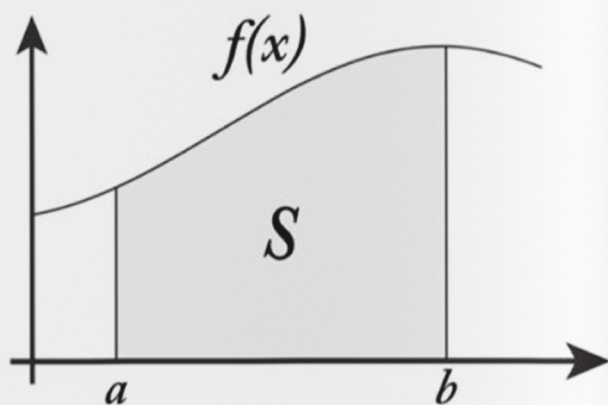


$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - m)^2}{n}}$$

كشف الرياضيات

الاشتقاق



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5x + 2)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x - 3}{x - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + 1}{2x^2 - x - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} + 2x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$



الدرس الأول

1

قابلية الاشتقاق والتفسير الهندسي



Scan me!

الدراسة هي
مفتاح لتدقيق
أعمالك،
فاستغل كل
فرصة للتعلم.



دراسة قابلية اشتقاق عند نقطة

نقول إن التابع f قابل للاشتقاق عند النقطة a إذا كانت النهاية

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

موجودة ومحدودة ووحيدة وندعو ذلك f قابل للاشتقاق عند a أو f اشتقائي عند a فالخطوات :

1- نعرف تابعاً مساعداً :

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2- نبسط المقدار للتخلص من $\frac{0}{0}$

3- نحسب نهاية $g(x)$ عند a

فإذا كانت النهاية موجودة و محدودة و وحيدة قلنا أن f قابل للاشتقاق عند a و رمزنا لقيمة النهاية $f'(a)$

التمرين (1)

اثبت ان التابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ قابل للاشتقاق عند $a = 0$

الحل

التمرين (2)

اثبت ان التابع $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$ قابل للاشتقاق عند $a = 2$

الحل



التحريين (4)

ادرس قابلية اشتقاق التابع $f(x) = \sqrt{x}$ عند

$$a = 0$$

[illegible]

التمرين (5)

ادرس قابلية اشتقاق التابع

$$a = 1 \text{ und } f(x) = 2x^2 + 3x - 4$$

[illegible]

التمرين (3)

أثبت أن التابع $f(x) = x|x|$ اشتقاقي عند $a = 0$

[illegible]

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

التمرين (6)

ادرس قابلية اشتقاق التابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$ عند $a = 0$

[illegible]

التمرين (7)

ادرس قابلية اشتقاق التابع $f(x) = \frac{|x|+2}{x^2+1}$ عند $a = 0$

[illegible]

ملاحظة: لمعرفة ميل مستقيم من معادلته يجب كتابته بالشكل القانوني أي $y = ax + b$

مثال (2)

حدد ميل المستقيم في الحالات التالية:

$$y - 2x = 1 \quad -1$$

نصلح شكل المعادلة:

$$y = 2x + 1$$

وبالتالي $m = 2$

$$2y - 4x = 0 \quad -2$$

نصلح شكل المعادلة $2y = 4x$

$$y = 2x$$

وبالتالي $m = 2$

$$x + 2y = 5 \quad -3$$

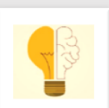
نصلح:

$$2y = -x + 5$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

وبالتالي $m = -\frac{1}{2}$

استنتاج معادلة المماس



ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعروف والمستمر والاشتقاقي عند a و ليكن x من جوار ما لـ a وليكن T المستقيم القاطع للخط البياني c_f في النقطتين:

$$(a, f(a)) , \quad (x, f(x))$$

التفسير الهندسي للاشتقاق



تمهيد:

إن معادلة أي مستقيم تكتب بالشكل:

$$y = ax + b$$

ولكن يمكن أن نأخذ شكلاً آخر للمعادلة فإذا كان

d مستقيماً مار من النقطة $A(x_0, y_0)$ وميله m

فإن معادلة المستقيم تصبح:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

التمرين (1)

أوجد معادلة المستقيم المار من النقطة

$A(1, 3)$ وميله $m = 2$

الحل

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = 2(x - 1)$$

$$y - 3 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2 + 3$$

$$y = 2x + 1$$

لاحظ أن أمثال x هي نفسها ميل المستقيم

مثال (1)

إن ميل المستقيم $y = 3x - 4$ هو 3



وبالتالي: التفسير الهندسي للعدد المشتق $f'(a)$ هو ميل المماس عند النقطة التي فاصلتها a

معادلة المماس

نعلم أن أي مستقيم ميله m ويمر من النقطة $A(x_0, y_0)$ تعطى بالشكل:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

فإذا كان المستقيم المطلوب هو المماس في النقطة التي فاصلتها a , فيكون:

فاصلة نقطة التماس a

ترتيب نقطة التماس $y_0 = f(a)$

وميل المماس $m = f'(a)$

نعوض:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - f(a) &= f'(a)(x - a) \\ y &= f'(a)(x - a) + f(a) \end{aligned}$$

إذن: لإيجاد معادلة المماس:

- 1- نحدد الفواصل a
- 2- نحدد الترتيب $f(a)$
- 3- نوجد الميل $m = f'(a)$
- 4- نعوض في القانون

نعلم -تعريفاً- أن m ميل المستقيم T يساوي $\tan(\theta)$ حيث θ الزاوية التي يصنعها T مع محور الفواصل

ضع رسمتك هنا:

نلاحظ أن:

المقابل $f(x) - f(a)$

المجاور $x - a$

ولما كان:

$$m = \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ولكن عندما $x \rightarrow a$ يسعى المستقيم T ليكون مماساً للخط C_f في النقطة التي فاصلتها a وبالتالي يكون ميل هذا المماس:

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

ضع رسمتك هنا:

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

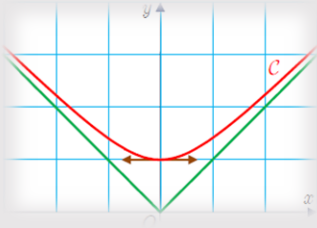
.....

.....

.....

مثال (3)

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:



$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

اكتب معادلة
المماس في النقطة
التي فاصلتها $x = 0$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (1)

أثبت أن التابع $f(x) = x^2 + 3x + 1$

قابل للاشتقاق عند $a = 2$

ثم استنتج معادلة المماس في النقطة التي
فاصلتها $a = 2$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (1)

أوجد ميل المماس للخط c_f عند $x = 1$ حيث:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

الحل

f اشتقاقي على R :

$$f'(x) = 4x - 4$$

$$m = f'(1) = 4 - 4 = 0$$

إذا كان الميل يساوي الصفر فالمستقيم أفقي

مثال (2)

أوجد ميل المماس للتابع

$$f(x) = \sin x \text{ في النقطة التي فاصلتها } \frac{\pi}{3}$$

ما هو التفسير الهندسي في حال كون تابع غير اشتقاقي؟؟؟!

الحالة الأولى:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$$

فهذا يعني حسب ما تعلمناه سابقاً إن $\tan \theta = \infty$ وبالتالي المماس في هذه النقطة شاقولي **معادلته** $x = a$ (تعلمنا في صفوف سابقة أن المستقيم الشاقولي ميله غير معرف)

التمرين (1)

ادرس قابلية اشتقاق التابع $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ عند النقطة التي فاصلتها $x = 2$ و أعطِ التأويل الهندسي للنتيجة

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

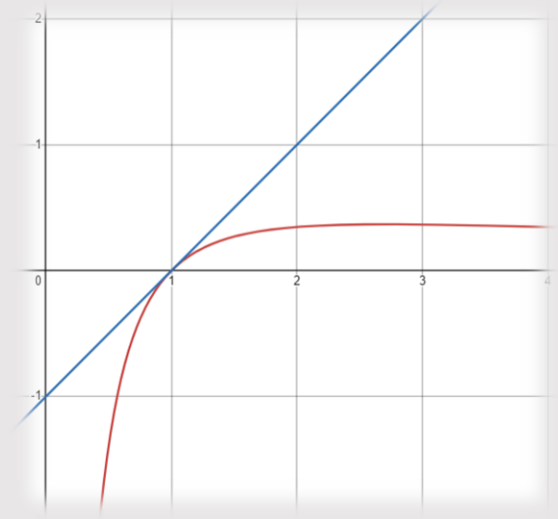
.....

.....

.....

مثال (4)

ليكن f تابع معرف على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ خطه البياني C , والمماس Δ مماس للخط البياني C كما هو موضح في الشكل المجاور:
عين معادلة المماس Δ .



الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الخلاصة: إن العدد المشتق (في حال وجوده) يمثل ميل المماس في النقطة a لكن!!



الحالة الثانية:

لدى حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ قد نحتاج لدراسة النهاية من اليمين ومن اليسار (غالباً بوجود قيمة مطلقة) نستخدم الرموز الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^+)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^-)$$

فإذا كان $f'(a^+) \neq f'(a^-)$ فهو غير قابل للاشتقاق عند a

التفسير الهندسي: الخط c_f يقبل نصفي

مماسين عند النقطة منه التي فاصلتها $x = a$

معادلة نصف المماس من اليمين:

$$y = f'(a^+)(x - a) + f(a)$$

ومعادلة نصف المماس من اليسار:

$$y = f'(a^-)(x - a) + f(a)$$

التمرين (2)

ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعروف بالشكل :

$$f(x) = \frac{|x| + 2}{x^2 + 1}$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $a = 0$ و اشرح

التأويل الهندسي

الحل

التمرين (3)

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $a = 1$

$$f(x) = \frac{x}{|x - 1| + 1}$$

وفسر النتيجة هندسياً

الحل

بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1- إن التابع $f(x) = 2\sqrt{x} + x$:

a	قابل للاشتقاق عند $a = 1$ و $f'(1) = 0$	b	غير قابل للاشتقاق عند $a = 1$
c	قابل للاشتقاق عند $a = 1$ و $f'(1) = 2$	d	قابل للاشتقاق عند $a = 1$ و $f'(1) = 3$

2- إن التابع $f(x) = \sqrt{2-x}$:

a	قابل للاشتقاق عند $a = 2$ و $f'(2) = 0$	b	غير قابل للاشتقاق عند $a = 2$
c	قابل للاشتقاق عند $a = 2$ و $f'(2) = 2$	d	قابل للاشتقاق عند $a = 2$ و $f'(2) = 3$

3- إن التابع $f(x) = \sin(2x)$:

a	قابل للاشتقاق عند $a = 0$ و $f'(0) = 0$	b	غير قابل للاشتقاق عند $a = 0$
c	قابل للاشتقاق عند $a = 0$ و $f'(0) = 2$	d	قابل للاشتقاق عند $a = 0$ و $f'(0) = 3$

4- إن التابع $f(x) = (2x-4)\sqrt{x-2}$:

a	قابل للاشتقاق عند $a = 2$ و $f'(2) = 0$	b	غير قابل للاشتقاق عند $a = 2$
c	قابل للاشتقاق عند $a = 2$ و $f'(2) = 2$	d	قابل للاشتقاق عند $a = 2$ و $f'(2) = 3$

5- إن التابع $f(x) = 2x^2 - 3$:

a	قابل للاشتقاق عند $a = \sqrt{2}$ و $f'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$	b	غير قابل للاشتقاق عند $a = \sqrt{2}$
c	قابل للاشتقاق عند $a = \sqrt{2}$ و $f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$	d	قابل للاشتقاق عند $a = \sqrt{2}$ و $f'(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

6- إن التابع $f(x) = x^2 + x + 1$:

a	قابل للاشتقاق عند $a = 1$ و $f'(1) = 0$	b	غير قابل للاشتقاق عند $a = 1$
c	قابل للاشتقاق عند $a = 1$ و $f'(1) = 2$	d	قابل للاشتقاق عند $a = 1$ و $f'(1) = 3$

7- إن التابع $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$:

a	قابل للاشتقاق عند $a = 1$ و $f'(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	b	غير قابل للاشتقاق عند $a = 1$
---	--	---	-------------------------------



c	قابل للاشتقاق عند $a = 1$ و $f'(1) = 2$	d	قابل للاشتقاق عند $a = 1$ و $f'(1) = 3$
---	---	---	---

-8 إن التابع $f(x) = (x-1)|x-1|$:

a	قابل للاشتقاق عند $a = 1$ و $f'(1) = 1$	b	غير قابل للاشتقاق عند $a = 1$
c	قابل للاشتقاق عند $a = 1$ و $f'(1) = 0$	d	قابل للاشتقاق عند $a = 1$ و $f'(1) = 3$

-9 إن التابع $f(x) = 3x^2 - x$:

a	قابل للاشتقاق عند $a = -1$ و $f'(-1) = 22$	b	غير قابل للاشتقاق عند $a = -1$
c	قابل للاشتقاق عند $a = -1$ و $f'(-1) = -2$	d	قابل للاشتقاق عند $a = -1$ و $f'(-1) = -7$

-10 إن التابع $f(x) = \cos(2x)$:

a	قابل للاشتقاق عند $a = 0$ و $f'(0) = 2$	b	غير قابل للاشتقاق عند $a = 0$
c	قابل للاشتقاق عند $a = 0$ و $f'(0) = 0$	d	قابل للاشتقاق عند $a = 0$ و $f'(0) = 3$

-11 إن التابع $f(x) = x^2 + 2x + 1 + \frac{3}{x-1}$:

a	معرف على المجال $]-\infty, +\infty[$ واشتقاقي عليه	b	معرف على المجال $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ واشتقاقي عليه
c	معرف على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ واشتقاقي عليه	d	معرف على المجال $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ واشتقاقي عليه

-12 إن التابع $f(x) = \sin(x) + \sqrt{x}$:

a	معرف على المجال $]-\infty, +\infty[$ واشتقاقي عليه	b	معرف على المجال $[0, +\infty[$ واشتقاقي عليه
c	معرف على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ واشتقاقي عليه	d	معرف على المجال $[0, +\infty[$ واشتقاقي على $]0, +\infty[$

-13 إن التابع $f(x) = (4-2x)\sqrt{x-2}$:

a	معرف على المجال $]4, +\infty[$ واشتقاقي عليه	b	معرف على المجال $[2, +\infty[$ واشتقاقي عليه
c	معرف على $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ واشتقاقي عليه	d	معرف على المجال $]2, +\infty[$ واشتقاقي عليه

-14 إن التابع $f(x) = (3-x)\sqrt{3-x}$:

a	معرف على المجال $]3, +\infty[$ واشتقاقي عليه	b	معرف على المجال $]-\infty, 3[$ واشتقاقي على $] -\infty, 3[$
c	معرف على $[3, +\infty[$ واشتقاقي عليه	d	معرف على المجال $]-\infty, 3[$ واشتقاقي عليه



15- إن التابع $f(x) = 2x\sqrt{x}$:

a	معرف على المجال $]-\infty, +\infty[$ واشتقاقي عليه	b	معرف على المجال $[0, +\infty[$ واشتقاقي عليه
c	معرف على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ واشتقاقي عليه	d	معرف على المجال $[0, +\infty[$ واشتقاقي على $]0, +\infty[$

16- إن التابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$:

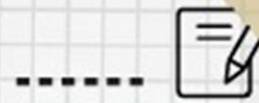
a	معرف على المجال $]2, +\infty[\cup]-\infty, 0]$ واشتقاقي عليه	b	معرف على المجال $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ واشتقاقي عليه
c	اشتقاقي على المجال $]2, +\infty[\cup]-\infty, 0]$	d	معرف على المجال $]2, +\infty[\cup]-\infty, 0]$ واشتقاقي عليه

C	1
B	2
C	3
A	4
B	5
B	6
A	7
C	8
D	9
C	10
C	11
D	12
B	13
D	14
B	15
C	16



الدرس الثاني

قواعد الاشتقاق



لا تستسلم،

فكل عقبة

تخطاها

تقربك من

النجاح.

ملاحظة: إذا كان التابع من النمط $\frac{1}{x^n}$ فنكتبه
أولاً بالشكل x^{-n} ثم نشتقه $-nx^{-n-1}$

مثلاً:

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \rightarrow f'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}} \quad \text{للحفظ}$$

• مشتق التوابع المثلثية:

$$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

• مشتق الجذر:

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثلاً:

$$f(x) = \sqrt{2x} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}}$$

المشتقات المألوفة

• مشتق العدد الثابت:

$$f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$$

مثلاً:

$$f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = \sqrt{2} \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = \pi \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{3}{4} \rightarrow f'(x) = 0$$

• مشتق kx :

$$f(x) = kx \rightarrow f'(x) = k$$

مثلاً:

$$f(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3$$

$$f(x) = 5x \rightarrow f'(x) = 5$$

$$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

$$f(x) = -x \rightarrow f'(x) = -1$$

$$f(x) = \frac{x}{3} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{2x}{3} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}$$

• مشتق القوة x^n :

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

نزل - خفض

مثلاً:

$$f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$$

$$f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f(x) = x^{-3} \rightarrow f'(x) = -3x^{-4}$$

$$f(x) = x^{-2} \rightarrow f'(x) = -2x^{-3}$$

$$f(x) = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -x^{-2}$$



$$2- f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

.....

.....

$$3- f(x) = x^2 + 4x + 1$$

.....

.....

$$4- f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5$$

.....

.....

$$5- f(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \sqrt{x}$$

.....

.....

$$6- f(x) = \cos x - 2\sin x + \frac{3}{x}$$

.....

.....

.....

.....

$$7- f(x) = x\sqrt{x}$$

.....

.....

.....

.....

$$8- f(x) = x\sin x$$

.....

.....

.....

.....

$$9- f(x) = x^2\cos x$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$f(x) = \sqrt{x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}}$$

• تلخيص سريع لكل ما سبق:

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
kx	k
$x^n ; n \neq 1$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

العمليات على الاشتقاق

$f(x)$	$f'(x)$
$u + v$	$u' + v'$
$u - v$	$u' - v'$
$\lambda \cdot u$	$\lambda \cdot u'$
$u \cdot v$	$u'v + v'u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$

أمثلة

اوجد مشتق كلاً من التوابع التالية:

$$1- f(x) = 2x + \sin x$$

.....

.....



قابلية اشتقاق تابع على مجال

مبرهنات

- كل تابع صحيح اشتقاقي على R
- التابعان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ اشتقاقيان على R
- التابع $x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0, +\infty[$
- التابع الكسري اشتقاقي على R ما عدا القيم التي تعدم مقامه
- مجموع وفرق تابعين اشتقاقيين على I هو اشتقاقي على I

مجال اشتقاق التابع الجذري

إن أي تابع جذري معرف على مجال من النمط $]a, +\infty[$ أو $]-\infty, a]$ اشتقاقي تماماً على المجال $]a, +\infty[$ أو $]-\infty, a]$ ثم ندرس قابلية الاشتقاق عند الطرف a فإذا كان قابلاً للاشتقاق. نغلق مجال الاشتقاقية.

تمرين

أوجد مجال اشتقاقية كلٍّ من التوابع التالية ثم أوجد $f'(x)$:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 - 1$$

$$10-f(x) = \frac{1+x}{2x}$$

$$11-f(x) = \frac{x-1}{2x-3}$$

$$12-f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$13-f(x) = \frac{x^2-2}{2x}$$

$$14-f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$15-f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$$


$$f(x) = x\sqrt{2-x} - 4$$

$$f(x) = x\sqrt{2-x} \quad -4$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} - 2$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} - 2$$

$$f(x) = \sqrt{2x - 4} - 3$$



$$f(x) = x\sqrt{x} - 6$$

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} - 5$$

$$f(x) = (3 - x)\sqrt{3 - x} - 7$$



This image shows a full page of a document template designed for handwritten notes or essays. It features approximately 28 evenly spaced, thin grey horizontal lines across the entire width of the page. The margins are consistent on all sides, providing a clear area for writing. There is no pre-printed text or other graphical elements.

سؤال تميز

اعط مثال على تابعين احدهما غير اشتقاقي عند نقطة ما الا أن جداءهما تابعاً اشتقاقياً عند نفس النقطة.

[illegible]

نتيجة: كل تابع جذري مضروب بمضمونه يكون اشتقاقي عند طرف المجال

تمرين: إحدى صفات القطع المكافئ

ليكن P القطع المكافئ الذي معادلته $f(x) = x^2$ ولتكن A و B نقطتين منه فاصلتهما u و v ($u \neq v$) ولتكن D النقطة من P التي فاصلتها $\frac{u+v}{2}$ أثبت أن المماس T المار بالنقطة D للقطع P يوازي المستقيم (AB) .

الحل

تمرين (1)

فيما يأتي C_f هو الخط البياني للتابع f . اكتب معادلة لمماس C_f في النقطة A من C_f التي فاصلتها 4.

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$f(x) = x^2 - 2$$

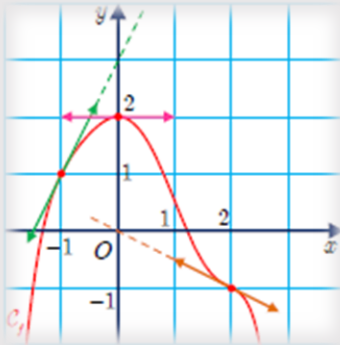
$$f(x) = \sqrt{2x + 1} - 3$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - 4$$

الحل

تمرين (2)

في الشكل المرافق، C_f هو الخط البياني لتابع f . تأمل الشكل وأجب عن الأسئلة الآتية :



-1 عَيّن كلاً من $f(0)$ و $f(2)$ و $f(-1)$ و $f'(0)$ و $f'(2)$ و $f'(-1)$.

تمرین (3)

فيما يأتي ، احسب التابع المشتق للتابع f مبيئاً المجموعة التي تحسب المشتق عليها .

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{\sqrt{2}}{3} - 1$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{4} - 2$$

$$f(x) = x^4 - 2x\sqrt{x} - 3$$

$$f(x) = \frac{2}{x+1} - x - 4$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4} \quad -5$$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \quad -6$$

$$f(x) = x \cos x \quad -7$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} - 8$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \quad -9$$

$$f(x) = \sin x \cos x - 10$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1} - 11$$

$$f(x) = \frac{1+\sin x}{2+\cos x} - 12$$

[illegible]

2- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟ أعط

عديدين صحيحين متتاليين يحصران كلاً من

طول المعادلة $f(x) = 0$.

[illegible]

بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1- إن التابع $f(x) = x^2 + 2x + 1 + \frac{3}{x-1}$

a	معرف على المجال $]-\infty, +\infty[$ واشتقاقي عليه	b	معرف على المجال $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ واشتقاقي عليه
c	معرف على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ واشتقاقي عليه	d	معرف على المجال $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ واشتقاقي عليه

2- إن التابع $f(x) = \sin(x) + \sqrt{x}$

a	معرف على المجال $]-\infty, +\infty[$ واشتقاقي عليه	b	معرف على المجال $[0, +\infty[$ واشتقاقي عليه
c	معرف على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ واشتقاقي عليه	d	معرف على المجال $[0, +\infty[$ واشتقاقي على $]0, +\infty[$

3- إن التابع $f(x) = (4 - 2x)\sqrt{x - 2}$

a	معرف على المجال $]4, +\infty[$ واشتقاقي عليه	b	معرف على المجال $[2, +\infty[$ واشتقاقي عليه
c	معرف على $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ واشتقاقي عليه	d	معرف على المجال $]2, +\infty[$ واشتقاقي عليه

4- إن التابع $f(x) = (3 - x)\sqrt{3 - x}$

a	معرف على المجال $]3, +\infty[$ واشتقاقي عليه	b	معرف على المجال $]3, +\infty[$ واشتقاقي على $] -\infty, 3[$
c	معرف على $]3, +\infty[$ واشتقاقي عليه	d	معرف على المجال $] -\infty, 3[$ واشتقاقي عليه

5- إن التابع $f(x) = 2x\sqrt{x}$

a	معرف على المجال $]-\infty, +\infty[$ واشتقاقي عليه	b	معرف على المجال $[0, +\infty[$ واشتقاقي عليه
c	معرف على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ واشتقاقي عليه	d	معرف على المجال $[0, +\infty[$ واشتقاقي على $]0, +\infty[$

6- إن التابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

a	معرف على المجال $]2, +\infty[\cup]-\infty, 0[$ واشتقاقي عليه	b	معرف على المجال $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ واشتقاقي عليه
c	اشتقاقي على المجال $]2, +\infty[\cup]-\infty, 0[$	d	معرف على المجال $]2, +\infty[\cup]-\infty, 0[$ واشتقاقي عليه

7- إن مشتق التابع $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$

a	$12x - 4$	b	$-12x - 4$	c	$12x + 4$	d	غير ذلك
---	-----------	---	------------	---	-----------	---	---------



8- إن مشتق التابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$:

a	$\frac{3}{(x-1)^2}$	b	$\frac{3}{(x+1)^2}$	c	$\frac{-3}{(x+1)^2}$	d	غير ذلك
---	---------------------	---	---------------------	---	----------------------	---	---------

9- إن مشتق التابع $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$:

a	$\frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$	b	$\frac{-x^2-3}{(x^2+3)^2}$	c	$\frac{x^2+3}{(x^2+3)^2}$	d	$\frac{-x^2+3}{(x^2-3)^2}$
---	----------------------------	---	----------------------------	---	---------------------------	---	----------------------------

10- إن مشتق التابع $f(x) = \frac{x+4}{3}$:

a	3	b	$3x-1$	c	$\frac{1}{3}$	d	غير ذلك
---	---	---	--------	---	---------------	---	---------

11- إن مشتق التابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$:

a	$\frac{-x\cos x - \sin x}{x^2}$	b	$\frac{x\cos x + \sin x}{x^2}$	c	$\frac{x\cos x - \sin x}{x^4}$	d	غير ذلك
---	---------------------------------	---	--------------------------------	---	--------------------------------	---	---------

12- إن مشتق التابع $f(x) = x^2 + x - 1 - \frac{1}{x}$:

a	$2x+1+\frac{1}{x^2}$	b	$2x-1+\frac{1}{x^2}$	c	$2x+1-\frac{1}{x^2}$	d	$-2x+1+\frac{1}{x^2}$
---	----------------------	---	----------------------	---	----------------------	---	-----------------------

13- إن مشتق التابع $f(x) = \frac{x^2-7x+6}{(x-1)^2}$:

a	$\frac{-23x^2+18x+5}{(x+1)^4}$	b	$\frac{-23x^2-18x+5}{(x-1)^4}$	c	$\frac{-23x^2+18x+5}{(x-1)^4}$	d	غير ذلك
---	--------------------------------	---	--------------------------------	---	--------------------------------	---	---------

14- إن مشتق التابع $f(x) = \sqrt[3]{x} - 5$:

a	$-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$	b	$\frac{1}{3}x^{+\frac{2}{3}}$	c	$-\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}$	d	$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
---	--------------------------------	---	-------------------------------	---	-------------------------------	---	-------------------------------

15- إن مشتق التابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$:

a	$\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	b	$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$	c	$\frac{2}{-3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	d	$\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{-1}{2\sqrt{x}}$
---	--	---	---	---	--	---	---

16- إن مشتق التابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$:

a	$\frac{1}{2x\sqrt{x}}$	b	$\frac{1}{2x^2\sqrt{x}}$	c	$-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$	d	غير ذلك
---	------------------------	---	--------------------------	---	-------------------------	---	---------

17- إن مشتق التابع $f(x) = x^2 \cos(x)$:

a	$2x\cos x - x^2\sin x$	b	$-2x\cos x - x^2\sin x$	c	$2x\cos x + x^2\sin x$	d	غير ذلك
---	------------------------	---	-------------------------	---	------------------------	---	---------

18- إن مشتق التابع $f(x) = \sqrt{x}(x^2 + 2x - 1)$:

a	$\frac{5x^2-6x-1}{2\sqrt{x}}$	b	$\frac{5x^2+6x-1}{-2\sqrt{x}}$	c	$\frac{-5x^2+6x-1}{2\sqrt{x}}$	d	$\frac{5x^2+6x-1}{2\sqrt{x}}$
---	-------------------------------	---	--------------------------------	---	--------------------------------	---	-------------------------------

19- إن مشتق التابع $f(x) = \frac{x^2+6}{x^2-1}$:

a	$\frac{14x}{(x^2-1)^2}$	b	$\frac{-14x}{(x^2+4)^2}$	c	$\frac{-14x}{(x^2-1)^2}$	d	غير ذلك
---	-------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	---------

20- إن مشتق التابع $f(x) = \frac{x+3}{3\sqrt{x}}$:

غير ذلك	d	$\frac{3x+9}{18x\sqrt{x}}$	c	$\frac{-3x-9}{18x\sqrt{x}}$	b	$\frac{3x-9}{18x\sqrt{x}}$	a
---------	---	----------------------------	---	-----------------------------	---	----------------------------	---

21- إن مشتق التابع $f(x) = x^2\sqrt{x}$:

غير ذلك	d	$\frac{5x\sqrt{x}}{-2}$	c	$\frac{5x\sqrt{x}}{2}$	b	$\frac{-5x\sqrt{x}}{2}$	a
---------	---	-------------------------	---	------------------------	---	-------------------------	---

22- إن مشتق التابع $f(x) = \frac{x^2+1}{\sin x}$:

$\frac{2x\sin x - x^2\cos x - \cos x}{\sin^2 x}$	d	$\frac{2x\sin x - x^2\cos x - \cos x}{\sin^2 x}$	c	$\frac{2x\sin x - x^2\cos x - \cos x}{\sin^2 x}$	b	$\frac{2x\sin x - x^2\cos x - \cos x}{\sin^2 x}$	a
--	---	--	---	--	---	--	---

23- إن مشتق التابع $f(x) = \cos(x) \sin(x)$:

غير ذلك	d	$\sin^2 x + \cos^2 x$	c	$-\sin^2 x - \cos^2 x$	b	$-\sin^2 x + \cos^2 x$	a
---------	---	-----------------------	---	------------------------	---	------------------------	---

24- إن مشتق التابع $f(x) = \tan x - x$:

$\tan^2 x$	d	$\tan^2 x - 1$	c	$\tan^2 x + 1$	b	$x \tan^2 x$	a
------------	---	----------------	---	----------------	---	--------------	---

25- إن مشتق التابع $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$:

غير ذلك	d	$\frac{-x+1}{(x^2-1)^2}$	c	$\frac{-x+1}{(x^2+1)^2}$	b	$\frac{-x-1}{(x^2+1)^2}$	a
---------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---

26- إن مشتق التابع $f(x) = \frac{x+1}{(2x-1)^2}$:

غير ذلك	d	$\frac{-4x^2-8x-5}{(2x-1)^4}$	c	$\frac{-4x^2+8x+5}{(2x-1)^4}$	b	$\frac{-4x^2-8x+5}{(2x-1)^4}$	a
---------	---	-------------------------------	---	-------------------------------	---	-------------------------------	---

27- إن مشتق التابع $f(x) = \sin(x^2)$:

غير ذلك	d	$2x \cos(x^2)$	c	$-2x \cos(x^2)$	b	$2x \sin(x^2)$	a
---------	---	----------------	---	-----------------	---	----------------	---

28- إن مشتق التابع $f(x) = (x^2 + 4x)^3$:

غير ذلك	d	$6(x^5 + 10x^4 - 32x^3 + 32x^2)$	c	$6(x^5 + 10x^4 + 32x^3 + 32x^2)$	b	$6(x^5 - 10x^4 + 32x^3 + 32x^2)$	a
---------	---	----------------------------------	---	----------------------------------	---	----------------------------------	---

29- إن مشتق التابع $f(x) = \sin(\cos x)$:

$-\sin x \cdot \cos(\cos x)$	d	$\sin x \cdot \cos(\cos x)$	c	$-\sin x \cdot \cos(\sin x)$	b	$-\sin x \cdot -\cos(\cos x)$	a
------------------------------	---	-----------------------------	---	------------------------------	---	-------------------------------	---

30- إن مشتق التابع $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$:

غير ذلك	d	$-\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$	c	$\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$	b	$-\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4}$	a
---------	---	---	---	--	---	---	---

31- إن مشتق التابع $f(x) = \cos^3(x)$:

غير ذلك	d	$-3\sin x^2 \cos^2 x$	c	$3\sin x \cos^2 x$	b	$-3\sin x \cos^2 x$	a
---------	---	-----------------------	---	--------------------	---	---------------------	---

32- إن مشتق التابع $f(x) = \tan(3x)$:

غير ذلك	d	$3 + 3 \tan^3 3x$	c	$3 + 3 \tan^2 3x$	b	$3 - 3 \tan^2 3x$	a
---------	---	-------------------	---	-------------------	---	-------------------	---



33- إن مشتق التابع $f(x) = \cos(3x) - \sin(2x)$:

a	$3\sin x - 2\cos x$	b	$-3\sin x + 2\cos x$	c	$-3\sin x - 2\cos x$	d	غير ذلك
---	---------------------	---	----------------------	---	----------------------	---	---------

34- إن مشتق التابع $f(x) = 3\sin^2(x) - 5\cos^3(2x)$:

a	$6\sin x \cdot \cos x + 30\cos^2 2x \cdot \sin 2x$	b	$-6\sin x \cdot \cos x + 30\cos^2 2x \cdot \sin 2x$	c	$6\sin x \cdot \cos x - 30\cos^2 2x \cdot \sin 2x$	d	غير ذلك
---	--	---	---	---	--	---	---------

35- إن مشتق التابع $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$:

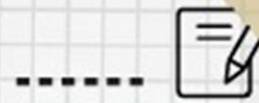
a	$\frac{-1}{(-x-1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$	b	$\frac{-1}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$	c	$\frac{1}{(x-1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$	d	$\frac{-1}{(x-1)^2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$
---	--	---	---	---	--	---	---

C	19	C	1
A	20	D	2
B	21	B	3
D	22	D	4
A	23	B	5
D	24	C	6
B	25	A	7
A	26	B	8
C	27	A	9
B	28	C	10
D	29	D	11
C	30	A	12
A	31	C	13
B	32	D	14
C	33	A	15
A	34	C	16
D	35	A	17
C	36	D	18



الدرس الثالث

حالات المماس وتطبيقاته



لا تقارن

نفسك بالآخرين،

بل قارن

نفسك بنفسك

بالأمس.

• الحالة الأولى: الفواصل معلومة

وهي ما تدربنا عليه سابقاً ولكن:

حالة خاصة



قد يرد السؤال بالشكل: أوجد معادلة المماس للخط البياني في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب

لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الترتيب

نضع $x = 0$ أي نحسب $f(0)$ فتكون نقطة التماس $(0, f(0))$

مثال

أوجد معادلة مماس الخط البياني للتابع f المعروف بالشكل

$f(x) = x^2 - 3x + 4$ في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب

الحل

• الحالة الثانية: الترتيب معلومة b :

1- نضع $f(x) = b$

2- نحل المعادلة نحصل على الفواصل $a = 1$

3- نشتق

4- نوجد الميل $m = f'(a)$

5- نعوض في القانون

التمرين (1)

ليكن c الخط البياني للتابع f المعروف وفق

$f(x) = \frac{x}{x+1}$. جد معادلة المماس للخط C في النقطة التي ترتيبها $\frac{3}{4}$

الحل



التمرين (2)

ليكن c الخط البياني للتابع f المعروف وفق

$$f(x) = \frac{1}{x+2}.$$
 جد معادلة المماس للخط C في

النقطة التي ترتيبها -1

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ملاحظة: قد يوجد أكثر من مماس يحقق الشرط

التمرين (3)

ليكن c الخط البياني للتابع f المعروف وفق

$$f(x) = x^2 + 3x.$$
 جد معادلة المماس للخط C

في النقطة التي ترتيبها -2

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حالة خاصة



في حال كان الطلب إيجاد معادلة المماس في نقطة التقاطع مع محور الفواصل عندئذ لإيجاد نقطة التماس نضع $y = 0$

أي $f(x) = 0$ ونحل المعادلة للوصول إلى فواصل نقطة التماس $x = a$

التمرين (13)

أوجد معادلة لمماس الخط البياني للتابع f المعروف بالشكل:

$$f(x) = \sqrt{2x - 4} - 1$$

في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل.

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



[illegible]

التمرين (5)

ليكن c اخط البياني للتابع f المعرف وفق

$$f(x) = \frac{2+x}{x}$$

جد معادلة المماس للخط C الذي

ميله $-\frac{1}{2}$

[illegible][illegible]

- الحالة الثالثة: الميل معلوم m :

- 1- نستق
- 2- نضع $f'(x) = m$
- 3- نحل المعادلة فنحصل على الفواصل a
- 4- نوجد الترتيب $f(a)$
- 5- نعوض في القانون

التحريين (4)

ليكن c الخط البياني للتابع f المعروف وفق

الذي ميله 2

ليكن c الخط البياني للتابع f المعروف وفق
 $f(x) = x^2 + 6x$. جد معادلة المماس الأفقي
 للخط C

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- **الحالة السادسة:** لدينا تابع ومماس معامد:
 - نكتب معادلة المماس بالشكل القانوني
 $y = ax + b$
 - نرسم لميل المستقيم المعطى m'
 - شرط التعامد $m \cdot m' = -1$
 - نشتق ثم نضع $f(x) = -\frac{1}{m'}$
 - ثم نعزل x فنحصل على الفواصل $x = a$
 - نوجد معادلة المماس كما تعلمنا سابقاً.

التمرين (8)

أوجد معادلة المماس للخط البياني للتابع f
 المعروف بالشكل:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

و المعامد للمستقيم $y + \frac{x}{4} = 1$

.....

.....

- **الحالة الرابعة:** مستقيم موازي

- 1 نكتب معادلة المستقيم بالشكل $y = mx + p$
- 2 نشتق
- 3 نضع $f'(x) = m$
- 4 نُرد إلى الحالة السابقة

التمرين (6)

ليكن c الخط البياني للتابع f المعروف وفق
 $f(x) = x^2 + 5$. جد معادلة المماس للخط C
 الموازي للمستقيم الذي معادلته
 $y - 2x = 0$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- **الحالة الخامسة:** مماس أفقي

- 1 نشتق
- 2 بما أن المماس أفقي فإن ميله $m = 0$
- 3 فنضع $f'(x) = 0$
- 3 نكمل كما الحالة السابقة

التمرين (7)

.....



الحل

الحل

التمرين (9)

التمرين (10)

ليكن c الخط البياني للتابع f المعروف على

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على R

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1} \text{ وفق } R \setminus \{-1\}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2} \text{ وفق}$$

1- اكتب معادلة لمماس C في النقطة التي

1- أعط معادلة لمماس C في النقطة التي

تساوي فاصلتها 1

تساوي فاصلتها 1

2- هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي

2- هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي

$$y = -4x$$

معادلته

3- هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي

3- هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي

$$3x - 2y = 0$$

معادلته

$$4x - y = 0$$



الحل

التمرين (11)

ليكن لدينا التابع f المعرفة على R وفق $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

اكتب معادلة لمماس الخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها $x = -2$

الحل



● الحالة الثالثة:

إذا علمنا ميل $f'(a)$:

- 1- نضع $f'(x) = f'(a)$
- 2- نوجد قيمة x (الفاصلة)
- 3- نوجد $f(a)$
- 4- نعوض في القانون

- الحالة الرابعة:

إذا علمنا فاصلة ومعادلة مستقيم يوازي

المماس:

$$y = mx + p$$

- 1- نسرُق الميل m
- 2- نضع $f'(x) = m$
- 3- نوجد قيمة x (الفاصلة)
- 4- نوجد $f(a)$
- 5- نعوض في القانون

• الحالة الخامسة:

إذا علمنا فاصلة ومعادلة مستقيم معامد

المماس:

$$y = m'x + p'$$

- 1- نوجد ميل المماس من القانون
$$m = -\frac{1}{m'}$$
- 2- نضع $f'(x) = m$
- 3- نوجد قيمة x (الفاصلة)
- 4- نوجد $f(a)$
- 5- نعوض في القانون

حالات خاصة



- التقاطع مع محور الترتائب $x = 0$
- التقاطع مع محور الفواصل $y = 0$
- المماس الأفقي أو المماس الموازي لمحور الفواصل $m = 0$.

[illegible]

حالات معادلة المماس

- الحالة الأولى:

إذا علمنا فاصلة a :

- 1- نوجد $f(a)$ الترتيب
- 2- نوجد $f'(a)$ الميل
- 3- نعوض في قانون معادلة المماس

• الحالة الثانية:

إذا علمنا ترتيب $f(a)$:

- 1- نضع $f(x) = f(a)$
- 2- نوجد قيمة x (الفاصلة)
- 3- نوجد $f'(a)$
- 4- نعوض في القانون



ملاحظة: أحياناً يكون السؤال أوجد معادلة
المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي
تعدم مشتقه الثاني

عندئذ:

- 1- نحسب $f'(x)$
- 2- نحسب $f''(x) = (f'(x))'$
- 3- نعدم المشتق الثاني $f''(x) = 0$ فنحصل
على فواصل نقطة التماس $x = a$
- 4- نحسب $f(a), f'(a)$ و نعوض في القانون.

التمرين (14)

أوجد معادلة المماس للخط البياني للتابع f
المعرف بالشكل $f(x) = 3x^2 - x^3$ في النقطة
التي تعدم مشتقه الثاني.

الحل

التقريب التآلفي

مقدمة:

مثال (2)

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 \text{ ليكن}$$

جد قيمة تقريبية للعدد $f(1.9)$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (3)

جد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{9.2}$

الحل .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $f(a + h)$ باستخدام التقريب التآلفي :

1- نفرق المضمون إلى مجموع عددين:

الأول: a سهل الحساب

الباقى : h

2- نشتق التابع f

3- نعوض في القانون:

$$f(a + h) \approx h \cdot f'(a) + f(a)$$

مثال (1)

ليكن $f(x) = \frac{x}{x+1}$, جد قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



ملاحظة: في حال كان لدينا معادلة المماس عند النقطة a فإن تعويض القيمة $a + h$ في معادلة المماس يعطي نفس القيمة التقريبية

مثال (4)

ليكن $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

1- جد معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها 1

2- جد قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

الحل

مثال (5)

جد قيمة تقريبية لـ $\sin(0.24)$

الحل



مثال (6)

جد قيمة تقريبية لـ $\sqrt{10}$

الحل

مثال (7)

جد قيمة تقريبية لـ $\sin(29^\circ)$

الحل



بنوك الأتستة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1- إن معادلة المماس للخط البياني C للتابع f المعرف وفق $f(x) = x^2 + 2$ عند $a = 1$ هي:

a	$y = -2x - 1$	b	$y = 2x - 1$	c	$y = -2x + 1$	d	$y = 2x + 1$
---	---------------	---	--------------	---	---------------	---	--------------

2- إن معادلة المماس للخط البياني C للتابع f المعرف وفق $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ عند $a = 2$ هي:

a	$y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{7}{\sqrt{5}}$	b	$y = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{7}{\sqrt{5}}$	c	$y = \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{7}{\sqrt{5}}$	d	غير ذلك
---	---	---	--	---	--	---	---------

3- إن معادلة المماس للخط البياني C للتابع f المعرف وفق $f(x) = \sin(x)$ عند $a = \frac{\pi}{2}$ هي:

a	$y = 1$	b	$y = 0$	c	$y = -1$	d	غير ذلك
---	---------	---	---------	---	----------	---	---------

4- إن معادلة المماس للخط البياني C للتابع f المعرف وفق $f(x) = \frac{x}{x+1}$ عند $a = 0$ هي:

a	$y = -x$	b	$y = x$	c	$y = x + 1$	d	غير ذلك
---	----------	---	---------	---	-------------	---	---------

5- إن معادلة المماس للخط البياني C للتابع f المعرف وفق $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ عند $a = 1$ هي:

a	$y = -3x - 3$	b	$y = -3x + 3$	c	$y = 3x - 3$	d	غير ذلك
---	---------------	---	---------------	---	--------------	---	---------

6- إن معادلة المماس للخط البياني C للتابع f المعرف وفق $f(x) = 1 - \frac{3}{x}$ عند $a = -1$ هي:

a	$y = 3x - 5$	b	$y = -3x - 5$	c	$y = 3x + 5$	d	غير ذلك
---	--------------	---	---------------	---	--------------	---	---------

7- إن معادلة المماس للخط البياني C للتابع f المعرف وفق $f(x) = \tan(x)$ عند $a = \frac{\pi}{4}$ هي:

a	$2x + \frac{\pi + 2}{2}$	b	$2x - \frac{\pi - 2}{2}$	c	$-2x - \frac{\pi + 2}{2}$	d	$2x - \frac{\pi + 2}{2}$
---	--------------------------	---	--------------------------	---	---------------------------	---	--------------------------

8- إن معادلة المماس للخط البياني C للتابع f المعرف وفق $f(x) = 2x - x^2$ الذي ميله يساوي 4 هي:

a	$y = -4x$	b	$y = 4x + 8$	c	$y = 4x - 8$	d	$y = 4x$
---	-----------	---	--------------	---	--------------	---	----------

9- إن فواصل المماسات الموجودة في النقطة التي ترتيبها -1 للتابع $f(x) = x^2 - 5x + 5$ هي:

a	$a = -3, a = -2$	b	$a = 2, a = -3$	c	$a = 2, a = 3$	d	$a = -2, a = 3$
---	------------------	---	-----------------	---	----------------	---	-----------------

10- إن معادلة المماس في نقطة تقاطع الخط البياني للتابع مع محور الفواصل للتابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ هي:

a	$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$	b	$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$	c	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	d	غير ذلك
---	-----------------------------------	---	----------------------------------	---	-----------------------------------	---	---------

11- إن معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي يتقاطع فيها مع محور الترتيب علماً أن $f(x) = \frac{1}{x-1}$ هي:

a	$y = -\frac{1}{4}x + 1$	b	$y = -\frac{1}{4}x - 1$	c	$y = \frac{1}{4}x - 1$	d	غير ذلك
---	-------------------------	---	-------------------------	---	------------------------	---	---------

12- إن معادلة المماس الموازي للمستقيم $x + y = 1$ للتابع $f(x) = 3x - x^2$ هي:

a	$y = -x - 4$	b	$y = x + 4$	c	$y = -x + 4$	d	غير ذلك
---	--------------	---	-------------	---	--------------	---	---------

13- إن معادلي المماس المعامد للمستقيم $y = 0 - \frac{x}{4} + \frac{x+1}{x}$ هي:

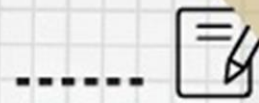
a	$y_1 = -4x + 1$ $y_2 = -4x - 3$	b	$y_1 = -4x + 1$ $y_2 = 4x - 3$	c	$y_1 = 4x + 1$ $y_2 = -4x - 3$	d	غير ذلك
---	------------------------------------	---	-----------------------------------	---	-----------------------------------	---	---------

D	1
C	2
A	3
B	4
C	5
A	6
D	7
D	8
C	9
A	10
B	11
C	12



الدرس الرابع

تطبيقات الاشتقاق



كلمات ذات

صعوبة

المهمة

زادت قيمة

تطبيقها.

يستخدم الاشتقاق في دراسة سلوك تابع
ومعرفة مجالات تزايديه وتناقصه
ولذلك سنبدأ بأول التطبيقات:

دراسة اطراد تابع

مبرهنات:

- إذا كان $f'(x) > 0$ على المجال I فإن f متزايدة تماماً على I
- إذا كان $f'(x) < 0$ على المجال I فإن f متناقصة تماماً على I

■ القيم الحدية محلياً:

ليكن f تابع معرف واشتقاقي على مجال I
ولتكن $a \in I$

- 1- نقول عن $f(a)$ إنها قيمة صغرى
محلياً للتابع f إذا وفقط إذا وجد
مجال J بحيث يتحقق الشرط:
 $\forall x \in I \cap J \Rightarrow f(x) \geq f(a)$

- 2- نقول عن $f(a)$ إنها قيمة كبرى
محلياً للتابع f إذا وفقط إذا وجد
مجال J بحيث يتحقق الشرط:
 $\forall x \in I \cap J \Rightarrow f(x) \leq f(a)$

مبرهنة: ليكن f تابعاً اشتقاقياً على مجال
مفتوح I ولتكن C نقطة من I :

- 1- إذا كانت $f(C)$ قيمة محلية كان
 $f'(C) = 0$
- 2- إذا نعدم f' عند C وغير f' اشارته
عندها تكون $f(C)$ قيمة محلية

نتيجة: إن (2) تعني أن انعدام المشتق عند
 C لا يكفي لتكون $f(C)$ قيمة محلية إذ أن
المشتق قد لا يغير اشارته عندها

مثال

$$f(x) = x^3$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....



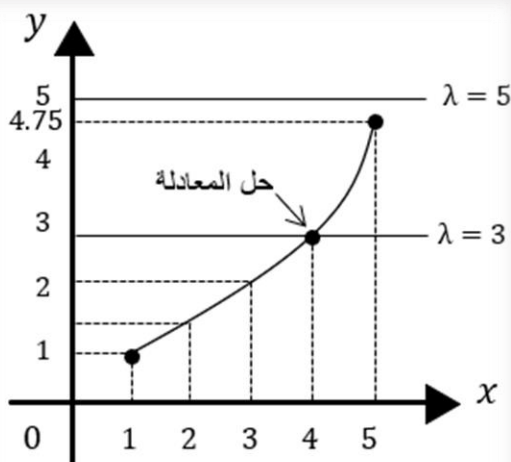
ملاحظة: إذا أضفنا النهايات إلى دراستنا
لإطراد التابع f نكون بذلك درسنا **تغيرات**
التابع f

الاشتقاق وحل المعادلات

عندما نقول أن للمعادلة $f(x) = \lambda$ حل ، أي أن
المستقيم الأفقي $y = \lambda$ يقطع منحنى التابع f
في نقطة

وقد يكون للمعادلة أكثر من حل وقد لا يكون
لها حلول " مستحيلة " ، تأمل الحالات الآتية:

• الحالة الأولى:

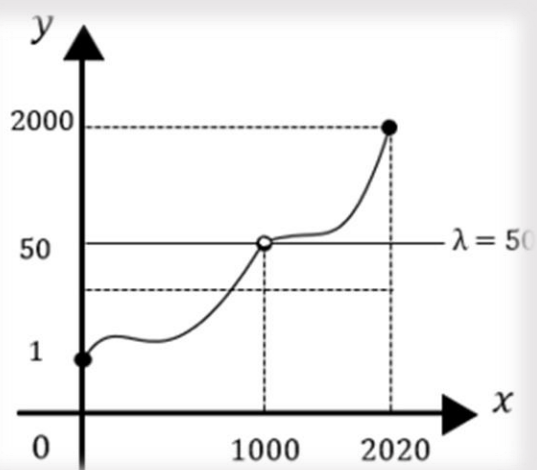


هنا نلاحظ أن f مستمر على المجال $[1, 5]$

الحل وحيد: لأن

المعادلة $f(x) = 1$ مستحيلة الحل لأن $\lambda = 1 \notin$
 $f([1, 7]) = [2, 10]$

• الحالة الثالثة:



المعادلة $f(x) = 50$ مستحيلة لأن f غير مستمر
عند $x = 1000$ فلا يوجد نقطة بحيث المستقيم
 $y = 50$ يقطع التابع.

• الحالة الرابعة:

ما هي جهة اطراد التابع؟

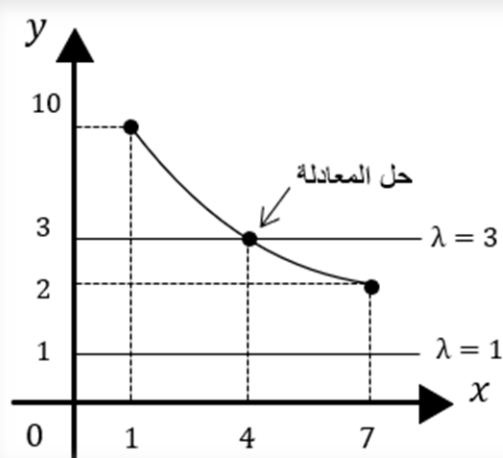
ما هي صورة المجال $[1, 5]$ ؟

استنتج لماذا يكون للمعادلة $f(x) = 3$ حلاً وحيداً
على المجال $[1, 5]$.

الحل موجود: لأن

الحل وحيد:

• الحالة الثانية:



المعادلة $f(x) = 3$ حل وحيد هو

$x = 4$ على المجال $[1, 7]$

الحل موجود: لأن

- إذا كان غير مطرد نشكل جدول

مثلاً :

x	-3	1	2	3			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	7

$$f([-3,1]) = \cdots \dots \dots$$

$$f([1,2]) = \cdots \dots \dots$$

$$f([2,3]) = \cdots \dots \dots$$

$$f([-3,3]) = \cdots \dots \dots$$

التمرين (1)

ليكن f التابع المعرف بالشكل

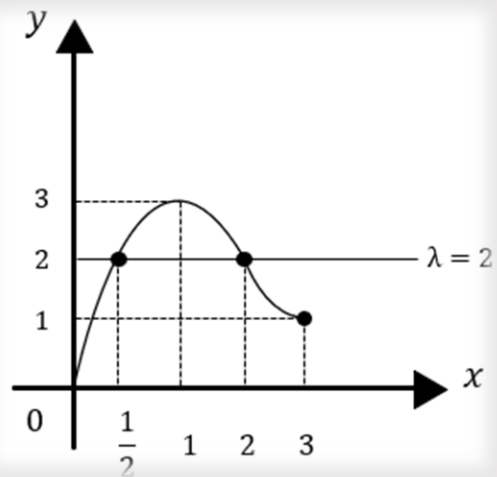
$$f(x) = x^3 + x - 1$$

أثبت أن للمعادلة $f(x) = 3$ حل وحيد ضمن

المجال [1,2]

الحل

[The page contains ten sets of horizontal dashed lines for writing.]



المعادلة $f(x) = 2$ حلان هما $x = \frac{1}{2}$ و $x = 2$

الحل موجود: لأن f مستمر على $[0, 3]$ و

$$2 \in f([0, 3]) = [0, 3]$$

الحل غير وحيد : لأن f غير مطرد على المجال $[0, 3]$



كيف ندرس حلول المعادلة $f(x) = \lambda$

- ثبت أن f مستمر على المجال $[a, b]$
- ثبت أن $\lambda \in f([a, b])$ " فنضمن بذلك وجود الحل "
- لإثبات وحدانية الحل نحسب $f'(x)$ ونثبت أن f مطرد على المجال

سؤال كيف نوجد $f([a, b])$

- إذا كان f متزايد فإن

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$
أي لدى تصوير مجال وفق تابع متزايد نحافظ على الترتيب
- إذا كان f متناقص فإن

$$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$$

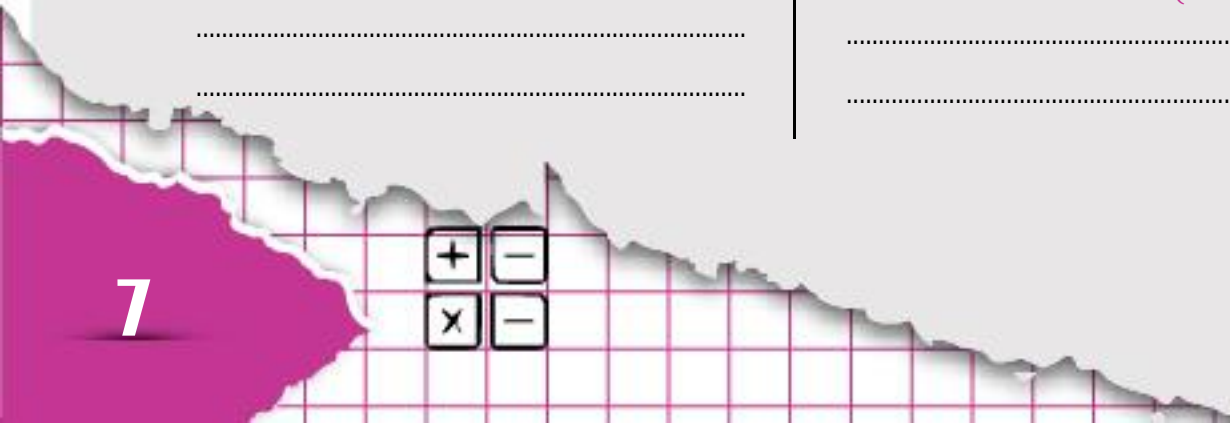
التمرين (3)

في كل من الحالات الآتية، أوجد عدد حلول
المعادلة:

$$x^4 - \frac{1}{2}x + 1 = 0 \quad -1$$

$$x^5 - x^3 + x - 5 = 0 \quad -2$$





$$\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0 \quad -4$$

التمرين (4)

ليكن f التابع المعرف على R وفق

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2};$$

- 1 احسب $f(-1), f(-\frac{1}{2}), f(0), f(1)$
- 2 احسب $f'(x)$ ثم نظم جدول تغيرات التابع f
- 3 أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة جذور فقط ينتمي كل واحد منها إلى واحد من المجالات $[1, 2], [-1, 1], [-2, -1]$

الحل



1- احسب $f(0)$ و $f(\frac{\pi}{2})$ واستنتج أنه يوجد عدد

حقيقي α يحقق أن $f(\alpha) = 0$.

2- اشرح لماذا حل المعادلة $f(x) = 0$ يجب أن

ينتمي للمجال $[-1, 1]$.

3- استنتج أن كل حل للمعادلة $f(x) = 0$ يجب

أن ينتمي للمجال $[-1, 1]$.

4- برهن أن التابع f متزايد تمامًا على المجال

$[0, 1]$, واستنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل

حقيقي وحيد α ينتمي للمجال $[0, 1]$.

الحل

التمرين (5)

نتأمل التابع f المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x - \cos x$$



الحل

التمرين (6)

ليكن m عدداً حقيقياً، وليكن C_m الخط البياني
للتابع f_m المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f_m(x) = x^3 + mx^2 - 8x - m$$

1- a. أثبت أن الخطين البيانيين C_1 و C_0
يتقاطعان في نقطتين A و B . أوجد إحداثيات
هاتين النقطتين.

b. استنتج أن جميع الخطوط البيانية C_m
تمر بالنقطتين A و B .

2- اوجد نهاية التابع f_m عند $+\infty$ و $-\infty$.

3- استنتج مما سبق أن للمعادلة $f_m(x) = 0$
ثلاثة حلول متميزة في $\mathbb{R}$ ، أيًا يكن العدد m .



$$l(x) = f(x^4)$$

الحل

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

التمرين (2)

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} \text{ , ليكن لدينا التابع ,}$$

$$D = R \setminus \{1\}$$

- 1- احسب مشتقه
- 2- استنتج مشتق التابع
- 3- استنتج مشتق: $h(x) = \frac{x^4+1}{x^2-1}$
- 4- استنتج مشتق: $k(x) = \frac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$

الحل

.....

.....

.....

.....

[illegible]

الاشتقاق المركب

التابع المركب: ليكن f, g تابعان بحيث f معرف على D_f و $g(x) \in D_f$ مهما يكن $x \in D_g$ عندئذٍ التابع المركب $f \circ g$ هو التابع المعرف بالشكل:

$$x \mapsto (f \circ g) = f(g(x))$$

اشتقاق التابع المركب:

$$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

التمرين (1)

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

- 1- عين D_f
- 2- احسب $f'(x)$ ثم استنتج مشتق التابع
- $g(x) = f(\sqrt{x})$, $h(x) = f(\sin x)$



[illegible][illegible]

التمرين (3)

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \text{ لدينا التابع}$$

1- احسب $f'(x)$

2- استنتاج مشتق التابع $f(f(x))$

3- احسب بشكل مباشر $f(f(x))$ ومشتقه ثم

استنتج تطابق الحلين.

التمرين (1)

ليكن التابع f المعرفة على $R \setminus \{1\}$ وفق $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

-1 عيّن $f'(x)$

-2 نرسم بالرمز g للتابع المعرفة على

$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ وفق $g(x) = f(\sin x)$. أثبت

أن g اشتقاقي على I ثم احسب $g'(x)$ على I

-3 نرسم بالرمز h للتابع المعرفة على $J =]1, +\infty[$ وفق

$h(x) = f(\sqrt{x})$

-4 أثبت أن h اشتقاقي على J ثم أوجد $h'(x)$

على J

الحل

التمرين (4)

لدينا التابع $f(x) = \frac{x+1}{x}$

-1 احسب $f'(x)$

-2 استنتج مشتق التابع $f(f(x))$

-3 احسب بشكل مباشر $f(f(x))$ ومشتقه ثم

استنتج تطابق الحليّن.

الحل

■ مجال اشتقاقية تابع مركب:

ليكن g تابعاً اشتقاقياً على مجال J و u تابع

اشتقاقي على مجال I وبفرض أنه أيّاً كان $x \in I$

فإن $u(x) \in J$ عندئذ يكون التابع $f: x \mapsto$

$g(u(x))$ اشتقاقي على I



$\tan(u(x))$	$u'(x) [1 + \tan^2(u(x))]$
$\cot(u(x))$	$-u'(x) [1 + \cot^2(u(x))]$

أمثلة:

$$f(x) = \cos(5x) \Rightarrow f'(x) = -5 \sin(5x)$$

$$f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = 2x \cos(x^2)$$

3- مشتق التابع الجذري:

$f(x)$	$f'(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

أمثلة:

$$f(x) = \sqrt{\sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

التمرين (1)

أوجد مشتقات كل من التوابع التالية:

1- $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^4$

.....

.....

.....

.....

2- $f(x) = \cos(3x) - \sin(2x)$

.....

.....

.....

3- $f(x) = \frac{x+3}{(x^2-1)^2}$

.....

.....

التمرين (1)

ليكن f التابع المعرف على $I =]0, \pi[$ وفق:

$$f(x) = \sin(x)$$

و g التابع المعرف على $J =]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \sqrt{x}$$

أثبت أن التابع $g \circ f$ قابل للاشتقاق على المجال I

ثم استنتج $(g \circ f)'$.

التمرين (1)

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

و g التابع المعرف على $J =]0, \frac{\pi}{2}[$ وفق:

$$g(x) = \cos(x)$$

أثبت أن التابع $f \circ g$ قابل للاشتقاق على المجال J

ثم استنتج $(f \circ g)'$.

قواعد اشتقاق التابع المركب

1- مشتق القوة:

$f(x)$	$f'(x)$
$u^n(x)$	$n u^{n-1}(x) u'(x)$

أمثلة:

$$f(x) = (2x+1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(2x+1)(2) = 6(2x+1)$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^4 \Rightarrow f'(x) = 4\left(\frac{1}{x}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

2- مشتق التوابع المثلثية:

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(u(x))$	$u'(x) \cos(u(x))$
$\cos(u(x))$	$-u'(x) \sin(u(x))$

$$8- f(x) = (x^2 - 1)^3$$

$$9- f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$$

$$10- f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$4- f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$5- f(x) = \cos(x^2)$$

$$6- f(x) = \sin(3x + 1)$$

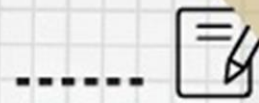
$$7- f(x) = 1 + \tan^2 x$$





الدرس الخامس

تطبيقات الاشتقاق (2)



من كانت

له بداية

محرقة

كانت له

بداية مشرقة

اشكال مميزة في الجداول:

الشكل الاول: في حال كان التابع غير معرف عند نقطة فقط (يستثي نقطة) مثل

$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ عندئذ يكون الجدول من الشكل:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$			

حيث أن مرور $\blacksquare$ من حقل f' يعني أن f غير اشتقاقي عن النقطة المقابلة

و متابعته للوصول لحقل f يعني أن f غير معرف عند هذه النقطة

الشكل الثاني: أما إذا كان شكل الجدول:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$			

فهذا يعني أن مجموعة التعريف هي R أي f معرف عند 1 (لأن f ليس لديه $\blacksquare$ في حقل $f(x)$) و بالتالي لا يعاني مشكلة فهو معرف عند $x = 1$ و ليس اشتقاقي عندها

وهذه الحالة نصادفها في التابع الجذري غالباً ((هذا يعطينا معلومة في غاية الأهمية و هي إذا كان f غير معرف عند نقطة فهو حتماً غير اشتقاقي عندها))

دراسة تغيرات تابع

تهدف دراسة تغيرات تابع لمراقبة سلوك تابع ومراقبة فترات تزايد و تناقصه و قيمه الحدية

و أعلى قيمة يبلغها التابع أو أصغر قيمة

وخطوات دراسة التغيرات هي كالتالي:

- 1- نوجد مجموعة التعريف ونكتبها على شكل مجال أو اجتماع مجالات
- 2- نوجد نهايات التابع عند أطراف المجالات المفتوحة والصور عند أطراف المجالات المغلقة
- 3- نذكر ما له من مقاربات و نتوقع جهة التقارب (إضافي)
- 4- f اشتقاقي على.....:
- 5- نشتق التابع لنوجد $f'(x)$
- 6- نعدم المشتق أي نضع $f'(x) = 0$
- 7- في حال وجود قيم تعدم المشتق فإننا نوجد صور هذه النقاط فقط في حال انتمت لمجموعة التعريف وإلا لا نصورها ولا نستخدمها
- 8- ننظم جدول التغيرات الذي يأخذ الشكل التالي:

x	مجموعة التعريف - القيم التي عدمت المشتق إن وجدت
$f'(x)$	أصفار تحت القيم التي عدمت المشتق وإشارات بينها
$f(x)$	النهايات وصور القيم التي عدمت المشتق (القيم الحدية) وأسهم وفق الإشارات في حقل $f'(x)$

الشكل الثالث: إذا كانت مجموعة التعريف

تستثني مجالاً مثلاً $D_f =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ فهنا يأخذ المجال الشكل:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$				
$f(x)$				

هذا يعني أن التابع غير موجود بين الصفر والـ 4

الشكل الرابع: التابع يستثني نقطتين: مثلاً:

$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, 3[\cup]3, +\infty[$$

فيكون شكل الجدول عندئذ:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$				
$f(x)$				

دراسة القطع المكافئ

إن الصيغة العامة لتابع القطع المكافئ هي:

$$f(x) = ax^2 + bx + c ; a \neq 0$$

ويكون منحنى القطع مفتوح نحو الأعلى في حالة $a > 0$.

ويكون منحنى القطع مفتوح نحو الأسفل في حالة $a < 0$.

ودائماً يملك قيمة حدية وحيدة ندعوها "ذروة القطع المكافئ".

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

الحل

$$f(x) = x - x^2$$

الحل

[illegible]

دراسة توابع الدرجة الثالثة

التابع من الدرجة الثالثة له الصيغة العامة:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

والآن لندرس بعض التوابع:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

الحل

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple horizontal rows, each consisting of two parallel dashed lines with a small gap between them, providing a guide for letter height and placement. The background is white, and there are no margins or other markings present.[illegible]

تمرین

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = ax^2$$

ناقش جهة اطراد f تبعاً لقيم a .

الحل

[illegible]

$$f(x) = \frac{2x + 1}{3 - 3x}$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$f(x) = \frac{5x + 1}{x - 1}$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$$

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

دراسة التابع الهوموغرافي

هو كل تابع من النمط:

$$\frac{ax + b}{cx + d}; \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$$

التابع الهوموغرافي مؤلف من اجتماع خطين

بيانيين يقبلان المستقيم $x = -\frac{d}{c}$ مقارب

شاقولي والمستقيم $y = \frac{a}{c}$ مقارب أفقي

وتكون النقطة $A\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ مركز تناظر للخط

البياني وهي نقطة تقاطع مقاربيه.

لندرس بعض التوابع:



دراسة توابع مع مقاربات مائلة

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 1}$$

- 1- عين مجموعة تعريف التابع
- 2- ادرس النهايات عند الأطراف المفتوحة
- 3- جد معادلة المقارب المائل ثم ادرس الوضع النسبي.
- 4- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
- 5- ارسم المقاربات ثم ارسم C الخط البياني للتابع f .

الحل



[illegible]

الحل

دراسة التوابع الجذرية

This image shows a full page of blank primary-ruled paper. It features multiple sets of horizontal lines designed to guide young learners' handwriting. Each set consists of three lines: a solid top line, a dashed middle line, and a dotted bottom line. These sets are repeated vertically down the entire page, providing ample space for practicing letter formation and alignment. The margins are consistent throughout, and there are no pre-written words or numbers.

$$f(x) = x\sqrt{3-x}$$

دراسة التوابع المختلفة

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$$

[illegible][illegible]

أمثلة

في كل من الحالات الآتية ادرس زوجية أو فردية التابع على مجموعة تعريفه .

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1, \quad D_f = \mathbb{R}$$

.....

.....

.....

.....

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}, \quad D_f = \mathbb{R}^*$$

.....

.....

.....

.....

$$f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

.....

.....

.....

.....

$$f(x) = \sin x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

.....

.....

.....

.....



التابع الزوجي والتابع الفردي

■ لدراسة زوجية وفردية التابع:

في كلتا الحالتين يجب أن يتحقق الشرط الآتي:

$$x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

ثم نقول بما يلي:

1- نحسب $f(-x)$

(وذلك بأن نستبدل كل x بـ $-x$)

2- نميز الحالات الآتية:

- أ- إذا كان $f(-x) = f(x)$ عندئذٍ f زوجي
- ب- إذا كان $f(-x) = -f(x)$ فإن f فردي
- ت- إذا لم نصل إلى شكل بدلالة $f(x)$ فهو ليس فردياً وليس زوجياً.

■ الصفات التناظرية:

- التابع الزوجي متناظر بالنسبة لمحور الترتيب

.....

.....

.....

.....

- التابع الفردي متناظر بالنسبة للمبدأ

.....

.....

.....

.....

.....

.....



الحل

$$f(x) = \cos x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \tan x, \quad D_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$f(x) = \frac{x \cdot \tan x}{x^2 + 4}, \quad D_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

مسألة

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- 1- أثبت أنه فردي
- 2- أثبت أن $d: y = x - 1$ مقارب مائل عند $-\infty$ و ادرس الوضع النسبي
- 3- أثبت أن $d': y = x + 1$ مقارب مائل عند $+\infty$ و ادرس الوضع النسبي
- 4- ادرس تغيرات f
- 5- ارسم d, d' و ارسم c_f



مركز تناظر تابع

ليكن f تابعاً خطه البياني c_f ولتكن النقطة $I(a, b)$ من المستوي، نقول ان I مركز تناظر للخط البياني c_f اذا حققت الشرطين التاليين:

$$x \in D_f \Rightarrow 2a - x \in D_f \quad -1$$

$$f(2a - x) + f(x) = 2b \quad -2$$

مثال (1)

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 7}{x + 1}$$

- 1 عين D_f
- 2 ادرس نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه.
- 3 اثبت ان $y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط c_f
- 4 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.
- 5 اثبت ان $I(-1, -3)$ مركز تناظر.
- 6 ارسم c_f

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (3)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف وفق

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

- 1- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه و اكتب ما تجده من مقاربات
- 2- جد معادلة المقارب المائل للخط C عند $+\infty$ و $-\infty$
- 3- ادرس الوضع النسبي للخط C مع المقارب المائل
- 4- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها
- 5- اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب
- 6- أثبت أن النقطة $A(-1,2)$ هي مركز تناظر للخط C
- 7- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم T ثم ارسم C

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2)

ليكن التابع f المعروف بالشكل:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

- 1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.
- 2- اوجد معادلة المقارب المائل و ادرس الوضع النسبي
- 3- أثبت أن f فردي
- 4- ارسم المقارب المائل وارسم C_f

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



8- استنتج الخط البياني للتابع g والمعرف
وفقاً :

$$g(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

الحل



مثال (4)

ليكن التابع f المعرف بالشكل:

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x + 1}$$

- 1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.
- 2- أثبت أن $A(-1, 2)$ هي مركز تناظر لـ c_f .
- 3- ارسم المقارب المائل وارسم c_f

الحل



ملاحظات هامة:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مسألة دراسة تابع مثلثي (1)

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = 3 \sin^2 x + 4 \cos^3 x$$

1- احسب كل من $f(-x)$ و $f(x + 2\pi)$

وتيقن أنه يكفي دراسة التابع على

المجال $[0, \pi]$.

2- أثبت أن

$$f'(x) = 6 \cos(x) \cdot \sin(x) (1 - 2 \cos(x))$$

3- ادرس تغيرات التابع f على $[0, \pi]$

4- ارسم التابع f على المجال $[-2\pi, 2\pi]$.

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التابع الدوري

نقول عن التابع f إنه دوري و دوره T إذا تحقق أن:

$$\forall x \in D_f : f(x + T) = f(x)$$

.....

.....

.....

.....

.....

توابع دورية شهيرة:

$\sin x \mapsto x$ دوري و دوره 2π ذلك أن :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$\cos x \mapsto x$ دوري و دوره 2π ذلك أن :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$\tan x \mapsto x$ دوري و دوره π ذلك أن :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\} :$$

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

ملاحظة هامة: إذا كان f دوري ودوره T وكان

f معرف على $\mathbb{R}$ فإنه يكفي دراسته على

$$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$$



مسألة دراسة تابع مثلثي (2)

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = 4 \sin^3 x + 3 \cos x$$

1- أثبت أن $f(x + 2\pi) = f(x)$ أيًا كان $x \in \mathbb{R}$.

2- أثبت أن

$$f'(x) = 3 \sin(x) (2 \sin(2x) - 1)$$

3- ادرس تغيرات التابع f على مجال طوله 2π .

4- ارسم التابع f على المجال $[-2\pi, 2\pi]$.

الحل



مسألة دراسة تابع مثلثي (2)

ليكن f التابع المعرف على $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ وفق:

$$f(x) = 4x - \tan^2 x$$

1- احسب التابع المشتق $f'(x)$, ضع

$t = \tan(x)$ ثم استنتج أن:

$$f'(x) = 2(1 - t)(t^2 + t + 2)$$

2- استنتج جدولاً بتغيرات التابع f على المجال I .

3- أثبت أن للمعادلة $f(x) = -1$ في المجال I حلاً وحيداً α .

الحل



مسائل وتمارين

التمرين (1)

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 3}$$

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها، ثم ارسم الخط البياني للتابع.

الحل



التمرين (2)

ليكن f التابع المعرف على $I = [0, 3]$ وفق

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

1- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

2- استنتج قيم x التي تحقق $f(x) = 0$.

3- عين $f([0, 3])$.

الحل

التمرين (3)

في معلم متجانس، C هو الخط البياني للتابع f

المعرف على $[0, \pi]$ وفق $f(x) = \sin(x)$.

و d هو المستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$.

1- a. ارسم كلاً من C و d .

b. يبدو أن للمعادلة $\sin(x) = \frac{1}{2}x$ حلاً وحيداً

α في المجال $[0, \pi]$. استفد من الرسم لإيجاد

مجال صغير ينتمي إليه α .

2- نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $[0, \pi]$

وفق $g(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}x$.

a. احسب $g'(x)$ وأثبت أن $g'(x)$ ينعدم

عند $a = \frac{\pi}{3}$.

b. نظم جدولاً بتغيرات g .

3- استنتج مما سبق أن المعادلة $\sin(x) = \frac{1}{2}x$

تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0, \pi]$.

الحل



التمرين (4)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ وفق:

$$f(x) = |x + 1| + \frac{x}{x^2 - 1}$$

1- a. اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة.

b. ادرس نهاية f عند حدود مجالات D_f . ثم

أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته على كل من

مجالات D_f .

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

3- a. تحقق من أن المستقيمين اللذين

معادلتاهما $y = x + 1$ و $y = -x - 1$ هما،

بالترتيب، مقاربان مائلان للخط البياني C عند

$+\infty$ و $-\infty$. ادرس وضع C بالنسبة إلى هذين

المقاريين.

b. أوجد معادلة للمماس T للخط

البياني C في النقطة A منه علماً أن

فاصلة A تساوي الصفر.

c. ارسم T ومقاري C ثم ارسم C .

4- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α في

المجال $]-1, 1[$ وأوجد مجالاً طوله 10^{-1}

تنتمي إليه α .

الحل



بنوك الأمتة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

ليكن $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ الخط البياني للتابع

1- إن مجموعة تعريف f هي:

a	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	b	$\mathbb{R}$	c	$\mathbb{R}^*$	d	غير ذلك
---	-------------------------------	---	--------------	---	----------------	---	---------

2- إن نهاية التابع $f(x)$ عند $+\infty$ هي:

a	$-\infty$	b	1	c	$+\infty$	d	2
---	-----------	---	---	---	-----------	---	---

3- إن نهاية التابع $f(x)$ عند $-\infty$ هي:

a	$-\infty$	b	1	c	$+\infty$	d	2
---	-----------	---	---	---	-----------	---	---

4- إن نهاية $f(x)$ عند $(-1)^+$ هي:

a	$-\infty$	b	1	c	$+\infty$	d	2
---	-----------	---	---	---	-----------	---	---

5- إن نهاية $f(x)$ عند $(-1)^-$ هي:

a	$-\infty$	b	1	c	$+\infty$	d	2
---	-----------	---	---	---	-----------	---	---

6- يمكن كتابة التابع f بالشكل:

a	$x - 1 + \frac{4}{x-1}$	b	$x - 1 + \frac{4}{x+1}$	c	$x + 1 + \frac{4}{x+1}$	d	غير ذلك
---	-------------------------	---	-------------------------	---	-------------------------	---	---------

7- إن معادلة المقارب المائل Δ للخط C_f هي:

a	$y = x - 1$	b	$y = x + 1$	c	$y = 3x$	d	$y = 3x - 1$
---	-------------	---	-------------	---	----------	---	--------------



8- يكون C_f فوق Δ على المجال:

a	$\mathbb{R}$	b	$] -\infty, -1[$	c	$] -1, +\infty[$	d	$]1, +\infty[$
---	--------------	---	------------------	---	------------------	---	----------------

9- إن $f'(x)$ يساوي:

a	$\frac{-x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$	b	$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}$	c	$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}$	d	$\frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$
---	---------------------------------	---	--------------------------------	---	--------------------------------	---	--------------------------------

10- إن جدول تغيرات التابع f هو:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	++++	0	----	----	0	++++
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$

c

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	++++	0	----	----	0	++++
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$

b

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	++++	0	----	----	0	++++
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$

a

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	++++	0	----	----	0	++++
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$

11- إن $f(-2-x)$ تساوي:

a	$\frac{x^2 + 4x - 7}{x+1}$	b	$\frac{x^2 + 4x - 7}{-x-1}$	c	$\frac{x^2 + 4x + 7}{-x-1}$	d	غير ذلك
---	----------------------------	---	-----------------------------	---	-----------------------------	---	---------

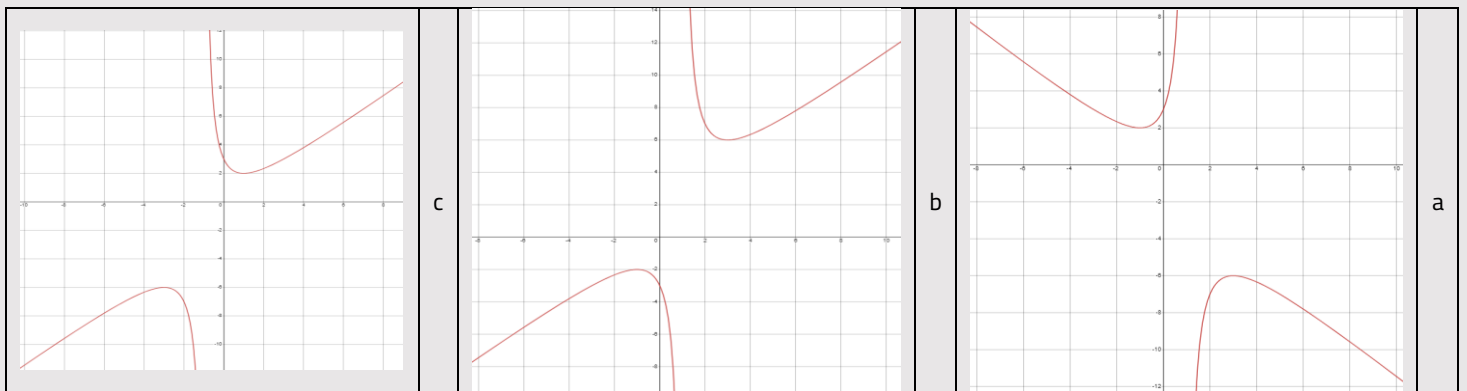
12- أي من النقاط الآتية يمثل المركز التناظر للخط البياني للتابع:

a	$I(1, -2)$	b	$I(-1, 2)$	c	$I(1, 2)$	d	$I(-1, -2)$
---	------------	---	------------	---	-----------	---	-------------

13- إن معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها $a = 0$ هي:

a	$y = 3x + 3$	b	$y = -3x - 3$	c	$y = -3x + 3$	d	$y = 3x - 3$
---	--------------	---	---------------	---	---------------	---	--------------

14- إن الخط البياني الذي يمثل التابع C_f هو:



ليكن C_f الخط البياني للتابع $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ المعرفة على $\mathbb{R}$:

15- إن C_f متناظر بالنسبة:

a	المبدأ	b	محور الترتيب	c	محور الفواصل	d	غير ذلك
---	--------	---	--------------	---	--------------	---	---------

16- إن نهاية $f(x)$ عند $+\infty$:

a	$-\infty$	b	1	c	$+\infty$	d	2
---	-----------	---	---	---	-----------	---	---

17- إن نهاية $f(x)$ عند $-\infty$:

a	$-\infty$	b	1	c	$+\infty$	d	2
---	-----------	---	---	---	-----------	---	---

18- إن نهاية $x - f(x)$ عند $+\infty$ تساوي:

A	$-\infty$	b	1	c	$+\infty$	d	2
---	-----------	---	---	---	-----------	---	---

19- إن معادلة المقارب المائل عند $+\infty$ هي:

a	$y = -x + 1$	b	$y = x - 1$	c	$y = x + 1$	d	$y = 3x - 3$
---	--------------	---	-------------	---	-------------	---	--------------

20- إن نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عند $-\infty$ هي:

a	1	b	-1	c	$+\infty$	d	2
---	---	---	----	---	-----------	---	---

21- إن نهاية $x - f(x)$ عند $-\infty$ هي:

a	2	b	0	c	1	d	-1
---	---	---	---	---	---	---	----

22- إن معادلة المقارب المائل للخط البياني للتابع عند $-\infty$ هي:

a	$y = -x + 1$	b	$y = x + 1$	c	$y = x - 1$	d	$y = 3x - 3$
---	--------------	---	-------------	---	-------------	---	--------------

ليكن لدينا التابع $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$:

23- إن مشتق التابع f هو:

a	$\frac{x^2-1}{-x^2}$	b	$\frac{x^2-1}{x^2}$	c	$\frac{x^2+1}{x^2}$	d	$\frac{x^2}{x^2}-1$
---	----------------------	---	---------------------	---	---------------------	---	---------------------

24- بناء على نتيجة الطلب السابق، يكون مشتق التابع المعرف وفق $g(x) = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ هو:

a	$\frac{x-1}{x}$	b	$\frac{x-1}{x}(\sqrt{x})$	c	$\frac{x-1}{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$	d	$\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}$
---	-----------------	---	---------------------------	---	---	---	----------------------------

ليكن التابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{1-x} ; x \neq 1 \\ m ; x = 1 \end{cases}$

25- إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الواحد هي:

a	-2	b	-1	c	1	d	2
---	----	---	----	---	---	---	---

26- إن مشتق التابع f على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ هو:

a	$\frac{x^2+2x-1}{(1-x)^2}$	b	$\frac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2}$	c	$\frac{-x^2+2x-1}{(1-x)^2}$	d	$\frac{-x^2+2x-1}{(1+x)^2}$
---	----------------------------	---	-----------------------------	---	-----------------------------	---	-----------------------------

27- إن القيمة التقريبية للعدد 0.02 هي:

a	2.02	b	0.02	c	1.02	d	-1.02
---	------	---	------	---	------	---	-------

C	14	A	1
D	15	C	2
C	16	A	3
A	17	C	4
B	18	A	5
C	19	B	6
A	20	A	7
D	21	C	8
C	22	D	9
B	23	C	10
C	24	B	11
A	25	D	12
C	26	C	13
D		27	





الدرس السادس

تحسين الثوابت

استثمر

في عقلك،

فهو أفضل

استثمار

ستقوم به.

مثال (2)

أوجد عددين حقيقيين a, b يحققان أن :

الحل

[illegible]

■ الحالة الاولى: صيغ متكافئة:

تشتمل على ثوابت يُطلب تعيينها

توحيد مقامات) و مطابق الصيغتين

مثال (1)

عین a, b إذا علمت $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

الحل

[illegible]

■ الحالة الثانية: معطيات عددها يساوي

عدد المجاهيل:

(1) الخط البياني يمر من النقطة $A(x_0, y_0)$ أو

النقطة $A(x_0, y_0)$ تنتمي لـ C_f

مثال (1)

عين قيمة الثابت m إذا علمت أن الخط البياني

$$f(x) = \sqrt{x^2 + m} - 1$$

يمر من النقطة $A(1,1)$

الحل

مثال (4)

ليكن $f(x) = \frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$ جد عددين a, b, c

تحقق أن:

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

الحل



(3) المستقيم $y = b$ مقارب أفقي للخط C_f

يجب أن يكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

مثال (1)

ليكن $f(x) = \frac{2x^2+3}{bx^2+x+1}$ عيّن قيمة الثابت b إذا علمت أن $y = \frac{1}{2}$ مقارب أفقي للخط C_f

الحل

[illegible]

مثال (2)

ليكن f التابع المعرف وفق :

$$f(x) = \frac{2x + a}{x + b}$$

عين قيمة الثابتين a, b إذا علمت أن منحنى التابع
يقبل المقارب $x = 1$ مقارب شاقولي و يمر من
النقطة $A(2,3)$

الحل

[illegible]

مثال (2)

ليكن f التابع المعرف وفق :

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + 4}$$

جد الأعداد الحقيقية a, b, c لتتحقق الشروط الآتية :

- المستقيم $x = -2$ مقارب شاقولي للخط c_f
- المستقيم $y = 2$ مقارب أفقي للخط c_f
- النقطة $A(0, \frac{1}{2})$ تنتمي للمنحنى c_f

الحل

4) التابع f يقبل قيمة حدية عند x_0

و هذا يعني أن المشتق ينعدم عند هذه النقطة (f اشتقاقي عند x_0)

- نشتق
- نصنع المعادلة $f'(x_0) = 0$
- نحل المعادلة لإيجاد الثابت المطلوب

مثال (1)

ليكن f التابع المعرف وفق :

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x - 3$$

جد قيمة الثابت a إذا علمت أن التابع f يقبل

قيمة حدية عند $x = 1$

الحل



5) إذا علمنا أن القيمة الحدية عند x_0 هي y_0

فهل لدينا معلومتين :

- المشتق ينعدم عند x_0 أي $f'(x_0) = 0$
- التابع يمر من النقطة $A(x_0, y_0)$ أي :
 $f(x_0) = y_0$

و بالحل المشترك نوجد الثابتين المطلوبين

مثال (1)

ليكن $f(x) = \frac{x^2 + bx + a}{x + 1}$ عين قيمة الثابتين a, b إذا علمت أن التابع f يقبل قيمة حدية عند $x = 0$ مساوية لـ 3

الحل

مثال (2)

ليكن f التابع المعرف وفق :

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + a}{x + 1}$$

جد قيمة الثابت a إذا علمت ان f يقبل قيمة حدية عند $x = -3$

الحل

6) إذا علمنا أن m ميل المماس للخط C_f في نقطة منه فاصلتها x_0

- إن ميل المماس في النقطة التي فاصلتها x_0 هو العدد المشتق عند هذه النقطة لذلك تتبع الخطوات الآتية :

1- نشتق

2- نضطلع المعادلة $f'(x_0) = m$

3- نحل المعادلة .

فكرة: عندما يذكر أن المماس أفقي أكيد بتعرف انو قصدو $m = 0$ مو!!! و الله شكلك ما بتعرف !!.. شغلي هالمثال :

مثال (1)

ليكن $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$

عَيِّن قيمة الثابتين a, b إذا علمت أن منحنى التابع يقبل مماساً أفقياً في النقطة $A(1,3)$

الحل



.....

.....

.....

.....

هنا يجب الانتباه إلى أنه سيعطينا الفاصلة فقط **و لكن** يمكننا معرفة تراتيب نقطة التماس بتعويض الفاصلة في معادلة المماس :

This image shows a full page of a notebook or worksheet template. It consists of a series of evenly spaced, horizontal dashed lines running across the width of the page. The background is plain white, and there are no margins, text, or other markings present.

[illegible][illegible][illegible]

و من ثم أصبح لدينا نقطة التماس $A(x_0, y_0)$

من جهة أخرى الميل معلوم وضوحاً إذ أن ميل
المماس هو m أمثال x في معادلته

فهنّا نصطنع معادلتين :

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = m \end{cases}$$

مثال (1)

$$f(x) = \frac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$$

عين a, b لتكون $y = 4x + 3$ معادلة المماس

للخط C_f في النقطة التي فاصلتها 0.

الحل



8) إيجاد فاصلة النقطة التي يكون المماس عندها ماز من المبدأ

فكرة:

يجب التفريق بين المماس عند نقطة و المماس المار من نقطة

فعندما نقول المماس عند النقطة A (أو في النقطة A) فهنا نقصد أن فاصلة النقطة هي فاصلة التماس

أما عندما يكون المماس ماز من النقطة A فهنا ليس بالضرورة أن تكون هي نقطة التماس

1- فهنا نفرض نقطة التماس مجهولة a

2- نوجد معادلة المماس بدلالة a

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

3- نعوض إحداثيات النقطة A في المعادلة

$$y_A = f'(a)(x_A - a) + f(a)$$

ثم نعزل a

مثال (1)

$$\text{ليكن } f(x) = x^2 - 2x + 1$$

و M نقطة منه المماس عندها يمر من المبدأ

و فاصلتها موجبة تماماً . جد إحداثيات M

الحل

.....

.....

.....

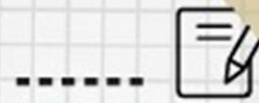
.....





الدرس السابع

تتمت في الاشتقاق



خطط

لوقتك،

ورتب مهامك،

وستجد

أنك أنجزت

المشتقات من مراتب عليا

ليكن f تابع اشتقاقي على I و مشتقه f'
عندئذ إذا كان f' اشتقاقي على I نعرف المشتق
من المرتبة الثانية للتابع f وفق :

$$f''(x) = (f'(x))'$$

و هكذا فإننا نعرف المشتق من المرتبة n
بالشكل :

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

حيث أن الرمز $f^{(n)}$ لا يمثل قوة وإنما عدد مرات
الاشتقاق هو n

التمرين (1)

ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$$

1- تحقق أن $f'(x) = \sqrt{1+x^2}$

2- استنتج أن :

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$$

الحل

التمرين (2)

ليكن f التابع المعرف على $]0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

1- احسب $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$

2- أثبت أن :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

1- احسب $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$

2- استنتج صيغة $f^{(n)}(x)$

الحل

الحل

التمرين (3)

ليكن f التابع المعرفة على $]1, +\infty[$ وفق :



.....

.....

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$
$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$
[illegible]

.....

.....

.....

.....

.....

[illegible]

[illegible]

التمرين (6)

$f(x) = x \cos x$ و المطلوب :

- ليكن f التابع المعرف وفق :

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

الحل

$$f^{-1}(x) = g(x)$$

التقابل العكسي

فهما متزايدان على I

كما أن:

$$f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$$

$$g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x : x \geq 0$$

إذن f و g يمثلان تقابلاً وتقابله العكسي

الرسم:

• لإيجاد التابع العكسي (التقابل العكسي)

لتابع f على مجال I :

- 1- تثبت أن f مستمر على I
 - 2- تثبت أن f مطرد على I
 - 3- نحدد مجموعة تعريف التابع العكسي $D_g = f(I)$
 - 4- نضع $y = f(x)$ ثم نعزل x بدلالة y فنصل لعلاقة من الشكل $x = g(y)$
 - 5- نبديل كل x بـ y وكل y بـ x فنحصل على التابع العكسي المنشود:
- المعرف على $D_g = f(I)$ وفق $g(x)$

مثال (2)

ليكن f التابع المعرف على المجال $]1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \text{ وفق}$$

- 1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها
- 2- أثبت أن f تقابل على I ثم جد تقابله العكسي

ندعو عندئذ التابع f^{-1} التابع العكسي أو التقابل العكسي للتابع f على I

• أهم العلاقات بين التقابل وتقابله

العكسي:

- 1- $f^{-1}(f(x)) = x$ و $f(f^{-1}(x)) = x$
 - 2- الخط البياني للتابع f والخط البياني للتابع f^{-1} متناظران بالنسبة لمنصف الربع الأول
- والثالث $d: y = x$

خلاصة القول:

• لإثبات أن f و g يمثلان تقابلاً وتقابله

العكسي:

- 1- تثبت أن كل منهما مستمر على I
 - 2- تثبت أن كل منهما مطرد على I
 - 3- نحسب التركيبين:
- $f(g(x))$ و $g(f(x))$
- فيجب أن يكون الناتج x

مثال (1)

ليكن f و g تابعان معرفان على

$$I = [0, +\infty[\text{ وفق:}$$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2$$

أثبت أن f و g يمثلان تابعاً وتابعه العكسي ثم ارسم الخط البياني لكل منهما في شكل واحد.

الحل

نلاحظ أن كلا من f و g تابعاً مستمران على I وأن

$$f'(x) = 2x > 0 : x \in I$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 : x \in I$$

الحل

الطلب 1:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

f اشتقاقي على I و:

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	-----	
$f(x)$	$+\infty$	2

الطلب 2:

تابع كسري مستمر على $R \setminus \{1\}$ فهو مستمر

على $I =]1, +\infty[$

ومن الجدول نلاحظ أنه متناقص على I

إذاً f تقابل على I

لنوجد تقابله العكسي g :

$$D_g = f(I) =]2, +\infty[\quad -1$$

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \quad -2 \text{ نضع}$$

$$y(x-1) = 2x+1$$

$$yx - y = 2x + 1$$

$$yx - 2x = y + 1$$

$$x(y-2) = y+1$$

$$x = \frac{y+1}{y-2}$$

-3 نبدل كل x بـ y وكل y بـ x فنجد:

$$y = \frac{x+1}{x-2} = g(x)$$

فالتقابل العكسي للتابع f على I هو التابع g

$$g(x) = \frac{x+1}{x-2} \text{ وفق }]2, +\infty[$$

للتحقق:



الملف الأخير

8

مسائل الوحدة

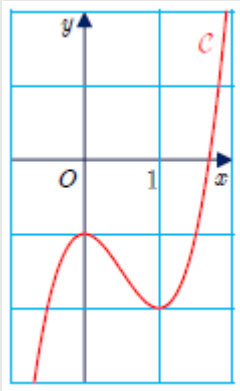


في هذا
سيكون لدينا
قسمين من
أسئلة الوحدة
النهايات
والاشتقاق



من مسائل النهايات

السؤال الخامس



ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ وليكن C خطه
البياني المبين في الشكل المرافق.

- 1- ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
- 2- احسب $f'(x)$ وادرس اشارته , ثم نظم جدولاً بتغييرات f .
- 3- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل جذراً واحداً فقط. وإذا رمزنا إلى هذا الجذر بالرمز α , أثبت أن α ينتمي للمجال $[1.6, 1.7]$.

[illegible]

السؤال الرابع والعشرون

السؤال الخامس والعشرون

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

1- أثبت أن f متزايد تماماً على المجال $[-\frac{3}{2}, -1[$.

2- نظم جدولاً بتغيرات f على المجال $[-\frac{3}{2}, -1[$.

3- أوجد $f\left(-\frac{3}{2}, -1\right]$ وأثبت أن للمعادلة $f(x) = 10$ حلاًّ وحيداً في المجال $[-\frac{3}{2}, -1]$.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

السؤال السادس والعشرون

ليكن f التابع المعرف على $I = [0,3]$ وفق $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

1- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

2- استنتج قيم x التي تحقق $f(x) = 0$.

3- عين $f([0,3])$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال السابع والعشرون

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}$. أثبت أن f مستمر على $\mathbb{R}$ وعين $f(\mathbb{R})$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثاني والثلاثون

في معلم متجانس، C هو الخط البياني للتابع f المعرفة على $[0, \pi]$ وفق $f(x) = \sin(x)$.

d هو المستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$.

1- a. ارسم كلاً من C و d .

b. يبدو أن للمعادلة $\sin(x) = \frac{1}{2}x$ حلاًّ وحيداً α في المجال $]0, \pi]$. استفد من الرسم لإيجاد مجال

صغير ينتمى إليه α .

2- نرسم بالرسم g إلى التابع المعرف على $[0, \pi]$ وفق $g(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}x$.

a. احسب $g'(x)$ وأثبت أن $g'(x)$ ينعدم عند $a = \frac{\pi}{3}$.

b. نظم جدولاً بتغيرات g .

3- استنتج مما سبق أن المعادلة $\sin(x) = \frac{1}{2}x$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0, \pi]$.

[illegible]

السؤال الثالث والثلاثون

ليكن f تابعاً مستمراً ومعرفاً على المجال $I = [0,1]$ ويحقق $f(x) \in I$ ، أيّاً يكن x من I .
نرمز بالرمز k إلى التابع المعرف على I وفق $h(x) = f(x) - x$. بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع h ، أثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a) = a$.



السؤال الرابع والثلاثون

ليكن m عدداً حقيقياً، وليكن C_m الخط البياني للتابع f_m المعروف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f_m(x) = x^3 + mx^2 - 8x - m$$

- 1- a. أثبت أن الخطين البيانيين C_0 و C_1 يتقاطعان في نقطتين A و B . أوجد إحداثيات هاتين النقطتين.
b. استنتج أن جميع الخطوط البيانية C_m تمر بالنقطتين A و B .
- 2- اوجد نهاية التابع f_m عند $+\infty$ و $-\infty$.
- 3- استنتج مما سبق أن للمعادلة $f_m(x) = 0$ ثلاثة حلول متميزة في $\mathbb{R}$, أيًا يكن العدد m .

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

السؤال الخامس والثلاثون

ليكن f تابعاً مستمراً واشتقاقياً على المجال $I = [0,1]$ ويحقق الشرطين:

- أياً كان x من I كان $f(x)$ من I .
 - أياً كان x من $]0,1[$ كان $f'(x) < 1$.
- أثبت أن للمعادلة $f(x) = x$ حلاً وحيداً في I .

[illegible]

السؤال السادس والثلاثون

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. وليكن C خطه البياني في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- أثبت أن للخط C محور تناظر.
- 2- أدرس نهاية التابع عند $+\infty$ و $-\infty$.
- 3- أثبت أن $f(x) - x = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$, أيًا يكن x من $\mathbb{R}$. استنتج أن C يقبل مقارباً مائلاً d في جوار $+\infty$. عين الوضع النسبي للخط C ومقاربه d .
- 4- ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = -f(x)$, وليكن $H = C \cup C'$. أثبت أن معادلة H هي $y^2 - x^2 = 1$.

[illegible]

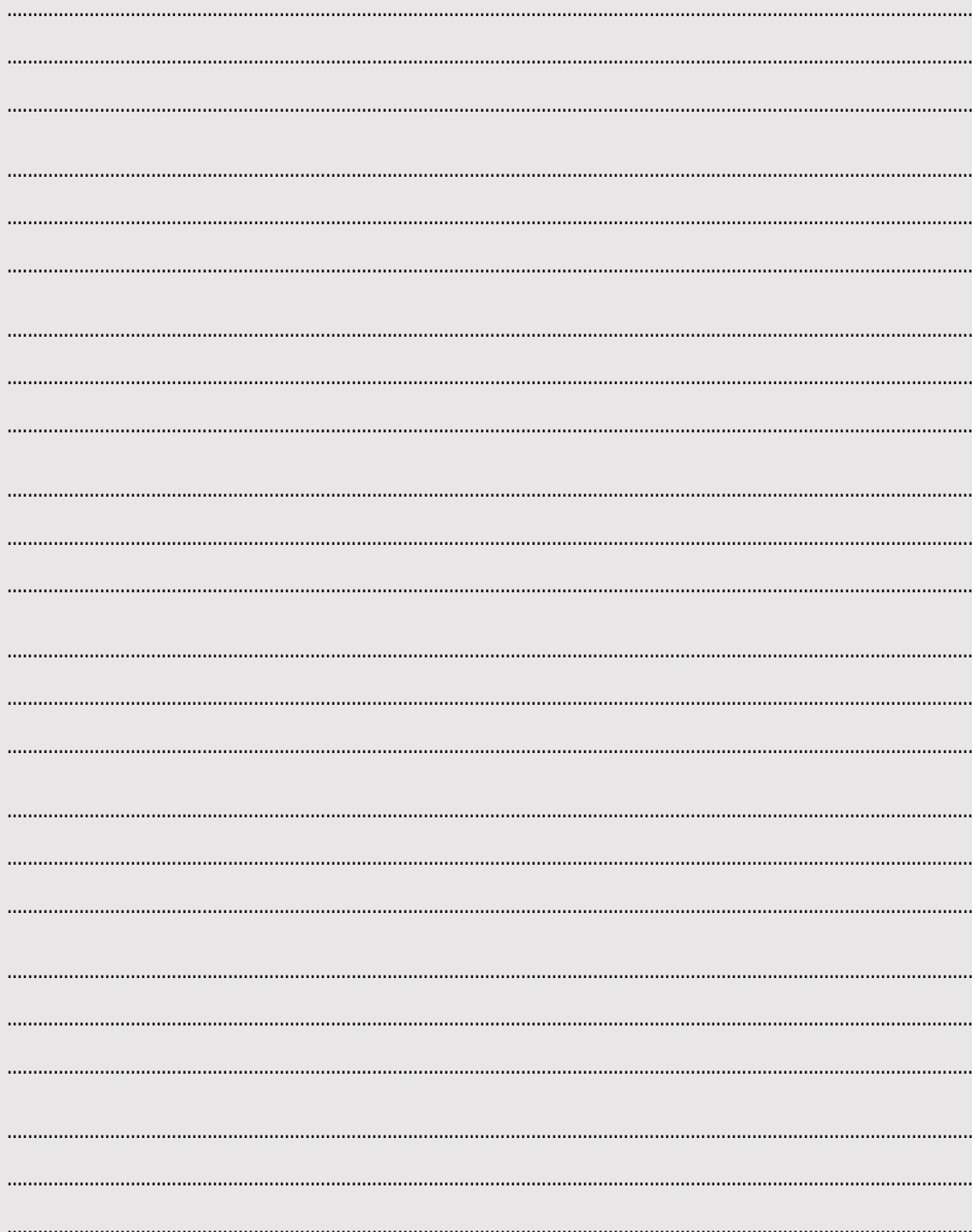
السؤال السابع والثلاثون

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ وفق:

$$f(x) = |x + 1| + \frac{x}{x^2 - 1}$$

- 1- a. اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمة مطلقة.
b. ادرس نهاية f عند حدود مجالات D_f . ثم أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته على كل من مجالات D_f .
- 2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.
- 3- a. تحقق من أن المستقيمين اللذين معادلتاهما $y = x + 1$ و $y = -x - 1$ هما، بالترتيب،
مقاربان مائلان للخط البياني C عند $+\infty$ و $-\infty$. ادرس وضع C بالنسبة إلى هذين المقاريين.
b. أوجد معادلة للمماس T للخط البياني C في النقطة A منه علماً أن فاصلة A تساوي
الصفر.
c. ارسم T ومقاري C ثم ارسم C .
- 4- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α في المجال $] -1, 1[$ وأوجد مجالاً طوله 10^{-1} تنتمي
إليه α .





مسائل في الاشتقاق

السؤال الأول

اكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع المعطى f في النقطة التي فاصلتها a .

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x, a = 0 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}, a = 0 \quad (2)$$

$$f(x) = x\sqrt{x}, a = 1 \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1}, a = 0 \quad (4)$$

$$f(x) = \cos x, a = 0 \quad (5)$$

$$f(x) = x \cos x, a = \frac{\pi}{4} \quad (6)$$

[illegible]



السؤال الثاني

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $R \setminus \{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$.

- (1) اكتب معادلة لمماس C في النقطة التي تساوي فاصلتها 1 .
- (2) هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = -4x$ ؟
- (3) هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x - 2y = 0$ ؟

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

السؤال الثالث

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على R وفق $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$.

- (1) اعط معادلة لمماس C في النقطة التي تساوي فاصلتها 1 .
- (2) هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = -\frac{1}{4}x$ ؟
- (3) هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $4x - y = 0$ ؟

السؤال الخامس

ليكن f هو التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$.

- (1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
- (2) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟
- (3) احصر كل منها في المجال لا يزيد طوله على 10^{-1} .



[illegible]

السؤال السادس

ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$.

- (1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
- (2) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟
- (3) احصر كل منها في المجال لا يزيد طوله على 10^{-1} .

.....

.....

.....

في كل حالة من الحالات الآتية، احسب المشتقات من المراتب 1 و 2 و 3 للتابع f المعرف بالعلاقة المشار إليها. وحدد في كل حالة المجموعة التي تحسب عليها المشتق.

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1 \quad (1)$$

$$f(x) = x\sqrt{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad (3)$$

$$f(x) = \cos(2x) + \sin(2x) \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad (6)$$

[illegible]

السؤال الثامن

ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.

(1) تحقق أن $f'(x) = f(x)$ ، أياً يكن x من R .

(2) استنتج أن $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0$ ، أياً يكن x من R .



السؤال العاشر

التابع f معرف على R وفق $f(0) = 0$ و $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ في حالة $x \neq 0$.

(1) هل f اشتقاقي عند الصفر؟ علل إجابتك.

(2) احسب $f'(x)$ على R^* .

محل هندسي

السؤال الحادي عشر

في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$ ، M هي النقطة التي إحداثياتها $(m, 0)$ حيث $0 \leq m \leq 3$ ، و N هي النقطة التي إحداثياتها $(0, n)$ حيث $n \geq 0$ ، النقطتان M و N تحققان $MN = 3$. أخيراً J هي نقطة من القطعة



في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$ ، نرمز بالرمز ε إلى مجموعة النقاط $M(x, y)$ التي تحقق:

$$(*) \quad x^2 - 2x + 4y^2 = 3$$

نهدف إلى إثبات أن المجموعة ε هي اجتماع خطين بيانيين C_1 و C_2 لتابعين f_1 و f_2 ومن ثم رسم ε .



السؤال الرابع عشر

التابع f معرف على المجال $[0,1[$ وفق $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$.

(1) هل f اشتقاقي عند الصفر؟

(2) احسب $f'(x)$ على $]0,1[$.



السؤال الخامس عشر

نتأمل التابع f المعرفة على $R \setminus \{1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

(1) احسب التابع المشتق للتابع f .

(2) استنتج مشتق كل من التوابع الآتية:

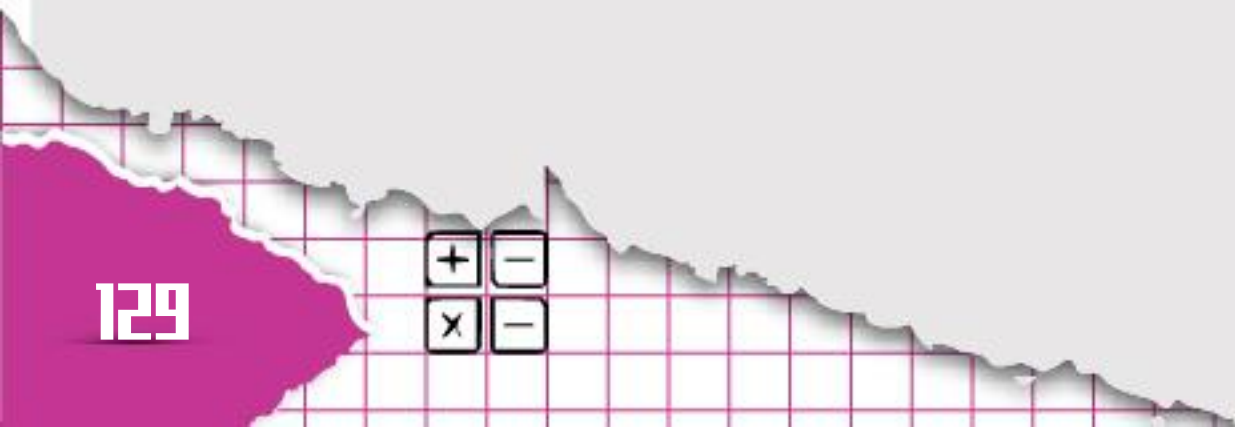
1. $g : x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

2. $h : x \mapsto \frac{x^4+1}{x^2-1}$

3. $l : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$

4. $k : x \mapsto \frac{\sin^2 x + 1}{\sin x - 1}$





السؤال السادس عشر

فيما يأتي، أوجد التابع المشتق للتابع f محدداً المجموعة التي تنجز عليها الاشتقاق.

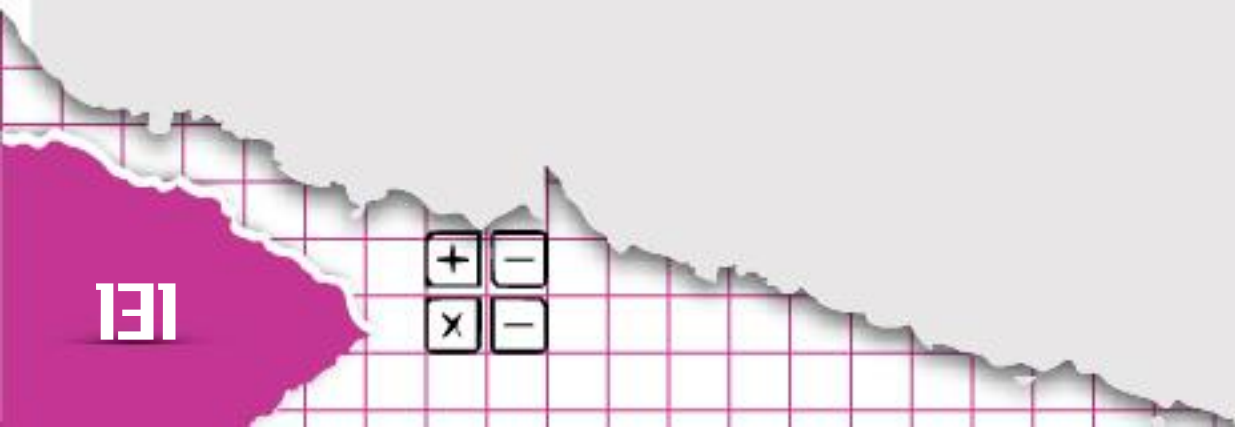
$$f(x) = \cos^2 3x \quad (1)$$

$$f(x) = \sin^3 2x \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 3x} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^3 2x} \quad (4)$$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



السؤال السابع عشر

ليكن التابع f المعرفة على $R \setminus \{1\}$ وفق $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

(1) عيّن التابع المشتق f' للتابع f .

(2) نرسم بالرمز g إلى التابع المعرف على $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ وفق $g(x) = f(\sin x)$. أثبت أن g

اشتقاقی علی I ثم احسب $g'(x)$ علی I .

(3) نرسم بالرمز h إلى التابع المعرف على $J =]1, +\infty[$ وفق $h(x) = f(\sqrt{x})$. أثبت أن h اشتقاقي

على J ثم احسب $h'(x)$ على J .

[illegible]

السؤال الثامن عشر

a و b عدنان حقيقتان، و C هو الخط البياني للتابع f المعروف على R وفق:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$$

هل يمكن تعيين a و b لكي يقبل C مماساً أفقياً في النقطة $A(1,2)$ منه؟



This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

السؤال التاسع عشر

a و b عددان حقيقيان، و C هو الخط البياني للتابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = \frac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$$

عُيِّن a و b لتكون $y = 4x + 3$ معادلة للمماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 0 منه؟



السؤال العشرون

a عدد حقيقي، و f هو التابع المعرف على R وفق $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$. هل يمكن تعيين a ليكون للتابع f قيمة حدية عند $x = 1$ ؟



السؤال الواحد والعشرون

f هو تابع معرف على R واشتقاقي عليها. إضافة إلى ذلك نفترض أن:

- $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$
 - f' متزايد على المجال $[0, +\infty[$ ومتناقص على المجال $] - \infty, 0]$.
- ارسم خطأ بيانياً C يمكن أن يمثل التابع f .



السؤال الثاني والعشرون

في كل من الحالات الآتية، احسب في حال وجودها نهاية التابع f عند a المشار إليها.

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}, \quad a = 0 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\tan x}{x}, \quad a = 0 \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}, \quad a = 1 \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}, \quad a = 1 \quad (4)$$



This image shows a full page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, leaving small margins at the top and bottom. There is no handwriting or other markings on the paper.

السؤال الثالث والعشرون

في كل من الحالات الآتية، أوجد عدد حلول المعادلة، ثم احسب قيمة تقريبية لكل جذر بحيث لا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1} .



$$x^5 - x^3 + x - 5 = 0 \quad (1)$$

$$x(2x + 1)^2 = 5 \quad (2)$$

$$x^4 - \frac{1}{2} + 1 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0 \quad (4)$$



السؤال الرابع والعشرون

ليكن f التابع المعرف على المجال $[1, +\infty[$ وفق $f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$.

(1) ادرس تغيرات التابع f . أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً يطلب حساب قيمة تقريبية

لهذا الحل على ألا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1} .

(2) احسب جبرياً القيمة الحقيقية لذلك الجذر.

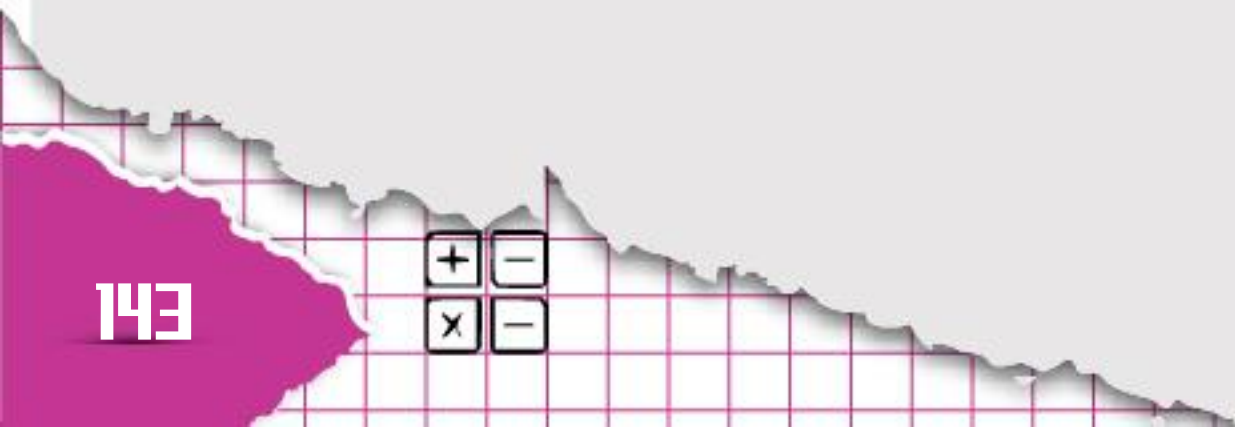


السؤال الخامس والعشرون

ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

- (1) ادرس تغيرات f على I .
- (2) استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً وحيداً α يقع في المجال $]1, 2[$.
- (3) احسب قيمة تقريبية لهذا الجذر على ألا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1} .





السؤال السادس والعشرون

في معلم متجانس $(0; \vec{r})$ ، ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على R وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 3}$$

(1) ادرس تغییرات f وارسم خطه البیانی C .

(2) نريد تعيين المماسات للخط البياني C المارة بالمبدأ، (غير المماس في المبدأ).

a - ليكن عدداً حقيقياً . اكتب معادلة للمماس T_a الذي يمس C في النقطة $A(a, f(a))$.

b - فُكر في أن T_a يكون أحد المماسات المطلوبة عندما يمر بالمبدأ. ثم جد معادلة لكل

مماس للخط البياني C يمر بالمبدأ.

[illegible]

السؤال السابع والعشرون

في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$ ، C هو الخط البياني للتابع f المعرفة على $R \setminus \{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 7}{x + 1}$$

- (1) أوجد نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
- (2) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقارب مائل للخط C .
- (3) ادرس نهاية f عند -1 . ماذا تستنتج فيما يتعلق بالخط C ؟
- (4) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.
- (5) أثبت أن النقطة $I(-1; -3)$ هي مركز تناظر للخط C .
- (6) ارسم مقاربات C ثم ارسم C .



السؤال الثامن والعشرون

في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$ ، C هو الخط البياني للتابع f المعرفة على $R \setminus \{1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 10x - 11}{(x - 1)^2}$$

- (1) أوجد نهايات f عند حدود مجموعة تعريفه، ثم ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.
- (2) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للخط C .
- (3) ادرس الوضع النسبي للخطين d و C ، ثم ارسم كلا من C و d .
- (4) حدّد هندسياً عدد حلول المعادلة $x^3 - (m + 3)x^2 + (2m + 10)x - 11 - m = 0$.



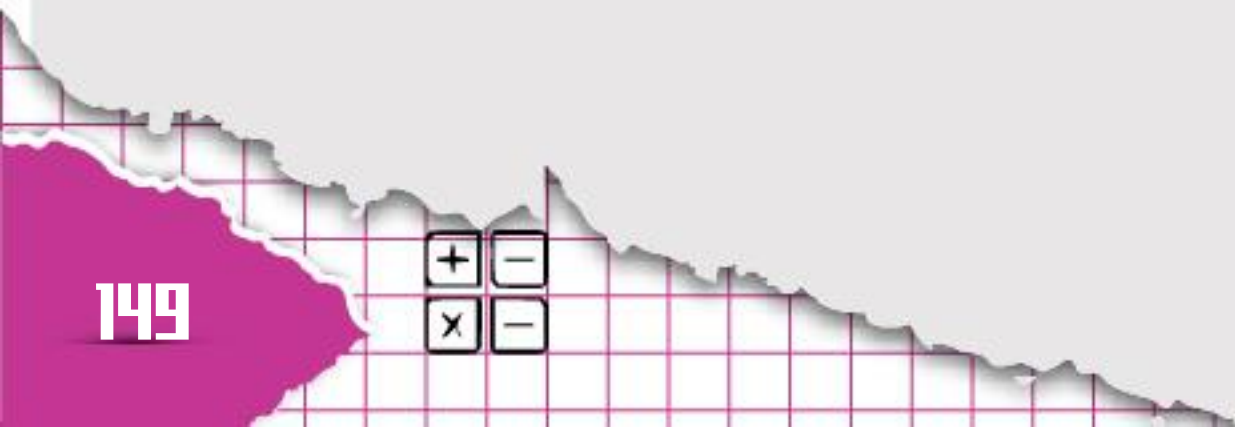
السؤال التاسع والعشرون

في معلم متجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$ ، ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 8}$$

- (1) احسب نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل C مقارباً أفقياً؟
- (2) تحقق أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C .
- (3) نظم جدولاً بتغيرات f .
- (4) ارسم مقاربات C ثم ارسم C .





(4) ارسم الخط البياني للتابع f على $[-2\pi, 2\pi]$.

[illegible]

السؤال الثاني والثلاثون

ليكن f التابع المعرف على المجال $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ وفق $f(x) = 4x - \tan^2 x$.

(1) احسب التابع المشتق $f'(x)$. ضع $\tan x = t$ وتحقق أن $f'(x) = 2(1 - t)(t^2 + t + 2)$

(2) استنتج جدولاً بتغيرات f على المجال I .

(3) أثبت أن للمعادلة $f(x) = -1$ ، في المجال I جذراً وحيداً α .



السؤال الثالث والثلاثون

ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x \cos x$.

(1) احسب عند كل x من R ، $f'(x)$ ، $f''(x)$ و $f'''(x)$.

(2) أثبت، مستخدماً الـرهان بالتدرّج، أن مهما تكن $n \geq 1$ فلدينا :

$$f^{(n)}(x) = x \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n \cos\left(c + (n-1) \times \frac{\pi}{2}\right)$$

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

السؤال الرابع والثلاثون

ليكن f التابع المعرف على $R \setminus \{-1, 1\}$ وفق $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$.

- (1) أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ على $R \setminus \{-1, 1\}$.
- (2) بالاستفادة مما سبق، أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n \geq 1$ و x من $R \setminus \{-1, 1\}$.



نفترض وجود تابع f معرف على R واشتقاقي عليها، ويحقق

$$f(0) = 0 \text{ و } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ عند كل } x \text{ من } R.$$

وليكن C خطه البياني في معلم متجانس (لن نبحث عن عبارة $f(x)$).

1- ليكن g التابع المعرف على R وفق $g(x) = f(x) + f(-x)$.

a- تحقق أن g اشتقاقي على R . واحسب $g'(x)$.

b- احسب $g(x)$ واستنتج أن التابع f فردي.

2- ليكن h التابع المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق $h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.

a- تحقق من أن h اشتقاقي على I ، واحسب $h'(x)$ على I .

b- أثبت أن $h(x) = 2f(1)$ ، أيًا يكن x من I .

c- استنتج أن نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي $2f(1)$.

d- ماذا تستنتج بشأن الخط البياني C ؟

3- ليكن k التابع المعرف على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ وفق $k(x) = f(\tan x) - x$.

a- احسب $k'(x)$. ماذا تستنتج بشأن التابع k ؟



b- احسب $f(1)$.

c- نظم جدولاً بتغيرات f على R .

d- ارسم المستقيمات المقاربة للخط البياني C وارسم مماساته في النقاط التي فواصلها

-1 و 0 و 1 ، ثم ارسم C .





