نقول إن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) و (B,β) إذا تحقق أن:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

حيث $\alpha+\beta\neq 0$

ويعمم الكلام السابق لأكثر من نقطتين أي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A.\alpha)$ و (B,β) و (C,γ) إذا تحقق أن:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

وحيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

بل أكثر من ذلك:

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

(A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ) إذا كان الشرط محقق:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

وتسمى العلاقة السابقة:

- علاقة الوجود (العلاقة الأم) لأنه عندما يكون $\alpha+\beta=0$ عندئذ لا يوجد م أ م للنقاط (A,α) و (B,β).

- **نستخدم علاقة الوجود لتحديد أو تعيين α و β و γ ...**

1) نصلح شكل العلاقة لجعل الطرف الثاني $\vec{0}$ ونجعل البدايات كلها م أ م.
2) نقارن مع القانون
3) نختبر الشرط $(\alpha+\beta+\cdots\neq 0)$

ملاحظة: م أ م = مركز الأبعاد المتناسبة ولا تكتب بهاد الشكل بالامتحاااان^_^

نميز الحالات الآتية في م أ م:

الحالة الأولى: الانطلاق من علاقة شعاعية:

1) جد العددين α و β ليكون G م أ م للنقاط (A,α) و (B,β) انطلاقاً من العلاقة:

$$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}$$

الحل

$$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$-2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

ونلاحظ أنها من الشكل:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

إذن $\alpha=-2$ و $\beta=1$ حيث $\alpha+\beta\neq 0$

2) عين الاعداد α و β و γ لتكون M م أ م للنقاط المحققة للعلاقة:

$$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

الحل

سنضرب بالعدد 4:

$$4\overrightarrow{AM}=8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$
$$8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$8\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)+3\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right)+4\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$-8\overrightarrow{MA}+8\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$-7\overrightarrow{MA}+8\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

وهذه العلاقة من الشكل:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

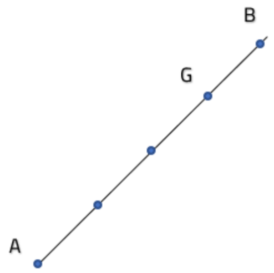
وبالتالي $\alpha=-7$ و $\beta=8$ و $\gamma=3$ حيث

$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

الحالة الثانية: الانطلاق من شكل:

(مسائل 40 درجة):

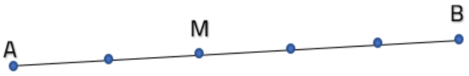
1) عين α و β ليكون G م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):



$$\frac{AG}{AB}=\frac{3}{4}$$
$$4\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$$
$$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AG}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

$\alpha=1\,,\beta=3\qquad;\alpha+\beta\neq 0$

2) عين α و β ليكون M م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):



لدينا طريقتان في الحل:

الطريقة الأولى:

من الشكل نلاحظ أن M م أ م للنقاط $(A,3)$ و $(B.2)$.

الطريقة الثانية:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{2}{5}$$
$$5\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$$
$$-2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\alpha=-3\,,\beta=-2\,;\alpha+\beta\neq 0$$

(3

$$\frac{MA}{MB}=\frac{1}{3}$$
$$3\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$$
$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$\alpha=3\,,\beta=-1\,;\alpha+\beta\neq 0$$

ملاحظات:

1- G م أ م لنقطتين من تثقيلتين مختلفتين بالإشارة فإن G تقع خارج القطعة وبالعكس

2- خاصة التجانس (هامة جداً)

G م أ م لـ (A,α) و (B,β):

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

نضرب بـ $k\neq 0$:

$$(k\alpha)\overrightarrow{GA}+(k\beta)\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

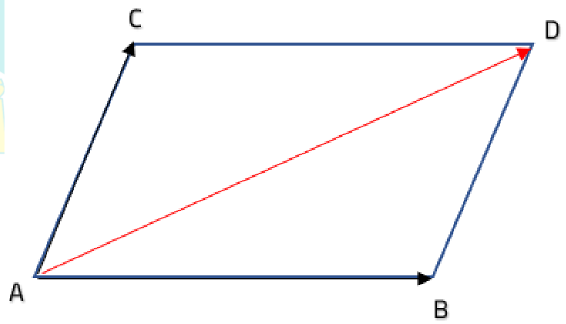
G م أ م لـ $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$.

(مسائل 100 درجة):

تذكرة:

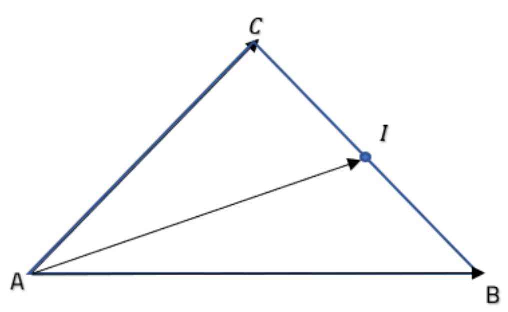
1) علاقة متوازي الأضلاع:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$



2) علاقة المتوسط في المثلث:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$$

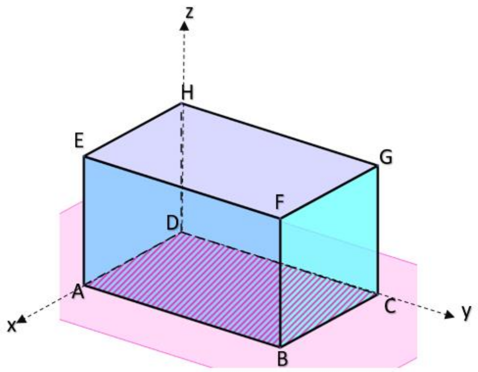


3) علاقة الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

أمثلة:

1) نتأمل في الشكل المجاور متوازي مستطيلات $ABCDEFGH$



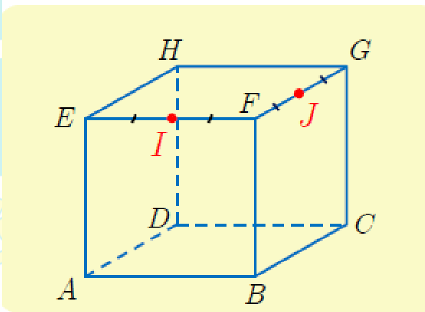
عين α و β و γ ليكون D م أ للنقاط (A,α) , (B,β) , (C,γ).

الحل

من الشكل نلاحظ أن:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$
$$\alpha = 1 , \beta = -1 , \gamma = 1 ; \alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

2) نتأمل في الشكل المجاور مكعباً



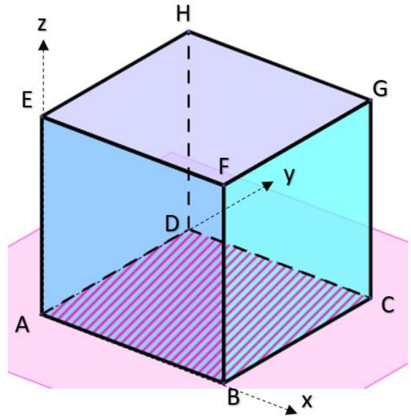
عين α و β و γ ليكون I م أ للنقاط $(A,\alpha), (F,\beta), (E,\gamma)$.

الحل

من علاقة المتوسط نجد:

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AI}$$
$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} - 2\overrightarrow{AI} = \vec{0}$$
$$0\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{IE} = \vec{0}$$
$$\alpha = 0 , \beta = 1 , \gamma = 1 ; \alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

عند اختفاء أحد النقاط المطلوب تثقيلها نكتبها في العلاقة بأمثال صفرية.



3) نتأمل جانباً مكعباً طول حرفه 3

نعرف معلماً متجانساً:

$$\left(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$$

1- جد معادلة المستوي (EBD).

$$A(0,0,0) \quad E(0,0,3)$$
$$B(3,0,0) \quad F(3,0,3)$$
$$C(3,3,0) \quad G(3,3,3)$$
$$D(0,3,0) \quad H(0,3,3)$$

نشكل الشعاعين:

$$\overrightarrow{EB}(3,0,-3)$$
$$\overrightarrow{ED}(0,3,-3)$$
$$\frac{0}{3} \neq \frac{-3}{-3}$$

غير مرتبطين خطياً، نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{EB} = 0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{ED} = 0$$
$$\begin{cases} 3a - 3C = 0 \\ 3B - 3C = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 3a = 3c$$
$$a = c$$

نفرض $c = 1 \Leftarrow a = 1$, نعوض في أحد المعادلات فنجد:

$$3b - 3 = 0] \Rightarrow b = 1$$
$$\Rightarrow \vec{n}(1,1,1)$$

وتكون معادلة المستوي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$1(x - 0) + 1(y - 0) + 1(z - 3) = 0$$
$$x + y + z - 3 = 0$$

2- برهن أن النقطة $K(5,2,-4)$ تنتمي للمستوي (EBD).

نعوض إحداثيات النقطة في المعادلة فنجد:

$$5 + 2 - 4 - 3 = 0 \Rightarrow 7 - 7 = 0$$
$$K \in (EBD)$$

3- عين α و β و γ ليكون K م أ م للنقاط $(E,\alpha),(B,\beta),(D,\gamma)$.

لدينا $K \in (EBD)$ فإن K و E و B و D في مستو واحد فإن الأشعة $\overrightarrow{KE}, \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KD}$:

$$\overrightarrow{KE} = a\overrightarrow{KB} + b\overrightarrow{KD}$$
$$\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2a-5b=-5 \\ -2a+b=-2 \\ 4a+4b=7 \text{ للتحقق} \end{cases}$$

بطرح 1 و 2 نجد:

$$-6b=-3 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

نعوض في 2:

$$-2a+\frac{1}{2}=-2$$
$$-2a=-\frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow a=\frac{5}{4}$$

نعوض في 3 للتحقق:

$$5+2=7 \Rightarrow \text{محققة}$$
$$\overrightarrow{KE}=\frac{5}{4}\overrightarrow{KB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KD}$$
$$\frac{5}{4}\overrightarrow{KB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KE}=\vec{0}$$

K م أ م للنقاط:

$$\left(B,\frac{5}{4}\right),\left(D,\frac{1}{2}\right),(E,-1)$$

حسب التجانس مضرب بـ 4:

$$(B,5),(D,2),E(-4)$$

حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

- **انشاء مركز الأبعاد المتناسبة:**

أي تحديد موضع م أ م.

- G م أ م لنقطتين لهما نفس الثقل عندئذ G في منتصف القطعة المستقيمة.
- G م أ م لثلاثة نقاط لهما نفس الثقل عندئذ G مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات).

مثال$_1$: عين G م أ م للنقاط $(A,2)$ $(B,2)(C,2)$.

الحل

G هي مركز ثقل المثلث ABC.

ارسم معنا :

- G م أ م لنقطتين أحدهما تثقيلتها معدومة عندئذ G تنطبق على الأخرى.

مثال$_2$: عين G م أ م للنقاط $(A,0)$ $(B,3)$.

الحل

G تنطبق على B.

- G م أ م للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ عندها نستخدم علاقة الانشاء وهي:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

مثال3: عين G م أ م للنقطتين $(A,1),(B,3)$:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

ارسم معنا :

أو بطريقة أخرى:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$$

ارسم معنا :

مثال4: عين M م أ م للنقاط $(A,5),(B,-2)$:

$$\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

ارسم معنا :

مثال5:عين M م أ م للنقاط $(A,10),(B,10)$:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{10}{20}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

الرسم:

نلاحظ أن النتيجة تطابق نتيجة الحالة الأولى.

الخاصة التجميعية:

إذا كان G م أ م للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$:

- نفرض I م أ م لـ A و B ويكون:
  1- موضع I: حسب ما تعلمنا سابقاً
  2- ثقل I: هو $\alpha+\beta$
- حسب الخاصة التجميعية G م أ م لـ $(I,\alpha+\beta)$ و (C,γ).

مثال$_1$: جد G م أ م للنقاط $(A,1),(B,2),(C,1),(D,3)$:

ارسم معنا :

نفرض I م أ م للنقاط $(A,1),(C,1)$ عندئذ I منتصف $[AC]$ وأن $(I,2)$.
نفرض J م أ م للنقاط $(B,2),(D,3)$ عندئذ:

$$\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BD}$$

وأن $(J,5)$, وبالتالي حسب الخاصة التجميعية فإن G م أ م لـ $(I,2),(J,5)$:

$$\overrightarrow{IG}=\frac{5}{7}\overrightarrow{IJ}$$

مثال$_2$: عين G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$.

ارسم معنا :

الحل

المطلوب هنا هو إيجاد مركز الابعاد المتناسبة للنقاط:
$(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$

- نفرض I م أ م للنقطتان A و B عندها I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ وبالتالي $(I,2)$.
- نفرض أيضاً J م أ م للنقاط $(C,1),(D,1)$ وعندها J منتصف القطعة المستقيمة $[CD]$ وبالتالي $(J,2)$, فحسب الخاصة التجميعية إن G م أ م للنقاط $(I,2),(J,2)$.

وبطريقة أخرى:
k م أ م لـ $(A,1),(B,1),(C,1)$ وبالتالي k مركز ثقل المثلث ABC.
حسب الخاصة التجميعية فإن G م أ م $(K,3),(D,1)$:

$$\overrightarrow{KG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{KD}$$

ملاحظة هامة:

وجدنا أنه إذا كان G م أ م للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

حيث $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ عدد حقيقي أي يمكننا اعتباره k:

$$\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AB}$$

وهذا يعني أن A و B G على استقامة واحدة.

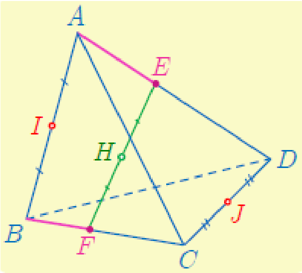
وهذا يعني انه يمكن اثبات أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة بإثبات أن إحداهما م أ م للنقطتين الباقيتين.

التمرين (1)

I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ ولدينا النقطتان E و F تحققان:

$$\overrightarrow{AE}=a.\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BF}=a.\overrightarrow{BC}$$

و H منتصف $[EF]$ والمطلوب إثبات أن H و I و J على استقامة واحدة.



الحل

- لدينا $\overrightarrow{AE}=a.\overrightarrow{AD}$ إذن E م أ م للنقاط:

$$(D,a),(A,1-a)$$

وأن $(E,1)$.

- لدينا $\overrightarrow{BF}=a.\overrightarrow{BC}$ إذن F م أ م للنقاط:

$$(C,a),(B,1-a)$$

وأن $(F,1)$.

وبما أن H منتصف $[EF]$ فهي م أ م للنقاط $(E,1),(F,1)$ وحسب الخاصة التجميعية H م أ م للنقاط:

$$(A,1-a),(B,1-a),(C,a),(D,a)$$

- بما أن I منتصف $[AB]$ إذن I م أ م للنقاط:
$(A,1-a),(B,1-a)$ وأن $(I,2-2a)$.
- بما أن J منتصف $[CD]$ إذن J م أ م للنقاط:
$(C,a),(D,a)$ وأن $(J,2a)$.

فحسب الخاصة التجميعية إن H م أ م للنقاط $(I,2-2a),(J,2a)$ وبالتالي H و I و J على استقامة واحدة.

التمرين (2)

$ABCD$ رباعي وجوه ويوجد:

$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

أثبت أن G م أ م للنقاط $(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$ يقع على $[EF]$ ثم عين G.

الحل

- F م أ م للنقاط $(A,1),(D,2)$ وأن $(F,3)$.
- E م أ م للنقاط $(B,3),(C,1)$ وأن $(E,4)$.

فحسب الخاصة التجميعية G م أ م $(E,4),(F,3)$ وبالتالي إن G و E و F على استقامة واحدة:

$$\overrightarrow{FG}=\frac{4}{7}\overrightarrow{FE}$$

■ إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة :

إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$$

فإن إحداثيات مركز الثقل :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

مثال: في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط :

$$A(1,1,-2),B(2,3,-2),C(4,0,-1)$$

و ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(A,2),(B,2),(C,-1)$$

1- جد إحداثيات G
2- اكتب معادلة الكرة التي مركزها G و نصف قطرها $\sqrt{2}$

....
....
....
....
....
....

■ خاصة الإختزال:

إذا كان G م أ م للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ فإن:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

وشرط تطبيق الإختزال: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

- أما إذا كانت $\alpha+\beta+\gamma=0$ عندئذ يمكن إخفاء M بإصلاح للعلاقة الشعاعية:

مثال₁: اختزل العلاقات الآتية:

1) $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

$$3+1-2\neq 0$$

حسب علاقة الاختزال:

$$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=(3+1-2)\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MG}$$

حيث G م أ م للنقاط $(A,3),(B,1),(C,-2)$.

2) $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$$2-1-1=0$$

نخفي M.

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$$
$$=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}$$
$$=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}$$
$$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{IA}$$

حيث I منتصف $[BC]$.

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$$

نضرب ب -1:

$$-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AI}$$
$$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{IA}$$

حيث I منتصف $[BC]$, الرسم للتوضيح:

3) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

$$1+1+1=3\neq 0$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

G م أ م للنقاط:

$$(A,1),(B,1),(C,1)$$

فإن G مركز ثقل المثلث ABC, الرسم للتوضيح:

تذكرة: خاصة التجانس:

إذا كان G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(A,\alpha),(B,\beta)$$

عندها:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

نضرب بـ $k\neq 0$:

$$k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

G مركز أبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,k\alpha),(B,k\beta)$$

مثال$_2$: بفرض G مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,2)$ أكمل العبارات الآتية:

1) G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(A,6),(B,\dots)$$

2) G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(A,\dots),(B,1)$$

3) G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(A,2),(B,\dots)$$

تمرينات ومسائل:

$\frac{21}{43}$: نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ و E و F تحققان:

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

أثبت أن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$$

يقع على $[EF]$ ثم عين G.

الحل

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BE}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$$
$$\gamma=1$$
$$\beta+1=4\Rightarrow\beta=3$$

E مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(B,3),(C,1),(E,4)$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{\delta}{\alpha+\delta}\overrightarrow{AD}$$
$$\delta=2,\alpha=1$$
$$(F,3)$$

وبالتالي فإن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(E,4),(F,3)$$

حسب الخاصة التجميعية فإن G و E و F تقع على استقامة واحدة.

$$\overrightarrow{EG}=\frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$$

وظائف:

$$\frac{25}{44},\frac{10}{31},\frac{2}{35},\frac{1}{35},\frac{7}{96},\frac{2}{94},\frac{1}{94}$$

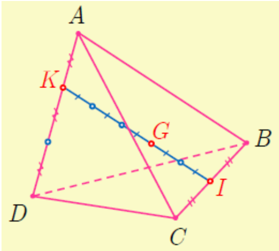
مع تدرب صفحة 81 و82.

مسائل عامة في مركز الأبعاد المتناسبة:

$\frac{1}{31}$: بالإستفادة من المعلومات في الشكل عين الأعداد a و b و c و d ليتحقق ما يلي:

1) K م أ م للنقطتين $(D,d),(A,a)$.
2) I م أ م للنقطتين $(C,c)\,,(B,b)$.
3) G م أ م للنقاط:

$(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)$



الحل

1) من الشكل نلاحظ أن K م أ م للنقاط $(A,2),(D,1)$ و $(K,3)$.
2) من الشكل نلاحظ أن I م أ م للنقاط $(B,1)\,,(C,1)$ و $(I,2)$.
3) من الشكل نلاحظ أن G م أ م للنقاط $(K,3),(I,2)$:

لما كان K م أ م للنقطتين $(A,2),(D,1)$ فحسب التجانس نضرب بـ $\frac{2}{3}$:

$$\left(A,\frac{4}{3}\right),\left(D,\frac{2}{3}\right),(K,2)$$

لما كان I م أ م للنقطتين $(B,1),(C,1)$ فحسب خاصة التجانس نضرب بـ $\frac{3}{2}$:

$$\left(B,\frac{3}{2}\right),\left(C,\frac{3}{2}\right),(I,3)$$

حسب الخاصة التجميعية إن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$\left(A,\frac{4}{3}\right),\left(B,\frac{3}{2}\right),\left(C,\frac{3}{2}\right),\left(D,\frac{2}{3}\right)$$

إذن:

$$a=\frac{4}{3}\,,b=\frac{3}{2}\,,c=\frac{3}{2}\,,d=\frac{2}{3}$$

$\frac{4}{31}$: ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. و k عدد حقيقي غير معدوم ولا يساوي 1, ولتكن I و J و K و L النقاط المعرفة وفق:

$$\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AJ}=k\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{CK}=k\overrightarrow{CD}\,,\overrightarrow{CL}=k\overrightarrow{CB}$$

1) أثبت أن:

$$\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{LK}$$

واستنتج أن النقاط I و J و K و L تقع في مستوي واحد.

2) ما طبيعة الرباعي $IJKL$؟

الحل

1) لدينا:

- $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}$
$=-k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}=k\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)$
$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{CK}=-\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{CK}$
$=-k\overrightarrow{CB}+k\overrightarrow{CD}=k\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$
$\Rightarrow \overrightarrow{LK}=k\overrightarrow{BD}$

بما أن $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ بالتالي المستقيمان (IJ) و (LK) متوازيان وهما يقعان في مستوي واحد.

الرسم للتوضيح:

2) بما أن $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ وبالتالي $IJKL$ متوازي أضلاع.

$\frac{2}{35}$: $ABCD$ رباعي وجوه:

1) I م أ م للنقاط $(B,2), I(A,1)$.

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\,, (I,3)$$

2) J م أ م للنقاط $(D,1),(C,2)$.

$$\overrightarrow{JC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JD}\,, (J,3)$$

3) K م أ م للنقاط:

$(A,1),(B,2),(C,2),(D,1)$

حسب الخاصة التجميعية K م أ م للنقاط $(I,3),(J,3)$ وبالتالي K منتصف $[IJ]$.

الرسم للتوضيح:

4) L م أ م لـ $(A,1)$ و $(B,-2)$:

$$\overrightarrow{AL} = \frac{-2}{-1}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB}\,; (L,-1)$$

5) M م أ م لـ $(A,1),(B,-2),(C,-1)$ فحسب الخاصة التجميعية:

M م أ م للنقاط $(L,-1)$ و $(C,-1)$ وبالتالي M منتصف $[CL]$ و $(M,-2)$

6) N م أ م للنقاط $(A,1),(B,-2),(C,-1),(D,1)$ حسب الخاصة التجميعية فإن N م أ م للنقاط $(D,1),(M,-2)$:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{-1}\overrightarrow{MD}$$

$$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MD}$$

الرسم للتوضيح:

$\frac{10}{41}$: A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة و E و D تحققان:

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}\,, 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$$

1) أثبت أن A و B و C تقع في مستو واحد.

2) بفرض I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$ أثبت أن A و J و I تقع على استقامة واحدة.

الحل

الرسم:

$$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE}\Rightarrow\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$$
$$3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

نلاحظ أن A و E و C على استقامة واحدة وأن B و D و A على استقامة واحدة وبالتالي المستقيمان (BD) و (EC) متقاطعان في A وبالتالي A و B و C و D و E في مستو واحد.

- حسب المتوسط:

$$2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$$
$$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\left(2\overrightarrow{AJ}\right)$$
$$2\overrightarrow{AI}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AJ}$$
$$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

A و J و I على استقامة واحدة.

$\frac{25}{44}$: $ABCDEFGH$ مكعب I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ و M م أ م لـ $(G,1),(A,1),(B,1)$ والمطلوب:

1) أثبت أن M تنتمي إلى $[IJ]$ وعين موضعها.
2) أثبت أن M تنتمي إلى $[KL]$ وعين موضعها.
3) استنتج أن I و J و K و L تقع في مستو واحد، وماهي طبيعة $ILJK$؟

الحل

- I منتصف $[AE]$ وبالتالي I م أ م للنقاط $(A,1),(E,1)$ و $(I,2)$.
- J منتصف $[BG]$ وبالتالي J م أ م للنقاط $(G,1),(B,1)$ وأن $(J,2)$.

حسب الخاصة التجميعية M م أ م للنقاط $(I,2),(J,2)$ إذن M تقع في منتصف $[IJ]$.

- بشكل مماثل M تقع في منتصف $[KL]$.

إذن المستقيمان (KL) و (IJ) متقاطعان في M وبالتالي I و J و K و L تقع في مستو واحد.

بما أن قطرا الرباعي $ILJK$ متناصفان فإن الرباعي هو متوازي أضلاع.

$\frac{2}{94}$: $ABCD$ رباعي وجوه, أثبت أن النقاط M و B و C و D تقع في مستو واحد ثم وضع النقطة M:

1) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

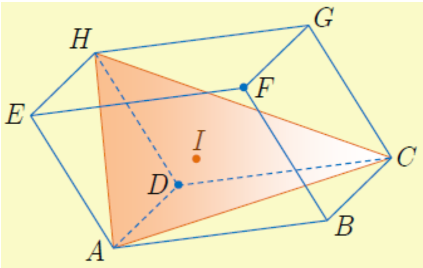
M مركز أبعاد متناسبة للنقاط وبالتالي النقاط تقع في مستو واحد، وM مركز ثقل المثلث BDC.

2) $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{MA} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

فإن M م أ م للنقاط $(B,1),(C,1),(D,2)$ ولتوضيع M:
نفرض I م أ م لـ $(C,1),(B,1)$ إذن I منتصف $[BC]$ و $(I,2)$ فحسب الخاصة التجميعية M م أ م $(D,2),(I,2)$ وبالتالي M منتصف $[DI]$.

$\frac{5}{95}$:



I مركز ثقل المثلث AHC, أثبت أن I و D و F على استقامة واحدة وعين موقع I على $[DF]$:

الحل

لدينا:

- $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$
- $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI}$
- $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HI}$

بالجمع نجد:

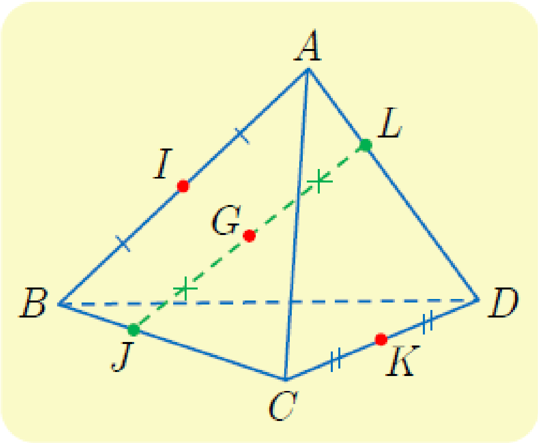
$$3\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} + \underbrace{(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{HI})}_{\substack{=\vec{0} \\ \text{لأن } I \text{ مركز ثقل } AHC}}$$

$$3\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$$
$$= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DF}$$
$$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$$

I و D و F على استقامة واحدة.

مثال: $ABCD$ رباعي وجوه و K و I منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[CD]$ على الترتيب و النقطتان J و L معرفتان بالعلاقتين :

$$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$



$\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ و أخيراً G منتصف $[Jl]$ أثبت أن النقاط G و I و K على استقامة واحدة

الحل

……

……

……

……

……

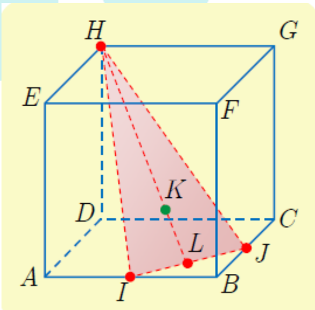
تنويه :

لإثبات أن أربع نقاط تقع في مستوٍ واحد يكفي إثبات أن إحداها مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاثة الأخرى

مثال: $ABCDEFGH$ مكعب و I و J منتصفا الحرفين [AB] و $[BC]$ بالترتيب و K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(A,1),(B,2),(C,1),(H,1)$

أثبت وقوع النقاط H, K, J, I في مستوٍ واحد



الحل

……

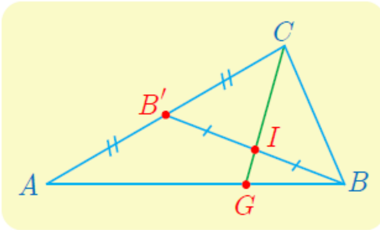
……

……

……

……

مثال: انطلاقاً من الشكل المجاور . جد الأمثال α, β, γ التي تجعل I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ ثم استنتج العدد λ الذي يحقق أن $\overrightarrow{GA} + \lambda \overrightarrow{GB} = \vec{0}$



الحل

مسألة مستقيمات متقاطعة :

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ما . و لنعرف النقاط P, Q, S, R بالشكل :

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} \ ,\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA} \ ,\overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

نهدف إلى إثبات تلاقي المستقيمين (PQ) و (RS)

1- أثبت أن P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B, \beta), (C, \gamma)$ و أن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, \alpha), (D, \delta)$ حيث $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ثوابت يُطلب تعيينها

2- ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(A, 1), (B, 4), (C, 1), (D, 3)$$

أثبت أن G تقع على المستقيم (PQ)

3- أثبت بأسلوب مماث أن G تقع على المستقيم (RS)

4- استنتج تقاطع المستقيمين $(PQ), (RS)$

الحل

مسألة دمج

نتأمل ثلاث نقاط A و B و C في الفراغ و k عدد حقيقي من المجال $[-1,1]$. ترمز G_k إلى مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(A;k^2+1)\,,(B;k),(C,-k)$$

1- مثل النقاط A و B و C و I منتصف $[BC]$ و أنشئ النقطتين G_1, G_{-1}

2- أثبت أنه مهما يكن k من المجال $[-1,1]$ فإن :

$$\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$$

3- ادرس تغيرات التابع f المعرف على المجال $[-1,1]$ وفق : $f(x) = -\frac{x}{x^2+1}$

4- استنتج مجموعة النقاط G_k عندما تتحول k في المجال $[-1,1]$

الحل