العقدية وتطبيقاتها

السؤال الأول

ليكن لدينا العددان العقديان

$Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \quad , Z_2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

1: اكتب Z_1 و Z_2 و $Z_1.Z_2$ بالشكل الأسي.

الحل: $|Z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\cos\theta_1 = \frac{1}{2}$ و $\sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow Z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$Z_2 = \sqrt{8+8} = 4$

$\cos\theta_2 = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta_2 = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow Z_2 = 4.e^{i\frac{\pi}{4}}$

$Z_1.Z_2 = 4.e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}$

$\Rightarrow Z_1.Z_2 = 4.e^{\frac{7\pi}{12}i}$

2- - اكتب $Z_1.Z_2$ بالشكل الجبري

الحل: $Z_1.Z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i\right)$

$= \sqrt{2} + \sqrt{2}i + \sqrt{6}i - \sqrt{6}$

$= (\sqrt{2} - \sqrt{6}) + (\sqrt{2} + \sqrt{6})i$

3- استنتج $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

الحل:

$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

السؤال الثاني

ليكن لدينا العددين العقديين:

$Z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ و $Z_2 = 1 + i$

1- اكتب Z_1, Z_2 ، $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الأسي.

2- اكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الجبري

3- استنتج النسب المثلثية $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$

السؤال الثالث

ليكن لدينا العدد العقدي $w = -3 + 4\,i$ وبفرض Z عدد يحقق $Z^2 = w$ حل المعادلة

الحل: بفرض $Z = x + iy$ عندئذ

$a = -3 \ , \quad b = 4$

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \quad (1)$

$x^2 - y^2 = a$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = -3 \quad (2)$

$x.y = \frac{b}{2} \Rightarrow x.y = 2$

بجمع 1 و2 نجد :

$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$

إما $x = 1$ أو $x = -1$

* $x = -1 \Rightarrow y = -2$

$\Rightarrow Z_1 = -1 - 2i$

* $x = 1 \Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow Z_2 = 1 + 2i$

السؤال الرابع

ليكن لدينا العدد العقدي

$Z = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\, i$

1- أثبت أن Z^2 تكتب بالشكل $Z^2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ ثم اكتب Z^2 بالشكل الأسي.

الحل:

$Z^2 = \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\,\mathrm{i}\right)^2$

$Z^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + 2.\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{4}}\, i - \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow Z^2 = \frac{2\sqrt{2}}{2} + 2.\sqrt{\frac{4-2}{4}}\, i$

$\Rightarrow Z^2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

- لكتابة Z^2 بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{2+2} = 2$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow Z^2 = 2.e^{i\frac{\pi}{4}}$

2- أوجد Z بالشكل الأسي ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{8}$

الحل:

$Z^2 = 2.e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow r^2.e^{2i\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi K$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} + \pi K$$

من أجل $K = 0 \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{8}$

$$Z = \sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{8}i} \Leftarrow$$

- استنتاج $\cos\frac{\pi}{8}$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{a}{r} \Rightarrow$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

السؤال الخامس

ليكن Z, W عددين عقديين يحققان $|Z| = 1$ و $|W| = 1$ وأن $Z.W \neq -1$

أثبت أن العدد العقدي $u = \frac{Z-W}{1+W.Z}$ عدد تخيلي بحت.

الحل:

$$|Z| = 1 \Rightarrow \bar{Z} = \frac{1}{Z}$$

$$|W| = 1 \Rightarrow \bar{W} = \frac{1}{W}$$

$$\bar{u} = \left(\frac{\bar{Z}-\bar{W}}{1+W.Z}\right) = \frac{\bar{Z}-\bar{W}}{1+\bar{W}.\bar{Z}}$$

$$\bar{u} = \frac{\frac{1}{Z}-\frac{1}{W}}{1+\frac{1}{W}.\frac{1}{Z}} = \frac{\frac{W-Z}{Z.W}}{\frac{Z.W+1}{Z.W}}$$

$$= \frac{W-Z}{W.Z+1}$$

$$\bar{u} = -\left(\frac{Z-W}{1+W.Z}\right) = -u$$

ومنه u عدد تخيلي بحت

السؤال السادس

في معلم متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$

1- انشر $(1+5i)^2$

الحل :

$$(1+5i)^2 = 1+10i-25$$
$$= -24+10i$$

2- استنتج حلول المعادلة

$$2iz^2 + (3+7i)z + 4 + 2i = 0$$

$$a = 2i \quad b = 3+7i$$
$$c = 4+2i$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$$

$$\Delta = (3+7i)^2 - 4(2i)(4+2i)$$
$$= 9+42i-49-32i+16$$
$$\Rightarrow \Delta = -24+10i = (1+5i)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1+5i$$

$$Z_1 = \frac{-3-7i-1-5i}{4i}$$
$$= \frac{-4-12i}{4i}$$
$$= \frac{-4-12i}{4i}.\frac{-4i}{-4i}$$
$$= \frac{-48+16i}{16}$$
$$Z_1 = -3+i$$

$$Z_2 = \frac{-3-7i+1+5i}{4i}$$
$$= \frac{-2-2i}{4i}.\frac{-4i}{-4i}$$
$$= \frac{8i-8}{16} = \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$$

السؤال السابع

لدينا كثير الحدود

$$P(Z) = Z^3 - 3Z^2 + 3z + 7$$

بفرض $P(Z) = (Z+1).Q(Z)$

1- عين $Q(Z)$ ثم حل المعادلة $P(Z) = 0$

الحل: بالقسمة الإقليدية نجد

$$\begin{array}{r|l} Z^3-3Z^2+3Z+7 & Z+1 \\ \pm Z^3 \pm Z^2 & Z^2-4Z+7 \\ \hline -4Z^2+3Z+7 & \\ \pm 4Z^2 \pm 4Z & \\ \hline 7Z+7 & \\ \pm 7Z \pm 7 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow Q(Z) = Z^2 - 4Z + 7$$

لحل المعادلة $P(Z) = 0$ نجد أن

$$(Z+1)(Z^2-4Z+7) = 0$$

إما $Z_1 = -1$

أو $Z^2 - 4Z + 7 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$
$$\Rightarrow \Delta = 16 - 4(1)(7) = -12$$

$$Z_2 = \frac{4-2\sqrt{3}i}{2} = 2-\sqrt{3}i$$

$$Z_3 = 2+\sqrt{3}i$$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

2- لتكن A,B,C نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة السابقة, أثبت أن ABC مثلث متساوي الأضلاع.

الحل:

$$Z_A: A(-1,0)$$
$$Z_B: B(2,-\sqrt{3})$$
$$Z_C: C(2,\sqrt{3})$$
$$\overrightarrow{AB}(3,-\sqrt{3}),\quad \overrightarrow{AC}(3,\sqrt{3})$$
$$\overrightarrow{BC}(0,2\sqrt{3})$$
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.

السؤال الثامن

ليكن $a = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ احسب $(a-1)(1+a+a^2)$ ثم استنتج أن $1+a+a^2=0$

- حساب $(a-1)(1+a+a^2)$

الحل:

$$a+a^2+a^3-1-a-a^2 = a^3-1$$

وطالما $a = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ فإن

$$a^3 = e^{\frac{6\pi}{3}i} = e^{2\pi i}$$
$$= \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

فإن $a^3-1 = 1-1 = 0$

إذاً $(a-1)(1+a+a^2) = 0$

- استنتاج أن $1+a+a^2=0$

طالما أن $(a-1)(1+a+a^2)=0$ فإن $1+a+a^2=0$

لأن $(a-1)$ ليست صفر لأن $a = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2- حل المعادلة $1+a+a^2=0$ ثم تحقق أن $a^2 = \bar{a}$

الحل:

$$\Delta = b^2-4(a)(c) \Rightarrow \Delta = 1-4 = -3$$
$$a_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\qquad a_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

- التحقق أن $a^2 = \bar{a}$

$$a^2 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = e^{(\frac{3\pi}{3}+\frac{\pi}{3})i} = e^{(\pi+\frac{\pi}{3})i}$$
$$= e^{(-\pi+\frac{\pi}{3})i} = e^{-\frac{2\pi}{3}i} = \bar{a}$$

السؤال التاسع

حل في C المعادلة

$$Z^3-(3+4i)Z^2-6(3-2i)Z+72i=0$$

إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

الحل: كون المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً ومن الدرجة الثالثة يمكن كتابتها بالشكل:

$$(Z-ai)(Z^2+bZ+c)=0$$
$$Z^3+bZ^2+cZ-aiZ^2-aibZ-aic=0$$
$$Z^3+(b-ai)Z^2+(c-abi)Z-aic=0$$

بالمقارنة مع الفرض:

$$b-ai=-3-4i \Rightarrow a=4,\qquad b=-3$$
$$c-aib=-18+12i \Rightarrow c=-18$$
$$\begin{cases}-abi = 12i \text{ محققة}\\ -aci = 72i \text{ محققة}\end{cases}$$
$$(Z-4i)(Z^2-3Z-18)=0$$

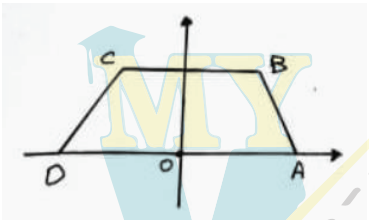
إما $Z-4i=0$ أي أن $Z_1=4i$

أو $Z^2-3Z-18=0$

$$(Z-6)(Z+3)=0$$
$$Z_2=6,\qquad Z_3=-3$$

السؤال العاشر

في الشكل المجاور نصف مسدس منتظم $ABCD$ مركزه (O) والنقاط A,B,C,D تمثل الأعداد العقدية a,b,c,d على الترتيب



1- إذا علمت أن $a=2$ أوجد الأعداد d,c,b

الحل: D نظيرة A بالنسبة لـ O ومنه $d=-2$

- B تنتج عن A بدوران مركزه (O) وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$b = e^{\frac{i\pi}{3}}.a$$
$$\Rightarrow b = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow b = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$\Rightarrow b = 1+\sqrt{3}i$$

- C تنتج عن A بدوران مركزه (O) وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

$$c = e^{\frac{2\pi}{3}i}.a \Rightarrow c = -1+\sqrt{3}i$$

2- أثبت أن $AC \perp CD$

$$\frac{d-c}{a-c} = \frac{-2+1-\sqrt{3}i}{2+1-\sqrt{3}i} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{-1-\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}.\frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{-3-\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i+3}{9+3} = \frac{-4\sqrt{3}i}{12} = -\frac{1}{\sqrt{3}}i$$
$$\arg\left(\frac{d-c}{a-c}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

إذا ADC قائم في C

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

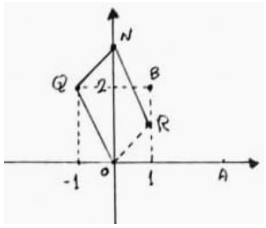
السؤال الحادي عشر

في المستوي العقدي ليكن

$$Z_A = 3, \qquad Z_B = 1 + 2i$$
$$Z_Q = -1 + 2i$$

1- مثل هذه الأعداد في المستوي العقدي.

الحل:



2- عين Z_N صورة A وفق دوران مركزه (O) وزاويته $\frac{\pi}{2}$

الحل:

N صورة A وفق دوران مركزه (O) وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$Z_N = e^{\frac{i\pi}{2}}.Z_A \Rightarrow$$
$$n = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).3$$
$$\Rightarrow n = 3i$$

3- أوجد Z_R ليكون الرباعي OQNR متوازي أضلاع.

الحل: حتى يكون الرباعي OQNR متوازي أضلاع يجب أن يكون

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QN}$$
$$r = n - q \Rightarrow r = 3i + 1 - 2i$$
$$\Rightarrow r = 1 + i$$

4- أوجد مركز ثقل المثلث ABQ.

الحل: بفرض Z_G مركز ثقل المثلث ABQ فإن

$$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_Q}{3} = \frac{3 + 1 + 2i - 1 + 2i}{3}$$
$$Z_G = 1 + \frac{4}{3}i$$

5- أثبت تعامد المستقيمين (AB) و (OR) وأثبت أن $OR = \frac{1}{2}AB$

الحل:

$$\left(\overrightarrow{AB}\,و\,\overrightarrow{OR}\right) = \arg\left(\frac{r-0}{b-a}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{1+i}{-2+2i}\right) = \arg\left(\frac{1+i}{-2+2i}.\frac{-2-2i}{-2-2i}\right)$$
$$= \arg\left(-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}$$

إذاً (AB) و (OR) متعامدين وطالما

$$\left|\frac{\overrightarrow{OR}}{\overrightarrow{AB}}\right| = \left|-\frac{1}{2}i\right| \Rightarrow \frac{OR}{AB} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow OR = \frac{1}{2}AB$$

السؤال الثاني عشر

في معلم متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ الأعداد العقدية:

$$a = -1 + 3i, \quad b = -2, \quad c = 1 - i$$

1- اكتب $c = 1 - i$ بالشكل الأسي

2- احسب العدد العقدي $\frac{a-b}{c-b}$ واستنتج أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

3- جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D بحيث يكون ABCD مربع.

السؤال الثالث عشر

أولاً: حل المعادلة التالية

$$2iZ + \bar{Z} = 3 + 3i$$

الحل: بفرض $Z = x + iy$

$$2i(x + iy) + (x - iy) = 3 + 3i$$
$$2xi + 2yi^2 + x - iy = 3 + 3i$$
$$(x - 2y) + (2x - y)i = 3 + 3i$$

بمساواة القسمين الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

$$x - 2y = 3 \qquad (1)$$
$$2x - y = 3 \qquad (2)$$

من (1) نجد $x = 3 + 2y$ نعوض في (2) ونجد

$$2(3 + 2y) - y = 3$$
$$6 + 4y - y = 3 \Rightarrow y = -1$$
$$\Rightarrow x = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \quad Z = 1 - i$$

ثانياً: حل جملة المعادلتين

$$3Z + Z' = 2 - 5i \qquad (1')$$
$$Z - Z' = -2 + i \qquad (2')$$

الحل: بجمع المعادلتين

$$4Z = -4i \Rightarrow Z = -i$$

نعوض في (2) ونجد

$$-i - Z' = -2 + i$$
$$\Rightarrow Z' = 2 - 2i$$

السؤال الرابع عشر

أولاً: عين مجموعة النقاط $M(Z)$ التي تحقق:

$$|iZ + \sqrt{3} - i| = |Z - 1 + i\sqrt{3}|$$

الحل:

$$\left|i\left(Z + \frac{\sqrt{3}}{i} - 1\right)\right| = |Z - 1 + i\sqrt{3}|$$
$$|i|.|Z - \sqrt{3}i - 1| = |Z - 1 + i\sqrt{3}|$$
$$|Z - 1 - \sqrt{3}i| = |Z - 1 + i\sqrt{3}|$$
$$|Z - (1 + \sqrt{3}i| = |Z - (1 - \sqrt{3}i)|$$

وبالتالي مجموعة النقاط $M(Z)$ تمثل محور القطعة المستقيمة AB حيث

$$A(1 + \sqrt{3}i), \quad B(1 - \sqrt{3}i)$$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

ثانياً: $|iZ+\sqrt{3}-i|=2$
نفس الحل ولكن يصبح
$$|Z-(1+\sqrt{3}i)|=2$$
تمثل مجموعة النقاط $M(Z)$ دائرة مركزها A ونصف قطرها $r=2$

السؤال الخامس عشر

نزود المستوى العقدي بمعلم متجانس مباشر $(0,\vec{u},\vec{v})$, النقاط A,B,C تمثلها الأعداد العقدية بالترتيب
$$Z_A=4,\quad Z_B=1+\sqrt{3}i,\quad Z_C=\overline{Z_B}$$
1- احسب $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$ بالشكل الجبري
الحل:
$$Z_C=\overline{Z_B}=1-\sqrt{3}i$$
$$\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}=\frac{1+\sqrt{3}i-4}{1-i\sqrt{3}-4}$$
$$=\frac{-3+\sqrt{3}i}{-3-\sqrt{3}i}.\frac{-3+\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i}$$
$$=\frac{9-6\sqrt{3}i+3i^2}{9-3i^2}$$
$$=\frac{6-6\sqrt{3}i}{12}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
2- استنتج أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.
الحل:
$$(\overrightarrow{AC}\text{ و }\overrightarrow{AB})=\arg\left(\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}\right)=-\frac{\pi}{3}$$
فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.
3- أوجد العدد العقدي Z_D الممثل للنقطة D صورة A وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{CB}$
الحل:
$$Z_D=Z_A+Z'$$
$$Z'=Z_{\overrightarrow{CB}}=Z_B-Z_C$$
$$=(1+i\sqrt{3})-(1-i\sqrt{3})=2\sqrt{3}i$$
$$\Rightarrow Z_D=4+2\sqrt{3}i$$
4- أثبت أن الرباعي $(ADBC)$ متوازي أضلاع.
الحل:
$$Z_{\overrightarrow{AD}}=Z_D-Z_A$$
$$=4+2\sqrt{3}i-4=2\sqrt{3}i$$
$$\Rightarrow Z_{\overrightarrow{AD}}=Z_{\overrightarrow{CB}}$$
فالرباعي $(ADBC)$ متوازي أضلاع.
5- عين مجموعة النقاط $M(Z)$ حيث $Z\neq Z_A$ التي تجعل المقدار التالي تخيلي بحت
$$\frac{Z_M-Z_B}{Z_M-Z_A}$$
الحل: يكون المقدار $\frac{Z_M-Z_B}{Z_M-Z_A}$ تخيلي بحت عندما
$$(\overrightarrow{AM}\text{ و }\overrightarrow{BM})=\arg\left(\frac{Z_M-Z_B}{Z_M-Z_A}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$$
أي مجموعة النقاط $M(Z)$ تمثل دائرة قطرها $[AB]$ محذوف منها النقطة A.

التحليل التوافقي

السؤال الأول

عين قيمة n العدد الطبيعي الذي يحقق الشرط المعطى في كل من الحالات الآتية

1: $P_{n+1}^3=2P_{n+2}^2$
$n+1\geq 3\Rightarrow n\geq 2$
$n+2\geq 2\Rightarrow n\geq 0$
شرط الحل $n\geq 2$
لدينا:
$$P_{n+1}^3=2P_{n+2}^2$$
$$(n+1).(n)(n-1)=2(n+2)(n+1)$$
$$n^2-n=2n+4$$
$$n^2-3n-4=0\Rightarrow$$
$$(n-4)(n+1)=0$$
إما $n+1=0\Leftarrow n=-1$ مرفوض
أو $n-4=0\Leftarrow n=4$ مقبول

2: $3\binom{n}{3}=14\binom{n}{2}$
$n\geq 3\quad ,n\geq 2$
شرط الحل $n\geq 3$
$$3\binom{n}{3}=14\binom{n}{2}$$
$$3\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}=14\frac{n(n-1)}{2\times 1}$$
$\Rightarrow n-2=14\Rightarrow n=16$ مقبول

3: $\binom{10}{2n}=\binom{10}{n+1}$
$\begin{cases}10\geq 2n\Rightarrow n\leq 5\\10\geq n+1\Rightarrow n\leq 9\end{cases}$ شرط الحل $0\leq n\leq 5$
إما $2n=n+1\Leftarrow n=1$ مقبول
أو $2n+n+1=10\Leftarrow 3n=9\Leftarrow n=3$ مقبول

4: $8\binom{n-1}{2}=P_n^4$
$n\geq 4$ و $n-1\geq 2\Rightarrow n\geq 2$
إذاً شرط الحل $n\geq 4$
$$8\frac{(n-1)(n-2)}{2\times 1}=n(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$4=n(n-3)\Rightarrow 4=n^2-3n$$
$$\Rightarrow n^2-3n-4=0$$
$$\Rightarrow (n-4)(n+1)=0$$
إما $n+1=0\Leftarrow n=-1$ مرفوض
أو $n-4=0\Leftarrow n=4$ مقبول

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

السؤال الثاني

لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

1- كم عدداً مختلفاً مكوناً من (3) منازل يمكن تشكيله من المجموعة منازل مختلفة .

الحل: عدد طرق اختيار الآحاد (6) طرق
عدد طرق اختيار العشرات (5) طرق
عدد طرق اختيار المئات (4) طرق
وبالتالي يكون عدد الطرق الكلي

عدد $= 6 \times 5 \times 4 = 120$

2- كم عدداً مختلفاً زوجياً مؤلف من (3) منازل يمكن تشكيله من المجموعة منازل مختلفة .

الحل: عدد طرق اختيار الآحاد (3) طرق
عدد طرق اختيار العشرات (5) طرق
عدد طرق اختيار المئات (4) طرق
وبالتالي يكون عدد الطرق الكلي

عدد $= 3 \times 5 \times 4 = 60$

3- كم عدداً مختلفاً مؤلفاً من ثلاثة منازل أكبر من (500) يمكن تشكيله من المجموعة منازل مختلفة .

الحل: عدد طرق اختيار المئات (2) طرق
عدد طرق اختيار العشرات (5) طرق
عدد طرق اختيار المئات (4) طرق
وبالتالي يكون عدد الطرق الكلي

عدد $= 2 \times 5 \times 4 = 40$

السؤال الثالث

لتكن المجموعة $S = [0,2,5,8,9]$

1- كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلف من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر (S)

الحل: عدد طرق اختيار العشرات (4) طرق
عدد طرق اختيار الآحاد (4) طرق
وبالتالي يكون عدد الطرق الكلي

طريقة $= 4 \times 4 = 16$

2- كم عدداً زوجياً مؤلف من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر (S).

الحل: عدد طرق اختيار العشرات (4) طرق
عدد طرق اختيار الآحاد (3) طرق
وبالتالي يكون عدد الطرق الكلي

طريقة $= 4 \times 3 = 12$

السؤال الرابع

نتأمل مجموعة من البطاقات عدد عناصرها 15 فيها خمس بطاقات حمراء اللون مرقمة من 1 إلى 5 وخمس بطاقات زرقاء اللون مرقمة من 1 إلى 5 وخمس بطاقات خضراء اللون مرقمة من 1 إلى 5. نسمي سحباً أي مجموعة جزئية مكونة من أربع بطاقات من المجموعة.

1- كم سحباً يضم فقط بطاقتين حمراوين؟

الحل: هذا يعني كرتين حمراوتين وكرتين غير اللون الأحمر

$$\binom{5}{2}\binom{10}{2} = 10 \times 45 = 450$$

2- كم سحباً يضم على الأقل بطاقة واحدة تحمل الرقم (1)

الحل:

إما (1) (غ غ غ)
أو (1) (1) (غ غ)
أو (1) (1) (1) (غ)

$$\binom{3}{1}\binom{12}{3} + \binom{3}{2}\binom{12}{2} + \binom{3}{3}\binom{12}{1} = 870$$

3- كم سحباً يضم ثلاث بطاقات من نفس اللون.

الحل:

(ح ح ح غ) أو (ز ز ز غ) أو(خ خ خ غ)

$$\binom{5}{3}\binom{10}{1} + \binom{5}{3}\binom{10}{1} + \binom{5}{3}\binom{10}{1} = 300$$

السؤال الخامس

ليكن المقدار : $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$

1- أوجد الحد الذي يحوي x^2

الحل:

$$T_r = \binom{n}{r}(a)^{n-r}(b)^r$$

$$T_r = \binom{10}{r}(x)^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= \binom{10}{r}(x)^{10-r}(x)^{-r}$$

$$= \binom{10}{r}(x)^{10-2r}$$

فإن الحد الذي يحوي x^2

$$x^2 = x^{10-2r} \Rightarrow 10 - 2r = 2$$
$$\Rightarrow r = 4$$
$$\Rightarrow T_4 = \binom{10}{4}x^2 = 210x^2$$

2- أوجد الحد الثابت المستقل عن x.

الحل:

$$x^0 = x^{10-2r} \Rightarrow 10 - 2r = 0$$
$$\Rightarrow 2r = 10 \Rightarrow r = 5$$
$$T_5 = \binom{10}{5} = 252$$

3- هل يوجد حد يحتوي على x^3

الحل:

$$\Rightarrow x^3 = x^{10-2r} \Rightarrow 10 - 2r = 3$$
$$\Rightarrow r = \frac{7}{2}$$

إذاً لا يوجد حد يحتوي (x^3) لأن n و r أعداد طبيعية.

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

السؤال السادس

إذا علمت أن

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

1- اكتب منشور $(e^{ix} - e^{-ix})^4$

الحل:

$$(e^{ix} - e^{-ix})^4 = \binom{4}{0} e^{4ix}.e^0 - \binom{4}{1} e^{3ix}.e^{-ix} + \binom{4}{2} e^{2ix}.e^{-2ix} - \binom{4}{3} e^{ix}.e^{-3ix} + \binom{4}{4} e^{-4ix}$$

$$= e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}$$

$$= (e^{4ix} + e^{-4ix}) - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6$$

$$= 2\cos 4x - 8\cos 2x + 6$$

2- اكتب $\sin^4 x$ بصيغة عبارة خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية (x).

الحل:

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4$$

$$= \frac{2\cos 4x - 8\cos 2x + 6}{16}$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

3- احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, . \, dx$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right) . \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{32}\sin 2\pi - \frac{1}{4}\sin \pi + \frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\right]$$

$$= \frac{3\pi}{16}$$

السؤال السابع

يلتقي عشرة أصدقاء في حفل يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط.

1- كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل.

الحل:

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45 \text{ مصافحة}$$

2- إذا كان عدد المصافحات التي جرت في حفل ضم (n) صديق (210) مصافحات فكم صديق كان في الحفل.

الحل:

شرط الحل $n \geq 2 \Rightarrow \binom{n}{2} = 210$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 210 \Rightarrow n(n-1) = 420$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 420 = 0$$

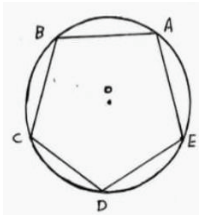
$$(n-21)(n+20) = 0$$

إما $n - 21 = 0 \Leftarrow n = 21$ مقبول

أو $n + 20 = 0 \Leftarrow n = -20$ مرفوض

إذاً عدد الأصدقاء (21) صديق.

السؤال الثامن



في الشكل المرسوم جانباً مخمس منتظم مرسوم داخل دائرة فإذا وصلنا بين ثلاث نقاط من رؤوسه لنحصل على مثلث

1- ما عدد المثلثات التي نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

الحل:

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

2- ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية؟

الحل: من كل نقطة يمكن تشكيل مثلث منفرج فعدد المثلثات المنفرجة هو (5) مثلثات.

3- ما عدد أقطار المخمس المنتظم؟

الحل:

$$\binom{5}{2} - 5 = 10 - 5 = 5$$

4- ما عدد نقاط تقاطع أقطار المخمس؟

$$\binom{5}{4} + 5 = 10$$

الاحتمالات

المسألة (1)

صندوق يحتوي على كرات حمراء وكرات بيضاء بحيث يكون عدد الكرات الحمراء ثلاثة أضعاف الكرات البيضاء.

1- احسب احتمال سحب كرة حمراء.

2- احسب احتمال سحب كرة بيضاء.

3- (X) متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة, احسب القانون الاحتمالي حيث يتم السحب لثلاث كرات مع الإعادة.

الحل: بفرض عدد الكرات البيضاء n فيكون عدد الكرات الحمراء $3n$ وبالتالي عدد الكرات الكلي $4n$

1: $P(R) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$

2: $P(W) = \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$

3: $\Omega = \{(RRR)(RRw)(RWW)(WWW)\}$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

$$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$$
$$P(X=1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times 3=\frac{9}{64}$$
$$P(X=2)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times 3=\frac{27}{64}$$
$$P(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{64}$$

X_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	1

المسألة (2)

صُنعت قطعة نقود بحيث احتمال ظهور الشعار يساوي ضعفي ظهور الكتابة

- A: حدث ظهور الشعار (H)
- B: حدث ظهور الكتابة (T)

1- احسب احتمال ظهور كل من الشعار والكتابة.

2- عند إلقاء القطعة مرتين X: متغير عشوائي يدل على عدد ظهور الشعار, احسب $E(x)$.

3- عند إلقاء القطعة 5 مرات, ما احتمال الحصول على ثلاث شعارات؟

الحل:

1:
$$P(A)=2P(B)$$
$$P(A)+P(B)=1$$
$$\Rightarrow 2P(B)+P(B)=1\Rightarrow 3P(B)=1$$
$$\Rightarrow P(B)=\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow P(A)=\frac{2}{3}$$

2:
$$X(\Omega)=\{0,1,2\}$$
$$P(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$
$$P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{9}$$
$$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

X_i	0	1	2	المجموع
$P(X_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

$$E(x)=0+\frac{4}{9}+\frac{8}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

3: التجربة برنولية

$$P(x=k)=\binom{n}{k}P^k.q^{n-k}$$

$n=5$ عدد الرميات

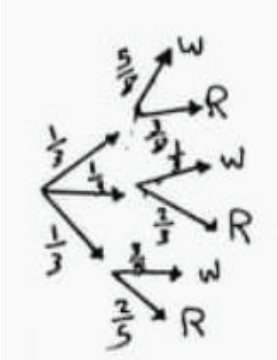
$k=3$ عدد مرات ظهور الشعار

$P=\frac{2}{3}$ احتمال ظهور الشعار

$q=\frac{1}{3}$ احتمال ظهور الكتابة

$$P(x=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3.\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$=\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}\times\frac{8}{27}\times\frac{1}{9}=\frac{80}{243}$$

المسألة (3)



في المخطط الشجري المرسوم جانباً, الرمز W يدل على الكرات البيضاء والرمز R يدل على الكرات الحمراء حيث يتم اختيار عشوائياً كرة واحدة.

1- ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

2- إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق الأول.

الحل: 1-

$$P(R)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{173}{360}$$

2-
$$P(I\backslash R)=\frac{P(I\cap R)}{P(R)}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}}{\frac{173}{360}}=\frac{45}{173}$$

المسألة (4)

نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الثلاث الآتية بأحد العددين 0 أو 1

ونعرف X متحول عشوائي يدل على مجموع الأرقام, اكتب قيم X واكتب الجدول الاحتمالي واحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

الحل:

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$
$$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$
$$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{8}$$
$$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{8}$$
$$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

X_i	0	1	2	3	المجموع
$P(X_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

$$E(X)=0+\frac{3}{8}+\frac{6}{8}+\frac{3}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$
$$V(X)=\left(\frac{3}{8}+\frac{12}{8}+\frac{9}{8}\right)-\frac{9}{4}$$
$$=\frac{24}{8}-\frac{9}{4}=\frac{6}{8}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{6}{8}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

المسألة (5)

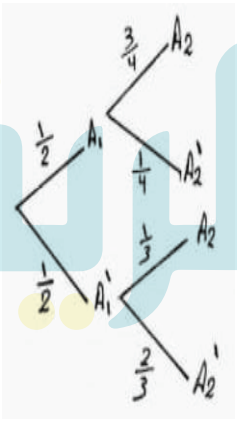
يواجه حارس مرمى ضربتين جزاء, إذا صد ضربة الجزاء الأولى فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء الثانية يساوي $\frac{3}{4}$ وإذا لم يصد ضربة الجزاء الأولى فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء الثاني يساوي $\frac{1}{3}$. لنفرض أن احتمال أن يصد ضربة الجزاء الأولى هو $\frac{1}{2}$.

الحدث A_1 يصد ضربة الجزاء الأولى.

الحدث A_2 يصد ضربة الجزاء الثانية

1- أعطِ مخطط شجري للتجربة.

الحل:



2- احسب $P(A_1\backslash A_2)$

الحل:

$$P(A_1\backslash A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}$$

علينا حساب $P(A_2)$

$$P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(A_1'\cap A_2)$$
$$P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=\frac{13}{24}$$
$$\Rightarrow P(A_1\backslash A_2)=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{13}{24}}=\frac{9}{13}$$

3- نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على عدد المرات التي يصد فيها الحارس ضربات الجزاء. اكتب مجموعة قيم X وجدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي.

الحل:

$$X(\Omega)=\{0,1,2\}$$
$$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{8}{24}$$
$$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}$$
$$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}=\frac{9}{24}$$

X_i	0	1	2
$P(X_i)$	$\frac{8}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{9}{24}$

$$E(X)=\sum_{x=i}^{n}x_i.P_i$$
$$=0+\frac{7}{24}+\frac{18}{24}=\frac{25}{24}$$

المسألة (6)

نتأمل قطعتي نقود C_1 متوازنة, احتمال ظهور الشعار= احتمال ظهور الكتابة.

C_2 غير متوازنة, احتمال ظهور الشعار هو $\frac{2}{3}$.

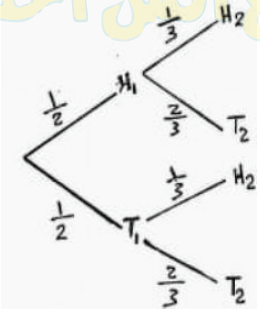
نلقي القطعة C_1 ثم القطعة C_2.

1- أعطِ تمثيلاً شجرياً للتجربة.

2- ليكن X متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار, اكتب مجموعة قيم X وجدول قانونه الاحتمالي.

الحل:

1- التمثيل الشجري:



2-

$$X(\Omega)=\{0,1,2\}$$
$$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$$
$$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{6}$$
$$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

X_i	0	1	2
$P(X_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

المسألة (7)

يجري تزويد طائرة ذات محركين بالنوع نفسه من المحركات, حيث إن احتمال حدوث عطل في أحد هذه المحركات يساوي $\frac{1}{3}$ ونفترض أن الأعطال التي يمكن أن تصيب المحركات مستقلة عن بعضها وليكن X المتحول العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على الطائرة.

1- عين القيم التي يأخذها X وقانونه الاحتمالي.

2- يمكن للطائرة أن تتابع طيرانها إلى نقطة الوصول إذا كان نصف عدد محركاتها على الأقل غير معطل, احسب احتمال أن تتابع الطائرة طيرانها.

الحل: 1-

$$X(\Omega)=\{0,1,2\}$$

$$P(X=0)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

X_i	0	1	2	المجموع
$P(X_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

2- تتابع الطائرة طيرانها إذا لم يكن أي محرك معطل أو إذا كان محرك يعمل والآخر معطل.

بفرض أن حدث إكمال الطائرة لطيرانها هو A فإن

$$P(A)=P(0)+P(1)=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$$

المسألة (8)

يتواجه لاعبان A و B في لعبة مكونة من خمسة أدوار, يكتسب A الدور الأول باحتمال $\frac{2}{3}$ ونعرف X متحولاً عشوائياً يدل على عدد الأدوار التي يكتسبها اللاعب A.

اكتب قيم X وجدول قانونه الاحتمالي واحسب التوقع والتباين.

الحل:

$$X=\{0,1,2,3,4,5\}$$

$$P(x=0)=\binom{5}{0}A^0.B^5=\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$$

$$P(x=1)=\binom{5}{1}A^1.B^4=5.\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{10}{243}$$

$$P(x=2)=\binom{5}{2}A^2.B^3=10.\left(\frac{2}{3}\right)^2.\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{40}{243}$$

$$P(x=3)=\binom{5}{3}A^3.B^2=10.\left(\frac{2}{3}\right)^3.\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$$

$$P(x=4)=\binom{5}{4}A^4.B=5.\left(\frac{2}{3}\right)^4.\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{80}{243}$$

$$P(x=5)=\binom{5}{5}A^5=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$$

X_i	0	1	2	3	4	5	المجموع
$P(X_i)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$	1

$$E(X)=n.P(A)=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$

$$V(X)=n.P(A).q=5\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{9}$$

المسألة (9)

في تجربة رمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات, يربح اللاعب خمس نقاط عند ظهور ثلاث شعارات ويخسر نقطة إذا ظهر شعارين فقط ويربح (n) نقطة فيما عدا ذلك.

ليكن X متحول عشوائي يدل على عدد النقاط التي يحصل عليها اللاعب, اكتب جدوله وقانونه الاحتمالي ثم احسب n إذا علمت أن $E(X)=\frac{3}{4}$

الحل:

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(H,H,H)(H,H,T)(H,T,H)(T,H,H)\\(T,T,T)(T,T,H)(T,H,T)(H,T,T)\end{Bmatrix}$$

$$P(x=5)=\frac{1}{8}$$

$$P(x=-1)=\frac{3}{8}$$

$$P(x=n)=\frac{4}{8}$$

X_i	5	-1	n
$P(X_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$

$$E(x)=\sum_{x=i}^{n}X_i.P_i$$

$$=\frac{5}{8}-\frac{3}{8}+\frac{4n}{8}=\frac{2}{8}+\frac{4n}{8}$$

وعندما $E(X)=\frac{3}{4}$ فإن

$$\frac{3}{4}=\frac{2}{8}+\frac{4n}{8}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2n}{4}$$

$$2=2n\Rightarrow n=1$$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

ملاحظة

عند سحب بطاقتين من نفس الصندوق

السحب معاً: نحذف القطر الرئيسي وما تحته	السحب بدون إعادة: نحذف القطر الرئيسي	السحب مع إعادة: لا تحذف شيئاً

مثال

صندوق يحوي 5 بطاقات متماثلة بالأرقام $\{0,1,1,2,2\}$ نسحب عشوائياً بطاقتين معاً.

A حدث يدل على مجموع رقمي البطاقتين زوجياً

1- احسب $P(A)$.

2- X متحول عشوائي يدل على ناتج ضرب رقمي البطاقتين المسحوبتين, اكتب قيم X وجدوله وتوقعه.

الحل:

	0	**1**	**1**	**2**	**2**
0		0	0	0	**0**
1			1	2	**2**
1				2	**2**
2					**4**
2					

1- $A = \{$ز, ز, ف, ف$\}$

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3+1}{10} = \frac{2}{5}$$

2- $I = \{0,1,2,4\}$

$$P(x=0) = \frac{4}{10}$$

$$P(x=1) = \frac{1}{10}$$

$$P(x=2) = \frac{4}{10}$$

$$P(x=4) = \frac{1}{10}$$

X_i	0	1	2	4
$P(X_i)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} X_i . P_i$$

$$= \frac{0+1+8+4}{10} = \frac{13}{10}$$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

تمارين عامة

التمرين الأول

التمرين الثالث:

نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً. لتكن M منتصف $[BC]$. وليكن AEB, ACD مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين.

نختار معلماً مباشراً مبدؤه النقطة A. ونرمز بالرمزين c, b إلى العددين العقديين اللذين يمثّلان النقطة C, B.

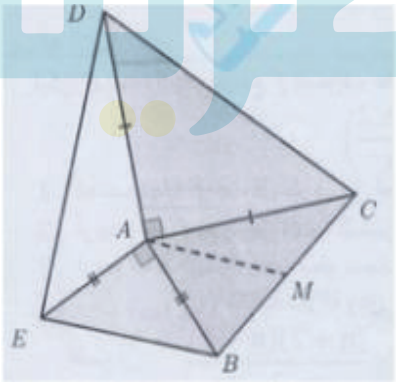
1- احسب بدلالة c, b الأعداد العقدية m, d, e الممثلة للنقاط M, D, E بالترتيب.

2- احسب $\frac{d-a}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع المثلث AED وأن $ED = 2AM$.

3- نفترض أن A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,2)\ (B,1), (C,1), (E,3)$

أ. احسب $\frac{c-a}{b-a}$

ب. استنتج قياس الزاوية $\widehat{BAC}$.



الحل:

1- النقطة E ناتجة عن النقطة B وفق دوران غير مباشر مركزه A وزاويته $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ كما أن النقطة D ناتجة عن النقطة C وفق دوران مباشر مركزه A وزاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$d - a = e^{-\frac{i\pi}{2}}(c - a) \Rightarrow d = ic$$

$$e - a = e^{-\frac{i\pi}{2}}(b - a) \Rightarrow e = -ib$$

$$m = \frac{b+c}{2}$$

-2

$$\frac{d-e}{m-a} = \frac{ic+ib}{\frac{b+c}{2}} = \frac{2i(b+c)}{b+c} = 2i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

وبالتالي $AM \perp DE$ أي أن (A) هو الارتفاع المثلث AED.

-3

$$\left|\frac{d-e}{m-a}\right| = 2 \Rightarrow \frac{ED}{AM} = 2 \Rightarrow ED = 2AM$$

$$a = \frac{2d+3e+c+b}{7} = \frac{2ic-3ib+c+b}{7}$$

$$0 = \frac{(1+2i)c+(1-3i)b}{7}$$

$$\Rightarrow (1+2i)c+(1-3i)b = 0 \Rightarrow c = \frac{-1+3i}{1+2i}b$$

$$\frac{c}{b} = \frac{c-a}{b-a} = \frac{-1+3i}{1+2i} = \frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

التمرين الثاني

$$Z = \frac{1-e^{2ix}}{1+e^{2ix}} \qquad x \neq \frac{\pi}{2}$$

أثبت أن $Z = -i\tan x$

الحل:

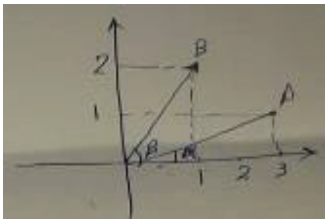
$$Z = \frac{e^{ix}(e^{-ix}-e^{ix})}{e^{ix}(e^{-ix}+e^{ix})} = \frac{-(e^{ix}-e^{-ix})}{(e^{ix}+e^{-ix})}$$

$$= -\frac{2i\sin x}{2\cos x} = -i\tan x$$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

التمرين الثالث

نتأمل في المستوي العقدي $(O,\vec{u},\vec{v})$ $\arg(Z_A)=\alpha$, $\arg(Z_B)=\beta$



1- اكتب بالشكل الجبري والأسي كلاً من Z_A, Z_B

2- اكتب $\frac{Z_b}{Z_A}$ بالشكلين الجبري والأسي ثم استنتج قيمة $\beta-a$.

الحل:

1- الشكل الجبري:

$$Z_A=3+i$$

$$Z_B=1+2i$$

الشكل الأسي:

$$|Z_A|=\sqrt{10}\Rightarrow Z_A=\sqrt{10}.e^{ia}$$

$$|Z_B|=\sqrt{5}\Rightarrow Z_B=\sqrt{5}.e^{i\beta}$$

2- كتابة $\frac{Z_B}{Z_A}$ جبرياً:

$$\frac{Z_B}{Z_A}=\frac{1+2i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}$$

$$=\frac{3-i+6i+2}{9+1}=\frac{5}{10}+\frac{5}{10}i$$

$$\frac{Z_B}{Z_A}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

أسياً:

$$\frac{Z_B}{Z_A}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}e^{i(\beta-a)}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\beta-a)}$$

قيمة $\beta-a$:

$$\cos(\beta-a)=\frac{x}{r}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\beta-a)=\frac{y}{r}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \beta-a=\frac{\pi}{4}$$

التمرين الرابع

ما آحاد وعشرات العدد $(12)^8$

الحل:

$$(12)^8=(2+10)^8$$

$$T_r=T_0+T_1+T_2+\cdots+T_8$$

$$T_0=\binom{8}{0}2^8.10^0=256$$

$$T_1=\binom{8}{1}2^7.10^1=10240$$

إذاً آحاده 6 وعشراته 9

التمرين الخامس

يريد معلم توزيع 5 هدايا على طلاب

1- بكم طريقة يمكنه توزيع الهدايا على 5 طلاب

2- بكم طريقة يمكنه توزيع 5 هدايا مختلفة على أربع طلاب بحيث يحصل كل طالب على هدية واحدة على الأقل

الحل:

1- $P_5^5=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

$$\binom{5}{2}.4!=10\times4\times3\times2\times1=240$$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

التمرين السادس

ليكن x متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية, الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الإحتمالي لـ (x):

	0	1	2	3	4
$P(x=1)$					$\frac{16}{81}$

1- ما عدد الاختبارات في التجربة؟
2- أكمل الجدول المجاور.
3- ما التوقع الرياضي والتباين للتحول X؟

الحل:

1- عدد الاختبارات = 4
2- من الجدول

$$P^4 = \frac{16}{81} \Rightarrow P = \frac{2}{3}$$

$$P(x=k) = \binom{4}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$$

$$P(x=0) = \frac{1}{81}, \quad P(x-1) = \frac{8}{81}$$

$$P(x-2) = \frac{24}{81}, \quad P(x=3) = \frac{32}{81}$$

3- التوقع الرياضي:

$$E(x) = nP = \frac{8}{3}$$

$$V(x) = nPq = \frac{8}{9}$$

التمرين السابع

يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء وثلاث كرات خضراء وواحدة بيضاء, نسحب عشوائياً معاً ثلاث كرات من الصندوق. X متحول عشوائي يدل على عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

1- عيّن قيم X.
2- احسب $P(X=1)$ و $P(X=3)$ ثم استنتج $P(X=2)$ وأوجد قانون X الإحتمالي.
3- احسب توقع X وانحرافه المعياري.

الحل: 1-

$$X(\Omega) = \{1,2,3\}$$

2-

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{4+1}{56} = \frac{5}{56}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{12}{56}$$

$$P(X=2) = 1 - \left[\frac{5+12}{56}\right] = \frac{39}{56}$$

X_i	1	2	2
P_i	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$
$P_i\, x_i$	$\frac{5}{56}$	$\frac{78}{56}$	$\frac{36}{56}$
$P_i\, x_i^2$	$\frac{5}{56}$	$\frac{156}{56}$	$\frac{108}{56}$

3-

$$E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2\, P_i - [E(x)]^2 = \frac{129}{448}$$

$$6(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{129}{448}} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{129}{7}}$$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

التمرين الثامن

يتطلب إنجاز مهمة مرحلتين A, B, المرحلة A: تستغرق عدداً عشوائياً (X_A) من الأيام والمرحلة B تستغرق عدداً عشوائياً X_B من الأيام

X	1	2
$P(X_A = x)$	0.4	0.6

X	1	2	3
$P(X_B = x)$	0.2	0.5	0.3

المتحولان X_A, X_B مستقلان احتمالياً. احسب احتمال E: حدث إنجاز المهمة في ثلاث أيام على الأكثر.

الحل:

$$P(E) = P(X_A + X_B \leq 3)$$

$$= P[(X_A = 1) \cap (X_B = 1)] + P[(X_A = 1) \cap (X_B = 2)] + P[(X_A = 2) \cap (X_B = 1)]$$

بسبب الاستقلال:

$$= \left(\frac{4}{10} \times \frac{2}{10}\right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{5}{10}\right) + \left(\frac{6}{10} \times \frac{2}{10}\right)$$

$$= \frac{8 + 20 + 12}{100} = \frac{40}{100} = 0.4$$

التمرين التاسع

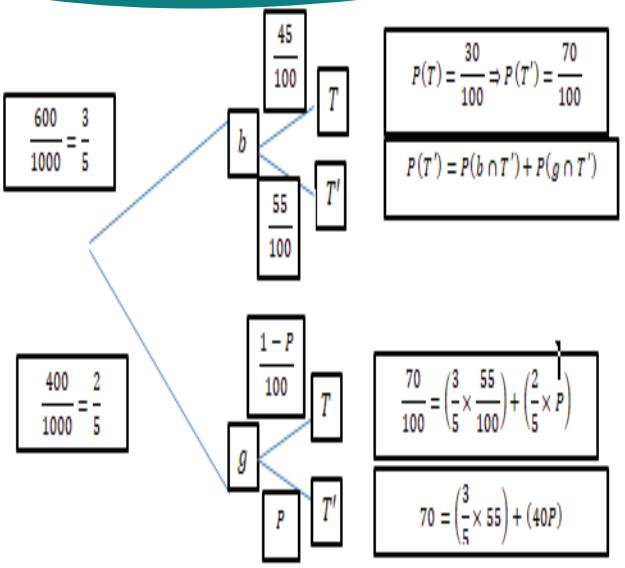
مدرسة تضم 1000 طالب (600) من الذكور والباقي من الإناث فإذا كان (55%) من الذكور لا يلعبون كرة مضرب وفي المدرسة (30%) من الطلاب يلعبون كرة مضرب

1- ما احتمال تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين طالبات المدرسة والتي لا تلعب كرة مضرب.

الحل:

نفرض g إناث b ذكور T يلعبون كرة مضرب T′ لا يلعبون كرة مضرب

$$P(T) = \frac{30}{100} \Rightarrow P(T') = \frac{70}{100}$$



$$\Rightarrow P = \frac{37}{40}$$

2- اخترنا أحد طلاب المدرسة عشوائياً إذا علمت أنه يلعب كرة مضرب ما احتمال أن يكون ذكراً؟

$$P(b|T) = \frac{P(b \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} \times \frac{45}{100}}{\frac{30}{100}} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$$

3- اخترنا من الطلاب الذكور طالبين عشوائياً, X: متحول عشوائي يدل على عدد الذكور والذين يلعبون كرة مضرب. عيّن قيم X وأوجد $P(X = 2)$

$$X = \{0,1,2\}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{270}{2}}{\binom{600}{2}} = \frac{2421}{11980}$$

حيث:

$$\frac{45}{100} \times 600 = 270$$

وهو عدد الذكور اللذين يلعبون كرة مضرب.

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592

التمرين العاشر

عشر: لتكن المجموعة $A = \{1,2,3,\dots,15\}$

1- ما عدد المجموعات المكونة من ثلاث عناصر من A ومجموع عناصرها زوجي (من مضاعفات 2).
2- ما عدد المجموعات المكونة من ثلاث عناصر من A ومجموع عناصرها من مضاعفات 3.

الحل:

1- ملاحظة: يكون مجموع ثلاث عناصر أعداد زوجي إذا كانت الأعداد الثلاث زوجية أو اثنان فرديان والثالث زوجي. إذاً عدد المجموعات هو

$$\binom{7}{3} + \binom{7}{1}.\binom{8}{2} = \frac{7\times 6\times 5}{3!} + 7\times\frac{8\times 7}{2}$$
$$= 35 + 7\times 28 = 231$$

2-

$$A_1 = \{1,4,7,10,13\}$$
$$A_2 = \{2,5,8,11,14\}$$
$$A_3 = \{3,6,9,12,15\}$$

عدد المجموعات هو

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{3} + \binom{5}{3} + 5\times 5\times 5$$
$$10 + 10 + 10 + 125 = 155$$

للاستفسار عن التسجيل والجلسات الإمتحانية زوروا موقعنا www.myway.edu.sy أو WhatsApp:0947050592