النهايات

حالات عدم التعيين

❖حالة $\frac{\infty}{\infty}$:

1-نخرج عامل مناسب من البسط و من المقام

2-نختصر

3-نعوض

❖حالة $\infty - \infty$:

نميز حالتين :

أ- نهاية سعيدة : ضرب بالمرافق

(في حال وجود جذر في البسط و جذر في المقام قد تحتاج للضرب بمرافق البسط و مرافق المقام)

ب- نهاية حزينة : إخراج عامل مشترك

❖حالة $\frac{0}{0}$:

نميز الحالات الآتية :

أ- في حال وجود جذر : ضرب بالمرافق

ب- في حال وجود توابع مثلثية :

دساتير + مبرهنات

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

ت- في حال السعي إلى الصفر : x^n عامل مشترك

ث- في حال السعي إلى عدد : تحليل البسط و المقام أو قسمة اقليدية

ج- تعريف العدد المشتق

❖حالة $0.\infty$:

أولاً : تغيير المتحول :

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

....

....

....

....

....

....

$$\lim_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

....

....

....

....

....

....

$$\lim_{x\to+\infty} xln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

....

....

....

....

....

....

$$\lim_{x\to 0} xln^2x$$

....

....

....

....

....

....

ثانياً: مهارات و تغيير صياغة

تدرب 1	
1	$f(x)=x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)\ ,a=+\infty$
2	$f(x)=sinx\,.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ ,a=0^+$
3	$f(x)=x(lnx-1)\ ,a=0^+$

❖حالة 1^∞ :

إذا كان التابع المدروس $f(x)$:

1- نأخذ $\ln(f(x))$

2- نحسب نهايته غالباً

(بإظهار $\frac{\ln(1+t)}{t}$)

3- فبتكون النهاية المطلوبة هي :

الجواب e

تدرب2	
1	$f(x)=\frac{6x^2+2-2cos2x}{2x^2}$ a=0
2	$f(x)=\frac{2cosx-2}{\sqrt{4x^2+2}-\sqrt{2}}$ $a=0$
3	$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}$ $a=+\infty$
4	$f(x)=\frac{\sqrt{1+sinx}-\sqrt{1-sinx}}{x}$ $a=0$
5	$f(x)=(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$ $a=1$
6	$f(x)=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ $a=+\infty$
7	$f(x)=\frac{sinx}{\sqrt{1+x}-1}$ $a=0$
8	$f(x)=-\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ $a=+\infty$
9	$f(x)=\frac{x^2+2-2\cos(\sqrt{x})}{x}$ $a=0$
10	$f(x)=(3+x)^{\frac{1}{x+2}}$ $a=-2$
11	$f(x)=\frac{7x-7}{\sqrt{3x+1}-2}$ $a=1$
12	$f(x)=\frac{\sqrt{4x+5}-3}{2-\sqrt{3x+1}}$ $:a=1$

النهايات اللوغارتمية :

نهايات بسيطة	
1	$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$
2	$\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$

نهايات عند $+\infty$	
1	$\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$
2	$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{lnx}=+\infty$

و تعمم المبرهنات السابقة إلى :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x^n}=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{lnx}=+\infty$$

نهايات عند الصفر و الواحد	
1	$\lim_{x\to0^+}xln(x)=0^-$
2	$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
3	$\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1$
4	$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$
5	$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{lnx}=1$

تدرب3	
1	$f(x)=\frac{lnx}{x}$
2	$f(x)=x-lnx$
3	$f(x)=\frac{1}{x}+lnx$
4	$f(x)=\frac{1}{x}-lnx$
5	$f(x)=\frac{x}{lnx}$
6	$f(x)=\frac{lnx}{x^2}$
7	$f(x)=x(1-lnx)$
8	$f(x)=\frac{1}{x}(lnx-1)$
9	$f(x)=\frac{x-lnx}{x}$
10	$f(x)=\frac{x+1}{lnx}$
11	$f(x)=\frac{xlnx}{x+1}$
12	$f(x)=\frac{xlnx}{x-1}$
13	$f(x)=\ln(2x+1)-\ln(x)$
14	$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$
15	$f(x)=\frac{\ln(1+sinx)}{x}\ ,a=0$
16	$f(x)=\frac{\ln(\sqrt{x}+1)-ln\sqrt{2}}{x-1}$ $a=1$
17	$f(x)=\frac{ln\sqrt{x}}{x}\ ,a=+\infty$
18	$f(x)=\frac{lnx}{\sqrt{x}}$

النهايات الأسية :

نهايات بسيطة	
$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$	1
$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$	2

نهايات عند $+\infty$	
$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$	1
$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$	2

نهايات عند $-\infty$	
$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0^-$	1

نهايات عند الصفر	
$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$	1
$\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=1$	2

تدرب 4	
1	$f(x)=e^x-x^2$
2	$f(x)=\frac{2e^x+1}{1+e^x}$
3	$f(x)=\ln(x)-e^x$
4	$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$
5	$f(x)=(3-x)e^x$
6	$f(x)=\frac{e^x-1}{x-1}$
7	$f(x)=\frac{e^x-1}{2x}$
8	$f(x)=\ln(e^x+2)$
9	$f(x)=2xe^{-x}$
10	$f(x)=2x-1+e^{-x}$
11	$f(x)=e^{2x}-x-2$
12	$f(x)=x-\ln(e^x+1)$ $a=+\infty$

المقاربات :

❖الإثبات :

1- نشكل الفرق $f(x)-y_{\Delta}$

2- نثبت أن $\lim_{x\to\infty}(f(x)-y_{\Delta})=0$

❖دراسة الوضع النسبي:

نميز حالتين :

الفرق واضح الإشارة	الفرق غير واضح الإشارة
نحدد فوراً : $f(x)>0$ يكون c فوق Δ $f(x)<0$ يكون c تحت Δ	ندرس الإشارة نشكل جدول

تدرب5	
$f(x)=4x+\frac{1+\sin^2 x}{x^4+1}$	$\Delta: y=4x$
$f(x)=2x-1+\frac{1}{x}$	$\Delta: y=2x-1$
$f(x)=x+1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$	$\Delta: y=x+1$
$f(x)=\frac{x^3+2x-2x\cos 2x}{2x^2}$	$\Delta: y=\frac{1}{2}x$

❖إيجاد معادلة المقارب المائل :

نميز الحالات الآتية :

1- إذا كان التابع من الشكل :
$f(x)=ax+b+u(x)$
- نضع $\Delta: y=ax+b$
- يكون $f(x)-y_{\Delta}=u(x)$
- نحسب النهاية

2- إذا كان التابع كسر درجة بسطه أكبر من درجة مقامه :
- نقسم قسمة اقليدية

3- التفريق : عندما يكون المقام :
$\frac{\dots\dots\dots\dots}{ax}$

4- الإتمام إلى مربع كامل:
$$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$$
- نتمم ما داخل الجذر إلى مربع كامل $a(x-x_0)^2$
- نضع:
$$h(x)=f(x)-\sqrt{a(x-x_0)^2}$$
$$h(x)=\sqrt{a(x-x_0)^2+k}-\sqrt{a(x-x_0)^2}$$
- نضرب بالمراف:
$$h(x)=\frac{k}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}$$
- نحسب النهاية
- نستنتج :
$$d_{1,2}: y=\sqrt{a(x-x_0)^2}$$
$$y=|a(x-x_0)|$$

و نميز حالات القيمة المطلقة فنحصل على مقاربين

5- **الطريقة العامة :**
$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax$$

تدرب6:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+1}$

1- جد عددين حقيقين a و b يحققان الشروط :
$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$$

2- استنتج معادلة المقارب المائل Δ

3- ادرس الوضع النسبي له مع C

تدرب 7: (دورة 2021- تكميلي)

ليكن f المعرف على $]-\infty,0[$ وفق :

$$f(x)=\frac{2x^2+\cos^2 x}{x}$$

1- جد معادلة المقارب المائل للخط c_f

2- ادرس الوضع النسبي له مع c_f

تدرب 8: ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=\sqrt{4x^2+4x+5}$$

جد معادلة المقارب المائل للخط C_f ثم ادرس الوضع النسبي لهما

الاستمرار :

شرط الاستمرار عند النقطة a :

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

و يأتي السؤال على صيغتين :

1- ادرس استمرار التابع

2- عين الثابت m ليكون f مستمراً

تدرب 9 :

ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x^3-1} & ; \ x\neq 1\\ \dfrac{4}{3} & : x=1\end{cases}$$

ادرس استمرار f على R

تدرب 10 :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-lnx} & : x>0\\ 0 & : x=0\end{cases}$$

ادرس استمرار التابع f عند الصفر

تدرب 11: جد قيمة الثابت A ليكون f مستمر على R

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{2x} & : x\neq 0\\ 2A-\dfrac{1}{2} & : x=0\end{cases}$$

التفسير الهندسي للنهايات

أولاً: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

صيغة السؤال :

جد عدداً حقيقياً A بحيث $f(x)\in]a,b[$ من أجل $x>A$:

1- نحدد المركز $l=\frac{b+a}{2}$

2- نحدد نصف القطر $\varepsilon=b-l$

3- نعوض في القانون $|u_n-l|<\varepsilon$

تدرب 12:

ليكن f التابع المعرف على $]e^{-2},+\infty[$ وفق

$$: f(x)=\frac{lnx-1}{lnx+2}$$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و ما هو التفسير الهندسي

2- جد عدداً حقيقياً A يحقق الشرط : $f(x)\in]0.99,1.01[$ من أجل $x>A$

الحل :

-1

$$f(x)=\frac{lnx\left(1-\frac{1}{lnx}\right)}{lnx\left(1+\frac{2}{lnx}\right)}=\frac{1-\frac{1}{lnx}}{1+\frac{2}{lnx}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

$y=1$ مقارب أفي في جوار $+\infty$

2- نحدد المركز $l=\frac{1.01+0.99}{2}=1$

نحدد نصف القطر :

$$\varepsilon=b-l$$

$$\varepsilon = 1.01 - 1 = 0.01 = \frac{1}{100}$$

نعوض في القانون :

$$|u_n - l| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{lnx - 1}{lnx + 2} - 1\right| < \frac{1}{100}$$
$$\left|\frac{-3}{lnx + 2}\right| < \frac{1}{100}$$

و لأن $x \to +\infty$ فإن $lnx + 2 > 0$

$$\frac{3}{lnx + 2} < \frac{1}{100}$$
$$lnx + 2 > 300$$
$$lnx > 298$$
$$x > e^{298}$$

فنختار $A = e^{298}$ أو أي عدد حقيقي أكبر منه

ثانياً: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$

صيغة أولى : جد عدداً حقيقياً α يحقق الشرط:

$f(x) > M$ من أجل $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$

صيغة ثانية : عين مجالاً I مركزه x_0 يحقق :

$f(x) > M$ عندما $x \in I$ (أو $x \in I\backslash\{x_0\}$)

1- نضع $f(x) > M$
2- بما أن $x \to x_0$ فنستبدل البسط بـ A حيث A يساوي تقريباً البسط
3- نعزل المقام لنحاول الوصول إلى الشكل :

$$|x - x_0| < \alpha$$

4- بذلك نكون أوجدنا قيمة α
5- إذا أردنا المجال , فحسب خواص القيمة المطلقة :

$$-\alpha < x - x_0 < \alpha$$

نضيف x_0 للأطراف :

$$x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$$

فنجد المجال المطلوب

تدرب 13 :

ليكن f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق :

$$f(x) = \frac{5x - 1}{(x - 1)^2}$$

1- احسب نهاية $f(x)$ عند الواحد
2- جد عدداً حقيقياً α يحقق الشرط :
$f(x) > 10^3$ عندما
$x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[$

الحل :

-1

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$$

2- نضع :

$$f(x) > 10^3$$
$$\frac{5x - 1}{(x - 1)^2} > 10^3$$

بما أن $x \to 1$ فإن $5x - 1 = A \approx 4$

$$\frac{A}{(x - 1)^2} > 10^3$$
$$(x - 1)^2 < \frac{A}{10^3}$$

نختار $\alpha = 3.6$ (قريب من 4 و يمكن جذره)

$$(x - 1)^2 < \frac{3.6}{10^3}$$
$$(x - 1)^2 < \frac{36}{10^4}$$

نجذر :

$$|x - 1| < \frac{6}{10}$$
$$|x - 1| < 0.06$$

إذن $\alpha = 0.06$

و إذا كان المطلوب مجالاً :

$$-0.06 < x - 1 < 0.06$$
$$1 - 0.06 < x < 1 + 0.06$$
$$0.94 < x < 1.06$$
$$I =]0.94, 1.06[$$

ثالثاً : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

صيغة السؤال : جد عدداً حقيقياً A بحيث :

$f(x) > M$ عندما $x > A$

1- ننطلق من $f(x) > M$

2- نعزل x فنصل إلى $x > A$

رابعاً: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

صيغة السؤال :

جد مجالاً I مركزه x_0 بحيث $f(x) \in]a,b[$

من أجل $x \in I$

1- ننطلق من : $a < f(x) < b$

2- نعزل x فنصل إلى : $A < x < B$

نهاية تابع مركب :

إذا كان $g(x) = f\big(u(x)\big)$ و طُلب حساب

$$\lim_{x\to a} g(x)$$

1- نحسب نهاية المضمون عند a أي :

$$\lim_{x-a} u(x) = l$$

2- نستبدل المضمون بـ u و نعوض في f فنحصل على : $f(u)$

3- نحسب نهاية التابع الجديد عندما $u \to l$

الصيغة الأولى : ليكن $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x+1}{3x+1}\right)$

احسب نهاية f عند $+\infty$

1- نرمز للمضمون $u(x)$:

$$u(x) = \frac{\pi x+1}{3x+1}$$

2- نحسب نهاية $u(x)$ عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \frac{\pi}{3}$$

3- نضع $f(x) = \cos(u)$

$$\lim_{u\to\frac{\pi}{3}} \cos(u) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

الصيغة الثانية :

استنتج $\lim_{x\to a} f\big(f(x)\big)$

بشكل مشابه تماماً :

1- نفرض المضمون $u(x) = f(x)$

2- نحسب $\lim_{x\to a} u(x) = l$

3- نضع المضمون u فنحصل على : $f(u)$

4- نحسب $\lim_{u\to l} f(u)$

مثال: ليكن $f(x) = \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2- استنتج $\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)$

الحل :

1- $\lim_{x\to+\infty} f(x): \frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

2- نضع $u(x) = f(x)$:

وجدنا أن :

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$$

بالتالي :

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{u\to 0} f(u) = \lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{e^{2u}+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

تابع الجزء الصحيح :

تدرب 14 :

$$f(x) = 2x + E(x) \ : x \in [0,3[$$

1- اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

2- ادرس استمرار f على المجال $[0,3[$

3- ارسم c_f

4- احسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2+1}$

بنك النهايات

السؤال الأول : ليكن $f(x)=\sqrt{4x^2+5}$ خطه البياني C

احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right)$

ثم استنتج معادلة المقارب المائل في جوار $+\infty$

السؤال الثاني : ليكن C الخط البياني للتابع :

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2- أثبت أن $d: y=x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي لـ d مع C

4- أثبت أن f فردي

السؤال الثالث : ليكن C الخط البياني للتابع :

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

1- جد الأعداد a,b,c التي تحقق أن :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}$$

2- استنتج معادلة المقارب المائل و ادرس وضعه النسبي مع C

السؤال الرابع: احسب $\lim_{x\to0} x(lnx)^2$

السؤال الخامس : ليكن $f(x)=\frac{3}{2+cosx}$

1- أثبت محدودية f

2- استنتج $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x)$

السؤال السادس : ليكن f التابع المعرف على $]e^{-1},+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{2+lnx}{1+lnx}$$

1- جد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعطِ عدداً حقيقياً A يحقق أن $f(x)$ من المجال $]0.9,1.1[$ عندما $x>A$

2- استنتج $\lim_{x\to+\infty} f\left(f(x)\right)$

السؤال السابع : ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xsinx}{\sqrt{x^2+1}-1} & : x\neq0\\ m & : x=0\end{cases}$$

جد قيمة m ليكون f مستمراً عند الصفر

السؤال الثامن : احسب

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+sinx)}{x}$$

السؤال التاسع: $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-3}$

1- جد عددين a, b يحققان :

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$$

2- استنتج معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي له مع C

السؤال العاشر : ليكن $f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$

1- احسب $\lim_{x\to-1} f(x)$

2- جد مجالاً I مركزه -1 يحقق الشرط:

إذا انتمت x إلى I كان $f(x)>10^2$

السؤال الحادي عشر : أوجد نهاية التابع :

$$f(x)=\frac{cosx-1}{x^2}+\frac{1}{2}$$

عند الصفر

السؤال الثاني عشر :

ليكن $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2- أثبت أن $d: y = x - 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي

السؤال الثالث عشر :

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$$

ما نهاية f عند $-\infty$

السؤال الرابع عشر : ليكن

$$g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2- نضع $f(x) = \frac{g(x)}{x}$. احسب $\lim_{x\to0} f(x)$

السؤال الخامس عشر :

ليكن $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}$

احسب نهاية f عند أطراف مجال تعريفه

السؤال السادس عشر : احسب :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

السؤال السابع عشر :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(1 + lnx)$$

الاشتقاق

تعريف العدد المشتق :

الصيغة الأولى : أثبت أن التابع f قابل للاشتقاق عند النقطة a

1- نشكل التابع $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

2- نحسب $\lim_{x\to a} g(x)$

3- إذا كان الجواب : عدد فهو قابل (يقبل مماس ميله الجواب)

إذا كان الجواب : لانهاية غير قابل (يقبل مماس شاقولي $x = a$)

4- في حال وجود قيمة مطلقة فإننا نحسب النهاية من اليمين و النهاية من اليسار فإذا كان :

$$\lim_{x\to a^+} g(x) \neq \lim_{x\to a^-} g(x)$$

فهو غير قابل للاشتقاق (يقبل نصفي مماسين)

تدرب 15:	
ادرس قابلية اشتقاق f عند a	
1	$f(x) = x\ln(x+1)\,, a = 0$
2	$f(x) = \sin(\sqrt{x})\quad, a = 0^+$
3	$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x - lnx} & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ $a = 0$

الصيغة الثانية : إزالة حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

تدرب 16 :

ليكن $f(x) = e^x$ و المطلوب:

1- احسب $f(ln2)$ و $f'(x)$ و $f'(ln2)$

2- استنتج قيمة النهاية :

$$\lim_{x\to ln2} \frac{e^x - 2}{x - ln2}$$

تدرب 17 : باستخدام تعريف العدد المشتق احسب النهاية :

$$\lim_{x \to e} \frac{x \ln x - e}{x - e}$$

معادلة المماس و نصف المماس :

لتعيين معادلة المماس نحتاج معرفة :

1- الفاصلة a
2- التراتيب $f(a)$
3- الميل $m = f'(a)$

لنعوض في القانون :

$$T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

أما نصف المماس من اليمين :

$$T: y = f'(a^+)(x-a) + f(a)$$

و نصف المماس من اليسار :

$$T: y = f'(a^-)(x-a) + f(a)$$

تدرب 18 : اكتب معادلة المماس الأفقي للخط C_f للتابع $f(x) = e^{2x} - 2x$

تدرب 19 : اكتب معادلة المماس للخط C_f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب حيث :

$$f(x) = \ln(x+1)$$

تدرب 20 : اكتب معادلة الماس للخط C_f للتابع

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

الموازي للمستقيم $y - 4x = 0$

تدرب 21 :

ليكن $f(x) = \frac{x+|x|}{x+2}$

1- ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر

2- اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للتابع f

التقريب التآلفي :

نجزئ العدد صعب الحساب إلى جزأين :

a , h

نعوض في القانون :

$$\boxed{f(a+h) \approx hf'(a) + f(a)}$$

تدرب 22 :

ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$$

1- أثبت أن f مستمر عند الصفر
2- احسب $f'(x)$ على R^*
3- جد قيمة تقريبية لـ $f(0.1)$

الاشتقاق المركب :

الصيغة الأولى :

أثبت أن التابع $g(x) = f\big(u(x)\big)$ اشتقاقي على I :

يجب تحقق شرطان :

1- المضمون اشتقاقي على المجال المعطى
2- المضمون ينتمي إلى مجال اشتقاقية f

الصيغة الثانية : احسب مشتق $g(x) = f(u(x))$

$$g'(x) = f'\big(u(x)\big).u'(x)$$

تدرب 23 : ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{lnx}{x+1}$$

1- احسب $f'(x)$
2- نضع $g(x)=f(sinx)$
أ- أثبت أن g اشتقاقي على $I=]0,\frac{\pi}{2}[$
ب- احسب $g'(x)$ على I

تدرب 24 : ليكن f التابع المعرف وفق :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x^2}$$

1- احسب $f'(x)$
2- استنتج مشتقات التوابع :

$$g(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$$
$$h(x)=\frac{e^{sinx}-1}{\sin^2 x}$$

المشتقات من مراتب عليا :

1- نحسب $f'(x),f''(x)$
2- نثبت بالتدريج صحة العلاقة التي تعطي صيغة $f^{(n)}(x)$ بدلالة n

حيث للانتقال من الفرض إلى الطلب نشتق الطرفين مع مراعاة أن :

$$(f^{(n)}(x))'=f^{(n+1)}(x)$$

تدرب 25:

$$f(x)=-\ln(1-x)$$

1- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$
2- أثبت بالتدريج أنه من أجل كل $n\geq 1$:

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

دراسة اطراد تابع و حل المتراجحات المختلطة:

1- نشتق التابع f
2- نعدم المشتق
3- ننظم جدول اطراد

و في حال طُلب استنتاج متراجحة فإننا نستنتجها من جدول الاطراد و تحديداً من حقل $f(x)$

تدرب 26 : ليكن $g(x)=e^x+2-x$

1- ادرس اطراد $g(x)$
2- استنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x)>0$

تدرب 27 :

أثبت أن $\ln(x+1)\leq\sqrt{x+1}$ مهما يكن $x>-1$

التابع الفردي و التابع الزوجي

الشرط الأول : $x\in D_f\rightarrow -x\in D_f$

الشرط الثاني : $f(-x)=\begin{cases} f(x) & \text{زوجي:} \\ -f(x) & \text{فردي:} \end{cases}$

الصفات الشاظرية :

التابع الفردي متناظر بالنسبة للمبدأ

التابع الزوجي متناظر لمحور التراتيب

تدرب 28 :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,2]$ وفق :

$$f(x)=x\sqrt{4-x^2}$$

1- ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $a=2$ و $a=-2$ و فسر النتائج هندسياً

2- أثبت أن f فردي و اذكر الصفة التناظرية

3- ادرس تغيرات f على المجال [0,2]

4- ارسم c_f

5- استنتج الخط البياني للتابع g المعرف وفق :

$$g(x)=|x|\sqrt{4-x^2}$$

تدرب 29 :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف وفق :

$$f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

1- تحقق أن $D_f=]-2,2[$

2- أثبت أن f فردي و استنتج الصفة التناظرية

3- ادرس تغيرات f على المجال $]-2,0]$

4- ارسم c_f

5- استنتج الخط البياني للتابع:

$$g(x)=\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$$

مركز التناظر

تكون النقطة $I(a,b)$ مركز تناظر للخط c_f إذا تحقق شرطان :

الشرط الأول :

$$x\in D_f\rightarrow 2a-x\in D_f$$

1- ننطلق من $x\in D_f$

2- نضرب الطرفين بناقص (إذا كانت مجموعة التعريف على شكل مجال نعكس ترتيب الأطراف)

3- نضيف للطرفين $2a$

4- نصل إلى $2a-x\in D_f$

الشرط الثاني :

$$f(2a-x)+f(x)=2b$$

1- نحسب $f(2a-x)$ باستبدال كل x بـ $2a-x$

2- نحسب المجموع :
$f(2a-x)+f(x)$

3- نصل إلى $2b$

تدرب 30 :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x)=\frac{2x^2+x+7}{x+1}$:

1- أثبت أن $I(-1,-3)$ مركز تناظر

2- جد الأعداد a,b,c بحيث يكون
$f(x)=a+b+\frac{c}{x+1}$

3- استنتج معادلة المقارب المائل و ادرس الوضع النسبي لهما

4- ادرس تغيرات f

5- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم c_f

6- استنتج الخط البياني للتابع :

$$g(x)=\frac{2x^2-x+7}{1-x}$$

تدرب 31 :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]1,3[$ وفق :

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

1- ادرس تغيرات f

2- أثبت أن $I(2,0)$ مركز تناظر

3- ارسم c_f

تعيين الثوابت :

الحالة الاولى : صيغ متكافئة

نعطى صيغتين إحداهما معلومة و الأخرى تشتمل على ثوابت يُطلب تعيينها

نصلح إحدى الصيغ (بنشرٍ أو قسمة اقليدية أو توحيد مقامات) و نطابق الصيغتين

تدرب 32

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x + 1}$$

عين a, b إذا علمت $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

الحل:

بالقسمة الإقليدية

$$f(x) = x + 2 + \frac{2}{x + 1}$$

بالمقارنة مع

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

نجد

$$a = 1 \,, b = 2 \,, c = 2$$

تدرب33 :

بفرض $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$

أوجد عددين حقيقين a, b يحققان أن :

$$f(x) = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2}$$

الحل :

نوحد مقامات :

$$f(x) = \frac{a(x - 2) + b(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)}$$

نطابق البسوط :

$$x = a(x - 2) + b(x - 1)$$

نضع $x = 1$:

$$1 = -a$$

$$\boxed{a = -1}$$

نضع $x = 2$:

$$\boxed{2 = b}$$

و بالتالي :

$$f(x) = \frac{-1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2}$$

تدرب 34 :

ليكن $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$, جد عددين حقيقين a, b يحققان أن :

$$f(x) = a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}$$

الحل :

نوحد مقامات :

$$f(x) = \frac{a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c}{(x - 1)^2}$$

نطابق البسوط :

$$x^2 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$$

نضع $x = 1$:

$$\boxed{c = 1}$$

نضع $x = 0$:

$$0 = a - b + 1$$

$$\boxed{a - b = -1} \dots (1)$$

نضع $x = 2$:

$$4 = a + b + 1$$

$$\boxed{a + b = 3} \dots (2)$$

بجمع 1 و2 :

$$\boxed{a = 1}$$

نعوض في 1 :

$$\boxed{b = 2}$$

$$a = 1 \quad , \qquad b = 2 \quad , c = 1$$

تدرب 35:

بفرض $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2+2x+3}$

عين عددين حقيقين a, b و تابعاً $u(x)$ يحقق أن :

$$f(x) = ax + b + \frac{u(x)}{x^2 + 2x + 3}$$

الحل :

لدينا $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2+2x+3}$ بالقسمة الاقليدية :

$$f(x) = x - 2 + \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 3}$$

بالمقارنة مع :

$$f(x) = ax + b + \frac{u(x)}{x^2 + 2x + 3}$$

نجد أن :

$$a = 1 \quad , \qquad b = -2 \quad , \quad u(x) = x + 2$$

تدرب 36:

ليكن $f(x) = \frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$. جد عددين a, b, c

تحقق أن :

$$f(x) = a + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{x - 2}$$

الجواب :

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x + 1} + \frac{8}{x - 2}$$

الحالة الثانية : معطيات عددها يساوي عدد المجاهيل و يوضح الجدول الآتي كيف نترجم كلاً من المعطيات إلى عبارة رياضية

المعطى	العلاقة المكافئة
الخط البياني للتابع يمر من نقطة $A(x_0, y_0)$ أو النقطة $A(x_0, y_0)$ تنتمي للخط البياني	بما ان النقطة تنتمي للخط البياني فإن : $f(x_0) = y_0$
الخط البياني يقبل مماساً ميله m في النقطة التي فاصلتها x_0	من عبارة الميل : $f'(x_0) = m$
الخط البياني للتابع يقبل مماساً ميله m في نقطة منه $A(x_0, y_0)$	هنا لدينا معلومتين : 1- النقطة A تنتمي للتابع إذن : $f(x_0) = y_0$ 2- الميل عند A هو m : $f'(x_0) = m$ تذكر إذا ذكر أن المماس أفقي فإن $m = 0$

للتابع قيمة حدية عند x_0	بما أنها قيمة حدية فهي تعدم المشتق : $f'(x) = 0$
للتابع قيمة حدية عند x_0 مساوية لـ y_0	هنا لدينا معلومتين : $f'(x_0) = 0$ $f(x_0) = y_0$

تدرب 37:

① $f(x) = \frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$

عين a, b لتكون $y = 4x + 3$ معادلة المماس للخط C_f في النقطة التي فاصلتها 0.

الحل:

من الميل $\boxed{f'(0) = 4}$ والتابع يمر من النقطة (x_0, y_0)

حيث $x = 0$ لكن y_0 غير معلومة فنحسبها من المستقيم :

$$y_0 = 4(0) + 3 = 3$$

$$f(x_0) = y_0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 3}$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(9x^2 + a)(x^2 + 1) - 2x(3x^3 + ax +}{(x^2 + 1)^2}$$

1) $f'(0) = 4 \Rightarrow a = 4$

2) $f(0) = 3 \Rightarrow b = 3$

②

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x + b$$

عين a إذا علمت أنه يقبل قيمة حدية عند $x = -1$ مساوية للعدد 2 .

الحل: لدينا معلومتان :

$\boxed{f'(-1) = 0}$, $\boxed{f(-1) = 2}$

f اشتقاقي

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x + 3$$

$$f'(-1) = 0$$

$$3ax^2 + 6x + 3 = 0$$

$$3a - 3 = 0$$

$$a = 1$$

$$f(-1) = -a + 3 - 3 + b = 2$$

$$-a + b = 2$$

$$-1 + b = 2$$

$$b = 3$$

③ $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x-1}$

عين a, b إذا علمت أن $f(-1) = 0$ قيمة حدية.

الحل:

$$\boxed{f(-1) = 0}$$

$$\frac{a - b + 1}{-2} = 0$$

$$a - b = -1 \; ... \; 1$$

$$\boxed{f'(-1) = 0}$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x - 1) - (ax^2 + bx + 1)}{(x - 1)^2}$$

$$f'(-1) = 0$$

$$\frac{(-2a + b)(-2) - (a - b + 1)}{4} = 0$$

$$4a-2b-a+b-1=0$$

$$3a-b=1 \ldots ❷$$

بالجمع بين ❶ و ❷ نجد

$$-2a=-2$$

$$a=1$$

استنتاج الخط البياني انطلاقاً من خط معلوم:

الانسحاب:

إذا كان $g(x)=f(x)+b$ فإن c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $b\vec{j}$ (انسحاب شاقولي)

إذا كان $g(x)=f(x+a)$ فإن c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $-a\vec{i}$ (انسحاب أفقي)

التناظر :

إذا كان $g(x)=f(-x)$ فإن c_g نظير c_f بالنسبة لمحور التراتيب

إذا كان $g(x)=-f(x)$ فإن c_g نظير c_f بالنسبة لمحور الفواصل

إذا كان $g(x)=-f(-x)$ فإن c_g نظير c_f بالنسبة للمبدأ

القيمة المطلقة:

إذا كان $g(x)=|f(x)|$ فإن c_g ينتج عن c_f باستبدال النقاط التي تحت محور الفواصل بنظائرها بالنسبة لمحور الفواصل

أمثلة و تدريبات :

استنتج في كلٍ من الحالات التالية الخط البياني c_g للتابع g انطلاقاً من الخط البياني c_f للتابع f المعرف بالشكل :

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

-1 $g(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

نلاحظ أن :

$$f(-x)=\frac{(-x+1)^2}{(-x)^2+1}=\frac{(1-x)^2}{x^2+1}$$

$$\underset{\text{نخرج ناقص}}{=}\frac{\left(-(x-1)\right)^2}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$=g(x)$$

و منه c_g نظير c_f بالنسبة لمحور التراتيب .

-2 $g(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2+1}$

نلاحظ أن :

$$f(x-1)=\frac{(x-1+1)^2}{(x-1)^2+1}$$

$$=\frac{x^2}{(x-1)^2+1}$$

$$=g(x)$$

و بالتالي C_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $1\vec{i}$.

-3 $g(x)=\frac{(x+1)^2+x^2+1}{x^2+1}$

نلاحظ أن :

$$f(x)+1=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+1$$
$$=\frac{(x+1)^2+x^2+1}{x^2+1}$$
$$=g(x)$$

و بالتالي c_g ينتج عن c_f بانسحاب شعاعه $1\vec{j}$

دراسة تغيرات تابع :

تدرب 38:

ليكن c_f الخط البياني للتابع :

$$f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$$

-1 ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

-2 جد معادلة المماس للخط c_f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب

-3 ارسم المماس و المقاربات ثم ارسم c_f

تدرب 39 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق : $f(x)=x\sqrt{3-x}$

على المجال $]-\infty,3]$:

-1 أثبت أن C يقبل مماساً شاقولياً

-2 ادرس تغيرات f و نظم جدولاً به

-3 ارسم c_f

تدرب 40 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق :

$$f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

-1 أثبت أن f فردي

-2 أثبت أن المستقيم $y=x-1$ مقارب مائل للخط C_f عند $+\infty$

-3 أثبت أن المستقيم $y=x+1$ مقارب مائل للخط C_f عند $-\infty$

-4 ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

-5 أيقبل C مماساً أفقياً ؟

-6 ارسم C

تدرب 41 :

ليكن التابع f المعرف بالشكل:

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

2) اوجد معادلة المقارب المائل و ادرس الوضع النسبي

3) أثبت أن f فردي

4) ارسم المقارب المائل وارسم c_f

5) بفرض $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+\frac{1}{u_n}$

أ- أثبت بالتدريج $\sqrt{2}\le u_{n+1}\le u_n$

ب- استنتج أن المتتالية متقاربة و عين نهايتها

تدرب 42 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$

1- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه و اكتب ما تجده من مقاربات

2- جد معادلة المقارب المائل للخط C عند $+\infty$ و $-\infty$

3- ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب المائل

4- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

5- اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب

6- أثبت أن النقطة $A(-1,2)$ هي مركز تناظر للخط C

7- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم T ثم ارسم C

8- استنتج الخط البياني للتابع g المعرف وفق :

$$g(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$

أسئلة دورات :

السؤال الأول : ليكن f التابع المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ و المطلوب:

1- عين التابع المشتق f' للتابع f

2- ليكن g التابع المعرف وفق $g(x)=f(\sqrt{x})$ على $J=]1,+\infty[$ أثبت أن g اشتقاقي على J ثم احسب $g'(x)$ على J

السؤال الثاني : ليكن f التابع المعرف وفق :

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$$

عين العددين الحقيقين a,b لتكون $f(-1)=0$ قيمة حدية للتابع .

السؤال الثالث : ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\quad ,\quad f(0)=0$$

و المطلوب :

1- أثبت أن f اشتقاقي عند $x=0$

2- احسب $f'(x)$ على R^*

3- جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

السؤال الرابع : $f(x)=x-sinx$ اثبت أن f متزايد

السؤال الخامس : $f(x)=x-4+\sqrt{x-2}$: $]2,+\infty[$

1- ادرس تغيرات f على المجال $]2,+\infty[$ و نظم جدولاً بها

2- أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

3- اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=3$

السؤال السادس :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=ax+b-\frac{lnx}{x}$$

1- عين a, b إذا علمتت ان المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم $d: y = 3x$

2- من أجل $a = 4, b = -4$ أثبت أن المستقيم $y = 4x - 4$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$ و ادرس الوضع النسبي

التمرين السابع: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1- احسب $lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $lim_{x\to-\infty} f(x)$

2- أثبت أن Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

3- ادرس الوضع النسبي

السؤال الثامن : أولاً : ليكن التابع g المعرف وفق $\boldsymbol{g(x) = \frac{x^2+bx+a}{x-1}}$

جد العددين a, b علماً أن التابع g يقبل قيمة محلية عند $x = 0$ قيمتها تساوي 2

ثانياً بفرض التابع $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x-1}$

1- اثبت أن $\Delta: y = x + 3$ مقارب مائل

2- ادرس نهايات عند حدود مجال تعريفه

3- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

4- استنتج من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً حقيقياً واحداً α ينتمي إلى المجال $]-3, -2[$

التكامل و التوابع الأصلية

ليكن f تابعاً معرفاً على مجال I , نقول إن التابع F تابع أصلي للتابع f على I , إذا وفقط

1- F اشتقاقي على I

2- $F'(x) = f(x) \; ; \forall x \in I$

قواعد إيجاد التوابع الأصلية :

الجدول 1: التوابع الأولية

$f(x)$	$F(x)$	ملاحظات
a	ax	-
1	x	-
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	نزيل القيمة المطلقة
e^x	e^x	-
$\cos x$	$\sin x$	-
$\sin x$	$-\cos x$	-
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	-
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$	$-\cot x$	-
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	-

ملاحظة : إذا كان المضمون $ax + b$ فإننا نطبق نفس القواعد ولكن مع الضرب بـ $\frac{1}{a}$

الجدول 3: $u'f(u(x)) \Rightarrow F(u(x))$

$f(x)$	$F(x)$
$H'H^n$	$\dfrac{H^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{H'}{H}$	$\ln\lvert H\rvert$
$H'\cos(H)$	$\sin(H)$
$H'\sin(H)$	$-\cos(H)$
$H'e^H$	e^H
$\dfrac{H'}{\sqrt{H}}$	$2\sqrt{H}$

إذا كنا أمام تابع مركب فإنه لا يمكن إيجاد تابعه الأصلي إلا بعد إظهار مشتق المضمون خارج التابع

1. نظهر التابع H'
2. نحذف المشتق ونكامل التابع

تدرب 43 :

جد تابعاً أصلياً للتابع f في كلٍ من الحالات الآتية :

① $f(x) = (x-2)(x^2-4x+5)^3$

نلاحظ أن : $H(x) = x^2-4x+5$

$H'(x) = 2x-4$

نظهر H' بأن نضرب ونقسم بـ 2

$$f(x) = \frac{1}{2}\underbrace{(2x-4)}_{H'}\underbrace{(x^2-4x+5)^3}_{H^3}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\frac{(x^2-4x+5)^4}{4} + k$$

$$= \frac{1}{8}(x^2-4x+5)^4 + k$$

② $f(x) = x\,e^{x^2}$

نلاحظ أن $H(x) = x^2$ g $H' = 2x$

نظهر H' بالضرب والقسمة ب 2

$$f(x) = \frac{1}{2}\underbrace{2x}_{H'}\underbrace{e^{x^2}}_{e^H}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + k$$

لا تنسَ: التابع الاصلي لـ e^x هو e^x

③ $f(x) = \frac{1}{x.\ln(x)}$; $x \in]1,+\infty[$

$$F(x) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln(x)}$$

نلاحظ أن : $H(x) = \ln(x)$ g $H'(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = H'.\frac{1}{H} = \frac{H'}{H}$$

$$\Rightarrow F(x) = \ln\lvert H(x)\rvert + k$$

$$= \ln\,\lvert\ln(x)\rvert = \ln(ln(x)) + k$$

④ $f(x) = (x+3)\cos(x^2+6x)$

نلاحظ أن: $H(x) = x^2+6x$

$H'(x) = 2x+6$

نظهر H' :

$$f(x) = \frac{1}{2}(2x+6)\cos(x^2+6x)$$

$$= \frac{1}{2}H'\cos(H)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin(x^2+6x) + k$$

⑤ $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$

$$f(x) = (2x+1)(x^2+x)^{-2}$$

نلاحظ أن : $H(x) = x^2+x$

$$H'(x) = 2x+1$$

$$f(x) = \underbrace{2x+1}_{H'}\underbrace{(x^2+x)^{-2}}_{H^n}$$

$$F(x) = \frac{(x^2+x)^{-1}}{-1} + k$$

$$F(x) = \frac{-1}{x^2+x} + k$$

⑥ $f(x) = \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$

نلاحظ أن: $H(x) = x^2-x$

$H'(x) = 2x-1$

نظهر H'

$$f(x) = 2\,\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$F(x) = 2\left[2\sqrt{x^2-x}\right] + k$$

$$= 4\sqrt{x^2 - x} + k$$

⑦ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}$$
$$F(x) = \frac{1}{2}2\sqrt{x^2-9} + k$$
$$F(x) = \sqrt{x^2-9} + k$$

⑧ $f(x) = x^2\sqrt[3]{(x^3+1)^2}$

$$= x^2(x^3+1)^{\frac{2}{3}}$$

نلاحظ أن: $H(x) = x^3 + 1$

$$H'(x) = 3x^2$$

نظهر $H'(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{3}\underbrace{3x^2}_{H'}\underbrace{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}_{H^n}$$
$$F(x) = \frac{1}{3}\frac{(x^3+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + k$$
$$F(x) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{(x^3+1)^5} + k$$

⑨ $f(x) = tan(x)\ ;\ x \in]\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}[$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

نلاحظ أن: $H(x) = \cos(x)$

$$H'(x) = -\sin(x)$$

نظهر H':

$$f(x) = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$F(x) = -\ln|\cos x| + k$$
$$F(x) = -\ln(-\cos x) + k$$

إيجاد التوابع الأصلية للتوابع الكسرية:

♡ لايمكن إيجاد تابع أصلي لتابع كسري ما لم تكن درجة بسطه أصغر تماماً من درجة مقامه وإن لم يحقق ذلك نقسم البسط على المقام

$$f(x) = \text{ناتج القسمة} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

♡ التوابع الاصلية للكسور البسيطة:

① التوابع من الشكل $\frac{\propto}{ax+b}$

نخرج $\propto$: $\propto \frac{1}{ax+b}$

نضرب ونقسم ب a

$$\frac{\propto}{a}\frac{a}{ax+b}$$

أصبح من الشكل $\frac{H'}{H}$ إذن:

$$F(x) = \frac{\propto}{a}\ln|ax+b|$$

أمثلة:

1

$$f(x) = \frac{3}{2x-1}\quad ; x \in]-\infty, 0[$$
$$f(x) = 3\frac{1}{2x-1}$$
$$= \frac{3}{2}\frac{2}{2x-1}$$
$$F(x) = \frac{3}{2}\ln|2x-1| + k$$
$$= \frac{3}{2}\ln(-2x+1) + k$$

2

$$f(x) = \frac{5}{x-1}\quad ; x \in]1, +\infty[$$
$$f(x) = 5\frac{1}{x-1}$$
$$F(x) = 5\ln|x-1| + k$$
$$= 5\ln(x-1) + k$$

3

$$f(x) = \frac{6}{1-2x}\ ; x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$$
$$f(x) = 6\frac{1}{1-2x}$$
$$f(x) = \frac{6}{-2}\frac{-2}{1-2x}$$
$$F(x) = -3\ln|1-2x| + k$$
$$= -3\ln(1-2x) + k$$

② التوابع من الشكل $\frac{\propto}{ax^2+bx+c}$

نتمم المقام إلى مربع كامل

يصبح من الشكل

$$f(x) = \frac{A}{(x-x_0)^n} = A(x-x_0)^{-n}$$
$$\Rightarrow F(x) = \frac{A(x-x_0)^{-n+1}}{-n+1}$$

مثال:

$$f(x) = \frac{1}{1-2x+x^2}$$
$$= \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} = (x-1)^{-2}$$

$$F(x)=\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+k$$
$$=\frac{-1}{(x-1)}+k$$

③ **التوابع من الشكل** $\frac{ax+b}{cx+d}$

نقسم البسط على المقام

$$f(x)=\underbrace{A}_{Ax}+\underbrace{\frac{B}{Cx+D}}_{\text{نوع أول}}$$

أمثلة:

1

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$$

نقسم

$$f(x)=2+\frac{1}{x+1}$$
$$F(x)=2x+\ln|x+1|+k$$

2

$$f(x)=\frac{3x-5}{x-2}$$

$$f(x)=3+\frac{1}{x-2}$$
$$F(x)=3x+\ln|x-2|+k$$

3

$$f(x)=\frac{5x+1}{x+5}$$

$$f(x)=5-\frac{24}{x+5}$$
$$=5-24\frac{1}{x+5}$$
$$F(x)=5x-24\ln|x+5|+k$$

④ **باقي التكاملات الكسرية:** تحل بتفريق الكسور + تكامل محدد

كيف نفرق كسر إلى كسور جزئية:

❶ نحل المقام إلى عوامل درجة أولى
$(x-a)(x-b)$

❷ نضع الكسر المكامل بالشكل

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}$$
$$=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\quad \dots\dots\dots(\star)$$

❸ نضرب الطرفين ب $(x-a)(x-b)$

❹ نعوض $x=b$ في الطرفين فنحصل على A

❺ نعوض $x=a$ في الطرفين فنحصل على B

❻ نعوض في $(\star)$ فيصبح لدينا توابع من النوع الأول

أمثلة: أوجد التوابع الأصلية للتوابع التالية:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2-x-2}$

قد تحاول حله بالاتمام إلى مربع كامل ، لكن ذلك لن ينجح لانك لن تصل لمقام من الشكل $(x-x_0)^2$

لذلك نلجأ إلى تفريق الكسور:

$\boxed{1}$ نحلل المقام

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

$\boxed{2}$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}\quad(\star)$$

$\boxed{3}$ نضرب الطرفين ب $(x+1)(x-2)$

$$1=A(x-2)+B(x+1)$$

$\boxed{4}$ نضع $x=-1$ فنجد:

$$1=A(-1-2)+B(-2+2)$$
$$1=-3A$$
$$\boxed{A=-\frac{1}{3}}$$

مرة أخرى نضع $x=2$:

$$1=A(2-2)+B(2+1)$$
$$1=3B$$
$$\boxed{B=\frac{1}{3}}$$

نعوض في $(\star)$

$$f(x)=\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2}$$
$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{x-2}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + k$$

(2 $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$

$$= \frac{x+3}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

نضرب $(x-1)(x+1)$

$$x+3 = A(x+1) + B(x-1)$$

نضع $x = 1$:

$$4 = 2A$$

$$\boxed{A = 2}$$

نضع $x = -1$:

$$2 = -2B$$

$$\boxed{B = -1}$$

نعوض :

$$f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + k$$

(3 $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$

نقسم البسط على المقام

$$f(x) = \underbrace{x+1}_{\text{سهل}} + \frac{3x}{x^2-x-2}$$

لنضع

$$g(x) = \frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{3x}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{3x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

....

....

....

....

....

....

التكامل المحدد:

ليكن f تابعاً مستمراً على المجال I و $a, b \in I$ عندئذٍ نرمز للتكامل المحدد للتابع f على المجال $[a, b]$ بالرمز

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

وإذا كان F تابعاً أصلياً ل f عندئذٍ

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

التكامل بالتجزئة: يستخدم التكامل بالتجزئة لحساب تكاملات لتوابع على شكل جداء تابعين مختلفين أي:

① أسي x صحيح	② مثلثي x صحيح
③ لوغارتمي x صحيح	④ أسي x مثلثي

خطة الحل:

❶ نفرض أحد التابعين u والأخر v'

❷ نشتق u أي نوجد u'

ونوجد التابع الأصلي ل v' أي v

$$u = ------ \Rightarrow u' = ------$$
$$v' = ------ \Rightarrow v = ------$$

❸ نعوض في القانون:

$$I = [u.v]_a^b \int_a^b u'v\,\,dx$$

❹ نوجد قيمة التكامل المتبقي ونعوض الحدود

مثال:

$$I\int_0^1 x\,e^{-x}\,\,dx$$

نفرض $v' = e^{-x}$ و $u = x$ إذن :

$$u = x \quad \Rightarrow \quad u' = 1$$
$$v' = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad v = -e^{-x}$$

$$I = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}.1\,\,dx$$

$$[-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,\,dx$$

$$= [-xe^{-x}]_0^1 + [-e^{-x}]_0^1$$

$$[(-1e^{-1}) - (-0e^{-0})] + [(-e^{-1}) - (-e^{-0})]$$

$$= [-e^{-1} - 0] + [-e^{-1} + 1]$$

$$= \boxed{-2e^{-1} + 1}$$

كيف نختار v' و u ؟ :

❶ $\underbrace{\text{صحيح}}_{u} \times \underbrace{\text{أسي}}_{v'}$

❷ $\underbrace{\text{صحيح}}_{u} \times \underbrace{\text{مثلثي}}_{v'}$

❸ $\underbrace{\text{صحيح}}_{v'} \times \underbrace{\text{لوغاريتمي}}_{u}$

❹ $\underbrace{\text{مثلثي}}_{u \text{ أو } v'} \times \underbrace{\text{أسي}}_{u \text{ أو } v'}$

ملاحظة: <u>في الحالة الأخيرة:</u>

لك حرية اختيار الفرضيات

ستجزأ مرتين مع المحافظة على الفرضيات

(إذا فرضت u هو الأسي في المرة الأولى فيجب أن تفرض u هو الأسي في المرة الثانية)

بعد التجزئة الثانية سيظهر التكامل الأصلي فنستبدله باسم الأصلي وننقله إلى الجهة الثانية ثم نعزله.

تدرب 44 :

جد قيمة كلاً من التكاملات :

1

$$I = \int_1^e x\ln(x)\, dx$$

$$u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}\, dx$$

$$= \left[\left(\frac{e^2}{2}\underbrace{\ln(e)}_{=1}\right) - \underbrace{\left(\frac{1^2}{2}\ln(1)\right)}_{=0}\right] - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$

$$\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{e^2+1}{4}}$$

2

$$I = \int_0^1 (2x + x)e^{2x}\, dx$$

$$u = 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad u' = 2$$

$$v' = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$I\left[(2x+2)\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}.2\, dx$$

$$= \left[(2+2)\frac{1}{2}e^2 - (0+2)\frac{1}{2}e^0\right] - \int_0^1 e^{2x}\, dx$$

$$= (2e^2 - 1) - \frac{1}{2}[e^{2x}]_0^1$$

$$= (2e^2 - 1) - \frac{1}{2}(e^2 - e^0)$$

$$2e^2 - 1 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3e^2-1}{2}}$$

3

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\, dx$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad u' = 1$$

$$v' = \sin(2x) \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$I = \left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\cos(2x)\, dx$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\pi}_{-1}\right) - 0\right] + \frac{1}{4}[\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4}\left[\underbrace{\sin(\pi)}_{0} - \underbrace{\sin(0)}_{0}\right] = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$

4 {special}

$$I = \int_1^e \ln(x)\, dx$$

$$u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$I = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e 1\, dx$$

$$[ein(e) - 1\ln(1)] - [x]_1^e$$

$$= e - [e - 1] = \boxed{1}$$

5

$$I = \int_e^{e^2} x\ln(x^2)\, dx$$

$$= \int_e^{e^2} 2x\ln(x)\, dx$$

$$u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}$$
$$v' = 2x \quad \Rightarrow \quad v = x^2$$

$$I = [x^2 \ln(x)]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{1}{x} x^2\, dx$$

$$= [e^4 lne^2 - e^2 lne] - \left[\frac{x^2}{2}\right]_e^{e^2}$$

$$= 2e^4 - e^2 - \left[\frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2}\right]$$

$$\boxed{\frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2}$$

6 {special}

$$I = \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$$

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad u' = e^x$$
$$v' = \sin x \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

$$I = [-e^x \cos x]_0^{\pi} - - \int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx$$

$$= (-e^{\pi}\cos\pi) - (-e^0 \cos 0) + \int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx$$

$$= e^{\pi} + 1 + \underbrace{\int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx}_{J} \qquad (\star)$$

لنحسب:

$$J = \int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx$$

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad u' = e^x$$
$$v' = \cos x \quad \Rightarrow \quad v = \sin x$$

$$J = [e^x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \underbrace{e^x \sin x\, dx}_{\text{نفسه } I}$$

$$= e^{\pi}\sin\pi - e^0 \sin 0 - I$$

نعوض في $(\star)$

$$I = e^{\pi} + 1 - I$$

$$2I = e^{\pi} + 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{e^{\pi} + 1}{2}}$$

7

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx$$

$$u = \cos x \quad \Rightarrow \quad u' = -\sin x$$
$$v' = e^x \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$I = [e^x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -e^x \sin x\, dx$$

$$= e^{\pi}\cos\pi - e^0 \cos 0 + \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$$

$$-e^{\pi} - 1 + \underbrace{\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx}_{J}$$

$$I = -e^{\pi} - 1 + J \qquad (\star)$$

لنحسب J:

$$J = \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$$

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \quad u' = \cos x$$
$$v' = e^x \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$J = \underbrace{[e^x \sin x]_0^{\pi}}_{0} - \underbrace{\int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx}_{I}$$

$$J = -I$$

نعوض في $(\star)$

$$I = -e^{\pi} - 1 - I$$

$$2I = -e^{\pi} - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{-e^{\pi} - 1}{2}}$$

8

$$N = \int_0^1 x^2 e^x\, dx$$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad u' = 2x$$
$$v' = e^x \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$N = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x\, e^x\, dx$$

$$= e - J \qquad (\star)$$

لنحسب J:

$$J = \int_0^1 2x\, e^x\, dx$$

$$u = 2x \quad \Rightarrow \quad u' = 2$$
$$v' = e^x \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

$$J = [2x\, e^x]_0^1 - \int_0^1 2\, e^x dx$$

$$= 2e - 0 - 2[e^x]_0^1$$

$$= 2e - 2[e - e^0] = \boxed{+2}$$

فائدة: يمكن استخدام التكامل بالتجزئة لإيجاد تابع أصلي لتوابع جداء

❶ نستبدل كل x ب t

❷ نضع التكامل $\int_a^x f(t)\, dx$

مثال: أوجد تابعاً أصلياً لكلٍ من التوابع التالية:

1

$$f(x) = (x+1)e^x$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

$$= \int_0^x (t+1)e^t \, dt$$

$$u = t+1 \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = e^t \Rightarrow v = e^t$$

$$F(x) = [(t+1)e^t]_0^x - \int_0^x e^t \, dt$$
$$= [(x+)e^x - (0+1)e^0] - [e^t]_0^x$$
$$(x+1)e^x - 1 - (e^x - e^0)$$
$$(x+1)e^x - 1 - e^x + 1$$
$$(x+1)e^x - e^x = e^x[x+1-1]$$
$$\Rightarrow F(x) = \boxed{xe^x}$$

②

$$f(x) = e^{2x}\cos(2x)$$
$$f(t) = e^{2t}\cos(2t)$$
$$F(x) = \int_0^x e^{2t}\cos(2t)\, dt$$

$$u = \cos(2t) \Rightarrow u' = -2\sin(2t)$$
$$v' = e^{2t} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\cos(2t)\right]_0^x + \int_0^x e^{2t}\sin(2t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} + J \qquad (\star)$$

$$J = \int_0^x e^{2t}\sin(2t)\, dt$$

$$u = \sin(2t) \Rightarrow u' = 2\cos(2t)$$
$$v' = e^{2t} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$J = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\sin(2t)\right]_0^x - \underbrace{\int_0^x e^{2t}\cos(2t)\, dt}_{F(x)}$$

$$J = \frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x) - F(x)$$

نعوض في $(\star)$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x) - F(x)$$
$$2F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x)$$
$$\boxed{F(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2x}\sin(2x)}$$

كيف نكامل القيمة المطلقة؟!

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

❶ نعدم $f(x)$ أي نضع $f(x) = 0$

❷ نحل المعادلة فنجد أن $x = c$

❸ نجزء التكامل:

$$\int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)|\, dx$$

❹ على المجال الذي يكون عليه $f(x)$ سالباً نضع $|f(x)| = -f(x)$

وعلى المجال الذي يكون عليه $f(x)$ موجباً نضع $|f(x)| = f(x)$

ثم نكامل.

مثال:

$$I = \int_1^5 |2x-4|\, dx$$

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$I = \int_1^2 |2x-4|\, dx + \int_2^5 |2x-4|\, dx$$
$$= \int_1^2 (-2x+4)\, dx + \int_2^5 (2x-4)\, dx$$
$$= [-x^2+4x]_1^2 + [x^2-4x]_2^5$$
$$= [(-4+8) - (-1+4)] + [(25-20) - (4-8)]$$
$$= [1] + [9] = \boxed{10}$$

$$\boxed{\int_0^{600} \left(\text{النجاح}\right) dx = \text{أنت}}$$ 😊

التكامل وحساب المساحة:

① **حالة $f(x) \geq 0$:**

إذا كان التابع f تابع مستمر على المجال $[a\,,b\,]$ ويحقق أن $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a\,,b\,]$ فإن مساحة السطح المحصور بين منحني التابع f ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ هي قيمة التكامل

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

مسألة: ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ بالشكل

$$f(x) = (x+1)e^{-x}$$

1- ادرس تغيرات f

2- ارسم c_f

3- احسب مساحة السطح المحصور بين c_f ومحور الفواصل و $x=\ln(2)$ و $x=-1$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{ح ع ت}\ (+\infty)(0)$$

$$f(x) = (x+1)e^{-x} = x\,e^{-x} + e^{-x} = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

f أشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1e^{-x} - e^{-x}(x+1) = e^{-x}(1-x-1) = -xe^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow f(0) = 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+++$	0	$---$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↘ $+\infty$

$$S = \int_{-1}^{\ln(2)} (x+1)e^{-x}\,dx$$

نكامل بالتجزئة:

$$u = x+1 \quad \Rightarrow \quad u' = 1$$

$$v' = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad v = -e^{-x}$$

$$S = [-(x+1)e^{-x}]_{-1}^{\ln(2)} + \int_{-1}^{ln2} e^{-x}\,dx$$

$$= -\left[\left((1+ln2)e^{-ln2}\right) - (0)\right] - [e^{-x}]_{-1}^{ln2}$$

$$= -(1+ln2)e^{\ln\frac12} - [e^{-ln2} - e]$$

$$= -(1+ln2)\frac12 - \left[\frac12 - e\right]$$

$$-\frac{1+ln2}{2} - \frac12 + e$$

$$= \frac{-1-ln2-1+2e}{2}$$

$$= \boxed{\frac{2e-2-\ln(2)}{2}}$$

مسألة عامة: ليكن التابع f المعرف بالشكل $f(x) = \frac{2a+bln(x)}{x}$

1. عين a و b إذا علمت أن التابع f يقبل مماساً أفقياً عند النقطة التي فاصلتها $\sqrt{e}$ معادلته $T: y = \frac{1}{\sqrt{e}}$

2. أذا علمت أن $a=\frac14, b=1$:

① ادرس تغيرات f وارسمه

② احسب مساحة السطح المحصور بين C_f و xx' و $x=\sqrt{e}$, $x=1$

الحل: أ) لدينا $f'(\sqrt{e}) = 0$

نحسب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{b\frac{1}{x}x - (2a + b\ln x)}{x^2} = \frac{b-2a-b\ln(x)}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(\sqrt{e}) = \frac{b-2a-b\ln\left(e^{\frac12}\right)}{e} = 0$$

$$b - 2a - b\frac12 = 0$$

$$\frac{b}{2} - 2a = 0 \Rightarrow \underbrace{\boxed{b=4a}}_{1}$$

لدينا:

$$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\frac{2a + b\ln(\sqrt{e})}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$2a + b\frac12 = 1$$

$$\underbrace{\boxed{2a + \frac{b}{2} = 1}}_{2}$$

نعوض 1 في 2

$$2a + 2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac14}$$

نعوض في 1 $\Leftarrow \boxed{b=1}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\frac14 + \ln(x)}{x}$$

3. إن f معرف على $]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$

c يقع على يمين مقاربه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac14}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$y=0$ مقارب افقي في جوار $+\infty$

$$f'(x) = \frac{1 - \frac12 - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$++++$	0	$----$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

$$f(x) = 0$$

$$\frac{1}{4} + \ln x = 0$$

$$\ln x = -\frac{1}{4}$$

$$x = e^{-\frac{1}{4}}$$

$$S = \int_{e^{-\frac{1}{4}}}^{e^{\frac{1}{2}}} \frac{\frac{1}{4} + \ln(x)}{x} dx$$

$$= \int_{e^{-\frac{1}{4}}}^{e^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{4}\frac{1}{x} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{H'} \underbrace{\ln(x)}_{H}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{\ln^2 x}{2}\right]_{e^{-\frac{1}{4}}}^{e^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\ln e^{\frac{1}{2}} + \frac{\ln^2 e^{\frac{1}{2}}}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\ln e^{-\frac{1}{4}} + \frac{\ln^2 e^{-\frac{1}{4}}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) - \left(-\frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{16}}{2}\right)$$

$$\frac{2}{8} + \frac{1}{32} = \boxed{\frac{9}{32}}$$

من أسئلة الوحدة:

①:

- نريد حساب $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$
- احسب $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$ ثم $I + J$
- استنتج قيمة I

الحل:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{2\cos x}^{H'}}{\underbrace{1 + 2\sin x}_{H}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|1 + sinx|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{2}\ln(2)}$$

$$I + J$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x) + \cos x}{1 + 2\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x + \cos x}{1 + 2\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,(2\sin x + 1)}{1 + 2\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow I + J = 1$$

$$I + \frac{1}{2}\ln 2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 1 - \frac{1}{2}\ln 2}$$

②:

- نريد حساب $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$
- احسب $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ ثم $I + J$
- استنتج I

الحل:

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|1 + x^2|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$I + J = \int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^3+x}{1+x^2}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2}dx$$
$$= \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

إذن:

$$I + J = \frac{1}{2}$$
$$I + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}$$
$$\boxed{I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2)}$$

3 ليكن:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

1) جد الأعداد c, b, a التي تحقق أن $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

2) احسب $J = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx$

الحل:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^2$$
$$= 1 + 2(1)\left(\frac{1}{x-1}\right) + \left(\frac{1}{x-1}\right)^2$$
$$1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$
$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 1$$
$$J = \int_{-3}^{0}\left(1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$
$$= \int_{-3}^{0}\left(1 + 2\frac{1}{x-1} + (x-1)^{-2}\right)dx$$
$$= \left[x + 2\ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-3}^{0}$$
$$= \left[\left(0 + 0 + \frac{(-1)^{-1}}{-1}\right) - \left(-3 + 2\ln(2) + \frac{(-4)^{-1}}{-1}\right)\right]$$
$$= -1 + 3 - 2\ln(2) + \frac{1}{-4}$$
$$= 2 - \frac{1}{4} - 2\ln(2) = \boxed{\frac{7}{4} - 2\ln(2)}$$

4 أثبت أن $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$ ثم احسب $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

$$l_2 = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1 + e^x - e^x}{1+e^x}$$
$$= \frac{1}{1+e^x} = l_1$$
$$I = \int_0^1 1 - \frac{\overbrace{e^x}^{H'}}{\underbrace{1+e^x}_{H}}dx$$
$$= [x - \ln|1+e^x|]_0^1$$
$$= (1 - \ln(1+e)) - (0 - \ln(2))$$
$$= \boxed{1 - \ln(1+e) + \ln(2)}$$

المعادلات اللوغارتمية

مجموعة تعريف	المضمون > 0
خواص	$\ln(1) = 0$ 2 $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$ 3 $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ 4 $\ln(a^n) = n.\ln(a)$ 5 $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ 6 $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ 7 $\ln(e) = 1\,;e \approx 2.7$

المعادلات اللوغارتمية

النوع الأول: $\ln(u) = \ln(v)$	
1	نوجد شرط تعريف الطرف الأبسط
2	نتخلص من اللوغارتمات و نحل
3	نقبل الحلول وفق شرط الحل

ملاحظة: في حالة المتراجحات :

1- نختار شرط الطرف الأصغر حصراً
2- الحلول تكون على شكل مجال
3- لمعرفة الحلول المقبولة نقاطع المجال مع شرط الحل

النوع الثاني : عدد $= \ln(u)$	
نوجد شرط اللوغارتم	1
$u = e^{\text{العدد}}$	2
نحل المعادلة	3
نقبل و نرفض	4

النوع الثالث : أكثر من لوغارتم	
نوجد شرط كل لوغارتم	1
نقاطع الحلول	2
نطبق الخواص	3
نتخلص من اللوغارتمات و نحل	4
نرفض و نقبل	5

في المتراجحات نطبق الخطوات و لكن الحلول تكون على شكل مجال فنقاطعها مع شرط الحل و يكون شرط الحل في الحالة الأولى هو شرط الطرف الأصغر

تدرب 45

حل في R كلاً من المعادلات أو المتراجحات الآتية :

$$\ln(3x-4)=\ln(x^2-4) \quad (1$$

✓لنوجد E مجال التعريف للطرف الأول

$3x-4>0$ ومنه $3x>4$

$$\Rightarrow x>\frac{4}{3}$$

فيكون المجال $E=]\frac{4}{3},+\infty[$

$$\ln(3x-4)=\ln(x^2-4)$$

نتخلص من اللوغارتمات:

$$\Leftrightarrow (3x-4)=(x^2-4)$$

$$\Rightarrow 3x-4-x^2+4=0$$

$$\Rightarrow 3x-x^2=0 \Rightarrow x(3-x)=0$$

ومنه إما $\boxed{x=0}$ وهو مرفوض لأنه خارج المجال E

أو $3-x=0$ وبالتالي $\boxed{x=3}$ وهو مقبول لأنه ضمن المجال E

$$\boldsymbol{ln(x^2-4) \le ln\ (-3x)} \quad (2$$

مجموعة تعريف الطرف الأصغر E_1

$$x^2-4>0$$

$$E_1=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$$

و سنكتفي بها حسب الفائدة السابقة

$$\ln(x^2-4) \le \ln\ (-3x)$$
$$\Leftrightarrow x^2-4 \le -3x$$
$$\Rightarrow x^2+3x-4 \le 0$$
$$\Rightarrow x^2+3x-4=0$$
$$\Rightarrow (x+4)(x-1)=0$$

إما $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ أو

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

ننظم جدول الإشارة كما يلي:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2-4+3x		$+$	0	$-$	0	$+$	
≤ 0		غ.م	|	م	|	غ.م	

فتكون مجموعة الحلول هي:

$$S=[-4,1]$$

$$E=E_1\cap S=[-4,-2[$$

$$\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x \quad (3$$

E_1: $2x-3>0$ وبالتالي يكون

$2x>3 \Rightarrow x>\frac{3}{2}$

ومنه $\boxed{E_1 =]\frac{3}{2},+\infty[}$

E_2 $6-x>0$ وبالتالي يكون

$-x>-6 \Rightarrow x<6$

ومنه $\boxed{E_2 =]-\infty,6[}$

E_3: $x>0$ فيكون المجال

$\boxed{E_3 =]0,+\infty[}$

-نقاطع: $\boxed{E =]\frac{3}{2},6[}$

$$\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$$

$$\Rightarrow \ln(2x-3)^{\frac{1}{2}} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2x-3) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$$

$$\underset{\text{بضرب بـ}2}{\Rightarrow} \ln(2x-3) = 2\ln(6-x) - \ln x$$

$$\Rightarrow \ln(2x-3) = \ln(6-x)^2 - \ln x$$

$$\Rightarrow \ln(2x-3) = \ln\left(\frac{(6-x)^2}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x-3 = \frac{(6-x)^2}{x}$$

$$\Rightarrow x(2x-3) = (6-x)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x = 36-12x+x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x-36+12x-x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2+9x-36 = 0$$

$$\Rightarrow (x+12)(x-3) = 0$$

إما $x+12=0$ ومنه $x=-12$

مرفوض

أو $x-3=0$ ومنه $x=3$ مقبول

(4 $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

E_1 مجموعة تعريف الحد الأول

الذي يكافئ $x-2>0 \Rightarrow x>2$

فيكون المجال $E_1 =]2,+\infty[$

E_2 مجموعة تعريف الحد الثاني

الذي يكافئ $x+1>0 \Rightarrow x>-1$

فيكون المجال $E_2 =]-1,+\infty[$

أي

فيكون تقاطعهما

$$E = E_1 \cap E_2 \Rightarrow E =]2,+\infty[$$

$$\ln(x-2)-\ln(x+1) = 2$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = 2$$

$$\Rightarrow e^{\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)} = e^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x+1}\right) = e^2$$

$$\Rightarrow x-2 = e^2(x+1)$$

$$\Rightarrow x-2 = xe^2+e^2$$

$$\Rightarrow x-xe^2 = e^2+2$$

$$\Rightarrow x(1-e^2) = e^2+2$$

$$\Rightarrow x = \frac{(e^2+2)}{1-e^2}$$

قيمة x مرفوضة لأنها لا تقع ضمن

المجال لأنها أقل من العدد 2

النوع الرابع : تحوي لوغارتم مربع و لوغارتم	
1	نوجد شرط اللوغارتم
2	نفرض $t = \ln^2 x$
3	نحل المعادلة
4	نعود إلى المتحول الأصلي
5	نرفض و نقبل

تدرب 46

1) $(\ln x)^2 - 5\ln x = 6$

بشرط $x > 0$ نفرض $\ln x = t$ فتصبح المعادلة من الشكل:

$$t^2 - 5t = 6 \Rightarrow t^2 - 5t - 6 = 0$$
$$\Rightarrow (t-6)(t+1) = 0$$

إما $t - 6 = 0 \Rightarrow t = 6 \Rightarrow \ln x = 6$

$\Rightarrow \boxed{x = e^6}$

أو $t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \ln x = -1$

$\Rightarrow \boxed{x = e^{-1}}$

2) $(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 \leq 0$

بشرط $x > 0$ نفرض $\ln x = t$ فتصبح العلاقة:

$$(t-3)(t-2) \leq 0$$
$$\Rightarrow (t-3)(t-2) = 0$$

إما $t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3$ ومنه $\ln x = 3$

$\Rightarrow \boxed{x = e^3}$

أو $t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$ ومنه $\ln x = 2$

$\Rightarrow \boxed{x = e^2}$

ننظم جدول الإشارة

x	0 e^2 e^3 $+\infty$
متراجحة	$+$ 0 $-$ 0 $+$
≤ 0	م.غ | م | م.غ

وبالتالي مجموعة التعريف

$S = [e^2, e^3]$

النوع الخامس: جمل المعادلات	
1	نوجد شرط اللوغارتمات
2	نحاول الوصول إلى تجانس
3	نغير المتحول
4	نحل الجملة
5	نعود للمتحول الأصلي

تدرب 47

$$\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -12 \\ \ln(xy) = 1 \end{cases}$$

تدرب 48

نفترض وجود عددين حقيقين موجبين تماماً a, b يحققان :

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2}$$

جد $\frac{a}{b}$

المعادلات الأسية

النوع الأول : $e^{u(x)} = e^{v(x)}$	
نوجد شرط u و v و نقاطعهما	1
نتخلص من ال e	2
نوجد الحلول و نقبل و نرفض	3

النوع الثاني : عدد $= e^{u(x)}$	
نوجد شرط التعريف	1
نأخذ لوغارتم للطرفين	2
نقبل و نرفض	3

النوع الثالث : تحوي e^x, e^{-x}	
نوجد شرط التعريف	1
نضرب الطرفين بـ e^x	2
نوجد الحلول كمعادلات الدرجة الثانية	3

المعادلات من النمط a^x	
نوجد المجاهيل	1
نوجد الحلول	2
نأخذ لوغارتم الطرفين	3

تدرب 49:

حل في R كلاً من المعادلات :

$e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$	1
$e^{2x^2-1} \geq 3$	2
$4e^{2x} - e^x + 2 = 0$	3
$e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$	4
$e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$	5
$e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$	6
$\frac{e^{-x}-1}{e^x-1} = -2$	7

تدرب 50 :

حل في R كلاً من المعادلات :

$\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$	1
$4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$	2
$4e^{2x} - e^x + 2 = 0$	3
$2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geq 0$	4
$3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \geq 7$	5

تدرب 51 :

حل في R كلاً من جمل المعادلات :

$\begin{cases} 3^{x+y} = 9 \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \end{cases}$	1
$\begin{cases} e^x - \frac{1}{2}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$	2
$\begin{cases} e^{4x}e^y = \frac{1}{e^2} \\ xy = -2 \end{cases}$	3

المعادلات التفاضلية

النمط الأول : حل المعادلات التفاضلية

التي من الشكل $y' = ay + b$

1- قانون الحل : $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

2- إذا وجد شروط ابتدائية نستفيد

منها لحساب k

تدرب 52 :

$y' = 2y$ والحل f يحقق الشرط أن $f(0) = 1$

$$y' = 2y$$

$$y' = ay$$

$$\Rightarrow y = ke^{ax} \Rightarrow y = ke^{2x}$$

بما أن $f(0) = 1$ ⇐ النقطة $(0,1)$

تحقق المعادلة

$$1 = ke^{2(0)} \Rightarrow \mathrm{k} = 1$$

فالحل المطلوب

$$y = e^{2x}$$

تدرب 53 :

$y' + 5y = 0$ والخط البياني C للحل يمر من النقطة $A(-2,1)$

تدرب 54 :

$y' + 2y = 0$ و ميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$

النمط الثاني : الحل معلوم :

مثال : عين قيمة λ ليكون التابع $f(x) = (x + 2)e^{-x}$

حل للمعادلة التفاضلية :

$$y' + y = \lambda e^{-x}$$

الحل :

$$y = f(x) = (x + 2)e^{-x}$$
$$y' = e^{-x} - e^{-x}(x + 2)$$
$$y' = e^{-x}(1 - x - 2)$$
$$y' = e^{-x}(-x - 1)$$

نعوض في المعادلة :

$$e^{-x}(-x - 1) + (x + 2)e^{-x} = \lambda e^{-x}$$
$$e^{-x} = \lambda e^{-x}$$
$$\lambda = 1$$

مسائل عامة

المسألة الأولى

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2e^x - x - 2$.

1) جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.
2) ادرس تغيرات f ونظم جدول تغيرات بها.
3) استنتج من الطلب الثاني أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين، أحدهما يساوي الصفر.
4) نرمز إلى جذر الآخر للمعادلة $f(x) = 0$ بالرمز α. أثبت أن $-2 < \alpha < -1$.
5) ادرس إشارة $f(x)$ تبعاً لقيم x

المسألة الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$.

1) جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.
2) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.
3) أثبت أن المستقيم d' الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.
4) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.
5) اكتب معادلة المماس T للخط البياني f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

المسألة الثالثة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

1) a. بين أن التابع f فردي، ادرس تغيرات f وارسم C.
b. اكتب معادلة المماس d للخط C في المبدأ، وادرس الوضع النسبي للخط C والمستقيم d.

2) a. ليكن m عدداً حقيقياً. أثبت أن للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$. ليكن α هذا الحل.

b. أثبت أن المعادلة $f(x) = m$ تكافئ $e^{2x} - 2me^{x} - 1 = 0$, ثم استنتج أن $\alpha = \ln\left(m + \sqrt{m^2 + 1}\right)$

3) أثبت ان f هو حل للمعادلة التفاضلية $y^2 - (y')^2 = 1$

4) استنتج الخط البياني C' للتابع $g(x) = -\frac{e^{2x}+1}{2e^{x}}$

المسألة الرابعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$.

1) تحقق من كل من المقولات الآتية:

a. f معرف على $\mathbb{R}$.

b. يكتب $f(x)$ بالصيغة $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$.

c. المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط C.

d. الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل.

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

3) اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها 0 منه.

4) ارسم كلاً من d و Δ و T, ثم ارسم C في المعلم ذاته.

المسألة الخامسة :

$$f(x) = (1 - x)2^{x}$$

ادرس تغيرات f و نظم جدولاً به ثم ارسم الخط البياني

المسألة السادسة :

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

② أثبت أن $d : y = x - \ln(2)$ مقارب مائل للخط C_f عند $+\infty$ وادرس وضعه النسبي

③ أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α يقع في المجال $]1, 2[$

④ عين معادلة المماس للتابع f عند $a = 1$

⑤ ارسم d ثم C_f

المسألة السابعة :

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق :

$\mathrm{f}(x) = \frac{2}{e^{2x}+1} + x$

1- أثبت أن d_1 الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للخط C في جور $+\infty$

2- أثبت أن d_2 الذي معادلته $y = x + 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

3- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

4- أثبت أن $A(0,1)$ مركز تناظر للخط C

5- اكتب معادلة المماس T في النقطة A للخط C و ادرس الوضع النسبي لـ C مع T

6- ارسم في معلم متجانس كلاً من d_1 و d_2 و T ثم ارسم C

المسألة الثامنة :

أولاً : ليكن g التابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$ وفق : $g(x) = x^2 + lnx - 1$

1- ادرس تغيرات g و نظم جدولاً با

2- أثبت أن $\alpha = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

ثانياً : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0, +\infty[$ بالشكل : $f(x) = x + 1 - \frac{lnx}{x}$

1- احسب نهايات f عند أطراف المجال و فسر النتيجة هندسياً

2- أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج جدول تغيرات f

3- عين القيمة الحدية للتابع f و استنتج معادلة المماس الأفقي لـ C

4- أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x + 1$ مقارب مائل للخط C ثم ادرس الوضع النسبي

-5 ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم C

المسألة التاسعة :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=x-1-\frac{lnx}{x^2}$$

و g التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$g(x)=x^3-1+2lnx$$

-1 ادرس تغيرات g

-2 احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

-3 ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها

-4 أثبت أن $d: y=x-1$ مقارب للخط c_f ثم ادرس الوضع النسبي لهما

-5 ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم c_f

-6 استنتج الخط البياني للتابع h المعرف وفق :

$$h(x)=x-1+\frac{lnx}{x^2}$$

-7 ناقش حسب قيم m حلول المعادلة $f(x)=m$

المسألة العاشرة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x+x(lnx)^2$$

وليكن التابع g المعرف وفق:

$$g(x)=(lnx+1)^2$$

والمطلوب:

1) أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$.

2) أثبت أن $f'(x)=g(x)$.

3) حل المعادلة $g(x)=0$.

4) نظم جدول تغيرات f.

5) اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x=\frac{1}{e}$ وارسم المماس Δ وارسم C

المسألة الحادية عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x}{e^x}$$

1) جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه و اكتب معادلة المقارب الأفقي.

2) ادرس تغيرات التابع f.

3) في معلم متجانس ارسم الخط C.

4) احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x=1$.

5) استنتج رسم الخط C_1 للتابع g وفق: $g(x)=2xe^x$.

6) أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية:

$$y'+y=2e^{-x}$$

المسألة الثانية عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$$

والمطلوب:

1) احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي.

2) أثبت ان $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$

3) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الجدية مبيناً نوعها.

4) ارسم C في معلم متجانس.

5) استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع g المعرف وفق:

$$g(x)=(x-1)^2e^x$$

6) جد مجموعة تعريف التابع:

$$h(x)=ln(f(x))$$

المسألة الثالثة عشر :

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=e^{-x}(1+ln(x))$$

والتابع g المعرف على I وفق:

$$g(x)=\frac{1}{x}-1-ln\,x$$

المطلوب:

1) ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.

2) بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلاً وحيداً α, ثم تحقق أن $\alpha=1$.

3) جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

4) أثبت أن: $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$

5) مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

6) في معلم متجانس ارسم الخط C_f.

المسألة الرابعة عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = e^{-2x} + 2x - 2$$

المطلوب:

1) احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x - 2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C و Δ.

3) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها, ثم بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين في $\mathbb{R}$ أحدهما ينتمي للمجال $[-1, 0]$.

4) ارسم Δ و C, ثم احسب مساحة السطح المحصور بين محور التراتيب و C و Δ والمستقيم $x = 1$.

5) استنتج الخط البياني C' للتابع g المعرف وفق:

$$g: x \mapsto -e^{-2x} + 2x + 2$$

المسألة الخامسة عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 1[$ وفق:

$$f(x) = e^x + \ln(1 - x)$$

وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x) = (1 - x)e^x - 1$$

المطلوب:

1) ادرس اطراد التابع g واستنتج أن $g(x) \leq 0$ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$.

2) تحقق أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x-1}$ على المجال $]-\infty, 1[$, ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3) اكتب معادلة المستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

4) في معلم متجانس ارسم المستقيم T, ثم ارسم C الخط البياني للتابع f.

المسألة السادسة عشر

ليكن $f(x) = \frac{3e^x-1}{e^x+1}$

-1 أثبت أن $f(x) + f(-x) = 2$

-2 استنتج أن $I(0,1)$ مركز تناظر للخط c_f

-3 ادرس تغيرات f و اذكر ماله من مقاربات

-4 ارسم c_f و ناقش تبعاً لقيم الوسيط m حلول المعادلة $(3 - m)e^x - 1 - m = 0$

-5 أثبت أن $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ ثم احسب مساحة السطح المحصور بين منحني التابع و محور الفواصل و المستقيمان $x = 0, x = ln2$

المتتاليات ونهاية متتالية

المتتالية الحسابية والهندسية

المتتالية الحسابية	
أثبت	-1 نوجد u_{n+1} -2 نشكل الفرق: $u_{n+1} - u_n$ -3 نثبت أن $u_{n+1} - u_n = r$
u_n بدلالة n	$u_n = u_m + (n - m)r$
المجموع	$S = \frac{a+l}{2} \times$ عدد الحدود
ثلاث حدود متعاقبة a, b, c	القانون الأول: $a + c = 2b$ القانون الثاني: $b = a + r \quad , \quad c = a + 2r$
المتتالية الهندسية	
أثبت	-1 نوجد u_{n+1} -2 نشكل النسبة: $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ -3 نثبت أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$
u_n بدلالة n	$u_n = u_m . q^{n-m}$
المجموع	$S = a\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$
ثلاث حدود متعاقبة a, b, c	القانون الأول: $ac = b^2$ القانون الثاني: $b = aq \quad , \quad c = aq^2$

حالة خاصة : المجموع مع قفزات :

مثلاً : $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}$

نطبق نفس القانون مع مراعاة ما يلي :

$$\text{عدد الحدود الجديد} = \frac{\text{أول متغير} - \text{آخر متغير}}{\text{طول القفزة}} + 1$$

الأساس الجديد :

في حالة الهندسية: $q' = q^{\text{طول القفزة}}$

في حالة الحسابية : $r' = \text{طول القفزة} \times r$

نهاية المتتالية الهندسية :

مبرهنة : لحساب نهاية $\lim_{n\to+\infty} q^n$ نميز الحالات :

1- إذا كان $q > 1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

2- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن :
$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

تدرب 55

بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة بالشكل

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$

و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالشكل $v_n = u_n + 6$

1- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية و عين أساسها و حدها العام ثم احسب نهايتها

2- استنتج u_n بدلالة n ثم احسب نهايتها

3- بفرض $w_n = \ln(v_n)$ أثبت أن (w_n) حسابية ثم احسب المجموع

$w_0 + w_1 + \cdots + w_5$

تدرب 56

احسب نهاية المتتالية المعرفة وفق : $u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

تدرب 57

ليكن $u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$ بسط u_n ثم احسب نهايتها

الاطراد :

المعيار	النوع الموافق
الفرق $u_{n+1} - u_n$ و نقارن مع الصفر	يصلح لكل المتتاليات غالباً
معيار الاشتقاق $f'(x)$ نقارن مع الصفر	المتتاليات الصريحة
معيار النسبة : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و نقارن مع الواحد	للقوى و العاملي
تعريف قضية	للمتتاليات التدريجية

الإثبات بالتدريج :

① نرمز للقضية $E(n)$

② نثبت صحة القضية من أجل أول قيمة لـn ولتكن n_0

③ نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة ... (الفرض)

④ نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ ... (الطلب) مستفيدين من (الفرض)

مصطلحات :

المحدودة من الأعلى	$u_{n+1} \leq M$ وندعو M عنصر راجح
المحدودة من الأدنى	$u_{n+1} \geq m$ و ندعو m عنصر قاصر
المحدودة	$m \leq u_n \leq M$

مبرهنة :

-كل متزايدة و محدودة من الأعلى متقاربة

-كل متناقصة و محدودة من الأدنى متقاربة

تدرب 58:

نتأمل المتتالية المعرفة وفق $u_0 = \frac{5}{2}$ و

$u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$

1- أثبت أن $1 \leq u_n \leq 2$

2- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

3- استنتج أنها متقاربة وعين نهايتها

تدرب 59 :

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \quad , \quad u_0 = 3$$

1- أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على المجال $[2, +\infty[$ ثم نظم جدولاً بها

2- أثبت أن $d: y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل و ادرس الوضع النسبي

3- أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

4- استنتج أنها متقاربة و عين نهايتها

5- ارسم المستقيم $\Delta: y = x$ ثم ارسم d و c_f و مثل الحدود u_0, u_1 على محور الفواصل

تدرب 60 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ و $u_{n+1} = e\,\sqrt{u_n}$ و $u_0 = e^3$ و v_n متتالية معرفة وفق $v_n = \ln(u_n) - 2$ و

المطلوب :

1- أثبت أن v_n هندسية و عين أساسها و حدها الأول

2- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3- احسب نهاية u_n

تدرب 61 :

لتكن المتتالية $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$:

1- ادرس اطراد u_n

2- أثبت أن العدد 2 عنصر راجح على u_n

3- استنتج أنها متقاربة ثم احسب نهايتها

المجاميع :

النوع الأول : (المقارنة مع هندسية) :

تدرب 62 :

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ المتتالية المعرفة وفق :

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

1- برهن أن $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$ مهما يكن $n \geq 1$

2- استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و عين عنصراً راجحاً

3- أثبت أن (u_n) متزايدة و استنتج أنها متقاربة

النوع الثاني : مجموع مباشر:

أكبر حد × عدد الحدود $\leq u_n \leq$ أصغر حد × عدد الحدود

تدرب 63 :

احسب نهاية المتتالية :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

المتتاليتان المتجاورتان :

نقول عن المتتاليتين u_n و v_n إنهما متجاورتان إذا تحقق الشرطان :

1- إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة

2- نهاية الفرق $u_n - v_n$ تساوي الصفر

تدرب 64 :

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$$

1- ادرس اطراد كلٍ من u_n و v_n

2- بسط عبارة u_n

3- استنتج أن u_n و v_n متجاورتين

تدرب 65 :

دراسة متتاليتين متجاورتين

نتأمّل المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$، المعرّفتين تدريجياً وفق:

- $t_0 = 1$ و $s_0 = 12$.
- $t_{n+1} = \frac{t_n + 2s_n}{3}$ و $s_{n+1} = \frac{t_n + 3s_n}{4}$.

1. أثبت أنَّ المتتالية $(v_n - t_n)_{n\geq 0}$ هندسية. واحسب نهايتها.
2. أثبت أنَّ المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.
3. أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = 3t_n + 8s_n$ ثابتة.
4. ماذا تستنتج فيما يتعلق بالمتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$؟

تدرب 66 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x)=xe^{-x}$

1- احسب نهاية التابع f عند $+\infty,-\infty$ ثم احسب $f'(x)$ و ادرس اطراد f و نظم جدولاً بتغيراته و عين ما له من قيم حدية ثم ارسم C

2- احسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0\,,x=1$

3- بين أنه في حالة عدد حقيقي m من المجال $]0,e^{-1}[$ تقبل المعادلة $f(x)=m$ حلين مختلفين

4- لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة تدريجياً كما يأتي: $u_0=1$, $u_{n+1}=u_ne^{-u_n}$

a) أثبت أن $0<u_n\le 1$ و ذلك مهما كان الدليل n

b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة ثم بين أنها متقاربة و احسب نهايتها .

بنك المتتاليات

المسألة الأولى :

لتكن المتتالية $(x_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق :

$x_0=4$, $x_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+2$

1- احسب x_1,x_2

2- بفرض $(y_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالشكل : $y_n=x_n-8$

أ- أثبت أن y_n هندسية

ب- عين حدها العام

ت- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

المسألة الثانية :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق:

$$u_0=\frac{1}{2}\qquad u_{n+1}=\frac{u_n}{2-u_n}$$

1- أثبت $0<u_n<1$

2- نعرف المتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ بالشكل $v_n=\frac{1}{u_n}-1$:

أ- أثبت انها هندسية ثم استنتج حدها العام

ب- اكتب u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

المسألة الثالثة:

نتأمل متتاليتين معرفتين كما يلي :

$y_n=\frac{4n+1}{n+2}$ $\qquad x_n=\frac{4n+5}{n+1}$

أثبت أنهما متجاورتين

المسألة الرابعة :

احسب قيمة المجموع $S=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1+\frac{4}{3}+\cdots+15$

المسألة الخامسة :

ليكن لدينا المتتالية $u_n=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}\dots+\frac{n}{e^n}$

1- أثبت بالتدريج أن $n\le 2^n$

2- عين عنصراً راجحاً على u_n

3- أثبت أن u_n متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة

المسألة السادسة :

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$$

1- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً به

2- نضع $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- أثبت أن $\sqrt{2}\le u_{n+1}\le u_n$

ب- استنتج أنها متناقصة و هل هي متقاربة

ت- احسب نهايتها في حالة التقارب