احسب النهايات الآتية :

1- $\boldsymbol{lim_{x\to\infty}\ \frac{sin\,x}{x^2}}$

2- $\boldsymbol{lim_{x\to\infty}\ \frac{2\,sin\,x}{\sqrt{x}}}$

3- $\boldsymbol{lim_{x\to\infty}\ \frac{cos^2\,x}{x+1}}$

4- $\boldsymbol{lim_{x\to\infty}\ \frac{x-|\,cos\,x|}{x^2+7}}$

5- $\boldsymbol{lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2x+\sin x}{x-1}}$

6- $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty}\ \frac{1-cos2x}{x}}$ ثم استنتج $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} f(x)}$ إذا علمت أن $\boldsymbol{|f(x)-600| \le \frac{1-cos2x}{x}}$

MY طريقي

الحلول :

التمرين الأول :

نلاحظ أن مضمون sin يسعى الى $+\infty$ لذلك نطبق نظرية الإحاطة

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نقسم على x^2 :

$$-\frac{1}{x^2} \le \frac{\sin x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

فحسب نهايات الأطراف :

$$lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x^2} = 0\ , lim_{x\to\infty} = \frac{1}{x^2} = 0$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة :

$$lim_{x\to\infty}\ \frac{\sin x}{x} = 0$$

يجب الانتباه الى النقاط التالية:

1- عند ضرب طرفي المتراجحة بمقدار سالب تقلب إشارة المتراجحة .
2- عند القسمة لطرفي المتراجحة على عدد سالب تقلب إشارة المتراجحة.
3- عند إضافة عدد سالب او موجب لاتتأثر المتراجحة.
4- عند الضرب او القسمة بمجهول ننتبه اذا كان موجباً او سالباً أو ((هيك وهيك))

التمرين الثاني :

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نضرب ب 2

$$-2 \leq 2\sin x \leq 2$$

نقسم على: $\sqrt{x} > 0$

$$\frac{-2}{\sqrt{x}} \leq \frac{2\sin x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{x}} = 0 \ , lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

ومنه حسب نظرية الإحاطة فإن :

$$lim_{x\to\infty} \frac{2\sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

التمرين الثالث :

لدينا $0 \leq \cos^2 x \leq 1$

نقسم على $x+1>0$ (لان $x \to \infty$ وبالتالي $x+1 \to \infty$ إذن $x+1>0$)

$$0 \leq \frac{\cos^2 x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

$$lim_{x\to\infty}(0) = 0 \ , \quad lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة :

$$lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2 x}{x+1} = 0$$

التمرين الرابع :

لدينا $0 \leq |\cos x| \leq 1$

نضرب الطرفين ب (-1)

$$0 \geq -|\cos x| \geq -1$$

نضيف x:

$$x \geq x - |cosx| \geq x - 1$$

نقسم على $x^2 + 7 > 0$

$$\frac{x}{x^2+7} \geq \frac{x - |\cos x|}{x^2+7} \geq \frac{x-1}{x^2+7}$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+7} = 0 \ , lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2+7} = 0$$

وحسب مبرهنة الإحاطة :

$$lim_{x\to\infty} \frac{x - |\cos x|}{x^2+7} = 0$$

التمرين الخامس :

$$\boldsymbol{lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2x + \sin x}{x-1}}$$

لدينا :

$$-1 \leq sinx \leq 1$$

نضيف $2x$:

$$2x - 1 \leq 2x + sinx \leq 2x + 1$$

نقسم على $x - 1 < 0$ لأن $x \to -\infty$

$$\frac{2x-1}{x-1} \geq \frac{2x+sinx}{x-1} \geq \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

فحسب الإحاطة :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

السؤال السادس :

$$\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} \frac{1 - cos2x}{x}}$$

$$-1 \leq cos2x \leq 1$$

نضرب -1

$$1 \geq -cos2x \geq -1$$

نضيف 1 :

$$2 \geq 1 - cos2x \geq 0$$

نقسم على x :

$$\frac{2}{x} \geq \frac{1 - cos2x}{x} \geq 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} 0 = 0$$

فحسب الإحاطة $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-cos2x}{x} = 0$

و حسب الإحاطة الثالثة يكون :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 600$$