالية المحدودة: نقول عن المتتالية

$(u_n)_{n \geq 0}$ إنها محدودة، إذا كانت محدودة من

الأعلى و من الأدنى في آن معاً

$$\text{أي: } m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

وهذا يكافئ وجود عدد K بحيث $|u_n| \leq K$

(لأن $|u_n| \leq K$ تعني أن

$$\underbrace{-K}_{\text{قاصر}} \leq u_n \leq \underbrace{K}_{\text{راجح}}$$

مبرهنات تقارب متتالية

1- إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة

ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة

2- إذا كانت المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة

من الأدنى فهي متقاربة



مسائل وتمارين

المسألة (1)

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدرجياً بالشكل :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2, \quad u_0 = \frac{3}{2}$$

1- أثبت مستعملاً البرهان بالتدرج أنّ:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$

2- حل كلاً من A و B :

A- أثبت أن

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$$

B- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة

3- أهى متقاربة؟ عين نهايتها.

الحل

فائدة هامة:

لتعيين نهاية متتالية $u_{n+1} = f(u_n)$ بعد ضمان تقاربها:

1- نوجد حل المعادلة $f(x) = x$

2- نقبل الحل المناسب



المسألة (2)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

- 1- أثبت أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة
- 2- أثبت أن $u_n > 0$
- 3- استنتج أنها متقاربة و عين نهايتها.

الحل



دراسة متتاليات المجاميع

① النوع الأول: المقارنة مع مجموع هندسي:

مثال (!)

لتكن المتتالية

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n}$$

- 1- برهن أن $n \leq 2^n$
- 2- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ محدودة من الأعلى
- 3- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة
- 4- أهي متقاربة؟

الحل



مثال (2)

لتكن المتتالية

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

- 1- أثبت أنها متزايدة
- 2- أثبت بالتدريج أن $n! \geq 2^{n-1}$ وذلك مهما $n \geq 1$
- 3- استنتج أن العدد 3 عنصر راجع على u_n
- 4- أهي متقاربة؟

الحل



مثال (1)

لتكن المتتالية:

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$$

جد نهاية u_n

الحل

② النوع الثاني: مجموع مباشر

هنا نحصر المتتالية بين متتاليتين مستفيدين من الملاحظة التالية :

إذا كان $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

و كان M أكبر حدود هذا المجموع

و كان m أصغر حدود هذا المجموع فإننا نكتب:

عدد الحدود $\times m \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq M \times$ عدد الحدود



مثال (2)

لتكن لدينا المتتالية

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

أوجد نهاية u_n

الحل

③ النوع الثالث: صيغ متكافئة:

أحياناً نعطي صيغتين متكافئتين لـ u_n إحداهما

$$u_n = b_n - b_{n+1}$$

فنستبدل المجموع الأصلي بدلالة الفروق $b_n - b_{n+1}$

b_{n+1} فيتم **تشطيب كل الحدود** ما عدا أول حد

وآخر حد (صاحب أصغر دليل وأكبر دليل)

وبالمثال يتضح المقال:

التمرين (1)

ليكن عند كل عدد طبيعي n

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

1- أوجد عددين حقيقيين a, b يحققان عند كل

عدد طبيعي n أن :

$$u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

2- ليكن في حالة عدد طبيعي n :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

3- عبر عن s_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية

$$(S_n)_{n \geq 0}$$

الحل



[illegible]

التمرين (3)

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \text{ gni}$$

1- جد عددين حقيقيين يحققان

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

2- بَسْطُ الْمَجْمُوعِ

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

[illegible]

التمرين (2)

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

1- أثبت أن $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ثم استنتج أنها

مقاربة نحو الصفر

2- المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$

وفق :

$$v_n = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$$

أ- استنفد من عبارة u_n بصيغتيها الواردتين

لاستنتاج عبارة بسيطة لـ v_n بدلالة n

ب- استنتاج نهاية v_n

ثم احسب نهاية S_n

الحل

فائدة هامة:

في السابق درسنا كيفية إثبات محدودية بعض أنواع المتتاليات مثل:

1- التدرجية (عن طريق إثبات قضية من الشكل

$$(m \leq u_n \leq M)$$

2- المقارنة مع الهندسية

محدودية المتتاليات الصريحة

إذا كانت $u_n = f(n)$:

1- نعرف التابع الموافق $f(x)$ على المجال $[n_0, +\infty[$

2- نستنتج من جدول التغيرات عنصراً راجحاً أو قاصراً.

مثال (1)

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالشكل $u_n =$

$$\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

أثبت أن $1 \leq u_n \leq 3$

الحل



مثال (2)

$$u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

- 1- ادرس اطراد u_n
- 2- أثبت أنها محدودة
- 3- استنتج أنها متقاربة و عين نهايتها

الحل



ملاحظة عالمشي ^_^:

- 1 إذا كان M عنصر راجح على u_n فإن كل عدد أكبر من M هو عنصر راجح على u_n
- 2 إذا كان m عنصراً قاصراً عن u_n فإن كل عدد أصغر من u_n هو عنصر قاصر آخر عن u_n

مثلاً في المثال السابق:

العدد 5 عنصر راجح على u_n لأن العدد 3 عنصر راجح على u_n و $5 > 3$

العدد $\frac{1}{2}$ قاصر عن u_n لأن العدد 1 قاصر عن u_n و $\frac{1}{2} < 1$

$$\frac{1}{2} < 1 \leq u_n \leq 3 < 5$$

$$\text{then: } \frac{1}{2} < u_n < 5$$

المتتاليات سهولة الحصر



ادرس اطراد كلي من المتتاليات الآتية:

$$u_n = \sin(n)$$

$$u_n = n + \cos(n)$$

مثال (1)

$$u_n = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}}$$

مثال (2)

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

مثال (3)

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 1}$$



بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، في كل مما يلي إن نهاية u_n هي:

$$u_n = \frac{5n-3}{3n-5} \quad -1$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	d	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{5}{3}$	c	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{3}$	b	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{5}$	a
--	---	---	---	--	---	--	---

$$u_n = n - \frac{1}{n+1} \quad -2$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	d	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	c	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	b	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	a
--	---	--	---	--	---	--	---

$$u_n = \frac{n}{4} + \frac{2n}{n^2+1} \quad -3$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	d	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	c	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	b	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	a
--	---	--	---	--	---	--	---

$$u_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+1}} \quad -4$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$	d	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$	c	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$	b	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$	a
--	---	--	---	---	---	--	---

$$u_n = \sqrt{\frac{2n^2-1}{3n+1}} \quad -5$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	d	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	c	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	b	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	a
--	---	--	---	--	---	--	---

$$u_n = \sin\left(\frac{3n\pi}{2n+1}\right) \quad -6$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$	d	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$	c	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	b	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	a
--	---	---	---	--	---	--	---

$$u_n = \cos\left(\frac{3n\pi}{2n+1}\right) \quad -7$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$	d	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$	c	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	b	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	a
--	---	---	---	--	---	--	---

$$u_n = \frac{3n - \sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}} \quad -8$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	d	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	c	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	b	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	a
--	---	--	---	--	---	--	---

$$u_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n+1} - 9$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	d	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	c	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	b	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	a
--	---	--	---	--	---	--	---

$$u_n = \frac{4n+(-1)^n}{2n} - 10$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	d	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	c	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	b	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$	a
--	---	--	---	--	---	--	---

$$s_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} - 11$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\frac{5}{4}$	d	$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0$	c	$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{5}{4}$	b	$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{4}{5}$	a
---	---	--	---	--	---	--	---

12- ليكن $-1 < q < 1$ ولنعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة:

$$u_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

ان نهاية المتتالية u_n هي:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = q$	d	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{1-q} = 1$	c	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$	b	$\frac{1}{q}$	a
--	---	--	---	--	---	---------------	---

13- لتكن $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق العلاقة $x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$ احسب x_1, x_2, x_3 .

$\begin{cases} x_1 = -\frac{34}{5} \\ x_2 = -\frac{224}{25} \\ x_3 = -\frac{1444}{125} \end{cases}$	d	$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} \\ x_2 = \frac{24}{25} \\ x_3 = \frac{14}{125} \end{cases}$	c	$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} \\ x_2 = \frac{4}{25} \\ x_3 = \frac{4}{125} \end{cases}$	b	$\begin{cases} x_1 = \frac{34}{5} \\ x_2 = \frac{224}{25} \\ x_3 = \frac{1444}{125} \end{cases}$	a
---	---	--	---	--	---	--	---

14- ان جهة اطراد المتتالية x_n :

متناقصه تماما	b	متزايدة تماما	a
---------------	---	---------------	---

15- نعرف $(y_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$ ان المتتالية $(y_n)_{n \geq 0}$:

هندسية أساسها $q = \frac{5}{6}$	b	حسابية أساسها $r = \frac{6}{5}$	a
ليست حسابية ولا هندسية	d	هندسية أساسها $q = \frac{6}{5}$	c

16- ان العبارة y_n بدلالة n تعطى وفق:

$y_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n$	d	$y_n = -9\left(\frac{6}{5}\right)^n$	c	$y_n = 9\left(\frac{1}{5}\right)^n$	b	$y_n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n$	a
------------------------------------	---	--------------------------------------	---	-------------------------------------	---	-------------------------------------	---

17- ان عبارة x_n بدلالة n تعطى وفق:

$x_n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n - 4$	d	$x_n = 9\left(\frac{1}{5}\right)^n - 4$	c	$x_n = -9\left(\frac{6}{5}\right)^n - 4$	b	$x_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n - 4$	a
---	---	---	---	--	---	--	---

18- ان نهاية المتتالية x_n هي:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$	d	$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$	c	$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$	b	$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$	a
--	---	--	---	--	---	--	---

19- قيمة المجموع $S_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \dots - \frac{1}{2^n}$ تساوي:

$1 - \frac{1}{2^n}$	d	$\frac{1}{2^{n-1}}$	c	$\frac{1}{2^{n+1}}$	b	$\frac{1}{2^n}$	a
---------------------	---	---------------------	---	---------------------	---	-----------------	---

20- نهاية المتتالية التي حددها العام $u_n = \frac{1}{2^n}$ تساوي:

غير موجودة	d	1	c	0	b	$+\infty$	a
------------	---	---	---	---	---	-----------	---

21- إذا كانت $u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{2^n}$ فإن u_{n+1} تساوي:

$u_n - \frac{1}{2}$	d	$\frac{1}{2}u_n$	c	$\frac{1}{2} + u_n$	b	$\frac{1}{2} - u_n$	a
---------------------	---	------------------	---	---------------------	---	---------------------	---

22- بفرض $u_n = n\sqrt{n}$ فإن صغر عدد طبيعي n_0 يحقق الشرط (إذا كان $n > n_0$ كان $u_n > 10^3$) هو

10000	d	1000	c	100	b	10	a
-------	---	------	---	-----	---	----	---

23- بفرض $u_n = 5 - \frac{1}{n^2}$, أي من الأعداد الآتية يكون راجحاً على $(u_n)_{n \geq 1}$:

4.99	d	4.9	c	4	b	5	a
------	---	-----	---	---	---	---	---

A	19	A	13	A	7	B	1
C	20	A	14	D	8	D	2
D	21	C	15	B	9	A	3
A	22	A	16	A	10	C	4
B	23	D	17	B	11	A	5
		D	18	C	12	C	6



الدرس السادس

المتاليتان المتجاورتان

الوقت هو

أثمن ما

تملك،

فاستغله

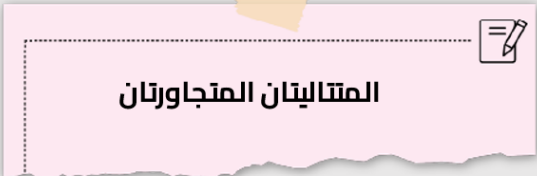
بحكمة.



التحريين (2)

أثبت أن المتتاليتين s_n, t_n متجاورتين حيث :

$$s_n = 1 + \frac{1}{n^2} \quad , \quad t_n = \frac{n-1}{n}$$

[illegible]

المقتاليان المتجاورتان

نقول عن متتاليتين x_n, y_n إنهما متجاورتين إذا تحقق الشرطان:

إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$$

التمرين (1)

أثبت أن المتتاليتين:

$$s_n = \frac{1}{n+1}, t_n = \frac{-1}{2n+4}$$

متجاورتین

[illegible]

التمرين (3)

أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ متجاورتين

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

الحل

التمرين (4)

أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ متجاورتين

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$
$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

الحل



وظيفة

التمرين (6)

أثبت أن المتتاليتين :

$$u_n = 2 - \frac{1}{n} \quad , \quad v_n = 2 + \frac{1}{n^2}$$

متجاورتين .

الحل

التمرين (5)

أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ متجاورتين

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

الحل



التمرين (7)

نتأمل المتتاليتين $(t_n)_{n \geq 0}$ و $(s_n)_{n \geq 0}$, المعرفتين
تدريجياً بالشكل:

$$s_{n+1} = \frac{t_n + 3s_n}{4}, s_0 = 12$$

$$t_{n+1} = \frac{t_n + 2s_n}{3}, t_0 = 1$$

أثبت أن المتتالية $v_n = s_n - t_n$ هندسية،
واحسب نهايتها.

أثبت أن المتتاليتين $(t_n)_{n \geq 0}$ و $(s_n)_{n \geq 0}$ متجاورتان.

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق $u_n =$
 $3t_n + 8s_n$ ثابتة.

ماذا تستنتج بما يتعلق في المتتاليتين $(t_n)_{n \geq 0}$ و
 $(s_n)_{n \geq 0}$ ؟

الحل



$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- و نرسم c_f (سیئتقاطعان عند $x = l$)

- فنكون هنا قد مثلنا u_1 على محور الفواصل

- 8- نرسم مستقيماً أفقياً من u_2 فيقطع
المستقيم $y = x$ في نقطة تكون فاصلتها
هي u_2 فنكون قد مثلنا u_2 على محور
الفواصل

...هكذا

و المسألة التالية توضح ما سبق :

مسألة

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالشكل :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}, \quad u_0 = 2$$

و المطلوب :

أولاً :

ادرس تغيرات التابع f المعرف بالشكل $f(x) =$

$\frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ على المجال $]0, +\infty[$ و نظم جدولاً بها

أثبت أن المستقيم $d: y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط

c_f في جوار $+\infty$ و ادرس الوضع النسبي له مع c_f

أوجد نقاط تقاطع المستقيم $\Delta: y = x$ مع الخط

c_f

ارسم d و Δ ثم ارسم c_f

ثانياً :

مستفيداً مما سبق مثل الحدود

u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل دون حسابها

مباشرةً

يمكن أن تلاحظ من التمثيل السابق عنصر راجع

على u_n و عنصر قاصر عنه

يمكن أن تتوقع جهة اطراد $(u_n)_{n \geq 0}$

ثالثاً :

أثبت مستعملًا البرهان بالتدرج صحة الخاصة :

$$E(n): \ll \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \gg$$

استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة و عين

نهايتها

الحل

الخلاصة: خطوات التمثيل البياني لحدود متتالية على محور الفواصل:

- 1- رسم منحنى التابع f المحقق للعلاقة
 $u_{n+1} = f(u_n)$
- 2- نرسم المستقيم السحري $y = x$ (علماً أن نقطة تقاطعه مع C_f هي حل المعادلة
 $f(x) = x$)
- 3- نحدد u_0 على محور الفواصل
- 4- نرفع منه عموداً إلى C_f ثم نسقط نقطة التقاطع على محور الترتيب فنحصل على u_1 على محور الترتيب
- 5- نسقط هذه النقطة أفقياً على المستقيم السحري ثم نسقط نقطة التقاطع على محور الفواصل فنحصل على u_1 على محور الفواصل
و هكذا ...

تمرين

في كل من الحالات الآتية : مَثِّل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المشار إليه و خُنَّ جهة اطرادها و ما هي نهايتها المحتملة

$$u_{n+1} = 2u_n - 1, u_0 = 1$$

$$u_{n+1} = u_n^2 - 1, u_0 = 1$$



بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1- $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$, $v_n = u_n + \frac{1}{5^n}$
ان المتتالية u_n :

a	متزايدة	b	متناقصة	c	متناقصة تماما	d	غير مطردة
---	---------	---	---------	---	---------------	---	-----------

2- ان المتتالية v_n :

a	متزايدة	b	متناقصة	c	متناقصة تماما	d	غير مطردة
---	---------	---	---------	---	---------------	---	-----------

3- ان $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$:

a	$+\infty$	b	$-\infty$	c	حالة عدم تعيين	d	0
---	-----------	---	-----------	---	----------------	---	---

4- ان المتتاليتين u_n, v_n :

a	متجاورتين	b	متباعدين معا	c	d g a	d	متقاربتين معا
---	-----------	---	--------------	---	-------	---	---------------

5- ان النهاية المشتركة للمتتاليتين السابقتين:

a	5	b	4	c	3	d	2
---	---	---	---	---	---	---	---

6- $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ان قيمة العددين a و b ليكون $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$:

a	$a = 2, b = 3$	b	$a = 1, b = -1$	c	$a = 3, b = 2$	d	$a = -1, b = 1$
---	----------------	---	-----------------	---	----------------	---	-----------------

7- ان قيمة المجموع $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$:

a	$1 - \frac{1}{n+1}$	b	$1 + \frac{1}{n+1}$	c	$\frac{1}{n+1}$	d	$\frac{1}{n-1}$
---	---------------------	---	---------------------	---	-----------------	---	-----------------



8- المتتالية s_n :

a	متقاربة من 0	b	متقاربة من 1	c	متقاربة من 2	d	متباعدة
---	--------------	---	--------------	---	--------------	---	---------

9- $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ أي من العبارات الآتية صحيحة:

a	$\frac{2}{n+2} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$	b	$\frac{3}{n+2} \leq u_n \leq \frac{3}{n}$	c	$\frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n+2}$	d	$\frac{4}{n+1} \leq u_n \leq \frac{4}{n+2}$
---	---	---	---	---	---	---	---

10- المتتالية u_n :

a	متزايدة	b	غير مطردة	c	متناقصة تماما	d	متزايدة تماما
---	---------	---	-----------	---	---------------	---	---------------

11- $x_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$ أي من القضايا الآتية صحيحة:

a	$u_n \geq 3$	b	$u_n \leq 3$	c	$1 \leq u_n \leq 3$	d	$-3 \leq u_n \leq -1$
---	--------------	---	--------------	---	---------------------	---	-----------------------

12- ان هي x_n هي:

a	متزايدة	b	غير مطردة	c	متناقصة تماما	d	متزايدة تماما
---	---------	---	-----------	---	---------------	---	---------------

13- المتتالية x_n :

a	متباعدة	b	متقاربة من 3	c	متقاربة من 0	d	متقاربة من 1
---	---------	---	--------------	---	--------------	---	--------------

14- ان نهاية المتتالية $v_n = \frac{n^2}{n^2+1} + \frac{n^2}{n^2+2} + \frac{n^2}{n^2+3} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n}$ تساوي:

a	$+\infty$	b	1	c	2	d	$-\infty$
---	-----------	---	---	---	---	---	-----------

15- المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ معرفة وفق: $u_n = \frac{3n+1}{n-1}$ ونعلم ان نهاية متتالية عند $+\infty$ هي 3

والمطلوب: جد عددا طبيعيا n_0 يحقق $u_n \in]2.98, 3.02[$ عند كل n اكبر تماما من n_0

a	201	b	25	c	50	d	100
---	-----	---	----	---	----	---	-----

16- المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة وفق: $u_n = n\sqrt{n}$ ونعلم ان نهاية المتتالية عند $+\infty$ هي $+\infty$

والمطلوب: جد عددا طبيعيا n_0 يجعل $u_n > 10^6$ عند كل n اكبر تماما من n_0

a	10^2	b	10^4	c	10^3	d	10
---	--------	---	--------	---	--------	---	----

17- لتكن المتتاليتين $(s_n)_{n \geq 0}$ و $(t_n)_{n \geq 0}$ المعرفتين وفق:

$$s_{n+1} = \frac{t_n + 3s_n}{4}, s_0 = 12, \quad t_{n+1} = \frac{t_n + 2s_n}{3}, t_0 = 1$$

عندئذ تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = 3t_n + 8s_n$

a	متناقصة	b	ثابتة	c	غير مطردة	d	متزايدة
---	---------	---	-------	---	-----------	---	---------

18- لتكن المتتاليتين $(s_n)_{n \geq 0}$ و $(t_n)_{n \geq 0}$ المعرفتين وفق:

$$S_{n+1} = \frac{t_n + 3s_n}{4}, s_0 = 12, t_{n+1} = \frac{t_n + 2s_n}{3}, t_0 = 1$$

عندئذ تكون المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = s_n - t_n$

هندسية أساسها	d	هندسية أساسها	c	هندسية أساسها	b	هندسية أساسها	a
12		$-\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{2}$	

19- نرمز بالرمز $\sum_{k=1}^n u_k$ إلى مجموع الحدود u_k بدءاً من $k = 1$ وحتى $k = n$

وليكن $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$. نضع

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

عندئذ المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$:

متقاربة من 1-	b	متباعدة	c	متقاربة من الصغر	d	متقاربة من الواحد
---------------	---	---------	---	------------------	---	-------------------

20- بفرض $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية متزايدة تماماً وتحقق أن $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ عندئذ يمكن استنتاج أن

u_n متباعدة	b	نهاية u_n غير موجودة	c	نهاية u_n لا تتجاوز 2	d	نهاية u_n تساوي 2
---------------	---	------------------------	---	-------------------------	---	---------------------

21- بفرض $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ عندئذ أي من المتراجحات الآتية صحيحة:

$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$	b	$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$	a
$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$	d	$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$	c

A	15	B	8	A	1
B	16	B	9	B	2
C	17	C	10	D	3
D	18	C	11	C	4
B	19	C	12	D	5
A	20	D	13	B	6
C	21	A	14	A	7





الملف الأخير

7

مسائل الوحدة

هذا الملف

خاص بأسئلة

الوحدة

لنهاية متتالية



السؤال الأول

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{1}{n!}$.

1- احسب الحدود الستة الأولى منها.

2- تيقن أن $0 < u_n < \frac{1}{n}$ ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n \geq 1}$.

[illegible]

السؤال الثاني

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$.

1- أعط قيمة تقريبية لحدودها الأولى من u_1 حتى u_{11} .

2- أثبت أن جميع حدودها، بدءاً من الحد u_{31} ، تحقق $u_n \geq 2^n$. استنتج نهاية $(u_n)_{n \geq 1}$.



السؤال الثالث

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{n^3}{n!}$.

-1 احسب حدودها الستة الأولى.

-2

-a أثبت أن $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$ ، أيًا يكن $n \geq 4$.

-b استنتج نهاية $(u_n)_{n \geq 1}$.





أوجد نهاية كل من المتتاليات $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$ و $(t_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق:

$$x_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1}, \quad y_n = \frac{x_n}{n}, \quad w_n = x_n - n, \quad t_n = \frac{y_n - 1}{w_n - 1}$$

[illegible]

السؤال الخامس

أوجد نهاية كل من المتتاليات $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ و $(w_n)_{n \geq 1}$ و $(t_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق:

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \quad y_n = x_n \sqrt{n}, \quad w_n = x_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad t_n = \frac{y_n}{w_n}$$



السؤال السادس

أوجد نهاية كل من المتتاليات $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ و $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق:

$$x_n = \frac{3n^2 - 4}{n + 1}, \quad y_n = \frac{x_n}{n}, \quad u_n = x_n - 3n$$



c- کیف نختار n کی نحصل علی $u_n < 10^{-8}$ ؟

3- ما نهاية $(u_n)_{n \geq 0}$ ؟

[illegible]

السؤال الثامن

المتتاليتان $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ معرفتان وفق: $y_n = \frac{1}{n}$ و $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

- 1- أثبت أن العدد 1 راجح على $(x_n)_{n \geq 1}$.
- 2- أثبت أن $x_n \leq y_n$ ، أيًا يكن $n \geq 1$.
- 3- أي النتيجة السابقتين أكثر إثارة للاهتمام ؟



السؤال التاسع

المتتاليتان $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ معرفتان وفق: $x_n = \frac{2n^2+5n+3}{2n+1}$ و $y_n = 5n$.

1- أثبت أن $x_n \leq y_n$ ، أيًا يكن $n \geq 1$.

2- أثبت أن $x_n \geq \frac{1}{5}y_n$ ، أيًا يكن $n \geq 1$.



السؤال الحادي عشر

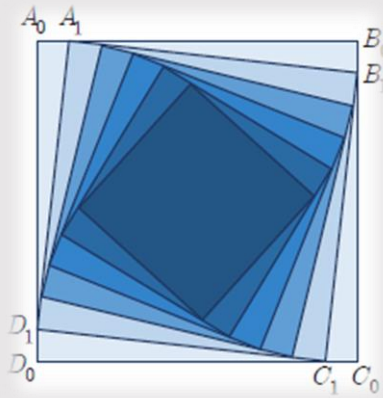
عندما تفرض المناقشة نفسها

ليكن a و b عددين يحققان $a > b > 0$ ولتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.
ادرس تقارب هذه المتتالية.



السؤال الثاني عشر

دراسة متتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$



نرمز إلى المربع $A_0 B_0 C_0 D_0$ الذي طول ضلعه 10 بالرمز S_0 ، وإلى المربع $A_1 B_1 C_1 D_1$ الذي تقع رؤوسه على أضلاع S_0 (كما يشير الشكل المرافق) بالرمز S_1 حيث $A_0 A_1 = 1$. بالطريقة التي رسمنا فيها S_1 انطلاقاً من S_0 ، نرسم S_2 انطلاقاً من S_1 ونقبل إمكانية الاستمرار بهذا الرسم عدداً غير منته من المرات . نرمز إلى طول ضلع المربع S_n بالرمز l_n . نهدف إلى دراسة المتتالية $(l_n)_{n \geq 0}$ وتعيين نهايتها .

السؤال الثالث عشر

مجموع عدد غير منته من الحدود

ليكن $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n . وليكن

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

ادرس المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

السؤال الرابع عشر

دراسة متتاليتين في آن معاً

ليكن a و b عددين يحققان $0 < a < b$. ولتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n \geq 0}$ و $(y_n)_{n \geq 0}$ المعرفتين وفق

$y_0 = b$ و $x_0 = a$ عند كل عدد طبيعي n :

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \text{ g } x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$$

نهدف إلى دراسة المتتاليتين $(x_n)_{n \geq 0}$ و $(y_n)_{n \geq 0}$ في آن معاً.

[illegible]

السؤال الخامس عشر

ادرس تقارب كل من المتتاليتين :

$$x_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1} - 1$$

$$y_n = \frac{10^n - 1}{10^n + 1} - 2$$

السؤال السادس عشر

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق : $u_0 = \frac{3}{2}$ وعند كل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

-1 أثبت، مستعملًا البرهان بالتدرج ، أن $1 \leq u_n \leq 2$ أيًا يكن $n \in \mathbb{N}$.

-2

-a أثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$ أيًا يكن $n \in \mathbb{N}$.

-b استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة .

-3 أهى متقاربة ؟



السؤال السابع عشر

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

- 1- أثبت ، مستعملًا البرهان بالتدرج ، أن $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
- 2- استنتج أن العدد 3 راجح على لمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$.
- 3- أثبت أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة .

[illegible]

السؤال الثامن عشر

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تحقق الشرط التالي : يوجد عدد حقيقي $l > 0$ يحقق عند كل n العلاقة

$$0 \leq u_{n+1} - l \leq \frac{2}{3}(u_n - l)$$

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة إلى l . بافتراض أن $u_0 = 1$ عيّن عدداً حقيقياً N يحقق

$$u_n \in]l - 10^{-3}, l + 10^{-3}[\text{ عند كل } n \geq N.$$



السؤال التاسع عشر

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1- أثبت أن $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ثم استنتج أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة نحو الصفر.

2- المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق :

$$v_n = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$$

a- استفد من عبارة u_n بصيغتها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n .

b- استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$.



السؤال العشرون

ما العبارات الصحيحة وما العبارات غير الصحيحة فيما يأتي ؟ تحقق من إجابتك في كل حالة .

- 1- إذا كانت $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد حقيقي l وكانت $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية ، عندئذ ليس للمتتالية $(u_n + v_n)_{n \geq 0}$ نهاية حقيقية .
- 2- إذا كانت $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد حقيقي l وكانت $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية ، عندئذ ليس للمتتالية $(u_n v_n)_{n \geq 0}$ نهاية حقيقية .
- 3- إذا كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \cdot v_n = l$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ، كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
- 4- إذا كان لمتتالية عنصر قاصر عنها ، كان لها عنصر راجح عليها .



السؤال الواحد والعشرون

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

1- أثبت ان المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متزايدة.

-2

a- أثبت ، مستعملاً البرهان بالتدريج ، أن $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ أيّاً يكن $n \geq 1$.

b- ماذا يمكنك أن تستنتج بالنسبة إلى المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$.



السؤال الثاني والعشرون

ليكن عند كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

1- أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان عند كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$.

2- ليكن ، في حالة عدد طبيعي n , $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. عبّر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$.

[illegible]

السؤال الثالث والعشرون

لنضع في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n , $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

- 1- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متزايدة .
- 2- اكتب $u_{2n} - u_n$ واستنتج أن $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
- 3- أثبت ، مستعملاً البرهان بالتدرج ، أن $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ ، أيأ يـكن العدد الطبيعي n غير المعدوم .
- 4- هل للمتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ نهاية حقيقية ؟

[illegible]

السؤال الرابع والعشرون

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة عند $n \geq 1$ طبيعي وفق :

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \frac{n}{n^2 + 3} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}$$

1- أثبت أن $\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$ ، أيّاً يكن $n \geq 1$.

2- استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$. ما نهايتها ؟



السؤال الخامس والعشرون

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1- أثبت أن $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ ، أياً يكن $n \geq 1$.

2- استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$. ما نهايتها ؟

[illegible]

السؤال السادس والعشرون

يُبين أن المتتاليتين $(x_n)_{n \geq 1}$ و $(y_n)_{n \geq 1}$ متجاورتان

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \quad \text{g} \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$



السؤال السابع والعشرون

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 3$ وعند كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{u_n+1}$.

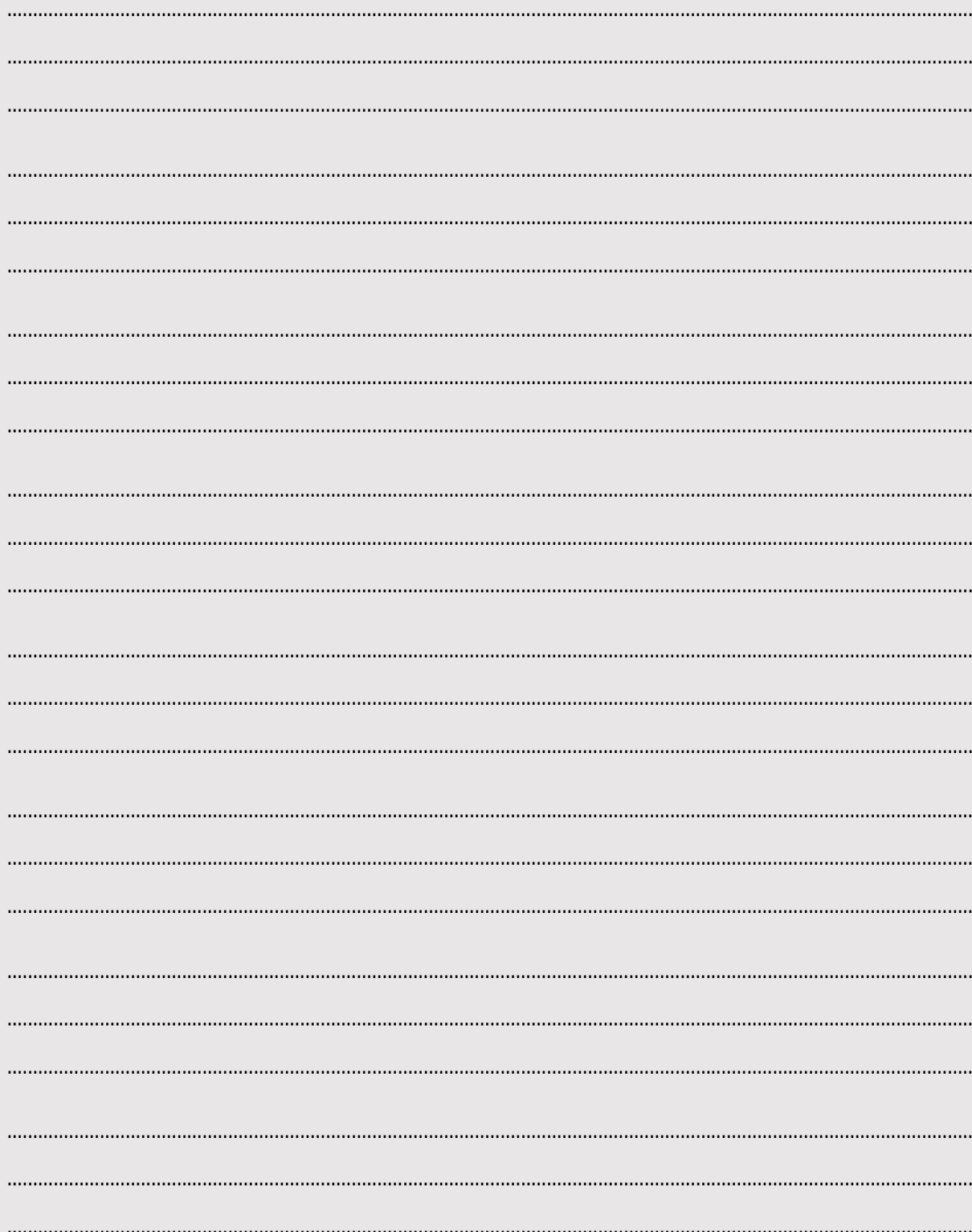
1- أثبت أن $u_n > 0$ ، أيّاً يكن n .

2- المتتالية $(t_n)_{n \geq 0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي n وفق $t_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$. أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n \geq 0}$

متتالية هندسية واحسب نهايتها.

3- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.





السؤال التاسع والعشرون

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 2$ وعند كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$.

- 1- أثبت أن $u_n > 0$, , أيًا يكنك n .
- 2- المتتالية معرفة بصيغة من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$, عيّن التابع f المعروف على $]0, +\infty[$.
 - a- ادرس تغيرات التابع f وارسم خطه البياني C_f ومقارباته , وارسم على الشكل نفسه المستقيم d الذي معادلتها $y = x$, بعد أن تحسب إحداثيتا نقطة تقاطع d مع C_f .
 - b- يبين أن ما سبق يفيد في إثبات أن f متزايد على المجال $[\sqrt{2}, +\infty[$ وأن $f(x) \leq x$ على هذا المجال .
- 3- استفد من الرسم لتنشئ الحدود الأولى من المتتالية المدروسة . أوجدتها مژردة ؟ ما جهة اطرافها ؟ أهى محدودة ؟ ثم برهن صحة توقعاتك عن طريق الاستفادة من الطلب b السابق لتبرهن بالتدريج أن : $u_n \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2}$ مهما كان العدد n .
- 4- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها .

[illegible]

السؤال الثلاثون

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = \frac{1}{2}$ وعند كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + 2u_n$.

1- احسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 و u_5 .

2- نرمز بالرمز f إلى التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$.

a- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

b- أثبت أنه إذا انتمى x إلى المجال $[0, 3]$ ، انتمى $f(x)$ إلى المجال $[0, 3]$.

3- استنتج من السؤال السابق أن :

a- العدد 3 عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$.

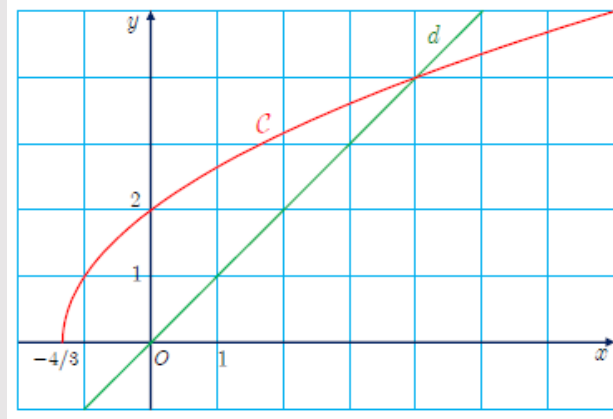
b- المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة.

4- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها مع ملاحظة أن $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق $u_0 > -\frac{4}{3}$ و $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$ عند كل عدد طبيعي n . نجد في

الشكل أدناه، الخط البياني C للتابع f المعرف على المجال $[-\frac{4}{3}, +\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{4 + 3x}$.

والمستقيم d الذي المعادلة $y = x$.



1- ما إحداثيتا نقطة تقاطع الخط C والمستقيم d ؟

2- نفترض في هذا السؤال أن $u_0 = 6$.

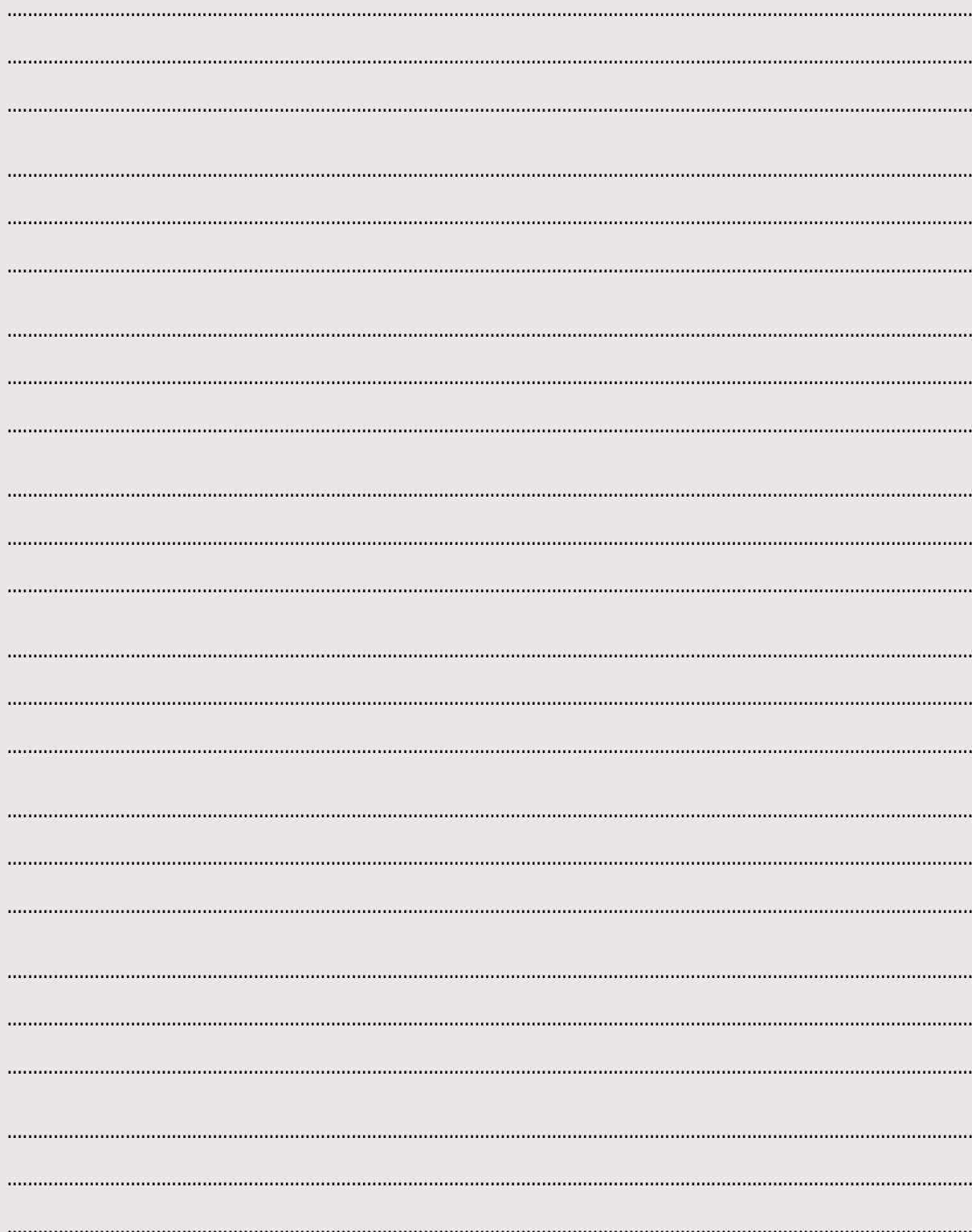
a- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ محدودة من الأدنى.

b- ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$.

-3

b- هل هذه النتيجة صحيحة أيضاً عندما $u_0, 4 < -\frac{4}{3}$ ؟

[illegible]



السؤال الأول

نتأمل المتتاليتين :

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad , \quad y_n = x_n + \frac{1}{n}$$

أثبت أن $(x_n), (y_n)$ متجاورتين

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines, typical of notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

[illegible]

السؤال الثاني

[illegible]

السؤال الثالث

من أجل $a > b > 0$ نضع $u_n = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ و المطلوب :

1- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2- بفرض $v_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$. أثبت أن $v_n = \frac{1 - u_n}{1 + u_n}$ ثم استنتج نهاية v_n

[illegible]

السؤال الرابع

لتكن لدينا المتتاليتان $(x_n)_{n \geq 0}$ و $(y_n)_{n \geq 0}$ المعرفتان وفق:

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = x_n + 2 \end{cases}$$

- 1- أثبت أن المتتالية x_n حسابية وعين أساسها وحدها العام.
- 2- ادرس اطراد المتتالية y_n .
- 3- أثبت أن:

$$y_{n+1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

- 4- استنتج عبارة y_n بدلالة n ، هل المتتالية y_n متقاربة أم متباعدة؟ ولماذا؟

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

السؤال الخامس

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق :

$$u_0 = 2$$

$$u_{n+1} = 2u_n - 3n + 4$$

و لتكن المتتالية $(t_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية تحقق أن $t_{n+1} = 2t_n - 3n + 4$

1- جد بدلالة n

2- أثبت أن المتتالية $v_n = u_n - t_n$ هندسية ثم اكتب بدلالة n

3- استنتج u_n بدلالة n و أثبت أنها متباعدة



السؤال السادس

ليكن f التابع المعرف على المجال $I = [0,1]$ وفق : $f(x) = \frac{7x+2}{x+8}$

1- ادرس تغيرات f ثم جد $f(I)$

2- نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ وفق $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{7u_n+2}{u_n+8}$

أ- برهن أن $0 \leq u_n \leq 1$ من أجل $n \geq 0$

ب- احسب u_1, u_2 ثم ادرس اطراد u_n

3- أهى متقاربة ؟ جد نهايتها في حالة الإيجاب



السؤال السابع

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{5}{2}u_n - u_{n-1}; n \geq 1 \end{cases}$$

ولتكن المتتالية v_n المعرفة وفق:

$$v_n = u_{n+1} - 2u_n$$

1- أثبت أن المتتالية v_n هندسية واستنتج أن $v_n = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2- اكتب بدلالة n المجموع $S_n = v_2 + v_4 + \dots + v_{2n}$ واستنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$.

3- ادرس اطراد المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$ وبين أنها متقاربة.



السؤال الثامن

نتأمل المتتالية

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

1- بين أنه يوجد عددين a, b يحققان أن $u_n = a + b\left(\frac{1}{2}\right)^n$

2- نضع $t_n = 1 + \frac{1}{n}$ أثبت أن $(t_n), (u_n)$ متجاورتان

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.