**ملاحظة هامة: أي تمرين لم تجد حلّه اكتب حلّه مع المدرّس**

## تدرب 1

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

نفرض $t=\frac{1}{x}$ وبالتالي $x=\frac{1}{t}$.

نغير جهة السعي:

$$(x\to+\infty)\Rightarrow(t\to 0)$$

نعوض:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

نفرض $t=\frac{1}{x}$ وبالتالي $x=\frac{1}{t}$.

نغير جهة السعي:

$$(x\to+\infty)\Rightarrow(t\to 0)$$

نعوض:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} xln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

نضيف ونطرح 1 في المضمون:

$$\lim_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{x-1}{x+1}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{x-1-x-1}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)$$

نفرض $t=\frac{-2}{x+1}$ وبالتالي:

$$x=\frac{-2}{t}-1=\frac{-2-t}{t}$$

نغير جهة السعي:

$$(x\to+\infty)\Rightarrow(t\to 0)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{(-2-t)\ln(1+t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}(-2-t)\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)=-2$$

$$\lim_{x\to 0} xln^2x$$

$$\lim_{x\to 0} x(lnx)^2=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\left(2\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2$$

$$=(2.0)^2=0$$

$$f(x)=x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right);a=+\infty$$

$$=x^2\left(\frac{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right)$$

$$=x^2\left(\frac{2+\frac{1}{x}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right)$$

$$=x^2\left(\frac{1}{x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$=x\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$f(x)=sinx.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}},a=0^+$$

$$=sinx\sqrt{\frac{1}{x^2}(x^2+1)}$$

$$=sinx\left(\frac{1}{|x|}\right)\sqrt{x^2+1}$$

عند $x=0^+$ فإن $|x|=x$:

$$f(x)=\frac{sinx}{x}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1(1)=1$$

$$f(x)=x(lnx-1),a=0^+$$

$$=xlnx-x$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

$$f(x)=\frac{6x^2+2-2cos2x}{2x^2};a=0$$

$$f(x)=\frac{6x^2}{2x^2}+\frac{2(1-cos2x)}{2x^2}$$

$$=3+\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$= 3 + 2\left(\frac{sinx}{x}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3 + 2(1)^2 = 5$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2cosx - 2}{\sqrt{4x^2+2} - \sqrt{2}}\ ; a = 0}$$

$$f(x) = \frac{-2(1-cosx)\left(\sqrt{4x^2+2} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4x^2+2} - \sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{-4\sin^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{4x^2+2} + \sqrt{2}\right)}{4x^2 + 2 - 2}$$

$$= -\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2\left(\sqrt{4x^2+2} + \sqrt{2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{4}(2\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}\ ; a = +\infty}$$

$$= x\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$$

$$= x\left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+2)(x+1)}}\right)$$

$$= x\left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+3x+2}}\right)$$

$$= x\left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}\right)$$

$$= x\left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}\right)$$

في جوار $+\infty$ تكون $|x| = +x$:

$$= x\left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{x+2-x-1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt{1+sinx} - \sqrt{1-sinx}}{x}\ ; a = 0}$$

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{1+sinx} - \sqrt{1-sinx}\right)\left(\sqrt{1+sinx} + \sqrt{1-sinx}\right)}{x\left(\sqrt{1+sinx} + \sqrt{1-sinx}\right)}$$

$$= \frac{1+sinx-1+sinx}{x\left(\sqrt{1+sinx} + \sqrt{1-sinx}\right)}$$

$$= \frac{sinx}{x}\cdot\frac{2}{\left(\sqrt{1+sinx} + \sqrt{1-sinx}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1\left(\frac{2}{2}\right) = 1$$

$$\boldsymbol{f(x) = (2-x)^{\frac{1}{x-1}}\ ; a = 1}$$

$$= 1^{\infty}$$

$$f(x) = (1+1-x)^{\frac{1}{x-1}}$$

نفرض $t = 1 - x$ وبالتالي $x = 1 - t$:

نغير جهة السعي:

$$(x \to 1) \Rightarrow (t \to 0)$$

$$f(t) = (1+t)^{\frac{1}{-t}} = \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1}$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = e^{-1}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\ ; a = +\infty}$$

$$= \left(1 + \frac{x-2}{x+1} - 1\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$= \left(1 + \frac{x-2-x-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$= \left(1 + \frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

نفرض $t = -\frac{3}{x+1}$ فيكون:

$$x + 1 = -\frac{3}{t}$$

$$x = -\frac{3}{t} - 1 = \frac{-3-t}{t}$$

نغير جهة السعي:

$$(x \to +\infty) \Rightarrow (t \to 0)$$

لدينا الأس:

$$t = -\frac{3}{x+1}$$

$$\frac{1}{t} = -\frac{x+1}{3}$$
$$-\frac{1}{t} = \frac{x+1}{3}$$
$$f(t) = (1+t)^{-\frac{1}{t}}$$
$$= \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1}$$
$$\lim_{t\to 0} f(t) = e^{-1}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}\ ; a = 0}$$
$$f(x) = \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$
$$= \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{1+x-1}$$
$$= \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x}$$
$$= \frac{sinx}{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1(1) = 2$$

$$\boldsymbol{f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x+1}\ ; a = +\infty}$$
$$f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+2-2\cos(\sqrt{x})}{x}\ ;\ a = 0}$$
$$f(x) = x + \frac{2\left(1-\cos(\sqrt{x})\right)}{x}$$
$$= x + 2\frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}$$
$$= x + 4\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{2\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 + 4.\frac{1}{4}(1)^2 = 1$$

$$\boldsymbol{f(x) = (3+x)^{\frac{1}{x+2}}\ ;\ a = -2}$$
$$= (1+2+x)^{\frac{1}{x+2}}$$

نفرض: $t = 2 + x$

$$x = t - 2$$

نغير جهة السعي:

$$(x \to -2) \Rightarrow (t \to 0)$$

نعوض:

$$f(t) = (1+t)^{\frac{1}{t-2+2}} = (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$\lim_{t\to 0} f(t) = e$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{7x-7}{\sqrt{3x+1}-2}\ ; a = 1}$$
$$f(x) = \frac{(7x-7)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$
$$= \frac{7(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{3(x-1)}$$
$$= \frac{7}{3}\left(\sqrt{3x+1}+2\right)$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{28}{3}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt{4x+5}-3}{2-\sqrt{3x+1}}\ ;\ a = 1}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{4x+5}-3\right)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}{\left(2-\sqrt{3x+1}\right)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}$$
$$= \frac{(4x+5-9)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}{(4-3x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}$$
$$= \frac{4(x-1)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}{-3(x-1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{4}{3}\left(\frac{4}{6}\right) = -\frac{8}{9}$$

## تدرب 2

**ملاحظة:** سنوجد مجموعة التعريف فيما يلي ثم نحسب النهايات عند أطرافها:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{lnx}{x}}$$
$$D_f = ]0, +\infty[$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\boldsymbol{f(x) = x - lnx}$$
$$D_f = ]0, +\infty[$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{lnx}{x}\right) = +\infty$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x} + lnx}$$
$$D_f = ]0, +\infty[$$

$$f(x)=\frac{1}{x}(1+xlnx)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty(1+0)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}-lnx}$$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x}{lnx}}$$

$$D_1:\ lnx=0$$

$$x=1$$

$$D_1=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

$$D_2=]0,+\infty[$$

$$D_f=D_1\cap D_2=]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{lnx}{x^2}}$$

$$D_1=]0,+\infty[$$

$$D_2=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

$$\Rightarrow D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$$\boldsymbol{f(x)=x(1-lnx)}$$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-xlnx)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}(lnx-1)}$$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{lnx}{x}-\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x-lnx}{x}}$$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{lnx}{x}=1$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x+1}{lnx}}$$

$$D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{lnx}+\frac{1}{lnx}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{xlnx}{x+1}}$$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{0}{1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xlnx}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=+\infty$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{xlnx}{x-1}}$$

$$D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xlnx}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xlnx}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=+\infty$$

$$\boldsymbol{f(x)=ln(2x+1)-ln(x)}$$

$$D_f=]0,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$$

$$f(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln(2)$$

$$\boldsymbol{f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}$$

$$D_f=]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$$

$$f(x)=\frac{\ln(1+sinx)}{x}\ ;a=0$$
$$f(x)=\frac{sinx}{x}.\frac{\ln(1+sinx)}{sinx}$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=1.1=1$$

لأن:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{\ln\left(\sqrt{x+1}\right)-ln\sqrt{2}}{x-1}\ ;a=1}$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$g(x)=\ln\left(\sqrt{x+1}\right)-\ln\left(\sqrt{2}\right)$$
$$g'(x)=\left(\frac{1}{2}\ln(x+1)-ln\sqrt{2}\right)'$$
$$=\frac{1}{2(x+1)}$$
$$g(1)=0$$
$$g'(1)=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{ln\sqrt{x}}{x}\ ;\ a=+\infty}$$
$$f(x)=\frac{\frac{1}{2}lnx}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$
$$\boldsymbol{f(x)=\frac{lnx}{\sqrt{x}}}$$
$$D_f=]0,+\infty[$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$$

## تدرب 3

$$\boldsymbol{f(x)=e^x-x^2}$$
$$D_f=]-\infty,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$
$$f(x)=x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-1\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$
$$\boldsymbol{f(x)=\frac{2e^x+1}{1+e^x}}$$

$$D_f=]-\infty,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(2+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}=2$$
$$\boldsymbol{f(x)=\ln(x)-e^x}$$
$$D_f=]0,+\infty[$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{lnx}{x}-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$$
$$\boldsymbol{f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}}$$
$$D_f=]-\infty,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=1$$
$$\boldsymbol{f(x)=(3-x)e^x}$$
$$D_f=]-\infty,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}3e^x-xe^x=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$
$$\boldsymbol{f(x)=\frac{e^x-1}{x-1}}$$
$$D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=+\infty$$
$$\boldsymbol{f(x)=\frac{e^x-1}{2x}}$$
$$D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right)}{2x}=+\infty$$
$$\boldsymbol{f(x)=\ln(e^x+2)}$$
$$D_f=]-\infty,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\ln(2)$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$
$$\boldsymbol{f(x)=2xe^{-x}}$$
$$D_f=]-\infty,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$$

$$f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$$

$$D_f = ]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2xe^x - e^x + 1}{e^x} = +\infty$$

$$f(x) = e^{2x} - x - 2$$

$$D_f = ]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x\left(\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$f(x) = x - \ln(e^x + 1) \; ; a = +\infty$$

$$= x - \ln\left(e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right.$$

$$= x - x - \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$

$$= -\ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

## اتمتة النهايات

1) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ ; $a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$$

2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ ; $a = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نخرج $x^2$ من المقام عامل مشترك،

وبالتالي:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

$; x \to -\infty$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}\right) = -1$$

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ; $a = 0$

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نضرب بمرافق البسط ونقسم عليه،

وبالتالي:

$$f(x) = \frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}$ ; $a = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نضرب بمرافق البسط ومرافق المقام،

وبالتالي:

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}}\right)$$

$$= \frac{(x^2+1-x^2)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}\right)}{(x^2-1-x^2+2)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$$ أيضاً حالة عدم تعيين

لإزالتها نخرج عامل مشترك، وبالتالي:

$$f(x) = \frac{|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$; \; x \to +\infty$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1+1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

5) $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ ; $a = 2$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

لإزالتها نقوم بتحليل البسط، وبالتالي:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = x^2+2x+4$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to2} f(x) = 4+4+4 = 12$$

6) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x-3}$ ; $a = 3$

$$\lim_{x\to3} f(x) = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

*لإزالتها نخرج x عامل مشترك من البسط، وبالتالي:*

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x(x-3)}{x-3} = x \Rightarrow \lim_{x\to3} f(x) = 3$$

7) $f(x)=\sqrt{9x^2+1}-3x \quad ; \quad a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

نهاية سعيدة، نضرب بالمرافق ونقسم عليه،

وبالتالي:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$
$$=\frac{9x^2+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{\infty}=0$$

8) $f(x)=\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+2}$ ; $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

نهاية سعيدة، نضرب بالمرافق ونقسم عليه،

وبالتالي:

$$f(x)$$
$$=\frac{\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+2}\right)\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+2}\right)}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+2}}$$
$$=\frac{3x^2+1-(3x^2+2)}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+2}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+2}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{1}{\infty}=0$$

9) $f(x)=\sqrt{5x+1}-x \quad ; \quad a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty-\infty$ حالة عدم تعيين

*نهاية جزئية، نخرج عامل مشترك، وبالتالي:*

$$f(x)=|x|\sqrt{5+\frac{1}{x}}-x \quad ; x\to+\infty$$
$$\Rightarrow f(x)=x\sqrt{5+\frac{1}{x}}-x=x\left(\sqrt{5+\frac{1}{x}}-1\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)\left(\underbrace{\sqrt{5}-1}_{\text{مقدار موجب}}\right)=+\infty$$

10) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=2$$

وعند التعويض بالنهاية نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2^{\frac{5}{2}}-2\left(2^{\frac{3}{2}}\right)=2^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{5}{2}}=0$$

11) غير موجودة لأن:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(x)}{x}=1$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin(-x)}{x}=-1$$

وبالتالي النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

فالنهاية غير موجودة.

12) عند الصفر من اليمين:

$$\lim_{x\to.0^+}\frac{1-2x-(1-3x)}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1$$

عند الصفر من اليسار:

$$\lim_{x\to.0^-}\frac{1-2x-(1-3x)}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1$$

إذن النهاية موجودة وقيمتها 1.

13) لدينا:

$$\frac{\sqrt{x+a^2}-a}{x}=\frac{x+a^2-a^2}{x\left(\sqrt{x+a^2}+a\right)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+a^2}+a}$$

وبأخذ النهاية عند الصفر:

$$\frac{1}{2a}=\frac{1}{4}\Rightarrow a=2$$

## حول التوابع اللوغارتمية والأسية

1) لجواب: $\boxed{c:\ 2lna+3lnb-lnc-6lnd}$،

التفسير:

$$\ln\left(\frac{a^2\times b^3}{c\times d^6}\right)=\ln(a^2.b^3)-\ln(c.d^6)$$
$$=\ln(a^2)+\ln(b^3)-\ln(c)$$
$$-\ln(d^6)$$
$$=2\ln(a)+3\ln(b)-\ln(c)$$
$$-6\ln(d)$$

2) الجواب: $\boxed{a:\ 3\ln(2)+2\ln(5)+ln3}$، التفسير:

$$\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\ln\left(\frac{5}{4}\right)+\cdots$$
$$+\ln\left(\frac{600}{599}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}.\dots.\frac{600}{599}\right)$$
$$= \ln(600)$$
$$= \ln(6 \times 10^2)$$
$$= \ln(6) + 2\ln(10)$$
$$= \ln(3 \times 2) + 2\ln(5 \times 2)$$
$$= \ln(3) + \ln(2) + 2\ln(5) + 2\ln(2)$$
$$= 3\ln(2) + 2\ln(5) + \ln(3)$$

3) الجواب: $\boxed{a: 2\ln|x|}$.

4) $n \leq 4$ بالتجريب.

5) $n \leq 4$ بالتجريب.

6) $n \leq 0$ بالتجريب.

7) لدينا:

$$\ln(x) = \ln(y+1) \; ; x > 0 \, , y > -1$$
$$x = y + 1 \Rightarrow y = x - 1$$

معادلة نصف مستقيم.. ولكن ليش؟؟!!! لأن مجموعة تعريف التابع اللوغاتمي $x > 0$ يعني بس عالمجال $]0, +\infty[$ فصار اسمو نصف مستقيم لأن ئلو بداية 😉

8) الجواب: $\boxed{b: \text{جزء من قطع مكافئ}}$ ، التفسير:

$$\ln(y) = 2\ln(x)$$
$$\Rightarrow E : ]0, +\infty[$$
$$y = x^2$$

جزء من قطع مكافئ.

9) الجواب: $\boxed{c: \text{جزء من قطع زائد}}$ ، التفسير:

$$\ln(y) + \ln(x) = 0$$
$$\Rightarrow E : ]0, +\infty[$$
$$\Rightarrow \ln(x.y) = 0 \Rightarrow x.y = 1$$

جزء من قطع زائد.

10) الجواب: $\boxed{a: \log(2) + \log(3) - 1}$ ، التفسير:

$$\log(0.6) = \log\left(\frac{6}{10}\right) = \log(6) - \log(10)$$
$$= \log(3 \times 2) - 1$$
$$= \log(3) + \log(2) - 1$$

11) الجواب: $\boxed{b: y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$ ، التفسير:

$$y = \log_a(x) \Rightarrow x = a^y$$
$$\ln(x) = \ln(a^y) \Rightarrow \ln(x) = y\ln(a)$$
$$\Rightarrow y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

12) لدينا:

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

13) حسب اوبيتال:

$$\frac{-\frac{1}{x}}{1} = -\frac{1}{x}$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

14) حسب المسيطر:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

15) حسب المسيطر:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x)}{\ln(x)} = 2$$

16) لدينا:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}\ln(x)}{x}$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}(0) = 0$$

17) لدينا:

$$f(x) = \frac{ln\sqrt{x}^2}{\sqrt{x}} = \frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2(0) = 0$$

18) لدينا:

$$f(x) = \ln(x)\,[\ln(x) - 1]$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

19) لدينا:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

20) لدينا:

$$f(x) = \frac{1 + xln(x)}{x}$$
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1+0}{0^+} = +\infty$$

21) لدينا:

$$f(x) = 3x - xln(x)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 - 0 = 0$$

22) لدينا:

طريقة (1):

$$f(x) = xln^2x = x(lnx)^2 = \left(\sqrt{x}\ln(x)\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x^2}\right)\right)^2 = \left(2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

طريقة (2):

$$xln^2x = \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}$$

حسب اوبيتال:

$$\frac{2\ln(x)\ .\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2\ln(x)}{-\frac{1}{x}}$$

نشتق مرة أخرى:

$$\frac{2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 2x$$

نعوض فنجد:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2(0) = 0$$

23) لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{x - xln(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

24) لدينا:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$$

25) نضرب ونقسم على $\sin(x)$:

$$f(x) = \frac{\frac{\sin(x)}{x}\ln(1+sin(x))}{\sin(x)}$$

مبرهنتين جوابهن واحد وحدة لوغارتمية ووحدة مثلثية:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

26) لدينا:

حسب اوبيتال:

$$\frac{\ln(sin(x))}{x-\frac{\pi}{2}} \to \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{1} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{0}{1} = 0$$

27) لدينا:

$$g(x) = xln\left(\sqrt{x+1}\right) - \ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$g(1) = 0$$

$$g'(x) = \ln\sqrt{x+1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}x$$

$$= \ln\left(\sqrt{x+1}\right) + \frac{x}{2(x+1)}$$

$$g'(1) = \ln\left(\sqrt{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{4} = \frac{2\ln(2)+1}{4}$$

حسب قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = ln\sqrt{2} + \frac{1}{4}$$

28) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\lambda x+1}{2x+3}\right) = 1$$

$$\ln\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 1$$

$$\frac{\lambda}{2} = e$$

$$\lambda = 2e$$

29) $\boldsymbol{f(x) = e^x - \ln(x)}$ ; $\boldsymbol{a = +\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$ حالة عدم تعيين

لإزالتها:

$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$= +\infty(+\infty - 0) = +\infty$$

30) $\boldsymbol{f(x) = x^2 - e^x}$ ; $\boldsymbol{a = +\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$ حالة عدم تعيين

لإزالتها:

$$f(x)=x^2\left(1-\frac{e^x}{x^2}\right)\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$=+\infty(1-\infty)=-\infty$$

31) $\boldsymbol{f(x)=x-\ln(e^x+1)}$ ; $\boldsymbol{a=+\infty}$

$$f(x)=x-\ln\left(e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)$$
$$=x-\left(\ln(e^x)+\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)$$
$$=x-x-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

32) $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}(e^x-1)}$ ; $\boldsymbol{a=0}$

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x}\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x)=1$$

33) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x-\ln(e^{\lambda x}+1)$$
$$2x-\ln\left(e^{\lambda x}(1+e^{-\lambda x})\right)$$
$$=2x-[\lambda x+\ln(1+e^{-\lambda x})]$$
$$=2x-\lambda x-\ln(1+e^{-\lambda x})$$

في حال كانت $\lambda>2$ ستكون النهاية $-\infty$

في حال كانت $0<\lambda<2$ ستكون النهاية $+\infty$

34) حسب المسيطر:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$

35) نسحب $x$ عامل مشترك:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}-\frac{e^x}{x}=-\infty$$

36) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-1\right)=+\infty$$

37) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$$

38) تساوي 1 (مبرهنة أسية مغيرين ديكورها)

39) حسب المسيطر:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{3}{4}$$

40) لدينا:

$$f(x)=2e^x-xe^x$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

41) حسب المسيطر:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty$$

42) نعوض:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ln(2)$$

43) لدينا:

$$f(x)=\frac{1}{e^{2x}}+2x-2=\frac{1+2xe^{2x}}{e^{2x}}-2$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1+0}{0^+}-2=+\infty$$

44) لدينا:

$$f(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

## حول تغيير المتحول

1) لدينا:

$$\frac{\lambda}{x}=t\Rightarrow x=\frac{\lambda}{t}$$
$$x\to+\infty\Rightarrow t\to0$$
$$\lim_{t\to0}\frac{\lambda\ln(1+t)}{t}=\lambda=2$$

2) لدينا:

$$\lim_{x\to2}\frac{\ln(3-x)}{-2(2-x)}=\lim_{x\to2}\frac{\ln(1+2-x)}{-2(2-x)}$$

بفرض $t=2-x$ بتلاقي انو صار عندك مبرهنة شهيرة.

$$t=2-x$$
$$x\to2\Rightarrow t\to0$$
$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{-2t}=-\frac{1}{2}$$

3) لدينا:

$$x\ln\left(1+\frac{x-1}{x+1}-1\right)=x\ln\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)$$

بفرض:

$$t=-\frac{2}{x+1}$$

$$x+1=-\frac{2}{t}\Rightarrow x=-\frac{2}{t}-1$$

نغير جهة السعي:

$$x\to+\infty\Rightarrow t\to 0$$

نعوض:

$$\lim_{t\to0}\left(-\frac{2}{t}-1\right)\ln(1+t)$$

$$=\lim_{t\to0}\left[\frac{-2\ln(1+t)}{t}-\ln(1+t)\right]=-2$$

4) لدينا:

$$\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(1+\frac{x+1}{x+2}-1\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$=\left(1+\frac{-1}{x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$$

بفرض:

$$t=-\frac{1}{x+2}$$

$$x+2=-\frac{1}{t}$$

$$x=-\frac{1}{t}-2$$

نغير جهة السعي:

$$x\to+\infty\Rightarrow t\to 0$$

نعوض:

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{-\frac{1}{t}-2}{2}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{2t}-1}$$

$$=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{2t}}(1+t)^{-1}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{2}}}(1+t)^{-1}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

5) لدينا:

$$(2-x)^{\frac{1}{x-1}}=(1+1-x)^{\frac{1}{-(1-x)}}$$

بفرض $t=1-x$ تكون جهة السعي $t\to 0$:

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

"ستعجلنا شوي بس متل يلي قبلها سهلة"

6) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}(3-2x)^{\frac{1}{2x-1}}=2^{+\infty}=+\infty$$

7) حسب اوبيتال:

$$\frac{2e^{2n}}{2(1+n)}=\frac{e^{2n}}{1+n}$$

اوبيتال مرة تانية:

$$2e^{2n}$$

نعوض:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$$

8) لدينا:

$$u_n=\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

"مبرهنة شهيرة حبيبات قلبي فرضو $t=\frac{1}{n}$ بتطلع"

9) لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2=e^2$$

## حول النهايات المثلثية

1) الجواب: $\boxed{a\ :\ 0}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to\pi}f(x)=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin\pi}{\pi}=\frac{0}{\pi}=0$$

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $\cos x$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

2) الجواب: $\boxed{b : 4}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)}{x}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x) = \frac{4\sin(4x)}{4x}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 4(1) = 4$$

و ذلك حسب قاعدة:

$$\boxed{\lim_{\heartsuit\to 0}\frac{\sin\heartsuit}{\heartsuit} = 1}$$

3) الجواب: $\boxed{b : 3}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(6x)}{2x}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x) = \frac{3\sin(6x)}{3\times 2x} = \frac{3\sin(6x)}{6x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3(1) = 3$$

4) الجواب: $\boxed{d : \frac{1}{2}}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{1-2\cos(2x)}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نستخدم الدستور:

$$\boxed{1-\cos(2x) = 2\sin^2(x)}$$
$$f(x) = \frac{x\sin x}{2\sin^2 x} = \frac{x}{2\sin x} = \frac{1}{2}.\frac{x}{\sin x}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

5) الجواب: $\boxed{c : 0}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{\sin x}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x) = \frac{-(1-\cos x)}{\sin x} = \frac{-\left(2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\sin x}$$

نقسم البسط و المقام على $x$ :

$$f(x) = \frac{\frac{-\left(2\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{-\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{-1(0)}{1} = 0$$

6) الجواب: $\boxed{a : -4}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(3x)-\cos x}{x\sin x}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نستخدم الدستور:

$$\cos(3x)-\cos x$$
$$= -2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right).\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)$$
$$= -2\sin\left(\frac{4x}{2}\right).\sin\left(\frac{2x}{2}\right)$$
$$= -2\sin(2x).\sin(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2\sin(2x).\sin(x)}{x\sin(x)} = \frac{-4\sin(2x)}{2x}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -4(1) = -4$$

7) الجواب: $\boxed{a : 1}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)+\sin(x)}{\sin(5x)-\sin(x)}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: باستخدام الدساتير:

$$f(x) = \frac{2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right).\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{5x-x}{2}\right).\cos\left(\frac{5x+x}{2}\right)}$$
$$= \frac{2\sin(2x).\cos(x)}{2\sin(2x).\cos(3x)}$$
$$= \frac{\cos(x)}{\cos(3x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{1} = 1$$

8) الجواب: $\boxed{b : 7}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(7x)}{x}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x) = \frac{7\tan(7x)}{7x}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 7(1) = 7$$

9) الجواب: $\boxed{d : 4}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+1}-1}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نضرب و نقسم على مرافق المقام:

$$f(x) = \frac{\sin(2x).\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$
$$= \frac{\sin(2x).\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}$$
$$= 2.\frac{\sin(2x)}{2x}.\left(\sqrt{x+1}+1\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 2(1)\left(\sqrt{0+1}+1\right) = 2(2) = 4$$

10) الجواب: $\boxed{b : 1}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\sin(x).\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 0(+\infty)$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\sin(x).\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\sin(x).\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}$$
$$=\sin(x).\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$$
$$\boxed{x\to 0^+ \Rightarrow |x|=x}$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{\sin(x)}{x}.\sqrt{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=1\left(\sqrt{0+1}\right)=1(1)=1$$

11) الجواب: $\boxed{a\ :\ 0}$ , التفسير:

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)=\frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin(x)}$$

نقسم البسط و المقام على $x$ :

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}}=\frac{\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}{\frac{\sin(x)}{x}}$$
$$=\frac{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\sin(x)}{x}}$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\sin(x)}{x}}\right)$$
$$=\frac{1(0)}{1}=0$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{x}\right)=\frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{1-\cos(2x)}{x}=\frac{2\sin^2(x)}{x}=2.\frac{\sin(x)}{x}.\sin(x)$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{x}\right)=2(1)(0)=0$$

و بالتالي حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)\le\lim_{x\to 0} f(x)$$
$$\le\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{x}\right)$$
$$\Rightarrow 0\le\lim_{x\to 0} f(x)\le 0$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

12) الجواب: $\boxed{c\ :\ 0}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x+1}\right)=?$$

حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$-1\le\sin(x)\le 1$$
$$\Rightarrow\frac{-1}{x+1}\le\frac{\sin(x)}{x+1}\le\frac{1}{x+1}$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x+1}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x+1}\right)$$
$$\le\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$
$$\Rightarrow 0\le\lim_{x\to+\infty} f(x)\le 0$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

13) الجواب: $\boxed{d\ :\ 1}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sin(x)}{x+5}\right)=?$$

حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$-1\le\sin(x)\le 1$$

نضرب ب $-1$ :

$$1\ge-\sin(x)\ge-1$$

نضيف $x$ :

$$x+1\ge x-\sin(x)\ge x-1$$

نقسم على $(x+5)$ :

$$\frac{x+1}{x+5}\ge\frac{x-\sin(x)}{x+5}\ge\frac{x-1}{x+5}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+5}\right)\ge\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sin(x)}{x+5}\right)$$
$$\ge\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+5}\right)$$
$$1\ge\lim_{x\to+\infty} f(x)\ge 1$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

14) الجواب: $\boxed{a\ :\ 3}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-\sin(x)}{\sqrt{1+x^2}}\right)=?$$

حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$-1\le\sin(x)\le 1$$

نضرب ب $-1$ :

$$1\ge-\sin(x)\ge-1$$

نضيف $3x$ :

$$3x+1\ge 3x-\sin(x)\ge 3x-1$$

نقسم على $\sqrt{1+x^2}$ :

$$\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{3x-\sin(x)}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\boxed{\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}} \geq f(x) \geq \frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{+\infty}{+\infty}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} = \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow |x| = x$$

$$\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x.\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{3}{1} = 3$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{+\infty}{+\infty}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{3x-1}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} = \frac{3x-1}{|x|.\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$x \to +\infty \Rightarrow |x| = x$$

$$\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{3x-1}{x.\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x.\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right) = \frac{3}{1}$$

$$= 3$$

و بالتالي فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \geq \lim_{x\to+\infty} f(x) \geq \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$3 \geq \lim_{x\to+\infty} f(x) \geq 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

15) الجواب: $\boxed{b : +\infty}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2\sin(x)}{5}\right) = ?$$

- $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$

نضرب بـ 2 :

$$0 \leq 2\sin^2(x) \leq 2$$

نقسم على 5 :

$$0 \leq \frac{2\sin^2(x)}{5} \leq \frac{2}{5}$$

نضيف $x$ :

$$x \leq x+\frac{2\sin^2(x)}{5} \leq \frac{2}{5}+x$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x) \leq \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2\sin(x)}{5}\right)$$

$$\leq \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}+x\right)$$

$$+\infty \leq \lim_{x\to+\infty} f(x) \leq +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

16) الجواب: $\boxed{a : 0}$ , التفسير:

- $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)}\right) = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2\sin^2(x)}{\sin(x)}\right)$

$$= \lim_{x\to0}(2\sin(x)) = 0$$

- $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2} = \frac{-(1-\cos(x))}{x^2}+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\times\frac{x^2}{4}}+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{-2}{4}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{-2}{4}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\right) = \frac{-2}{4}(1)(1)+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{-2}{4}+\frac{1}{2} = 0$$

و بالتالي حسب مبرهنة الإحاطة فإنّ:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)}\right) \leq \lim_{x\to0} f(x)$$

$$\leq \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x\to0} f(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x) = 0$$

17) لدينا:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq 1$$

$$-(x-1)^2 \leq f(x) \leq (x-1)^2$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

18) الجواب: $\boxed{a\ :\ a}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x) = \frac{a\sin(ax)}{ax}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = a(1) = a$$

19) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{a}{b}}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(ax)}{bx}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم التعيين:

$$f(x) = \frac{a\sin(ax)}{b(ax)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{a}{b}(1) = \frac{a}{b}$$

20) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{a}{b}}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(ax)}{bx}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x) = \frac{a\tan(ax)}{b(ax)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{a}{b}(1) = \frac{a}{b}$$

21) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{a}{b}}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x) = \frac{ax.\sin(ax).bx}{ax.bx.\sin(bx)} = \frac{a.\sin(ax).bx}{ax.b.\sin(bx)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{a.\sin(ax).bx}{ax.b.\sin(bx)}\right) = \frac{a}{b}$$

22) الجواب: $\boxed{d\ :\ \frac{a}{b}}$ , التفسير:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(ax)}{\sin(bx)}\right) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$f(x) = \frac{ax.\tan(ax).bx}{ax.bx.\sin(bx)}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{a}{b}$$

23) الجواب: $\boxed{a\ :\ \begin{cases} d_1: y = x+2 \\ d_2: y = x-2 \end{cases}}$ , التفسير:

$$-1 \le \sin(x) \le 1 \qquad \times 2$$
$$-2 \le 2\sin(x) \le 2 \qquad +x$$
$$x-2 \le x+2\sin(x) \le x+2$$

و بالتالي:

$$d_1: y = x+2 \ \&\ d_2: y = x-2$$

24) الجواب: $\boxed{a\ :\ g(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ , التفسير:

يجب أن تكون:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

لنثبت ذلك:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = +\infty - \infty$$

حالة عدم تعيين: نضرب بالمرافق و نقسم عليه:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) = 0$$

و بالتالي فإنّ:

$$g(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

25) الجواب: $\boxed{c\ :\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \le f(x) \le \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}$ , التفسير:

$$f(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

نضرب بالمرافق و نقسم عليه:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

نأخذ المقام:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x} \le \sqrt{x+1}+\sqrt{x}$$
$$\le \sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}$$
$$2\sqrt{x} \le \sqrt{x+1}+\sqrt{x} \le 2\sqrt{1+x}$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \le \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

26) الجواب: $\boxed{b\ :\ (\sin(x)+2)^2+2}$ , التفسير:

$$f(x) = \sin^2(x) + 4\sin(x) + 6$$
$$(\sin(x)+2)^2 + 2$$
$$= \sin^2(x) + 4\sin(x) + 4 + 2$$
$$= \sin^2(x) + 4\sin(x) + 6$$
$$= f(x)$$

27) الجواب: $\boxed{a\ :\ 3 \le f(x) \le 11}$ , التفسير:

$$-1 \le \sin(x) \le 1$$

نضيف 2 :

$$1 \le \sin(x)+2 \le 3$$

نربّع:

$$1 \le (\sin(x)+2)^2 \le 9$$

نضيف 2 :

$$3 \le (\sin(x)+2)^2 + 2 \le 11$$
$$3 \le f(x) \le 11$$

28) الجواب: $\boxed{b \ : \ +\infty}$ , التفسير:

$$g(x) = x^2 . f(x)$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2) \times \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$= (+\infty)(a) = +\infty$$

حيثُ أنّ $3 \le a \le 11$ و ذلك من السؤال السابق:

$$3 \le f(x) \le 11$$

و بالتالي فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\boxed{(+\infty)\left(\text{عدد}\right) = +\infty}$$

29) الجواب: $\boxed{a \ : \ \sin(x^2-1)}$ , التفسير:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sin(x^2-1)$$

30) الجواب: $\boxed{a \ : \ \frac{1}{2}\sin h}$ , التفسير:

$$S_{OAM} = \frac{OA \times MM'}{2} = \frac{1}{2} MM' = \frac{1}{2}\sin h$$

31) الجواب: $\boxed{c \ : \ \frac{1}{2}\tan h}$ , التفسير:

$$S_{OAT} = \frac{OA \times AT}{2} = \frac{1}{2} AT = \frac{1}{2}\tan h$$

32) الجواب: $\boxed{b \ : \ cosh \le \frac{sinh}{h} \le 1}$ , التفسير:

لدينا:

$$\sin h \le h \quad , \quad h > 0$$
$$\Rightarrow \frac{\sin h}{h} \le 1 \quad \ldots . (1)$$

و لدينا:

$$h \le \tan h \Rightarrow h \le \frac{\sin h}{\cos h} \qquad \times \frac{\cos h}{h}$$
$$\cos h \le \frac{\sin h}{h} \quad \ldots . . (2)$$

إذاً من (1) و (2) نجد:

$$cosh \le \frac{sinh}{h} \le 1$$

33) الجواب $a$:

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$$

## الجلسة الرابعة

### تدرب 6

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$$
$$D_f = ]-\infty, +\infty[$$

**1- لإيجاد الأعداد:**

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^3+1}{x^2+1}}{x} = \frac{x^3+1}{x^3+x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a$$
$$f(x) - x = \frac{x^3+1-x^3-x}{x^2+1}$$
$$= \frac{1-x}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0 = b$$

**2- بفرض أن $y_\Delta = ax + b$ فإن $y_\Delta = x$**

**3- الوضع النسبي:**

$$f(x) - x = \frac{1-x}{x^2+1}$$
$$f(x) - x = 0$$
$$\frac{1-x}{x^2+1} = 0$$
$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1-x}{x^2+1}$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| الوضع | $c$ تحت $\Delta$ \| | $c$ فوق $\Delta$ | |

### تدرب 7

$$f(x) = \frac{2x^2 + cos^2 x}{x}$$

1- نعيد صياغة التابع:

$$f(x) = 2x + \frac{\cos^2 x}{x}$$

نفرض $y_\Delta = 2x$.

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\cos^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \cos^2 \infty \Rightarrow$$ إحاطة

$$0 \le \cos^2 x \le 1$$

نقسم على $x < 0$ في جوار $+\infty$:

$$0 \le \frac{\cos^2 x}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$\lim 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos^2 x}{x} = 0$$

فإن $\Delta$ مقارب مائل للتابع.

2- لدينا:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\cos^2 x}{x}$$

البسط موجب دوماً والمقام سالب دوماً على مجموعة التعريف فإن $C$ تحت $\Delta$.

## تدرب 8

$$f(x) = \sqrt{4x^2+4x+5}$$

نكتب مضمون التابع بالشكل القانوني:

$$4\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)$$

$$= 4\left(x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)$$

$$= 4\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)$$

$$= (2x+1)^2+4$$

نشكل التابع:

$$f(x) - \sqrt{(2x+1)^2}$$

$$= \sqrt{(2x+1)^2+4} - \sqrt{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{(2x+1)^2+4} - \sqrt{(2x+1)^2}\right)\left(\sqrt{(2x+1)^2+4} + \sqrt{(2x}}{\sqrt{(2x+1)^2+4} + \sqrt{(2x+1)^2}}$$

$$= \frac{(2x+1)^2+4-(2x+1)^2}{\sqrt{(2x+1)^2+4} + \sqrt{(2x+1)^2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{(2x+1)^2+4} + \sqrt{(2x+1)^2}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \sqrt{(2x+1)^2} = 0$$

وبالتالي فإن:

$$y_\Delta = |2x+1|$$

في جوار $+\infty$:

$$y_{d_1} = 2x+1$$

في جوار $-\infty$:

$$y_{d_2} = -2x-1$$

لدراسة الوضع النسبي نجد:

$$f(x) - y_\Delta$$

$$= \frac{4}{\sqrt{(2x+1)^2+4} + \sqrt{(2x+1)^2}} > 0$$

$C$ فوق $d_1$ و $d_2$.

## الجلسة الخامسة

## حول المقارب المائل

1) **الجواب:**

$$f(x) = 2x+1+\underbrace{\sqrt{x^2+4x+5}}_{\text{بالإتمام إلى مربع كامل}}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x+1+\sqrt{x^2+4x+4+1}$$

$$= 2x+1+\sqrt{(x+2)^2+1}$$

$$\Rightarrow \Delta: y = 2x+1+\sqrt{(x+2)^2}$$

$-\infty$ بجوار $\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = -x-2$

$$\Rightarrow \Delta: y = 2x+1-x-2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta: y = x-1}$$

2) **الجواب:**

$$f(x) = \sqrt{4x^2+kx+5}$$

حيثُ $y = 2x+4$ مقارب مائل لـ $C_f$.

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{4\left(x^2+\frac{k}{4}x+\frac{5}{4}\right)}}_{\text{بالإتمام إلى مربع كامل}}$$

$$= 2\sqrt{x^2+\frac{k}{4}x+\frac{k^2}{64}-\frac{k^2}{64}+\frac{5}{4}}$$

$$= 2\sqrt{\left(x+\frac{k}{8}\right)^2+\frac{80-k^2}{64}}$$

$$\Rightarrow \Delta: y = 2\sqrt{\left(x+\frac{k}{8}\right)^2}$$

$+\infty$ بجوار $\Rightarrow \boxed{\Delta: y = 2\left(x+\frac{k}{8}\right) = 2x+\frac{k}{4}}$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$\frac{k}{4} = 4 \Rightarrow k = 16$$

3) $f(x) = x + k + \frac{x^2+3}{x-1}$

بالقسمة الإقليديّة لـ $(x^2+3)$ على $(x-1)$ نجد:

$$f(x) = x + k + x + 1 + \frac{4}{x-1}$$
$$= 2x + 1 + k + \frac{4}{x-1}$$

عندئذٍ نجد:

$$\Delta: y = 2x + 1 + k + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x-1}\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \Delta: y = 2x + 1 + k$$

ولدينا $y = 2x + 1$ ، بالمقارنة نجد:

$$\boxed{k = 0}$$

4) $f(x) = x + \frac{x^2+kx}{x-1}$

$$\Delta: y = 2x + 1$$

بالقسمة الإقليديّة لـ $(x^2+kx)$ على $(x-1)$ نجد:

$$f(x) = x + x + k + 1 + \frac{k+1}{x-1}$$
$$\Rightarrow f(x) = 2x + 1 + k + \frac{k+1}{x-1}$$
$$\Rightarrow \Delta: y = 2x + 1 + k + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{k+1}{x-1}\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \Delta: y = 2x + 1 + k$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$\boxed{k = 0}$$

5) **الجواب:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(y_\Delta) = \lim_{x\to-\infty}(3x-1)$$
$$= -\infty$$

" نهاية التابع من نهاية مقاربه في نفس الجوار "

6) **الجواب:**

بما أنّ $y = 4x - 5$ مقارب مائل لـ $C_f$ بجوار الـ $+\infty$ فإنّ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = a = 4$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2}(2x+1)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)\left(\frac{2x+1}{x}\right)\right)$$
$$= (4)(2) = 8$$

7) $f$ تابع فردي، وبالتالي:

$$f(-x) = -f(x)$$

$y = x - 1$ مقارب مائل، وبالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = a = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)+1}{x+f(x)+f(-x)}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)+1}{x+f(x)-f(x)}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x}\right) = 1+0 = 1$$

8) **الجواب:**

$f$ تابع زوجي $\Leftarrow$ $C_f$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب $yy'$ و $f(-x) = f(x)$ أي نبدّل كل $x$ بـ $-x$ فنحصل على:

$$y = 2(-x) \Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

9) **الجواب:**

$f$ تابع فردي $\Leftarrow$ $C_f$ متناظر بالنسبة للمبدأ و $f(-x) = -f(x)$ أي نبدّل كل $x$ بـ $-x$ ونبدّل كل $y$ بـ $-y$ فنحصل على:

$$-y = 2(-x) + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x + 1}$$

10) **الجواب:** التابع $f$ لا يملك مقاربات أفقيّة. " قد يملك مقارباً أفقيّاً في جوار الـ $+\infty$ "

11) **الجواب:**

$$f(x) = -\frac{x}{3} + \ln\left(\left|\frac{x-1}{3x}\right|\right)$$
$$\Delta: y = -\frac{x}{3} + \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\left|\frac{x-1}{3x}\right|\right)$$
$$\Rightarrow \Delta: y = -\frac{x}{3} + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{\Delta: y = -\frac{1}{3}x - \ln(3)}$$

12) **الجواب:**

$$f(x) = \ln(e^{\alpha x} + e^x + 1)$$
$$= \ln\left(e^{\alpha x}\left[1 + \frac{1}{e^\alpha} + \frac{1}{e^{\alpha x}}\right]\right)$$
$$= \ln(e^{\alpha x}) + \ln\left(1 + \frac{1}{e^\alpha} + \frac{1}{e^{\alpha x}}\right)$$
$$= \alpha x + \ln\left(1 + \frac{1}{e^\alpha} + \frac{1}{e^{\alpha x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=a=2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{e^{\alpha}}+\frac{1}{e^{\alpha x}}\right)}{x}\right)=2$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=2}$$

13) **الجواب:**

$$f(x)=|3x-1|+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$$

$$\Delta: y=|3x-1|+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta: y=|3x-1|+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta: y=|3x-1|+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}\right)$$

عندما $x\to+\infty$ نجد:

$$\Delta_1: y=3x-1+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta_1: y=3x-1+\frac{1}{1}=3x$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_1: y=3x}$$

وعندما $x\to-\infty$ نجد:

$$\Delta_2: y=-3x+1+\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta_2: y=-3x+1-1=-3x$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_2: y=-3x}$$

المقاربان يتقاطعان في النقطة التي إحداثيّاتها $(0\,,0)$

14) **الجواب:**

$$f(x)=5-4x+\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

$$\Delta: y=5-4x$$

$C_f$ فوق مقاربه عندما $f(x)-y_{\Delta}>0$ أي

عندما:

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)>0$$

شرط الحل:

$$\frac{x+1}{x-4}>0 \Rightarrow E=]-\infty\,,-1[\cup]4\,,+\infty[$$

يكون $\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)>0$ عندما $\frac{x+1}{x-4}>1$ وبالتالي:

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-4}-1>0 \Rightarrow \frac{x+1-x+4}{x-4}>0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{x-4}>0$$

ندرس الإشارة:

| | 4 | |
|---|---|---|
| 5 | $+\ +\ +\ +\ +\ +$ | |
| $x-4$ | $-\ -\ -\ \ 0\ \ +\ +\ +$ | |
| | غير محقّقة محقّقة | |

وبالتالي:

$$\Rightarrow x\in]4\,,+\infty[$$

نقاطع مع شرط الحل $\Leftarrow$ $C_f$ يقع فوق مقاربه على المجال:

$$\boxed{]4\,,+\infty[}$$

15) **الجواب:**

$$f(x)=-3x+\sqrt{4x^2+1}$$

$$y=0 \Rightarrow 0=-3x+\sqrt{4x^2+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4x^2+1}=3x \overset{\text{نربّع}}{\Longrightarrow} 4x^2+1=9x^2$$

$$\Rightarrow 5x^2=1 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=+\frac{1}{\sqrt{5}} & \text{مقبول} \\ x=-\frac{1}{\sqrt{5}} & \text{مرفوض} \end{cases}}$$

حيثُ أنّ شرط الحل هو:

$$3x>0 \Rightarrow x>0$$

16) **الجواب:**

$$f(x)=2x-1+|x-3|$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2x-1+x-3 & : x>3 \\ 2x-1-x+3 & : x\le 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 3x-4 & : x>3 \\ x+2 & : x\le 3 \end{cases}$$

نقاط تقاطع التابع $f$ مع محور الفواصل تعني $y=0$ وبالتالي:

$$\begin{cases} 3x-4=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{4}{3}} \\ x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2} \end{cases}$$

17) **الجواب:**

$$f(x)=x+\sqrt{|4x^2+1|}$$

$$\Rightarrow \Delta: y=x+\sqrt{|4x^2|}$$

$$\Rightarrow \Delta: y=x+|2x|$$

في جوار الـ $+\infty$ :

$$\Delta: y=x+2x=3x \Rightarrow \boxed{\Delta: y=3x}$$

18) **الجواب:**

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$$
$$\Delta: y = x + \sqrt{|4x^2|}$$
$$\Rightarrow \Delta: y = x + |2x|$$

في جوار الـ $-\infty$ :

$$\Delta: y = x - 2x = -x \Rightarrow \boxed{\Delta: y = -x}$$

19) **الجواب:**

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$$

نفك القيمة المطلقة:

$$4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = +\frac{1}{2} \end{cases}$$

ندرس الإشارة:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert 4x^2 - 1\rvert$ | $+++$ | $0$ | $---$ | $0$ | $+++$ | | |
| | $(4x^2 - 1)$ | | $(1 - 4x^2)$ | | $(4x^2 - 1)$ | | |

وبالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{4x^2 - 1} \ ; \ x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[ \\ x + \sqrt{1 - 4x^2} \ ; \ x \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

المقارب بجوار الـ $+\infty$ وبالتالي:

$$\Delta: y = x + \sqrt{4x^2} = x + |2x|$$

بجوار $+\infty$ : $|2x| = 2x$

$$\Rightarrow \Delta: y = x + 2x = 3x$$

وبالتالي $y = 3x$ مقارب مائل بجوار الـ $+\infty$ عند المجال:

$$\boxed{\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[}$$

20) **الجواب:**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x\right) = \frac{15}{8}$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + x + 1} - \left(\sqrt{2}x + \frac{15}{8}\right)\right) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\Delta: y = \sqrt{2}x + \frac{15}{8}}$$

21) لدينا:

$$f(x) = 2x + \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$
$$\Rightarrow y_\Delta = 2x + \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}}\right)}_{u(x)}$$
$$u(x) = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2\left(4 + \frac{1}{x^2}\right)}}$$
$$= \frac{2x}{-x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} u(x) = \frac{2}{-\sqrt{4 + 0}} = \frac{2}{-2} = -1$$
$$\boxed{\Rightarrow c: \ y_\Delta = 2x - 1}$$

22) لدينا:

$$y = ax + b = -x - 1$$
$$\Rightarrow a = -1 \ , \ b = -1$$
$$\Rightarrow \boxed{b: \ a = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = -1}$$

23) $y_\Delta$ مقارب:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} y_\Delta = +\infty$$

24) لدينا:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\left(\frac{3x^2 + 1}{x^3 + x}\right) . f(x)\right) =$$
$$\lim_{x \to -\infty} \left(\left(\frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1}\right) . \underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{a=-1}\right) = 3(-1) = -3$$
$$\Rightarrow \boxed{b: -3}$$

25) $x = 2$ مقارب شاقولي أي أن $x = 2$ تعدم المقام

وبالتالي:

$$2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$y = 3$ مقارب أفقي أي أنّ:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$
$$\Rightarrow \frac{-a}{1} = 3 \Rightarrow a = -3$$

وبالتالي الثنائيّة: $(-3, 2)$

26) القسمة الإقليديّة نجد:

$$f(x) = -2x + 3 + \frac{1}{1 - x}$$

وبالتالي $\boxed{d: \ y_\Delta = 3 - 2x}$ مقارب مائل لـ $C$

27) لدينا:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2mx + 4}$$

بالإتمام إلى مربّع كامل نجد:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2mx + m^2 - m^2 + 4}$$

$= \sqrt{(x-m)^2 - m^2 + x}$

$\Rightarrow y_\Delta = |x-m| = x-m \ : \ x \to +\infty$

$y_\Delta = x+1 \Rightarrow -m = +1 \Rightarrow \boxed{m=-1}$

28) بالقسمة الاقليدية نجد:

$$f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-1} = x-3+\frac{1}{x-1}$$

$\Rightarrow y_\Delta = x-3$

29) بالقسمة الاقليدية نجد:

$$f(x) = \frac{x^2-3mx+1}{x-1}$$

$$= x-3m+1+\frac{-3m+2}{x-1}$$

$\Rightarrow y_\Delta = x-3m+1 = x-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -3m+1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow -3m = -1-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \boxed{a \ : \ m = \frac{1}{2}}$

30) لدينا:

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9x+1}{4x+5}}$$

$$\Rightarrow y_\Delta = \frac{1}{2}x + \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9x+1}{4x+5}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x + 0 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2}x+1$$

$\Rightarrow \boxed{a \ : \ y_\Delta = \frac{1}{2}x+1}$

31) لدينا التابع:

$$f(x) = 2x-1+\sqrt{x^2+4x}$$

بالإتمام إلى مربّع كامل نجد:

$$f(x) = 2x-1+\sqrt{(x+2)^2-4}$$

$y_\Delta = 2x-1+x+2 \ : \ x \to +\infty$

$\Rightarrow \boxed{b \ : \ y_\Delta = 3x+1}$

32) $\lim_{x\to 0} f(x) = 5+\infty = +\infty$

وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي في جوار الـ $+\infty$

33) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-1+\underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{m=3}\right)$$

$$= -1+3 = +2$$

34) $y=2$ مقارب أفقي:

$$f(x) = \frac{x+b}{cx+d} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

$\Rightarrow \frac{1}{c} = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

$x=-1$ مقارب شاقولي، أي أن $x=-1$ تعدم المقام:

$\frac{1}{2}(-1)+d = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \Rightarrow \frac{0+b}{0+d} = 0$

$\Rightarrow b = d = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{c \ : \ b+d+c = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}}$

35) $y_\Delta = x-3$

$$f(x) = x+1+\lambda\, x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta) = 0$

$f(x)-y_\Delta = 4+\lambda\, x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(4+\lambda\, x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$

$\Rightarrow 4+\lambda \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = 0$

$\Rightarrow \ 4+\lambda\,(1) = 0 \Rightarrow \boxed{b \ : \ \lambda = -4}$

36) $c \ : \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} y_\Delta = +\infty$

## الجلسة السادسة

**الأسئلة الغير موجود حلها اكتبها بيدك**

**تدرب 11**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{2x} & : x \neq 0 \\ 2A-\dfrac{1}{2} & : x = 0 \end{cases}$$

**نوجد النهاية:**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

لأن $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

نعوض في شرط الاستمرار:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

$$2A-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

## تدرب 12

-1

$$f(x) = \frac{lnx\left(1 - \frac{1}{lnx}\right)}{lnx\left(1 + \frac{2}{lnx}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{lnx}}{1 + \frac{2}{lnx}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

$y = 1$ مقارب أفي في جوار $+\infty$

-2 نحدد المركز $l = \frac{1.01+0.99}{2} = 1$

نحدد نصف القطر :

$$\varepsilon = b - l$$

$$\varepsilon = 1.01 - 1 = 0.01 = \frac{1}{100}$$

نعوض في القانون :

$$|u_n - l| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{lnx - 1}{lnx + 2} - 1\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{-3}{lnx + 2}\right| < \frac{1}{100}$$

و لأن $x \to +\infty$ فإن $lnx + 2 > 0$

$$\frac{3}{lnx + 2} < \frac{1}{100}$$

$$lnx + 2 > 300$$

$$lnx > 298$$

$$x > e^{298}$$

فنختار $A = e^{298}$ أو أي عدد حقيقي أكبر منه

## تدرب 13

-1

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

-2 نضع:

$$f(x) > 10^3$$

$$\frac{5x - 1}{(x - 1)^2} > 10^3$$

بما أن $x \to 1$ فإن $5x - 1 = A \approx 4$

$$\frac{A}{(x - 1)^2} > 10^3$$

$$(x - 1)^2 < \frac{A}{10^3}$$

نختار $a = 3.6$ ( قريب من 4 و يمكن جذره)

$$(x - 1)^2 < \frac{3.6}{10^3}$$

$$(x - 1)^2 < \frac{36}{10^4}$$

نجذر:

$$|x - 1| < \frac{6}{10}$$

$$|x - 1| < 0.06$$

إذن $\alpha = 0.06$

و إذا كان المطلوب مجالاً:

$$-0.06 < x - 1 < 0.06$$

$$1 - 0.06 < x < 1 + 0.06$$

$$0.94 < x < 1.06$$

$$I = ]0.94, 1.06[$$

## تدرب 14

$$f(x) = 2x + E(x) \; ; x \in [0, 3[$$

-1 لكتابة التابع بصيغة مستقلة:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \; ; x \in [0,1[ \\ 2x + 1 \; ; x \in [1,2[ \\ 2x + 2 \; ; x \in [2,3[ \end{cases}$$

-2 لدراسة الاستمرار:

$$f(1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$$

التابع غير مستمر على $[0,3[$.

-3 رسوم بإيدك أحلا 😊

-4 لدراسة النهاية:

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

نضيف $2x$:

$$3x - 1 < 2x + E(x) \leq 3x$$

نقسم على $x^2 + 1 > 0$:

$$\frac{3x - 1}{x^2 + 1} < \frac{f(x)}{x^2 + 1} \leq \frac{3x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x^2 + 1} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=0$$

## الجلسة الثامنة

1) **الجواب:**

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{k\,x} & : \ 0\le x\le 2\\ x & : \ x>2\end{cases}$$

$f$ مستمر على المجال $I=[0,+\infty[$ أي مستمر

عند نقاط الانقطاع ومنه مستمر عند $a=2$

وبالتالي:

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$$
$$f(2)=\sqrt{2k}\ ,\lim_{x\to2}f(x)=2$$
$$\sqrt{2k}=2\overset{\text{نربّع}}{\Longrightarrow}2k=4\Longrightarrow k=2$$

2) **الجواب:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{\sin(x)} & : \ x>0\\ 2x-m & : \ x\le 0\end{cases}$$

$f$ مستمر عند الصفر، أي أنّ:

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$$
$$f(0)=2(0)-m=-m$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x(x-2)}{\sin(x)}\right)=(1)(0-2)$$
$$=-2$$
$$\Longrightarrow\ -m=-2\Longrightarrow m=2$$

3) **الجواب:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(ax)}{x\tan(ax)} & : x<0\\ \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{b+x}-\sqrt{b}\right) & : \ x>0\\ \dfrac{1}{6} & : \ x=0\end{cases}$$

$f$ مستمر عند الصفر أي أنّ:

$$f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)$$

$$f(0)=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{b}}{0}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

نضرب بالمرافق:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{b+x}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b+x}+\sqrt{b}\right)}{x\left(\sqrt{b+x}+\sqrt{b}\right)}$$
$$=\frac{b+x-b}{x\left(\sqrt{b+x}+\sqrt{b}\right)}=\frac{1}{\sqrt{b+x}+\sqrt{b}}$$

$$\Longrightarrow\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{b}}=\frac{1}{2\sqrt{b}}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

نضرب بالمرافق:

$$f(x)=\frac{(1-\cos(ax))(1+\cos(ax))}{x\left(\frac{\sin(ax)}{\cos(ax)}\right)(1+\cos(ax))}$$
$$=\frac{1-\cos^2(ax)}{x\,.\sin(ax)\left(\frac{1}{\cos(ax)}+1\right)}$$
$$=\frac{a\,.\sin^2(ax)}{ax\,.\sin(ax)\left(\frac{1}{\cos(ax)}+1\right)}$$
$$=\frac{a\,.\sin(ax)}{x}\frac{1}{\frac{1}{\cos(ax)}+1}$$
$$\Longrightarrow\lim_{x\to0^-}f(x)=\frac{a(1)}{1+1}=\frac{a}{2}$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{6}=\frac{a}{2}=\frac{1}{2\sqrt{b}}\Longrightarrow a=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$
$$2\sqrt{b}=6\Longrightarrow\sqrt{b}=3\Longrightarrow b=9$$

ومنه:

$$b=\frac{1}{a^2}$$

4) **الجواب:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x)-1}{\sqrt{x^2+1}-1} & : \ x\neq0\\ m & : \ x=0\end{cases}$$

$f$ مستمر، أي مستمر عند الصفر، وبالتالي:

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$$
$$f(0)=m$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

نضرب بالمرافق:

$$f(x)=\frac{(\cos(x)-1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$
$$=\frac{(\cos(x)-1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}\times\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}$$
$$=\frac{(\cos^2(x)-1)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2(\cos(x)+1)}$$
$$=-\frac{\sin^2(x)}{x^2}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\cos(x)+1}\right)$$
$$\Longrightarrow\lim_{x\to0}f(x)=-(1)^2\,.\frac{1+1}{1+1}=-1$$
$$\Longrightarrow m=-1$$

5) **الجواب:**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(f(x)-1)}{\sqrt{x}-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(f(x)-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(f(x)-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-1}{x-1}(\sqrt{x}+1)\right)$$
$$=f'(1)(\sqrt{1}+1)=2\sqrt{3}(2)=4\sqrt{3}$$

6) **الجواب:**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{1-1}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين، نفرض:

$$f(x)=\tan(x)\ ,f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$
$$f'(x)=1+\tan^2(x)\ ,\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+1^2=2$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right)=2$$

7) **الجواب:**

$$f(x)=\big(x+mE(x)\big)^2\ :I=[-2\ ,0[$$

نكتب $f$ بعبارة لا تحوي $E(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\big(x+m(-2)\big)^2 & :x\in[-2\ ,-1[\\ \big(x+m(-1)\big)^2 & :\ x\in[-1\ ,0[\end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x-2m)^2 & :x\in[-2\ ,-1[\\ (x-m)^2 & :\ x\in[-1\ ,0[\end{cases}$$

$f$ مستمر عند $a=-1$ أي أنّ:

$$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)$$
$$f(-1)=(-1-m)^2$$
$$\lim_{x\to-1}f(x)=(-1-2m)^2$$

وبالتالي:

$$(-1-m)^2=(-1-2m)^2$$
$$\Rightarrow 1+2m+m^2=1+4m+4m^2$$
$$\Rightarrow 3m^2+2m=0$$
$$\Rightarrow m(3m+2)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}m=0\ \text{مرفوض}\ ;m\in\mathbb{R}^*\\ 3m+2=0\Rightarrow m=-\frac{2}{3}\ \text{مقبول}\end{cases}$$

8) **الجواب:**

$$g(x)=x\sqrt{x}\ ,\ h(x)=x|x|$$
$$f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$$

$g$ اشتقاقي عند الصفر (تابع جذري مضروب بمضمونه)

$h$ اشتقاقي عند الصفر (تابع قيمة مطلقة مضروب بمضمونه)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x}{x^2+1} & :\ x>0\\ \frac{x^2-x}{x^2+1} & :\ x\le 0\end{cases}$$

$f$ اشتقاقي عند الصفر أي أنّ:

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$$
$$f(0)=\frac{0-0}{0+1}=0$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=\frac{0+0}{0+1}=0$$

وبالتالي $f$ اشتقاقي عند الصفر.

ومنه فإنّ التوابع $f\ ,g\ ,h$ اشتقاقيّة عند الصفر.

9) **الجواب:**

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين، نفرض:

$$f(x)=\cos(x)\ \ ,\ f(0)=1$$
$$\Rightarrow f'(x)=-\sin(x)\ \ ,\ \ f'(0)=0$$
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=f'(0)$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)=0$$

10) **الجواب:**

$f$ تابع اشتقاقي على المجال $I$ $\Longleftarrow$ يقبل مماساً عند كل نقطة من نقاطه.

11) الجواب: $\boxed{b:5}$ , التفسير:

$$f(2)=\frac{2(2)+1}{2-1}=\frac{5}{1}=5$$

12) الجواب: $\boxed{a\ :\ 2\sqrt{3}}$ , التفسير:

$$f(0)=2\sqrt{3}$$

13) الجواب: $\boxed{a\ :\ \text{نعم}}$ , التفسير:

حتى يكون مستمر عند $x=2$ يجب أنّ يتحقق:

$$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$$

- $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\frac{(2)^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$

حالة عدم تعيين:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$
$$=f(2) \quad \text{محققة}$$

14) الجواب: $\boxed{b : \text{لا}}$ , التفسير:

حتى يكون مستمر عند $x=1$ يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

- $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x-1}\right)=\frac{1-3+2}{1-1}$
$$=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين:

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-2)(x-1)}{x-1}=x-2$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1\neq f(1)$$

ليست محققة.

15) الجواب: $\boxed{a : \frac{1}{2}}$ , التفسير:

$f(x)$ مستمر عند $x=0$ إذاً هو يحقق:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نضرب بالمرافق و نقسم عليه:

$$\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{x^2+x+1})(1+\sqrt{x^2+x+1})}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}$$
$$=\frac{1-(x^2+x+1)}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}=\frac{1-x^2-x-1}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}$$
$$=\frac{-x^2-x}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}=\frac{x(-x-1)}{x(1+\sqrt{x^2+x+1})}$$
$$=\frac{-x-1}{1+\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x-1}{1+\sqrt{x^2+x+1}}\right)$$
$$=\frac{-1}{1+\sqrt{1}}=-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow m-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow m=1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

16) الجواب: $\boxed{c : -\frac{9}{8}}$ , التفسير:

$f(x)$ مستمر عند $x=0$ إذاً هو يحقق:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{3+\cos(x)}-2}{x^2}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نضرب بالمرافق و نقسم عليه:

$$\frac{\sqrt{3+\cos(x)}-2}{x^2}$$
$$=\frac{(\sqrt{3+\cos(x)}-2)(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{3+\cos(x)-4}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{\cos(x)-1}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{-(1-\cos(x))}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\times\frac{x^2}{4}(\sqrt{3+\cos(x)}+2)}$$
$$=-\frac{2}{4}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\frac{1}{\sqrt{3+\cos(x)}+2}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{2}{4}(1)(1)\left(\frac{1}{\sqrt{4}+2}\right)=\frac{-1}{2(4)}$$
$$=-\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow m+1=-\frac{1}{8} \Rightarrow m=-\frac{9}{8}$$

17) الجواب: $\boxed{b : \frac{7}{16}}$ , التفسير:

$f(x)$ مستمر عند $x=0$ إذاً هو يحقق:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{2+2\cos(x)}-\sqrt{3+\cos(x)}}{x^2}\right)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين: نضرب بالمرافق و نقسم عليه

فنجد:

$$\frac{\sqrt{2+2\cos(x)}-\sqrt{3+\cos(x)}}{x^2}$$
$$=\frac{2+2\cos(x)-(3+\cos(x))}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$
$$=\frac{2-3+2\cos(x)-\cos(x)}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$
$$=\frac{\cos(x)-1}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$
$$=\frac{-(1-\cos(x))}{x^2\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$
$$=\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\times\frac{x^2}{4}\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\times\frac{x^2}{4}\left(\sqrt{2+2\cos(x)}+\sqrt{3+\cos(x)}\right)}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}(1)\left(\frac{1}{2+2}\right) = -\frac{1}{8}$$
$$\Rightarrow 2m-1 = -\frac{1}{8} \Rightarrow 2m = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$
$$\Rightarrow m = \frac{7}{16}$$

18) لدينا:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{0+\infty} = 0$$

إذن $m = 0$.

19) لدينا:

التابع ذو فرعين.. على الفرق الذي يحوي الصفر

$x = 0 ; f(x) = 0$ فيكون المشتق $f'(0) = 0$.

20) قابلية الاشتقاق من اليمين:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{x-1} = 0$$

قابلية الاشتقاق من اليسار:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{x-1} = 0$$

إذن التابع قابل للاشتقاق عند $a = 1$ وبالتالي اشتقاقي على $\mathbb{R}$.

1) **الجواب:**

لدينا $f(x) \in ]1.99\ ,\ 2.01[$ عندما $x > A$ ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

نحدّد المركز $l$:

$$l = \frac{b+a}{2} = \frac{2.01+1.99}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

ومنه نستنتج أنّ $\boxed{y=2}$ مقارب أفقي للخط $C$ في جوار الـ $+\infty$

2) **الجواب:**

$$x > A \Rightarrow f(x) > M$$

نعلم أنّه إذا كان $x > A$ وكان $f(x) > M$ فإنّ:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

3) لدينا:

$$\ell = 2\ ,\varepsilon = b-\ell = 0.01 = \frac{1}{100}$$

نعوض في القانون:

$$|f(x)-2| < \frac{1}{100}$$
$$\left|\frac{2\ln(x)-1+2\ln(x)+2}{\ln(x)+1}\right| < \frac{1}{100}$$
$$\frac{1}{\ln(x)+1} < \frac{1}{100}$$
$$\ln(x) > 99$$
$$x > e^{99}$$

4) لدينا:

$$\left|\frac{e^{x+1}-2}{e^x+e} - e\right| < \frac{1}{1000}$$
$$\left|\frac{e^x.e-2-e.e^x-e^2}{e^x+e}\right| < \frac{1}{1000}$$
$$\left|\frac{-2-e^2}{e^x+e}\right| < \frac{1}{1000}$$
$$\frac{2+e^2}{e^x+e} < \frac{1}{1000}$$
$$e^x+e > 10^3(2+e^2)$$
$$e^z > 10^3(2+e^2)-e$$
$$x > \ln(10^3(2+e^2)-e)$$

5) لدينا:

$$\ln(e^{2x}+3) > \ln(10^{10})$$
$$e^{2x}+3 > 10^{10}$$
$$e^{2x} > 10^{10}-3$$
$$2x > \ln(10^{10}-3)$$
$$x > \frac{\ln(10^{10}-3)}{2}$$

6) $|f(x)-l| < \varepsilon$

$$l = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$$
$$\varepsilon = b-l = -1.95+2 = +0.05$$
$$\left|\frac{2x+3}{1-x}+2\right| < 0.05$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2x-3+2-2x}{1-x}\right| < \frac{5}{100}$$
$$\Rightarrow \frac{|-1|}{|1-x|} < \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{1}{1-x} < \frac{5}{100}$$
$$\Rightarrow 5(1-x) > 100$$
$$\Rightarrow 5-5x > 100 \Rightarrow -5x > 95$$
$$\Rightarrow \boxed{c \ : \ x < -19}$$

7) $$l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\left(\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)\right)}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varepsilon = b - l = 1.1 - 1 = 0.1$$
$$|f(x)-l| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - 1\right| < 0.1$$
$$\Rightarrow \left|\frac{2+\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| < \frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \sqrt{x}+1 > 10$$
$$\Rightarrow \sqrt{x} > 9 \Rightarrow \boxed{b \ : \ x > 81}$$

8) التقاطع مع محور الفواصل يعني أن $y = 0$ :

$$\Rightarrow \sqrt{5x^2-1} - x = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{5x^2-1} = x$$
$$\Rightarrow 5x^2 - 1 = x^2 \Rightarrow 4x^2 = 1$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{d \ : \ x = \pm\frac{1}{2}}$$

1) **الجواب:**

$$f(x) = 2x - 3E(x) \quad : \quad x \in [1\,,3[$$

نُجزّء مجال الدّراسة إلى عدّة مجالات طولها 1 :

$$I = [1\,,3[ = \begin{cases}[1\,,2\,[ \\ [2\,,3\,[\end{cases}$$

نعوّض قيمة تابع الجزء الصحيح في المجال المرافق:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3(1) & : \ x \in [1\,,2[ \\ 2x-3(2) & : \ x \in [2\,,3\,[ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \begin{cases} 2x-3 & : \ x \in [1\,,2[ \\ 2x-6 & : \ x \in [2\,,3[ \end{cases}}$$

2) **الجواب:**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+E(x^2)}{x^2+1}\right)$$

نعلم أنّ:

$$x-1 \le E(x) < x$$
$$\Rightarrow x^2-1 \le E(x^2) < x^2$$

نضيف $x$ :

$$\Rightarrow x+x^2-1 \le x+E(x^2) < x^2+x$$

نقسم على $x^2+1 > 0$ :

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+1} \le \frac{x+E(x^2)}{x+1} < \frac{x^2+x}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right) = 1$$
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+E(x^2)}{x^2+1}\right) = 1}$$

3) **الجواب:**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+E(\ln(x))}{x}\right)$$

نعلم أنّ:

$$x-1 \le E(x) < x$$

ومنه:

$$\ln(x)-1 \le E(\ln(x)) < \ln(x)$$

نضيف 1 :

$$1+\ln(x)-1 \le 1+E(\ln(x)) < 1+\ln(x)$$

نقسم على $x$ :

$$\frac{\ln(x)}{x} \le \frac{1+E(\ln(x))}{x} < \frac{1+\ln(x)}{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\ln(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+E(\ln(x))}{x}\right) = 0}$$

4) **الجواب:**

$$f(x) = 2x + E(x) - 3$$

بما أنّ 500 عدد صحيح فإنّ:

$$E(500) = 500$$

بالتعويض في الدالة نجد:

$$f(500) = 2(500) + 500 - 3 = 1497$$

وبالتالي المجال الذي يحصر $f(500)$ هو:

$$\boxed{[1497\,,1497\,] \text{ أو } \{1497\}}$$

5) **الجواب:**

$$f(x) = \frac{x}{4} + \sqrt{2}\,E(\sqrt{x})$$
$$f(16) = \frac{16}{4} + \sqrt{2}\,E(\sqrt{16})$$
$$= 4 + \sqrt{2}\,E(4) = 4 + 4\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{f(16) = 4+4\sqrt{2}}$$

ومنه $f(16)$ تساوي 4 بمقدار خطأ يساوي $3\sqrt{2}$ أو $4\sqrt{2}$ زيادة.

6) لنكتبه بصيغة مستقلة:

$$f(x)=\begin{cases}(x-2m)^2\ ;[-2,-1[\\ (x-m)^2\ ;[-1,0[\end{cases}$$

لدينا:

$$f(-1)=(-1-m)^2=m^2+2m+1$$

$$\lim_{x\to-1} f(x)=(-1-2m)^2=4m^2+4m+1$$

نضع النهاية تساوي الصورة ونعزل:

$$3m^2+2m=0$$

$$m(3m+2)=0$$

$m=0$ مرفوض

$m=-\frac{2}{3}$ مقبول

7) ما رأيك؟ .....

8) لدينا:

$$x-1<E(x)\leq x$$

$$-1<E(x)-x\leq 0$$

محصور بين المستقيمين:

$$y=-1\ ,y=0$$

9) لدينا:

$$1-E(x)=0$$
$$1=E(x)$$
$$x\in[1,2[$$
$$\Rightarrow \mathbb{R}\backslash[1,2[$$

## الجلسة التاسعة

### تدرب 15

**ملاحظة: سنستخدم هذا القانون في الحل:**

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f(x)=xln(x+1)\ ;a=0$$

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{xln(x+1)}{x}=\lim_{x\to0}\ln(x+1)=0$$

قابل للاشتقاق عند 0.

$$f(x)=\sin(\sqrt{x})\ ;a=0^+$$

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(\sqrt{x})}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\sqrt{x}}=+\infty$$

غير قابل للاشتقاق عند 0.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x-lnx}\ ;x>0\\ 0\ \ \ \ \ \ ;x=0\end{cases}\ ;a=0$$

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{x-lnx}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(x-lnx)}=0$$

قابل للاشتقاق عند 0.

### تدرب 17

$$f(x)=xlnx-e$$

$$f(e)=0$$

$$f'(x)=lnx+1$$

$$f'(e)=2$$

حسب تعريف العدد المشتق:

$$\lim_{x\to e}\frac{xlnx-e}{x-e}=f'(e)=2$$

### تدرب 18

$$f(x)=e^{2x}-2x$$

المماس الأفقي أي ميله معدوم:

$$f'(x)=2e^{2x}-2$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0$$

$$2e^{2x}-2=0$$

$$\Rightarrow e^{2x}=1$$

$$\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$$

$$f(0) = 1 - 0 = 1$$

وبالتالي معادلة المماس الأفقي:

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = 1$$

## تدرب 19

$$\boldsymbol{f(x) = \ln(x + 1)}$$

نقطة التقاطع مع محور التراتيب أي:

$$x = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\Rightarrow y = x$$

لحساب القيمة التقريبية، نعوض في المماس:

$$y = 0.2 \Rightarrow f(0.2) = 0.2$$

أو عن طريق القانون بفرض:

$$a = 0\,, h = 0.2$$

$$f(a + h) \approx h.f'(a) + f(a)$$

$$f(0.2) \approx \frac{2}{10}(1) + 0$$

$$f(0.2) \approx 0.2$$

## تدرب 20

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{x+1}\,, y - 4x = 0}$$

$$y = 4x$$

$$\Rightarrow m = 4$$

$$f'(x) = \frac{x + 1 - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 4$$

$$\frac{1}{(x+1)^2} = 4$$

$$(x+1)^2 = \frac{1}{4}$$

إما:

$$x + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 4\left(x + \frac{1}{2}\right) - 1 = 4x + 1$$

أو:

$$x + 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 3$$

$$\Rightarrow y = 4\left(x + \frac{3}{2}\right) + 3 = 4x + 9$$

## تدرب 21

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x + |x|}{x + 2}}$$

1- نعرف التابع $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x + |x|}{x+2}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + |x|}{x(x+2)}$$

نميز حالتين:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = 0$$

نلاحظ أن:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) \neq \lim_{x \to 0^-} g(x)$$

فالتابع غير قابل للاشتقاق عند $a = 0$.

2- نعوض في قانون معادلة المماس:

$$y_T = f'(0^+)(x - 0) + f(0)$$

$$y_T = 1$$

## الجلسة العاشرة

### تدرب 23

$$f(x)=\frac{lnx}{x+1}$$

1- نشتق:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x+1)-lnx}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{1+\frac{1}{x}-lnx}{(x+1)^2}$$

2- أ- لدينا:

$\sin x \in ]0,+\infty[$

و $\sin x$ اشتقاقي على $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

وبالتالي $g$ اشتقاقي على $I$.

ب- من قاعدة اشتقاق التابع المركب:

$$g'(x)=f'(sinx).(sinx)'$$
$$=\frac{1+\frac{1}{sinx}-\ln(sinx)}{(sinx+1)^2}.cosx$$

### تدرب 24

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x^2}$$

1- لحساب المشتق:

$f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x)=\frac{x^2e^x-2xe^x+2x}{x^4}$$

2- نجد أن:

$$g(x)=f(\sqrt{x}),h(x)=f(sinx)$$
$$g'(x)=f'(\sqrt{x}).(\sqrt{x})'$$
$$=\frac{xe^{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}}{x^2}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$h'(x)=f'(sinx).(sinx)'$$
$$=\frac{\sin^2 x\, e^{sinx}-2\sin x\, e^{sinx}+2\sin x}{\sin^4 x}.cosx$$

### تدرب 25

$$f(x)=-\ln(1-x)$$

1- نحسب المشتقات:

$$f'(x)=\frac{1}{1-x}$$
$$f''(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

2- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n):f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

نثبت صحة القضية $E(1)$:

$$f'(x)=\frac{1}{1-x}$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$E(n):f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$ ..... الفرض

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$E(n+1):f^{(n+1)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

نشتق الطرفين:

$$f^{(n+1)}=\frac{-(n+1)(1-x)^n(-1)(n!)}{(1-x)^{2n+2}}$$
$$=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{2n+2}(1-x)^{-n}}$$
$$=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

القضية صحيحة.

### تدرب 26

$$g(x)=e^x+2-x$$

1- $g$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$g'(x)=e^x-1$$
$$g'(x)=0\Rightarrow e^x-1=0$$

$$e^x = 1$$
$$x = 0$$
$$g(0) = 3$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $---$ | $0$ | $+++$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | $3$ | ↗ | |

نجد من الجدول أن:

$$g(x) \geq 3 > 0$$
$$g(x) > 0$$
$$\Rightarrow S = ]-\infty, +\infty[$$

## تدرب 27

$$\ln(x+1) \leq \sqrt{x+1}$$
$$0 \leq \sqrt{x+1} - \ln(x+1)$$

نفرض التابع المعرف على $]-1, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \sqrt{x+1} - \ln(x+1)$$

$g$ اشتقاقي على $]-1, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+1}$$
$$= \frac{\sqrt{x+1} - 2}{2(x+1)}$$
$$g'(x) = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+1} - 2 = 0$$
$$\sqrt{x+1} = 2$$
$$x + 1 = 4$$
$$x = 3$$
$$g(3) = 2 - 2\ln(2)$$

| $x$ | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $---$ | $0$ | $+++$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | $2-2\ln(2)$ | ↗ | |

نلاحظ من الجدول أن:

$$g(x) \geq 2 - 2\ln(2) > 0$$
$$g(x) > 0$$
$$\sqrt{x+1} - \ln(x+1) > 0$$
$$\sqrt{x+1} > \ln(x+1)$$

محققة.

## الجلسة الحادية عشر

### حول مبرهنة القيمة الوسطى

1) لدينا التابع زوجي وبالتالي خطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب فإذا كان يقبل ثلاث حلول على المجال $]0, +\infty[$ فسيقبل ثلاثة حلول أخرى على المجال $]-\infty, 0[$ وبالتالي عدد الحلول على اجتماع المجالين $\mathbb{R}^*$ هو 6 حلول.

2) لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1 = 0$$

$f$ مستمر على المجال:

$$\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$$

$$f'(x) = x^4 - x^2$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x^2(x^2-1) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases} \end{cases}$$

3) $x(2x+1)^2 = 5 \Rightarrow x(2x+1)^2 - 5 = 0$
$$\Rightarrow f(x) = x(2x+1)^2 - 5$$
$$\Rightarrow f(x) = x(4x^2 + 4x + 1) - 5$$
$$\Rightarrow f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x - 5$$

$f$ مستمر على $\mathbb{R}$ ، نشتق:

$$f'(x) = 12x^2 + 8x + 1$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 8x + 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 48 = 16 > 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

يوجد حلّان:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+4}{24} = -\frac{1}{6} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-4}{24} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\left(-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}+1\right)^2 - 5 \\ \quad = \left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{4}{9}\right) - 5 = -\frac{139}{27} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)(-1+1)^2 - 5 = -5 \end{cases}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $-\frac{1}{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\ +$ | $0$ | $-\ -$ | $0$ | $+\ +$ | | |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $-5$ | $\searrow$ | $-\frac{139}{27}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

وبالتالي يوجد حل وحيد في المجال:

$$\left[-\frac{1}{6}, +\infty\right[$$

4) $f(a).f(b) < 0$

5) $f$ مستمر على $\mathbb{R}$ , ويمكن كتابة التابع بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + (-\sqrt{x})$$

التابع $\frac{1}{x-1}$ تابع متناقص على $]1, +\infty[$

التابع $-\sqrt{x}$ تابع متناقص على $]1, +\infty[$

ومجموع تابعين متناقصين هو تابع متناقص وبالتالي:

$$0 \in f(]1, +\infty[) = ]-\infty, +\infty[$$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]1, +\infty[$.

**ملاحظة:** يمكن دراسة الاطراد عن طريق جدول التغيرات وتصوير المجال أيضاً عن طريقه ولكن في شغف الرياضيات نحرص على أن تتعلم كل شيء 😉

6) لدينا:

$$f(x) = 3x + \cos(x)$$

نوجد المشتق:

$$f'(x) = 3 - \sin(x) = 3 - \sin(x)$$

لدينا:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$1 \geq -\sin(x) \geq -1$$

$$4 \geq f'(x) \geq 2 > 0$$

$f$ متزايد تماماً ومستمر و $0 \in f(\mathbb{R}): \mathbb{R}$

وبالتالي للمعادلة حل وحيد.

7) لدينا:

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{1-3-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-2-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1$$

$$= \frac{-1+3-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{2-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} - 1$$

جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\ +\ +\ +$ | $0$ | $-\ -\ -\ -\ -$ | $0$ | $+\ +\ +\ +$ | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{2}{3\sqrt{3}} - 1$ | $\searrow$ | $-\frac{2}{3\sqrt{3}} - 1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

للمعادلة حل وحيد

8) محلول من شوي

9) لدينا:

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$D_f: ]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[$$

$$f'(x) = 1 - \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}} = \frac{1+2x^2+x}{2x^2+x} > 0$$

$f$ متزايد تماماً على $D_f$ وبالتالي للمعادلة حل وحيد.

10) لدينا:

$$f(x) - g(x) = 0$$

$$\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} = 0$$

$$h(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

نعدم:

$$x = 0\ ; h(0) = 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-\ -\ -\ -\ -\ -$ | $0$ | $+\ +\ +\ +\ +\ +$ |
| $h(x)$ | ↘↘↘↘↘↘ | $0$ | ↗↗↗↗↗↗ |

نلاحظ أنه يمر بالصفر مرة واحدة وبالتالي للمعادلة $h(x) = 0$ حل وحيد أي $f(x) = g(x)$ لها حل وحيد أيضاً

11) لدينا:

$$f(5) = 5 - 10 + 3\ln\left(\frac{6}{1}\right) = -5 + 3\ln(6)$$

$$= 3\ln(6) - 5 = 3\ln(2) + 3\ln(3) - 5 > 0$$

$$f(6) = 5 - 12 + 3\ln\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$= -7 + 3\ln(7) - 3\ln(2) < 0$$

بالتالي حصلنا على تناوب بالإشارة فالحل ينتمي للمجال $]5,6[$.

12) لدينا:

$$g(x) = f(x) - y_T = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = \frac{2e^x(e^x+1) - e^x(2e^x - 3)}{(e^x+1)^2} - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{e^x[2e^x + 2 - 2e^x + 3]}{(e^x+1)^2} - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{5e^x}{(e^x+1)^2} - \frac{5}{4} = \frac{20e^x - 5(e^x+1)^2}{4(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{20e^x - 5e^{2x} - 10e^x - 5}{4(e^x+1)^2} = \frac{-5(e^{2x} - 2e^x + 1)}{4(e^x+1)^2}$$

$$= -\frac{5}{4}\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} \leq 0$$

نعدم:

$$(e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$

$$x = 0$$

$$g(0) = 0$$

جدول اطراد:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | $-\ -\ -\ -\ -$ | $0$ | $-\ -\ -\ -\ -\ -$ |
| $g$ | ↘ | $0$ | ↘ |

لدينا:

$g(x) > 0$ على المجال $]-\infty, 0[$ بالتالي $C$ فوق $T$.

$g(x) < 0$ على المجال $]0, +\infty[$ بالتالي $C$ تحت $T$.

13) لدينا:

$$\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$$

$$g(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x}{(x+1)^2}$$

نعدم:

$$x = 0\ ; g(0) = 0$$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | $-\ -\ -\ -\ -$ | $0$ | $+\ +\ +\ +\ +\ +$ |
| $g$ | ↘ | $0$ | ↗ |

$$g(x) \geq 0$$

$$\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$$

$$\ln(x+1) \geq \frac{x}{x+1}$$

أيا كانت $x \in ]-1, +\infty[$

14) لدينا:

$$\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$$

$$g(x) = \ln(x+1) - \sqrt{x+1}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2-\sqrt{x+1}}{2(x+1)}$$

نعدم:

$$2 - \sqrt{x+1} = 0$$

$$\sqrt{x+1} = 2$$

$$x + 1 = 4$$

$$x = 3$$

$$g(3) = 2\ln(2) - 2 < 0$$

| $x$ | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | $+++++0$ | | | $------$ | |
| $g$ | ↗ | $2ln(2)-2$ | | ↘ | |

$$g(x) \leq 2\ln(2) - 2 < 0$$

$$g(x) < 0$$

$$\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$$

$$\ln(x+1) < \sqrt{x+1}\,; \forall x > -1$$

$$]-1, +\infty[$$

15) لدينا:

$$e^x - x > 0$$

$$g(x) = e^x - x$$

$$g'(x) = e^x - 1$$

نعدم:

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g(0) = 1$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | $-----0$ | | | $++++++$ | |
| $g$ | ↘ | $1$ | | ↗ | |

$$g(x) \geq 1 > 0$$

$$g(x) > 0$$

$$e^x - x > 0$$

$$e^x > x$$

أيا تكن $x \in \mathbb{R}$.

16) لدينا:

$$\ln(x) - 2\sqrt{x} \leq 0$$

$$g(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

نعدم:

$$1 - \sqrt{x} = 0$$

$$x = 1$$

$$g(1) = -2$$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | $\|\|$ | $++++0$ | | $------$ | |
| $g$ | $\|\|$ | ↗ | $-2$ | ↘ | |

$$g(x) \leq -2 < 0$$

$$g(x) < 0$$

$$\ln(x) - 2\sqrt{x} < 0$$

$$\ln(x) < 2\sqrt{x}$$

مهما تكن $x \in ]0, +\infty[$

17) لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

نشكل الفرق:

$$f(x) - 2 = \frac{2x+1}{x-1} - 2 = \frac{2x+1-2x+2}{x-1}$$

$$= \frac{3}{x-1}$$

على المجال $]1, +\infty[$ يكون $C$ فوق مقاربه الأفقي

إذن الخيار $b$ هو الخاطئ.

18) لدينا:

$$f'(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}(x+1) = \frac{xln(x)+x+1}{x}$$

إذن على مجموعة التعريف تكون إشارة المشتق من إشارة البسط.

19) لدينا:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln(x) + 1 = \frac{-1 + x^2\ln(x) + x^2}{x^2}$$

إذن إشارة المشتق من إشارة البسط.

20) لدينا:

$$f'(x) = \frac{x\ln(x) + x + 1}{x}$$

$$g(x) = x\ln(x) + x + 1$$

$$g'(x) = \ln(x) + 1 + 1 = \ln(x) + 2$$

نعدم:

$$\ln(x) + 2 = 0$$

$$x = e^{-2}$$

$$g(e^{-2}) = -\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^2} + 1 = \frac{e^2 - 1}{e^2} > 0$$

| $x$ | $0$ | $e^{-2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'$ | $\|\|$ | $-\ -\ -\ -\ -0+\ +\ +\ +\ +\ +\ +$ | |
| $g$ | $\|\|$ | $\searrow$ $\frac{e^2-1}{e^2}$ | $\nearrow$ |

$$g(x) \geq \frac{e^2 - 1}{e^2} > 0$$

$$g(x) > 0$$

إذن:

$$f'(x) > 0$$

أي $f$ مطرد تماماً (متزايد تماماً).

21) لدينا:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln(x) + 1 = \frac{-1 + x^2\ln(x) + x^2}{x^2}$$

لدينا:

$$f'(1) = 0$$

إذن يقبل قيمة حدية عند $a = 1$.

**حول التابع العكسي + مشتقات من مراتب عليا**

**كتابة مع الأستاذ**

## حول التوابع المركبة

1) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{x\to 3} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{X\to+\infty} f(X) = 3$$

2) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big) = \lim_{X\to 2} f(X) = \frac{5}{3}$$

3) لدينا:

$$f\big(g(x)\big) = \frac{\frac{2}{x-1} + 2}{\frac{2}{x-1}} = \frac{\frac{2 + 2x - 2}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}$$

$$= \frac{2x}{2} = x$$

4) لدينا:

$$g\big(f(x)\big) = g(x^2 - 1) = \sin(x^2 - 1)$$

5) لدينا:

$$\big[f\big(g(x)\big)\big]' = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

$$1 = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

$$1 = \frac{1}{g(x)}g'(x)$$

$$g'(x) = g(x)$$

6) **الجواب:**

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\,f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x + \sqrt{1+x^2} = f(x)$$

7) **الجواب:**

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

نضرب بالمرافق:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{x^2 + 1 - x^2} = \sqrt{x^2+1} - x$$

$$= \sqrt{(-x)^2 + 1} + (-x) = f(-x)$$

8) **الجواب:**

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

لدينا:

$$g'(x) = f'(x) + f'(-x)(-1) = 0$$

التابع g تابع ثابت صحيحة.

$$g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$$

متناظر لمحور التراتيب صحيحة.

بما أن التابع $g$ ثابت فإن نهايته تساوي قيمة أي عدد منه وبالتالي يمكن القول أن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = g(1) = g(0) = g(2) \dots$$

سنأخذ g(0):

$$g(0) = f(0) + f(-0) = 2f(0)$$

إذن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2g(0)$$

وبالتالي الخيار التالت صحيح فالأخير هو ما تبقى خاطئ.

9) **الجواب:**

لدينا:

$$g'(x) = f'(x) + f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= f'(x) + f'\left(\frac{1}{x}\right).\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

وبالتالي g تابع ثابت وليس متزايد.. منتهية. الخيار الأول غلط.

10) **الجواب:**

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = f(\tan(x)) - x$$

$$\Rightarrow g'(x) = (\tan(x))'.f'(\tan(x)) - 1$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)\left(\frac{1}{1+\tan^2(x)}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x).\tan^2(x)} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x)\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} - 1$$

$$= \frac{1}{1} - 1 = 0$$

11) **الجواب:**

$$f(x) = \frac{x-3}{x+5}$$

$$f(f(x)) = f\left(\frac{x-3}{x+5}\right) = \frac{\frac{x-3}{x+5} - 3}{\frac{x-3}{x+5} + 5}$$

$$= \frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}} = \frac{-2x-18}{6x-22}$$

$$= \frac{-2(x+9)}{2(3x-11)} = -\frac{x+9}{3x-11}$$

12) **الجواب:**

لدينا:

$$g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$$

زوجي.

13) **الجواب:**

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - f'(-x)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

14) **الجواب:**

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= f'(x) + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = 0$$

15) **الجواب:** مكرر

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = f(\tan(x)) - x$$

$$\Rightarrow g'(x) = (\tan(x))'.f'(\tan(x)) - 1$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)\left(\frac{1}{1+\tan^2(x)}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x).\tan^2(x)} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \cos^2(x)\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)} - 1$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} - 1 = 1 - 1 = 0$$

16) **الجواب:**

لدينا:

$$f(0) = 1 - 1 = 0$$

عند $x = 0$ يكون التابع شكله:

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(0) = -1$$

نعوض في قانون معادلة المماس:

$$y = -1(x - 0) + 0$$

$$y = -x$$

17) **الجواب:**

لدينا معادلة المماس في النقطة $a$:

$$f(a) = \frac{a^2 + a}{a^2 + a + 3}$$

$$f'(x)$$

$$= \frac{(2x+1)(x^2+x+3) - (2x+1)(x^2+x)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$= \frac{3(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$f'(a) = \frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}$$

فتكون معادلة المماس:

$$y = \frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}(x-a) + \frac{a^2+a}{a^2+a+3}$$

ليكون المماس مار بالمبدأ نعوض النقطة $(0,0)$:

$$0 = \frac{3(2a+1)(-a) + (a^2+a)(a^2+a+3)}{(a^2+a+3)^2}$$

ينعدم الكسر اذا نعدم بسطه:

$$-6a^2 - 3a + a^4 + a^3 + 3a^2 + a^3 + a^2 + 3a = 0$$

$$-2a^2 + a^4 + 2a^3 = 0$$

$$a^2(a^2 + 2a - 2) = 0$$

إما:

$$a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

أو:

$$a^2 + 2a - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(-2)(1) = 4 + 8 = 12$$

للمعادلة حلان:

$$a_1 = \frac{-2+\sqrt{12}}{2}, a_2 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2}$$

إذن يوجد ثلاث مماسات تمر من المبدأ (يعني حسسب كم قيمة لـ a بيطلعلي)

## الجلسة الثانية عشر

### تدرب 28

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

1- لدراسة قابلية الاشتقاق:

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = g(x)$$

$$g(x) = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{x-2}$$

$$= \frac{x(4-x^2)}{(x-2)(\sqrt{4-x^2})}$$

$$= \frac{x(2-x)(2+x)}{(x-2)(\sqrt{4-x^2})}$$

$$= \frac{-x(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{4-x^2})} = \frac{-x(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = -\infty$$

$x = 2$ مماس شاقولي.

$$\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = h(x)$$

$$= \frac{x\sqrt{4-x^2}}{x+2} = \frac{x(4-x^2)}{(x+2)(\sqrt{4-x^2})}$$

$$= \frac{x(x+2)(2-x)}{(x+2)(\sqrt{4-x^2})} = \frac{x(2-x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\lim_{x\to -2} h(x) = -\infty$$

$x = -2$ مماس شاقولي.

2- الشرط الأول:

$$x \in [-2,2] \Rightarrow -x \in [-2,2]$$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = -x\sqrt{4-(-x)^2}$$

$$= -x\sqrt{4-x^2} = -f(x)$$

التابع متناظر بالنسبة للمبدأ.

3- المجال $[0,2]$:

$$f(0) = 0\,, f(2) = 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $2+x$ | $---$ | $0$ $+++$ | $+++$ | |
| $2-x$ | $+++$ | $+++$ | $0$ $---$ | |
| $\frac{2+x}{2-x}$ | $---$ | $0$ $+++$ | ‖ | $---$ |
| $>0$ | ممنوع | موجب | | ممنوع |

$f$ اشتقاقي على $]0,2[$:

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}.x$$

$$= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4-2x^2 = 0$$

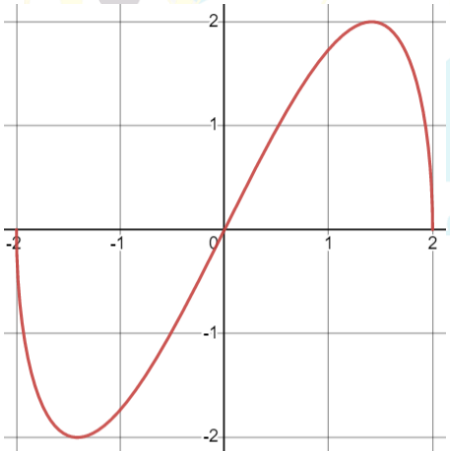
$$4 = 2x^2$$

$x = +\sqrt{2}$ مقبول

$x = -\sqrt{2}$ مرفوض

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+++$ | $0$ | $---$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $2$ | ↘ | $0$ |

4- الرسم:




### تدرب 29

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

1- لدينا:

$$\frac{2+x}{2-x} > 0$$

$$2+x = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$2-x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow D_f = ]-2,2[$$

2- الشرط الأول:

$$x \in ]-2,2[ \Rightarrow -x \in ]-2,2[$$

الشرط الثاني:

$$f(-x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$
$$= -f(x)$$

التابع فردي ومتناظر بالنسبة للمبدأ.

3- النهايات:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \ln\left(\frac{0}{4}\right) = -\infty$$

$x = -2$ مقارب شاقولي نحو $-\infty$ و $C$ يقتع على يمين مقاربه.

$$f(0) = 0$$

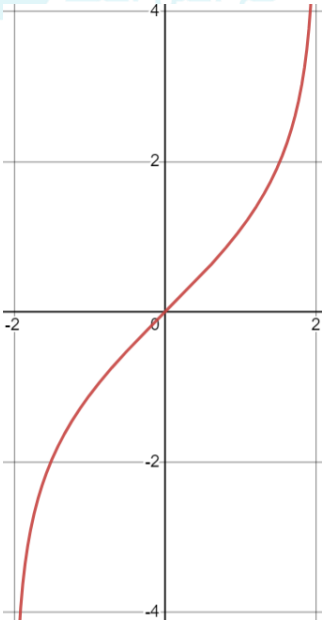
$f$ اشتقاقي على $]-2,0[$:

$$f(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}$$
$$= \frac{2-x+2+x}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}$$
$$f'(x) \neq 0$$

جدول التغيرات:

| $x$ | $-2$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+ + + + + + + +$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ |

4- الرسم:




5- نجد أن:

$$g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$
$$= -f(x)$$

الخط البياني للتابع $g$ ينتج عن الخط البياني للتابع $f$ بتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

## تدرب 31

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$$

$f$ اشتقاقي على $]1,3[$:

$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(3-x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3-x} = \frac{3-x+x-1}{(x-1)(3-x)}$$
$$= \frac{2}{(x-1)(3-x)}$$
$$f'(x) \neq 0$$

| $x$ | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+ + + + + + + + + + +$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

2- الشرط الأول:

$$x \in ]1,3[$$
$$-x \in ]-3,-1[$$
$$4-x \in ]1,3[$$

الشرط الثاني:

$$f(x)+f(4-x)=2b$$

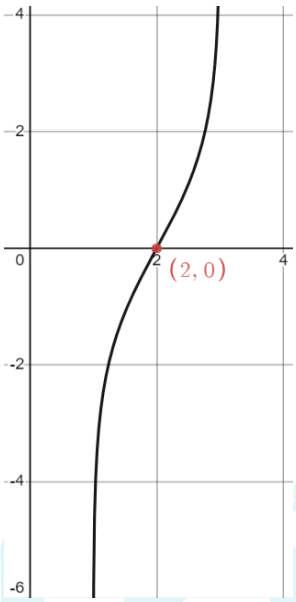
$$f(x)+f(4-x)$$

$$=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)+\ln\left(\frac{4-x-1}{3-4+x}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\times\frac{3-x}{x-1}\right)=\ln(1)=0$$

إذاً $I(2,0)$ مركز تناظر للتابع.

3- الرسم:




## حول مركز التناظر

**نعلم أنّ إحداثيّات مركز التناظر يجب أن تحقّق:**

**الشرط الأوّل:**

$$x\in D_f\Rightarrow 2a-x\in D_f$$

**الشرط الثاني:**

$$f(x)+f(2a-x)=2b$$

1) **الجواب هو:**

$$\boxed{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$$

حيثُ:

$$f(x)=x+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| \quad :D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

$$2a-x=2\left(\frac{1}{2}\right)-x=1-x$$

الشرط الأوّل:

$$x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$$

$$\Rightarrow 1-x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

الشرط الثاني:

$$f(x)+f(1-x)$$

$$=x+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+1-x+\ln\left|\frac{1-x}{1-x-1}\right|$$

$$=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+1+\ln\left|\frac{1-x}{-x}\right|$$

$$=1+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$=1+\ln\left|\frac{x}{x-1}.\frac{x-1}{x}\right|$$

$$=1+\ln|1|=1+0$$

$$=1=2b=2\left(\frac{1}{2}\right)$$

مع الانتباه إلى خاصيّة اللوغاريتم:

$$ln(a)+ln(b)=ln(a\times b)$$

2) **الجواب:**

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1} \quad : \quad D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

البحث عن المقاربات:

- $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left[\frac{x^3+1}{x^2-1}\right]$

$$=\lim_{x\to-1^-}\left[\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}\right]=-\frac{3}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left[\frac{x^3+1}{x^2-1}\right]=-\frac{3}{2}$
- $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left[\frac{x^3+1}{x^2-1}\right]$

$$=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}\right]$$

$$=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

- $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left[\frac{x^3+1}{x^2-1}\right]$

$$=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

ومنه $x=1$ مقارب شاقولي.

ايجاد المقارب المائل:

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}$$

بالقسمة الإقليديّة لـ $(x^3+1)$ على $(x^2-1)$

نجد:

$$f(x)=x+\frac{x+1}{x^2-1}$$

ومنه $y=x$ مقارب مائل .

نلاحظ أنّ التابع $f$ يملك مقارب شاقولي $x=1$

ومقارب مائل $y = x$ وبالتالي فاصلة مركز التناظر هي:

$$x_0 = 1$$

نعوّض $x_0 = 1$ في معادلة المقارب المائل فنجد أنّ تراتيب مركز التناظر هو:

$$y_0 = 1$$

وبالتالي مركز التناظر هو:

$$\boxed{(1\,,1)}$$

3) **الجواب:**

$$f(x) = \frac{e^x + 3}{e^x - 1} \quad : \quad D_f = \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x+3}{e^x-1}\right]$$

$$= \frac{3}{-1} = -3$$

ومنه $y_1 = -3$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x+3}{e^x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+\frac{3}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}\right] = 1$$

ومنه $y_2 = 1$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$.

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left[\frac{e^x+3}{e^x-1}\right]$$

$$= \frac{1+3}{1-1} = \frac{4}{0} = +\infty$$

ومنه $x = 0$ مقارب شاقولي.

نلاحظ أنّ التابع $f$ يقبل مقاربين أفقيّين $y_1 = 1$ و $y_2 = -3$ ومقارب شاقولي $x = 0$ وبالتالي فإنّ فاصلة مركز التناظر هي:

$$x_0 = 0$$

وتراتيب مركز التناظر هي:

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$$

إذاً مركز التناظر هو:

$$\boxed{(0\,,-1)}$$

4) **الجواب هو:**

$$(0\,,1)$$

حيثُ أنّ:

$$f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x-1} \quad : \quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$2a - x = 2 - x$$

الشرط الأوّل:

$$x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$
$$\Rightarrow (2-x) \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

الشرط الثاني:

$$f(x) + f(2-x) = \frac{\ln|x-1|}{x-1} + \frac{\ln|2-x-1|}{2-x-1}$$
$$= \frac{\ln|x-1|}{x-1} + \frac{\ln|1-x|}{1-x}$$

نعلم أنّ:

$$|x-1| = |1-x|$$
$$\Rightarrow \ln|x-1| = \ln|1-x|$$

وبالتالي:

$$f(x) + f(2-x) = \frac{\ln|x-1|}{x-1} + \frac{\ln|x-1|}{-(x-1)}$$
$$= \frac{\ln|x-1|}{x-1} - \frac{\ln|x-1|}{x-1} = 0 = 2b$$

وبالتالي مركز التناظر هو:

$$\boxed{(1\,,0)}$$

5) **الجواب:**

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) \quad : \quad D_f = ]1\,,3[$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \ln\left(\frac{1-1}{3-1}\right) = \ln(0) = -\infty$$

ومنه $x_1 = 1$ مقارب شاقولي.

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = \ln\left(\frac{3-1}{3-3}\right) = \ln\left(\frac{2}{0}\right) = +\infty$$

ومنه $x_2 = 3$ مقارب شاقولي.

نلاحظ أنّ التابع $f$ يقبل مقاربين شاقوليّين $x_1 = 1$ و $x_2 = 3$ وبالتالي فاصلة مركز التناظر هي:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

وتراتيب مركز التناظر تساوي:

$$y_0 = f(x_0) = f(2)$$
$$= \ln\left(\frac{2-1}{3-2}\right)$$
$$= \ln(1) = 0$$

وبالتالي مركز التناظر هو:

$$\boxed{(2\,,0)}$$

6) لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = -3$$

ولدينا $A(1,-1)$ مركز تناظر فتكون:

$$f(2-x) + f(x) = 2(b) = -2$$

نعوض في النهاية فنجد:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-2x}{f(2-x)+f(x)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

7) لدينا:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$$

يملك مقارباً شاقولياً.

بقسمة البسط على المقام قسمة اقليدية نجد:

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$$

فيكون المقارب المائل $y = x - 1$

نعوض $x = 1$ فيه $y = 1 - 1 = 0$ فتكون النقطة $(1,0)$ مركز التناظر.

8) لدينا:

$$f(1-x) + f(x) = 3$$

فتكون:

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

فالنقطة $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ مركز تناظر. (الخيار $c$)

9) لدينا:

$$x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$$

نضرب ب $-2$:

$$-2x \in \mathbb{R}\backslash\{2,-2\}$$

نضيف 3:

$$3 - 2x \in \mathbb{R}\backslash\{5,1\}$$

10) لدينا:

$$f(-2-x) = \frac{2(-2-x)^2 + 3(-2-x) + 9}{-2-x+1}$$

$$= \frac{2(4+4x+x^2) - 6 - 3x + 9}{-x-1}$$

$$= \frac{8 + 8x + 2x^2 - 3x + 3}{-x-1} = \frac{2x^2+5x+11}{-x-1}$$

لدينا:

$$f(x) + f(-2-x)$$

$$= \frac{2x^2+3x+9}{x+1} + \frac{2x^2+5x+11}{-x-1}$$

$$= \frac{2x^2+3x+9-2x^2-5x-11}{x+1}$$

$$= \frac{-2x-2}{x+1} = -2$$

11) لدينا:

$$f(-2-x) + f(x) = 2b = 2(-3) = -6$$

## الجلسة الرابعة عشر

### تدرب 47

$$\begin{cases} (\boldsymbol{lnx})(\boldsymbol{lny}) = \boldsymbol{-12} \\ \boldsymbol{ln(xy)} = \boldsymbol{1} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\boldsymbol{lnx})(\boldsymbol{lny}) = \boldsymbol{-12} \\ \boldsymbol{lnx + lny} = \boldsymbol{1} \end{cases}$$

نضع $lnx = X$ و $lny = Y$:

$$= \begin{cases} \boldsymbol{X.Y} = \boldsymbol{-12} \\ \boldsymbol{X + Y} = \boldsymbol{1} \end{cases}$$

نبحث عن عددين ضربهم $-12$ وجمعهم $+1$ وهما:

$$X = +4\,, Y = -3$$

$$X = lnx = 4 \Rightarrow x = e^4$$

$$Y = lny = -3 \Rightarrow y = e^{-3}$$

**ملاحظة: يمكن العكس بين القيمتين فتكون $x = e^{-3}$ و $y = e^4$.**

## تدرب 48

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{\ln a+\ln b}{2}$$

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{\ln(ab)}{2}$$

$$2\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\ln(ab)$$

$$\ln\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{9}\right)=\ln(ab)$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{9}=ab$$

$$a^2+2ab+b^2=9ab$$

$$a^2-7ab+b^2=0$$

نقسم على $b^2$:

$$\frac{a^2}{b^2}-\frac{7a}{b}+1=0$$

نفرض $x=\frac{a}{b}$:

$$x^2-7x+1=0$$

$$\Delta=49-4(1)(1)=45$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

$$x_1=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

يوجد قيمتين للمقدار $\frac{a}{b}$.

## تدرب 49

$$e^{x^2-2}\leq e^{4-x}$$

$$E=\mathbb{R}$$

$$x^2-2\leq 4-x$$

$$x^2+x-6\leq 0$$

$$x^2+x-6=0$$

$$\Delta=1-4(1)(-6)=25$$

$$x_1=\frac{-1+5}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-1-6}{2}=-\frac{7}{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{7}{2}$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-6$ | $++++0$ | $----$ | $0$ | $++++$ |
| $\geq 0$ | مقبول | غير مقبول | | مقبول |

$$S=]-\infty,-\frac{7}{2}]\cup[2,+\infty[$$

$$e^{2x^2-1}\geq 3$$

$$E=\mathbb{R}$$

$$2x^2-1\geq \ln(3)$$

$$2x^2-1=\ln(3)$$

$$2x^2=\ln(3)+1$$

$$x^2=\frac{\ln(3)+1}{2}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}}$ | $\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $2x^2-1-ln3$ | $++++0$ | $----$ | $0$ | $++++$ |
| $\geq 0$ | مقبول | غير مقبول | | مقبول |

$$S=]-\infty,-\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}}]\cup[\sqrt{\frac{\ln(3)+1}{2}},+\infty[$$

$$4e^{2x}-e^{x}+2=0$$

$$E=\mathbb{R}$$

نفرض $e^x=t$

$$4t^2-t+2=0$$

$$\Delta=1-4(4)(2)=1-32=-31<0$$

مستحيلة.

$$e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$$

$$E=\mathbb{R}$$

نفرض $e^{-x} = t$

$$t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$(t-6)(t-1) = 0$$

إما:

$$t = 6$$

$$e^{-x} = 6$$

$$\Rightarrow -x = \ln(6) \Rightarrow x = -\ln(6)$$

أو:

$$t = 1 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

والحلان مقبولان في شرط الحل.

$$e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$$

$$E = \mathbb{R}$$

نفرض $e^x = t$:

$$t^3 - 3t - 2 < 0$$

بالقسمة على $t+1$ نجد:

$$t^3 - 3t - 2 = (t+1)(t^2 - t - 2)$$

وبالتالي:

$$(t+1)(t^2 - t - 2) < 0$$

$$(t+1)(t+1)(t-2) < 0$$

$$(t+1)^2(t-2) < 0$$

بما أن $(t+1)^2$ موجب فالإشارة من إشارة $(t-2)$:

$$t - 2 < 0$$

$$t < 2$$

$$e^x < 2$$

$$x < ln2$$

$$S = ]-\infty, ln2[$$

$$e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$$

$$E = \mathbb{R}$$

$$e(e^{3x} + 4e^{2x} - 5e^x) = 0$$

نفرض $t = e^x$:

$$t^3 + 4t^2 - 5t = 0$$

$$t(t^2 + 4t - 5) = 0$$

إما:

$$t = 0 \Rightarrow e^x = 0 \text{ مستحيلة}$$

أو:

$$t^2 + 4t - 5 = 0$$

$$(t+5)(t-1) = 0$$

إما:

$$t = -5 \text{ مستحيلة}$$

أو:

$$t = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{e^{-x} - 1}{e^x - 1} = -2$$

شرط الحل:

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$E = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$e^{-x} - 1 = -2e^x + 2$$

نضرب بـ $e^x$:

$$1 - e^x = -2e^{2x} + 2e^x$$

$$2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$$

نفرض $e^x = t$:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(2)(1) = 1$$

$$t_1 = \frac{3+1}{2(2)} = 1$$

$$\Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ مرفوض}$$

$$t_2 = \frac{3-1}{2(2)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\ln(2) \text{ مقبول}$$

## تدرب 50

$$\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$$

$$3 \times 2^x < 2^x + 1$$

$$-2 \times 2^x + 1 > 0$$

$$-2 \times 2^x > -1$$

$$2^x < \frac{1}{2}$$

$$x\ln(2) < -\ln(2)$$

$$x < -1$$

$$S = ]-\infty, -1[$$

$$4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$$

$$E = \mathbb{R}$$

$$2^{2x} + 2^x.2 - 3 \leq 0$$

نفرض $t = 2^x$:

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0$$

إما:

$t = -3$ مرفوض

أو:

$$t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x\ln 2 = 0$$

$$x = 0$$

$$S = [0, +\infty[$$

$$4e^{2x} - e^x + 2 = 0$$

نفرض $e^x = t$:

$$4t^2 - t + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(4)(2) = -31 < 0$$

مستحيلة.

$$2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geq 0$$

نفرض $t = 2^x$:

$$2t - 10t + 12 \geq 0$$

$$-8t \geq -12$$

$$t \leq \frac{3}{2}$$

$$2^x \leq \frac{3}{2}$$

$$x\ln(2) \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$x \leq \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln(2)}$$

$$S = ]-\infty, \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln(2)}]$$

$$3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \geq 7$$

نضرب المتراجحة بـ $3^x$:

$$3.3^{2x} + 2 \geq 7 \times 3^x$$

نفرض $t = 3^x$:

$$3t^2 - 7t + 2 \geq 0$$

$$3t^2 - 7t + 2 = 0$$

$$\Delta = 49 - (4)(3)(2) = 25$$

$$t_1 = \frac{7+5}{6} = 2 \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

$$t_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -1$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3.3^{2x} - 7.3^x + 2$ | $+++$ | $0$ | $---$ | $0$ | $+++$ | | |
| $0 >$ | مقبول | | غير مقبول | | مقبول | | |

## تدرب 51

$$\begin{cases} 3^{x+y}=9 \\ 3^x+3^y=4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^x.3^y=9 \\ 3^x+3^y=4\sqrt{3} \end{cases}$$

من 1 نجد:

$$3^x=\frac{9}{3^y}$$

نعوض في 2:

$$\frac{9}{3^y}+3^y=4\sqrt{3}$$

$$\frac{9+3^{2y}}{3^y}=4\sqrt{3}$$

$$3^{2y}-4\sqrt{3}\times 3^y+9=0$$

نفرض $3^y=t$:

$$t^2-4\sqrt{3}t+9=0$$

$$\Delta=48-4(1)(9)=12$$

$$t_1=\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 3^y=\ln(3\sqrt{3})\Rightarrow yln(3)=\ln(3\sqrt{3})$$

$$y=\frac{\ln(3\sqrt{3})}{\ln(3)}$$

وبالتالي تكون $x$:

$$3^x=\frac{9}{3^y}=\frac{9}{3\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow xln(3)=2\ln(3)\Rightarrow x=2$$

وممكن أن يكون العكس أيضاً.

$$\begin{cases} e^x-\frac{1}{2}e^y=1 \\ 2e^x+e^y=4+e \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى بـ $-2$:

$$\begin{cases} -2e^x+e^y=-2 \\ 2e^x+e^y=4+e \end{cases}$$

نجمع:

$$2e^y=2+e$$

$$e^y=\frac{2+e}{2}$$

$$y=\ln\left(\frac{2+e}{2}\right)$$

نعوض في 2:

$$2e^x+\frac{2+e}{2}=4+e$$

$$2e^x=4+e-\frac{2+e}{2}$$

$$2e^x=\frac{8+2e-2-e}{2}$$

$$2e^x=\frac{6+e}{2}$$

$$e^x=\frac{6+e}{4}$$

$$x=\ln\left(\frac{6+e}{4}\right)$$

$$\begin{cases} e^{4x}e^y=\frac{1}{e^2} \\ xy=-2 \end{cases}$$

بالمعادلة الأولى نجد:

$$e^{4x+y}=e^{-2}$$

$$4x+y=-2$$

ومن المعادلة الثانية نجد:

$$y=-\frac{2}{x}$$

نعوض في المعادلة الأولى:

$$4x-\frac{2}{x}=-2$$

$$\frac{4x^2-2}{x}=-2$$

$$4x^2+2x-2=0$$

$$\Delta=4-4(4)(-2)=36$$

$$x_1=\frac{-2+6}{8}=\frac{1}{2}\Rightarrow y_1=-4$$

$$x_2=\frac{-2-6}{8}=-1\Rightarrow y_2=2$$

## تدرب 53

$$y'+5y=0$$

$$A(-2,1)$$

$$y'=-5y$$

$$y=k.e^{-5x}$$

ولدينا:

$$f(-2)=1$$

$$\Rightarrow k.e^{10}=1\Rightarrow k=\frac{1}{e^{10}}=e^{-10}$$

## الجلسة 15+16+17+18+19

### التكامل

1) لدينا:

$$F(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+1}$$

$$G(x)=\frac{2x^2+\lambda x+5}{2x+2}$$

$$F(x)-G(x)=$$

$$=\frac{x^2+3x+1}{x+1}-\left(\frac{2x^2+\lambda x+5}{2x+2}\right)$$

$$=\frac{2x^2+6x+2-2x^2-\lambda x-5}{2x+2}$$

$$=\frac{(6-\lambda)x-3}{2x+2}$$

ليتم المطلوب يجب أن يكون

$$6-\lambda=-3$$

$$\Rightarrow 6+3=\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda=9$$

$$\Rightarrow \frac{-3x-3}{2x+2}=\frac{-3(x+1)}{2(x+1)}$$

$$=-\frac{3}{2}$$

2) $F(x)=\lambda-2\cos^2 x$

$$G(x)=-2\cos^2 x$$

$$F(x)-G(x)$$

$$=\lambda-2\cos^2 x+2\cos^2 x$$

$$=\lambda$$

إذن يجب أن تكون عدد حقيقي ما أي:

$$\lambda\in\mathbb{R}$$

3) $\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2+x}.dx$

نفرض:

$$H=x^2+x$$

$$H'=2x+1$$

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{2}(2x+1)e^{x^2+x}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 H'.e^H.dx$$

$$=\frac{1}{2}[e^H]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(e^1-e^0)=\frac{e-1}{2}$$

4) لدينا:

نفرض:

$$H=x^2-9$$

$$H'=2x$$

$$f(x)=x(x^2-9)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2x(x^2-9)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^2-9}$$

5) لدينا:

$$\int_1^0 x^3\sqrt{(x^2+1)^2}.dx$$

$$=\int_1^0 x^3(x^2+1).dx$$

$$=\int_1^0 x^5+x^3.dx$$

$$=\left[\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}\right]_1^0=0-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{-4-6}{24}=-\frac{10}{24}$$

6) لدينا:

$$\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}.dx$$
$$=\int_1^e \frac{1}{x}+\frac{1}{x}\ln(x).dx$$

نفرض:

$$H=\ln(x)$$
$$H'=\frac{1}{x}$$
$$\int_1^e \frac{1}{x}+H'.H.dx$$
$$=\left[\ln|x|+\frac{H^2}{2}\right]_1^e$$
$$=\left[\ln|x|+\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e$$
$$=\ln(e)+\frac{\ln^2(e)}{2}-\left[\ln(1)+\frac{\ln^2(1)}{2}\right]$$
$$=1+\frac{1}{2}-0=\frac{3}{2}$$

7) لدينا:

$$\int_1^e \frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{x}.dx$$
$$=\int_1^e \frac{1}{x}-\frac{1}{x}\ln(x).dx$$

نفرض:

$$H=\ln(x)$$
$$H'=\frac{1}{x}$$
$$=\int_1^e \frac{1}{x}-H'.H.dx$$
$$=\left[\ln(x)-\frac{H^2}{2}\right]_1^e$$
$$=\left[\ln(x)-\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e$$
$$=\ln(e)-\frac{\ln^2(e)}{2}-0=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

8) لدينا:

$$\int_1^e \left(\frac{\ln^2(x)+2\ln(x)+2}{x}\right)dx$$
$$=\int_1^e \left(\frac{1}{x}\ln^2(x)+2\frac{1}{x}\ln(x)+\frac{2}{x}\right)dx$$

نفرض:

$$H^2=\ln^2(x)$$
$$H'=\frac{1}{x}$$

ونفرض:

$$H=\ln(x)$$
$$H'=\frac{1}{x}$$
$$=\int_1^e \left(H'.H^2+2H'.H+\frac{2}{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{H^3}{3}+2\frac{H^2}{2}+2\ln(x)\right]_1^e$$
$$=\left[\frac{\ln^3(x)}{3}+\frac{2\ln^2(x)}{2}+2\ln(x)\right]_1^e$$
$$=\frac{\ln^3(e)}{3}+\ln^2(e)+2\ln(e)-0$$
$$=\frac{1}{3}+1+2=\frac{10}{3}$$

9) لدينا:

$$\int_{e^2}^{e^3}\left(\frac{1}{x\sqrt{\ln(x)-1}}\right)dx$$
$$=\int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{x}(\ln(x)-1)^{-\frac{1}{2}}.dx$$

نفرض:

$$H=\ln(x)-1$$
$$H'=\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow\int_{e^2}^{e^3}H'(H)^{-\frac{1}{2}}.dx$$
$$=\left[\frac{H^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{e^2}^{e^3}=2[\ln(x)-1]_{e^2}^{e^3}$$
$$=2[3-1-(2-1)]$$
$$=2(2-1)=2$$

10) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\ .dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x-1)\,dx$$
$$=[\tan x-x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=1-\frac{\pi}{4}-0=\frac{4-\pi}{4}$$

11) لدينا:

$$\int_0^k (x^2+x)dx=\frac{5}{6}$$
$$\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^k=\frac{5}{6}$$
$$\frac{k^3}{3}+\frac{k^2}{2}-0=\frac{5}{6}$$

$$\frac{2k^3+3k^2}{6}=\frac{5}{6}$$
$$2k^3+3k^2-5=0$$

يجب أن يكون المجموع صفر بالتالي $k=1$

(بالتجريب).

12) لدينا:

$$0\le x\le a$$

نضيف 1:

$$1\le x+1\le a+1$$

نقلب:

$$1\ge\frac{1}{x+1}\ge\frac{1}{a+1}$$

نكامل بالنسبة:

$$\int_0^a 1\,dx\ge\int_0^a\frac{1}{x+1}dx\ge\int_0^a\frac{1}{a+1}dx$$

$$a\ge\ln(a+1)\ge\frac{a}{a+1}$$

نقسم على $a$:

$$1\ge\frac{\ln(a+1)}{a}\ge\frac{1}{a+1}$$

13) لدينا:

$$\int_1^0\frac{x}{e^x}\,dx$$
$$=\int_1^0 xe^{-x}\,dx$$
$$u=x\to u'=1$$
$$v'=e^{-x}\to v=-e^{-x}$$
$$\Rightarrow=[-xe^{-x}]_1^0+\int_1^0-e^{-x}\,dx$$
$$=[-xe^{-x}]_1^0-[e^{-x}]_1^0$$
$$=0+\frac{1}{e}-1+\frac{1}{e}=\frac{2-e}{e}$$

14) لدينا:

$$\int_0^{\pi}(wx+1)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$$
$$u=2x+1\to u'=2$$
$$v'=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\to v=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[(2x+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}[(2\pi+1)(1)-0]+\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}$$
$$=\pi+\frac{1}{2}+0-1=\pi-\frac{1}{2}$$

15) لدينا:

$$\int_1^e\frac{1+\ln(x)}{x^2}\,dx$$
$$=\int_0^e(1+\ln(x))x^{-2}\,.dx$$
$$=\int_0^e(x^{-2}+x^{-2}\ln(x))\,dx$$
$$\int_0^e x^{-2}+\int_0^e\underbrace{x^{-2}\ln(x)}_{\text{بالتجزئة}}\,.dx$$
$$u=\ln(x)\to u'=\frac{1}{x}$$
$$v'=x^{-2}\to v=-\frac{1}{x}$$
$$=\int_0^e x^{-2}+\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_0^e-\int_0^e-\frac{1}{x^2}$$
$$=\int_0^e x^{-2}+\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_0^e+\int_0^e x^{-2}$$
$$=2\int_0^e x^{-2}+\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_0^e$$
$$=2\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_0^e+\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_0^e$$
$$=2\left[-\frac{1}{e}+1\right]+\left[-\frac{1}{e}+0\right]$$
$$=-\frac{2}{e}+2-\frac{1}{e}=\frac{-3+2e}{e}$$

16) لدينا:

$$\int_1^e\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3\ln(x)}{x^2}\right)dx$$

$$I_1=\int_1^e x^{-2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e=-\frac{1}{e}+1=\frac{e-1}{e}$$

$$I_2=3\int_1^e x^{-2}\ln(x)\,dx$$

$$u=\ln(x)\to u'=\frac{1}{x}$$

$$v'=x^{-2}\to v=-\frac{1}{x}$$

$$I_2=\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e+\int_1^e x^{-2}\,ex$$

$$I_2=\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e+I_2$$

نعوض في التكامل الكلي:

$$\int_1^e \left(\frac{1}{x^2}-\frac{3\ln(x)}{x^2}\right)dx = I_1 - \left[\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e + I_2\right]$$

$$= \left[\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^e = \frac{1}{e}$$

17) لدينا:

$$I = \int_0^1 x^2 e^x \,.dx$$

$$u = x^2 \to u' = 2x$$

$$v' = e^x \to v = e^x$$

$$= [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{2x.e^x}_{J}$$

$$J = \int_0^1 2x.e^x \,.dx$$

$$u = 2x \to u' = 2$$

$$v' = e^x \to v = e^x$$

$$J = [2x.e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x$$

$$= [2e-0] - [2e^x]_0^1$$

$$= 2e - 2e + 2 = 2$$

$$\Rightarrow I = [x^2.e^x]_0^1 - 2$$

$$= e - 2$$

18) محلول

19) لدينا:

$$\int_1^{e^2} \left(\frac{1}{x(\ln(x)-1)}\right).dx$$

$$= \int_1^{e^2} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)-1}\,.dx$$

$$= [\ln|ln(x)-1|]_1^{e^2}$$

$$= \ln|ln(e^2)-1| - \ln|\ln(1)-1|$$

$$= \ln(2-1) - 0 = 0$$

20) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x).\sin(2x)\ .dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x).2\sin(x).\cos(x)\ .dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2(x).\sin(x).dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -(2\cos^2(x)\,(-\sin(x)).dx$$

نفرض:

$$H = cos(x)$$

$$H' = -\sin(x)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -2H^2.H'.dx$$

$$= -2\left[\frac{H^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -2\left[\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -2\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}-8}{12}$$

21) لدينا:

$$\int_0^{\pi} \sin^3(x)\,.dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^2(x).\sin(x).dx$$

$$= \int_0^{\pi} (1-\cos^2(x)).\sin(x).dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x).dx$$

نفرض:

$$H = \cos(x)$$

$$H' = -\sin(x)$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x) - H'.H^2.dx$$

$$= \left[-\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \left(-1+\frac{1}{3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

22) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\,.dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x))^2\,.\cos(x)\,.dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))^2.\cos(x)\,.dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin(x)+\sin^2(x)).\cos(x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) - 2\cos(x)\sin(x) + \cos(x)\sin^2(x)$$

نفرض:

$$H = \sin(x)$$
$$H' = \cos(x)$$

$$= \left[\sin(x) - \frac{2\sin^2(x)}{2} + \frac{\sin^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{1}{3}$$

23) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\cos^2(x)}\,.dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4(1-\cos^2(x)}\,.dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2(x)}\,.dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2|\sin(x)|.dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(x).dx$$

$$= [2\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - 2 = -2$$

24) لدينا:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2-2\cos(x)}\,dx$$

$$\sqrt{2-2\cos(x)} = \sqrt{2(1-\cos(x))} = \sqrt{2.2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= 2\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2-2\cos(x)}\,dx = \int_0^{\pi} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{2}{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} = -4\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= -4\,(0-1) = 4$$

25) لدينا:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin(2x)}.dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{2\sin(x).\cos(x)}.dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(-\sin^2(x))}{\cos(x).\sin(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos(x).\sin(x)}.dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(-\sin(x))}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.dx$$

$$= \frac{1}{2}[-\ln|cos(x)| + \ln|sin(x)|]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{sin(x)}{cos(x)}\right|\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\ln|tan(x)|^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\ln\sqrt{|\tan(x)|}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln(1) - \ln(\sqrt{3}) = -\ln(\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}\ln(3)$$

26) لدينا:

$$\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.dx$$

نفرض:

$$H = e^x + e^{-x}$$
$$H' = e^x - e^{-x}$$
$$= [\ln(e^x + e^{-x})]_0^1$$
$$= \ln(e^1 + e^{-1}) - \ln(1+1)$$
$$= \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - \ln(2)$$
$$= \ln\left(\frac{e}{2} + \frac{1}{2e}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{e^2+1}{2e}\right)$$

27) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}.dx$$

نفرض:

$$H = \cos(x) + \sin(x)$$
$$H' = \cos(x) - \sin(x)$$
$$= [\ln|cos(x) + sin(x)|]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \ln(0+1) - \ln(1+0) = 0$$

28) لدينا:

$$F(x) = (ax+b)e^{-x}$$
$$f(x) = \frac{5x-4}{e^x}$$

نشتق $F$ :

$$F'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x}$$
$$= e^{-x}(a - ax - b)$$
$$= \frac{a - ax - b}{e^x}$$

نقارن بين $F'$ و $f$ :

$$\Rightarrow a - ax - b = 5x - 4$$
$$\Rightarrow a = -5$$
$$\Rightarrow -5 - b = -4$$
$$\Rightarrow b = -1$$

29) لدينا:

$$F(x) = P(x)e^{2x}$$
$$f(x) = x^3 e^{2x}$$

نعلم أن:

$$F'(x) = f(x)$$

فنجد أن:

$$\deg P(x) = 3$$

30) لدينا:

$$\int_1^3 |2x-4|.\,dx$$

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

| $x$ | $-\infty$ | 1 | 2 | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x-4$ | $----$ | | $++++$ | | |
| $\backslash 2x-4\vert$ | $-2x+4$ | | $2x-4$ | | |

$$\Rightarrow \int_1^2 -2x+4 + \int_2^3 2x-4$$
$$= [-x^2+4x]_1^2 + [x^2-4x]_2^3$$
$$= (-4+8) - (-1+4) + (9-12) - (4-8)$$
$$= -4+8+1-4+9-12-4+8 = 2$$

31) لدينا:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max(cos(x), sin(x)).\,dx$$

$$\sin(x) = \cos(x)$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $max$ | $\cos(x)$ | | $\sin(x)$ |

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)$$
$$= [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) - \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

32) لدينا:

$$\int_0^1 \min(x^2, x)$$
$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0$$
$$\Rightarrow x(x-1) = 0$$

إما:

$$x = 0$$

أو:

$$x = 1$$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $min$ | $x$ | |

$$\Rightarrow \int_0^1 x.\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

33) لدينا:

$$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x)$$
$$= e^x(\cos(x) - \sin(x))$$
$$f''(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) + (-\sin(x) - \cos(x))e^x$$
$$= e^x[-2\sin(x)]$$

نعوض:

$$f(x) = af'(x) + bf''(x)$$
$$e^x \cos(x) = a[e^x(\cos(x) - \sin(x))] + b[e^x(-\sin(x)]$$
$$\cos(x) = a\cos(x) - a\sin(x) - 2bsin(x)$$
$$\cos(x) = a\cos(x) + \sin(x)\,(-a - 2b)$$

بالمقارنة نجد:

$$a = 1$$
$$-a - 2b = 0$$
$$-1 - 2b = 0$$
$$b = -\frac{1}{2}$$

34) لدينا:

$$f''(x) = af'(x) + bf(x)$$
$$f'(x) = e^x \sin(2x) + 2\cos(2x)\,e^x$$
$$= e^x(\sin(2x) + 2\cos(2x))$$
$$f''(x) = e^x(\sin(2x) + 2\cos(2x)) + (2\cos(2x) - 4\sin(2x))e^x$$
$$= e^x[-3\sin(2x) + 4\cos(2x)]$$

نعوض:

$$-3\sin(2x) + 4\cos(2x) = a(\sin(2x) + 2\cos(2x)) + bsin(2x)$$

$$= a\sin(2x) + 2a\cos(2x) + b\sin(2x)$$

بالمقارنة نجد:

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$a + b = -3 \Rightarrow b = -5$$

وبالتالي:

$$f''(x) = 2f'(x) - 5f(x)$$

نكامل الطرفين:

$$f'(x) = 2f(x) - 5F(x)$$

$$-5F(x) = f'(x) - 2f(x)$$

$$F(x) = -\frac{1}{5}f'(x) + \frac{2}{5}f(x)$$

35) **الجواب:**

لدينا:

$$g'(x)$$

$$= \frac{3(1+\tan^2 x)(1+\tan(x)) - (1+\tan^2 x)(3tanx - 1)}{(tanx+1)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan^2 x)[3 + 3\tan x - 3\tan x + 1]}{(1+tanx)^2}$$

$$= \frac{4 + 4\tan^2 x}{(1+tanx)^2}$$

36) **الجواب:**

لدينا:

$$g'(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$$

37) لدينا:

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos(x) \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

نشتق الأطراف:

$$-x \le -\sin(x) \le -x + \frac{x^3}{6}$$

نضرب بـ $-1$:-

$$x \ge \sin(x) \ge x - \frac{x^3}{6}$$

## الجلسة 20 + 21

### المتتاليات

1) لدينا:

$$u_n = \frac{10^n\left(10 + \frac{1}{10^n}\right)}{10^n\left(1 + \frac{1}{10^n}\right)}$$

$$\lim u_n = \frac{10}{1} = 10$$

2) لدينا:

$$\lim u_n = 0 - 0 + \infty = +\infty$$

3) لدينا:

$$u_{v_n} = \cos\left(\frac{\pi^{n+1}}{3.\pi^n + 3}\right)$$

$$\lim u_n = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

حسب المسيطر

### ثلاثة حدود متعاقبة

1) **الجواب:**

$$a + b + c + c = 27$$
$$\Rightarrow 2b + b + c = 27$$
$$\Rightarrow 3b + c = 27$$

2) **الجواب:**

$$\left.\begin{matrix} b = 2aq \\ c = 2aq^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2a + 2aq + 2aq^2 = 14$$
$$\Rightarrow 2a + 4a + 8a = 14$$
$$\Rightarrow 14a = 14 \Rightarrow a = 1$$

نختار الحدود المتزايدة:

$$a = 1 \ , \quad b = 4 \ , \quad c = 9$$

3) **الجواب:**

$$k^2 = 1\left(k - \frac{2}{9}\right) = k - \frac{2}{9}$$
$$\Rightarrow k^2 - k + \frac{2}{9} = 0$$
$$\Rightarrow \left(k - \frac{2}{3}\right)\left(k - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

4) نعلم أن $a + b + c = 3b$

$$S = 3u_3 + 3u_{11} = 3(u_3 + u_{11}) = 3(60) = 180$$

5) لدينا:

$$a.b.c = 216$$
$$b^2 = a.c$$
$$b^3 = 216 \Rightarrow b = 6$$

6) حاول تقليص عدد المجاهيل :

$$u_3 = u_0 + 3r$$
$$u_2 = u_0 + 2r$$
$$u_5 = u_0 + 5r$$

نعوض :

$$2u_0 + 3r = 18$$
$$2u_0 + 7r = 34$$

بالطرح :

$$4r = 16$$
$$r = 4$$

و بالتالي $u_0 = 3$

و عليه يكون $u_n = 3 + 4n$

7) **الجواب:**

$$b = aq \ , \ c = aq^2$$

من الحسابية:

$$2B = A + C$$
$$\Rightarrow 10b = 12a + 2c$$

نعوّض 2 ، 1 ، نقسم على $a$ :

$$10aq = 12a + 2aq^2$$
$$\Rightarrow 10q = 12 + 2q^2$$
$$\Rightarrow 2q^2 - 10q + 12 = 0$$
$$\Rightarrow q^2 - 5q + 6 = 0$$
$$\Rightarrow (q-3)(q-2) = 0$$
$$\Rightarrow q = 3 \ , \ q = 2$$

8) لدينا:

$$b^3 = 216 \Rightarrow b = 6$$

نعوض في الأخرى:

$$a + c = 21 - 6 = 15$$

9) لدينا:

$$(a+r)^2 = 1 + a(a+2r)$$
$$a^2 + 2ar + r^2 = 1 + a^2 + 2ar$$
$$r^2 = 1$$
$$r = 1$$

10) لدينا:

$$2(2a+1) = a + 2 + a^2 - 4$$
$$4a + 2 = a + a^2 - 2$$
$$a^2 - 3a - 4 = 0$$
$$(a-4)(a+1) = 0$$
$$a = 4 \, , a = -1$$

نختار $a = 4$ لأن المتتالية متناقصة

11) لدينا:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 9$$
$$2u_2 + u_2 = 9$$
$$u_2 = 3$$

لدينا:

$$u_{10} + u_{11} = 40$$
$$u_2 + 8r + u_2 + 9r = 40$$
$$17r = 34$$
$$r = 2$$

12) نفس رقم 10 بس غير حرف

13) لدينا:

$$2(3b) = 4a + 2c$$
$$6b = 4a + 2c$$

ولدينا $b = aq \, , c = aq^2$:

$$6aq = 4a + 2aq^2$$
$$aq^2 - 3aq + 2a = 0$$
$$q^2 - 3q + 2 = 0$$
$$(q-2)(q-1) = 0$$

$q = 2$ مقبول

$q = 1$ مرفوض

14) لدينا:

$$u_3 - 3u_5 = -42$$
$$u_2 + r - 3(u_2 + 3r) = -42$$
$$-2u_2 - 8r = -42$$
$$-8r = -42 + 10$$
$$r = 4$$

## المتتاليات المعرفة بالتدريج

1) بملاحظة أن $E(0): 0 < 1 < 2$ محققة

و أن

$$E(n): 0 < u_n < 2$$
$$0 < u_n^2 < 4$$
$$0 < \frac{1}{2}u_n^2 < 2$$
$$2 < 2 + \frac{1}{2}u_n^2 < 4$$
$$0 < \sqrt{2} < \sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2} < 2$$
$$0 < u_{n+1} < 2$$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة

و بالتالي $E(n)$ صحيحة مهما تكن n

2) **الجواب:**

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4$$
$$= \left(\sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2}\right)^2 - 4$$
$$= 2 + \frac{1}{2}u_n^2 - 4$$
$$= \frac{1}{2}u_n^2 - 2$$
$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n^2 - 2}{u_n^2 - 4} = \frac{\frac{1}{2}u_n^2 - 2}{2\left(\frac{1}{2}u_n^2 - 2\right)} = \frac{1}{2} = q$$

3) **الجواب:**

$$v_0 = u_0^2 - 4 = 1^2 - 4 = -3$$

4) **الجواب:**

$$v_n = (q)^n . v_0 \quad \Rightarrow v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5) **الجواب:**

$$u_n^2 = v_n + 4 = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$$

$$\Rightarrow u_n = \sqrt{4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

6) **الجواب:**

$$w_0 = v_0 - u_0 = 3 - (-1) = 4$$

7) **الجواب:**

$$w_{n+1} = 3av_n + (1-3a)u_n - (3au_n + (1-3a)v_n)$$
$$= 3av_n + (1-3a)u_n - 3au_n - (1-3a)v_n$$
$$= 3a(v_n - u_n) + (1-3a)(u_n - v_n)$$
$$= 3aw_n - (1-3a)(v_n - u_n)$$
$$= 3aw_n - (1-3a)w_n$$
$$\Rightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{w_n(3a - (1-3a))}{w_n}$$
$$= 3a - 1 + 3a = 6a - 1$$

8) **الجواب:**

$$w_n = w_0 . q^n = 4(6a-1)^n$$

9) **الجواب:**

$$X_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 2u_n - 4 - 4 = 2u_n - 8$$

نشكّل النسبة:

$$\frac{X_{n+1}}{X_n} = \frac{2u_n - 8}{u_n - 4} = \frac{2(u_n - 4)}{u_n - 4} = 2$$

وبالتالي المتتالية $X_n$ هندسية أساسها:

$$q = 2$$

10) **الجواب:**

$$X_n = X_0(q)^n = -3(2)^n$$

11) **الجواب:**

$$u_n = X_n + 4 = -3(2)^n + 4$$

12) **الجواب:**

$$v_n = u_{n+1} - 4u_n$$
$$v_{n+1} = u_{n+2} - 4u_{n+1}$$
$$= 7u_{n+1} - 12u_n - 4u_{n+1}$$
$$= 3u_{n+1} - 12u_n$$
$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3(u_{n+1} - 4u_n)}{u_{n+1} - 4u_n} = 3$$

13) **الجواب:**

$$y_n = u_{n+1} - 3u_n$$
$$y_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1}$$
$$= 7u_{n+1} - 12u_n - 3u_{n+1}$$
$$= 4u_{n+1} - 12u_n$$
$$\Rightarrow \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{4u_{n+1} - 12u_n}{u_{n+1} - 3u_n}$$
$$= \frac{4(u_{n+1} - 3u_n)}{u_{n+1} - 3u_n} = 4$$

وبالتالي المتتالية $y_n$ هندسية أساسها:

$$q = 4$$

14) **الجواب:**

الحد العام:

$$v_n = -3^{n+1} \quad , \quad y_n = -4^n$$
$$v_n = u_{n+1} - 4u_n$$
$$\Longrightarrow 4u_n = u_{n+1} - v_n$$
$$\Longrightarrow 4u_n = y_n + 3u_n - v_n$$
$$\Longrightarrow u_n = -4^n + 3^{n+1}$$

15) **الجواب :**

$$S = 1 + 2 + 4 + .. + 1024$$
$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$$
$$S = 1\frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 2047$$
$$\rightarrow 2s = 4094$$
$$\rightarrow 2s + 2000 = \boxed{6094}$$

16) **الجواب:**

$$t_n = x_n . y_n$$

نشكّل الفرق:

$$t_{n+1} - t_n = x_{n+1} . y_{n+1} - x_n . y_n$$
$$= \left(\frac{2x_n . y_n}{x_n + y_n}\right)\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right) - x_n . y_n = 0$$

وبالتالي المتتالية $t_n$ ثابتة.

17) **الجواب:**

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n . y_n}{x_n + y_n} - x_n$$
$$= \frac{2x_n . y_n - x_n(x_n + y_n)}{x_n + y_n} = \frac{2x_n y_n - x_n^2 - x_n y_n}{x_n + y_n}$$
$$= \frac{x_n y_n - x_n^2}{x_n + y_n} = \frac{x_n(y_n - x_n)}{x_n + y_n} < 0$$
$$; \quad y_n - x_n < 0$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{x_n + y_n}{2} - y_n = \frac{x_n + y_n - 2y_n}{2}$$
$$= \frac{x_n - y_n}{2}$$ متزايدة

18) الجواب :

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n - \frac{b}{a-1}$$
$$u_n = \left(7 - \frac{18}{9}\right)10^n + 2$$
$$u_n = 5 \times 10^n + 2$$

19) **الجواب :**

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n - \frac{b}{a-1}$$
$$u_n = \left(0 - \frac{4}{2}\right)3^n + 2$$
$$u_n = -2 \, . 3^n + 2 = 2(1 - 3^n)$$

20) الجواب:

نحل المعادلة $f(x) = x$

$$2x + 3 = x$$
$$x = -3 = l$$

$$v_n = u_n - l$$
$$v_n = u_n + 3$$

$$\alpha = 3$$

21) الجواب :

$$f(x) = x$$
$$-\frac{1}{3}x + 1 = x$$
$$\frac{4}{3}x = 1$$
$$x = \frac{3}{4} = l$$
$$v_n = u_n - \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \frac{3}{4}$$

22) **الجواب:**

$$u_{n+1} = \frac{nu_n + 4}{n+1}$$
$$v_n = nu_n$$

$$v_{n+1} = (n+1)(v_n + 1) = (n+1)\left(\frac{nu_n + 4}{n+1}\right)$$
$$= nu_n + 4$$
$$\Longrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{nu_n + 4}{nu_n}$$
$$v_{n+1} - v_n = nu_n + 4 - nu_n = 4$$

وبالتالي المتتالية $v_n$ حسابية أساسها:

$$r = 4$$

23) **الجواب:**

$$w_{n+1} = x_{n+1} + 2y_{n+1}$$
$$= \frac{1}{3}(y_n + 2x_n) + \frac{1}{3}(x_n + 5y_n)$$
$$= \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_n + \frac{5}{3}y_n$$
$$= \frac{6}{3}y_n + \frac{3}{3}x_n = 2y_n + x_n$$
$$\Longrightarrow w_{n+1} - w_n = 2y_n + x_n - x_n - 2y_n = 0$$

وبالتالي المتتالية $w_n$ ثابتة.

24) نضع الأمثال:

$$\alpha - 2 > 0$$

$$\alpha > 2$$

وبالتالي حسب الخيارات $\alpha = 3$.

25) **الجواب:**

$$u_{n+1} - u_n = 0$$

$$\frac{3}{2}a\,u_n + \frac{a+1}{3} - u_n = 0$$

$$\frac{3}{2}a(2) + \frac{a+1}{3} - 2 = 0$$

$$3a + \frac{a+1}{3} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{1}{3} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{10a}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow 10a = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

26) لدينا:

$$v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{3u_n}{u_n + 1}}$$

$$= 1 - \frac{2u_n + 2}{3u_n} = \frac{u_n - 2}{3u_n}$$

نشكل النسبة:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_n - 2}{3u_n}}{\frac{u_n - 2}{u_n}} = \frac{1}{3} = q$$

27) لدينا:

$$u_{n+1} + 5t_{n+1} = 3u_n + 5t_n + 5u_n + 35t_n$$

$$= 8u_n + 40t_n = 8(u_n + 5t_n)$$

هندسية أساسها $q = 8$

28) لدينا:

$$u_1 = \frac{3}{6}u_0 + 3 = 3 + 3 = 6 = u_0$$

ثابتة.

29) لدينا:

$$t_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2t_n}{3} - \frac{2u_n + t_n}{3}$$

$$== \frac{-u_n + t_n}{3} = \frac{1}{3}(t_n - u_n)$$

هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

30) لدينا:

$$v_n = 5u_n - 6u_{n-1} - 2u_n = 3u_n - 6u_{n-1}$$

$$= 3(u_n - 2u_{n-1}) = 3v_{n-1}$$

هندسية أساسها $q = 3$

31) لدينا:

$$u_0 = 2\cos(2\theta)$$

$$u_1 = \sqrt{2 + 2\cos 2\theta} = \sqrt{2(1 + \cos 2\theta)}$$

$$= \sqrt{2.2\cos^2\theta} = -2\cos\theta$$

لأن $\theta \in ]\pi/2\ ,\pi[$

32) لدينا:

$$v_n = 3u_n - 2u_{n-1} - 2u_n = u_n - 2u_{n-1} = v_n$$

إذن أساسها $q = 1$ وحدها العام:

$$v_n = v_0 q^n = v_0.(1)^n = 1(1)^n = (1)^n$$

33) لدينا:

$$(n+1)\ln(n+1)$$

نعرف التابع $f$:

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1)\ ;x > -1$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 0\ ,\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \ln(x+1) + 1$$

نعدم:

$$lln(x+1) + 1 = 0$$

$$x + 1 = \frac{1}{e}$$

$$x = \frac{1}{e} - 1$$

$$f\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \left(\frac{1}{e} - 1 + 1\right)\ln\left(\frac{1}{e} - 1 + 1\right) = -\frac{1}{e}$$

جدول تغيرات:

| $x$ | $-1$ | | $\frac{1}{e} - 1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $\|\|$ | $-\ -\ -\ -\ -\ -\ -$ | $0$ | $+\ +\ +\ +\ +\ +\ +$ | |
| $f$ | $\|\|0$ | $\nearrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $+\infty$ |

نلاحظ أن:

$$f(x) \geq -\frac{1}{e}$$

بالتالي $u_n$ محدودة من الأدنى:

$$u_n \geq -\frac{1}{e}$$

## المجاميع

1) **الجواب:**

$$S = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n(1+n)}{2}$$

2) **الجواب:**

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{4n^2}\right) = \frac{1}{4}$$

3) **الجواب: حسابية مع قفزات:**

$$n = \frac{2n-2}{2} + 1 = n - 1 + 1 = n$$
$$S = \frac{n(2n+2)}{2} = n(1+n) = n^2 + n$$

4) **الجواب:**

$$S = \frac{100(1+100)}{2} = 50(101) = 5050$$

5) **الجواب:**

$$S = \frac{14(15+2)}{2} = 119$$

6) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

7) $u_n = \frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{2n^3+1} \to +\infty$

8)

$$u_n = 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 5^3 = \frac{5^2(6)^2}{4} = 225$$

9) $n = 10$

$$S = \frac{10 \times 11 \times 12}{3} = 440$$

10) **الجواب:**

الجواب الصحيح $b$ ذلك أن :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q = \frac{2}{5} < 1$$

لنناقش باقي الخيارات :

الأول حسب معيار الاشتقاق يتضح أنها متزايدة

الثالث : بتشكيل النسبة يتضح أنها متزايدة

الرابع : بما أن الحد الأول سالب لا يجوز استخدام معيار النسبة و بحساب الحدود الأولى .. نجد أنها متزايدة

11) **الجواب:**

$$\frac{10(6+3k)}{2} = 255$$
$$\Rightarrow 60 + 30k = 510$$
$$\Rightarrow 30k = 510 - 60 = 450$$
$$\Rightarrow k = \frac{450}{30} = 15$$

12) **الجواب:**

$$S = -3 - \left[\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \cdots + \frac{3}{4^n}\right]$$

متتالية هندسية أساسها:

$$q = \frac{1}{4}$$

وبالتالي:

$$S = \frac{1-q^n}{1-q}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$\Rightarrow \text{الكامل } S = -3 - \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$
$$= -3 - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$= -4 + \frac{1}{(2^2)^n} = -4 + \frac{1}{2^{2n}}$$

13) **الجواب:**

$$S = 1 - \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \cdots + \frac{1}{9^n}\right]$$

متتالية هندسية أساسها:

$$q = \frac{1}{9}$$

وبالتالي:

$$S = \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1-\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{\frac{8}{9}}\left(\frac{1}{9}\right)$$
$$= \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{8}$$

$$\Rightarrow S = 1 - \left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{8}\right) = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8.9^n}$$
$$= \frac{7}{8} + \frac{1}{8.9^n}$$

14) **الجواب:**

$$S = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\Rightarrow S = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

15) **الجواب:**

$$4^1 + 2 = 4 + 2 = 6$$

مضاعف للعدد 3 .

16) **الجواب:**

$3^{2n} - 2^n = 3^{2(1)} - 2^1 = 9 - 2 = 7$ صحيحة

17)

$$(2^5)^{11} - (5^2)^{11} = (32 - 25)k = 7k$$

18)

$$2(5^{33} - 2^{22}) = 2[(5^3)^{11} - (2^2)^{11}]$$
$$= 2[(125 - 4)k] = 2 \times 121 \times k = 2 \times 11(11k)$$
$$= 2 \times 11 \times k'$$

مضاعف للعدد 11 و زوجي

19)

$$S = (1 + 3 + 5 + \cdots + 99)$$
$$- (2 + 4 + 6 + \cdots + 100)$$
$$S = 2500 - 2550 = -50$$

20)

$$nE(x) \leq E(x) + E(2x) + \cdots + E(nx) \leq nE(nx)$$

$$\underbrace{\frac{E(x)}{n}}_{\text{نهايتها صفر}} \leq u_n \leq \underbrace{\frac{E(nx)}{n}}_{\text{نهايتها } x}$$

لاحظ أن

$$nx - 1 \leq E(nx) \leq nx$$
$$\frac{nx-1}{n} \leq \frac{E(nx)}{n} \leq x$$

و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n \in [0, x]$ و لا يمكن الحكم على نهايتها

(السؤال خاطئ ... أعتذر منكم )

21) **الجواب:**

$$3^5 \geq \frac{1}{3}(2^{5+1}) + \frac{5}{3}(5+1)^2$$
$$\Rightarrow 3^5 \geq \frac{64}{3} + \frac{180}{3}$$
$$\Rightarrow 243 \geq \frac{244}{3}$$
$$\Rightarrow 243 \geq 81.3 \quad \text{محققة}$$

22) نهدف للوصول للطلب والذي هو:

$$E(n+1): (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

لدينا من الفرض:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

نضرب بـ $(1+x)$:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

23) لدينا:

$$E(n+1): 10^{n+1} + 1 = 9k'$$

لدينا من الفرض:

$$10^n + 1 = 9k$$

نضرب ب 10:

$$10^{n+1} + 10 = 90k$$
$$10^{n+1} + 1 = 90k - 9 = 9(10k - 1) = 9k'$$

بالتالي $E(n+1)$ صحيحة.

نختبر حد البدأ:

$$10^0 + 1 = 2$$

غير قابل للقسمة على 9 بالتالي $E(n+1)$ صحيحة فقط.

24) لدينا:

$$E(n+1): n+1 > n+2$$

لدينا من الفرض:

$$n > n+1$$

نضيف 1:

$$n+1 > n+2$$

بالتالي $E(n+1)$ صحيحة. نختبر حد البدأ:

$$0 > 1$$

مستحيلة. إذن $E(n+1)$ صحيحة فقط.

25) لنوجد الأساس:

$$u_{30} - u_{15} = r(30-15)$$
$$15r = 20 - (-10)$$
$$r = 2$$

الآن:

$$S = (u_{15} - 7r) + (u_{15} - 6r) + (u_{15} - 5r)$$
$$+(u_{30} - 10r) + (u_{30} - 9r) + (u_{30} - 8r)$$
$$= 3u_{15} + 3u_{30} - 35r$$
$$= 3(-10) + 3(20) - 35(2) = -40$$

26) لدينا:

$$f(S_0) = \big(9(0) + 10(1), 3(0) + 5(1)\big) = (10,5)$$

27) مجموع متتالية هندسية أساسها $q = 10$ وعدد حدودها 6 وحدها الأول 1:

$$S = \frac{1 - 10^6}{1 - 10} = \frac{-99999}{-9} = 11111$$

28) لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

نضيف ونطرح $\frac{1}{n}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \frac{-2n - 1 + 2n}{2n(2n+1)}$$
$$= \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$$

المتتالية متناقصة تماماً (الخيار C)

29) لدينا:

$u_n$ هندسية أساسها $q = 4$ إذن المتتالية $u_n^2$ أساسها $4^2$ وبالتالي المجموع:

$$S = u_0^2 \frac{1 - 16^{n+1}}{1 - 16}$$

و $u_0$:

$$u_0 = v_0 + 1 = 15$$

نعوض:

$$S_n = 225 \frac{1 - 16^{n+1}}{-15} = 15(16^{n+1} - 1)$$

30) لدينا:

$$S = 3^0 + 3^1 + \cdots + 3^5$$
$$= 1\frac{1 - 3^6}{1 - 3} = \frac{(1 - 3^6)}{-2} = \frac{(1 - 729)}{-2} = 364$$

31) لدينا:

$$\frac{u_3}{u_0} = 2^{3-0} \Rightarrow u_3 = 8$$

نحسب المجموع:

$$u_3 \frac{1 - 2^{n-2}}{1 - 2} = 248$$
$$-8(1 - 2^{n-2}) = 248$$
$$1 - 2^{n-2} = -31$$
$$2^{n-2} = 32$$

نضع:

$$2^{n-2} = 2^5$$
$$n - 2 = 5 \Rightarrow n = 7$$

32) الجواب:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$\boldsymbol{u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}}$$

**33)** الجواب: $\boxed{c\ :\ k-1}$ , التفسير:

$u_{n+1} = 10u_n - 18 \quad ; \quad u_0 = 7$

$u_1 = 70 - 18 = 52$

$u_2 = 520 - 18 = 502$

$u_3 = 5020 - 18 = 5002$

$u_4 = 50020 - 18 = 50002$

و بالتالي نجد أنّ عدد الأصفار للمتتالية $u_k$ هو:

$k - 1$

**34)** الجواب: $\boxed{b\ :\ \text{متناوبة}}$ , التفسير:

المتتالية متناوبة لأنّ حدودها من الشكل:

$$u_n = \left(-\frac{1}{1}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(-\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(-\frac{1}{n}\right)^n$$

**35)** الجواب: $\boxed{a\ :\ \text{ثابتة}}$ , التفسير:

$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \quad , \quad u_0 = 8$

$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

$u_3 = \frac{3}{4}u_2 + 2 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

و بالتالي المتتالية $u_n$ ثابتة.

36) الجواب: $\boxed{a\ :\ a^2 + b^2 + c^2}$ , التفسير:

$$b^2 = a.c \Longrightarrow a = \frac{b^2}{c}$$

نعوّض:

$$\left(\frac{b^2}{c} + b + c\right)\left(\frac{b^2}{c} - b + c\right) =$$

$$\left(\frac{b^2}{c}\right)^2 - \frac{bb^2}{c} + \frac{cb^2}{c} + \frac{bb^2}{c} - b^2 + bc + b^2 - bc + c^2$$

$$= \frac{b^4}{c^2} + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

حيثُ أنّ:

$$a = \frac{b^2}{c} \Longrightarrow a^2 = \frac{b^4}{c^2}$$

37) لدينا:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

38) لنقسم المجموع لأقسام:

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{19}{2}$$

نضرب بـ 2:

$$2S_1 = 2S_2 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 19$$

$$2S_1 = 2S_2 = \frac{1+19}{2}(19)$$

$$S_1 = S_2 = 95$$

يكون $S$:

$$S = S_1 + 20 + S_2 = 95 + 20 + 95 = 210$$

39) لدينا:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - t_{n+1} = 2u_n + n - 1 - 2t_n - n + 1$$

$$= 2u_n - 2t_n = 2(u_n - t_n) = 2v_n$$

هندسية أساسها $q = 2$ وحدها العام:

$$v_n = v_0 q^n = 2.2^n = 2^{n+1}$$

40) لدينا مجموع متتالية هندسية أساسها $q = i$

وعدد حدودها 601 و الحد الأول 1:

$$S = 1\frac{1 - i^{601}}{1 - i} = \frac{1 - i^{600}i}{1 - i} = \frac{1 - i}{1 - i} = 1$$

لأن $i^{600} = i^4 = 1$.

41) لدينا:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{39}{4} + 20 + 20 + \cdots + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \cdots + \frac{39}{4} + 20$$

$$4S_1 = 2 + 3 + \cdots + 39 + 40$$

$$= \frac{42}{2}(39) = 819$$

$$S_1 = \frac{819}{4} = 204.75$$

ولدينا:

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{39}{4} + 20$$

أي:

$$S_2 = S_1 = 204.75$$

فيكون $S$:

$$S = S_1 + S_2 = 409.5$$

42) لدينا:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{10^2(11)^2}{4} = \frac{100 \times 121}{4} = 25 \times 121 = 3025$$

## البنوك التي بعد التمثيل البياني لحدود متتالية

**1) الجواب:** متناقصة

نلاحظ أنّ:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \\ &= (u_n - 2)(u_n - 1) \end{aligned}$$

بما أنّ $u_n \leq 2$ فإنّ:

$u_n - 2 \leq 0$ سالبة

وبما أنّ $u_n \geq 1$ فإنّ:

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1) \leq 0$$

وبالتالي $u_n$ متناقصة.

**2) الجواب:** المتتالية متقاربة من الصفر.

بما أنّ:

$$l_{n+1} \leq l_n \Rightarrow l_{n+1} - l_n \leq 0$$

ومنه $l_n$ متناقصة.

بما أنّ $l_{n+1} \leq 1$ إذاً $l_n$ محدودة من الأدنى بالعدد 1.

بما أنّ $l_n$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة، ونهايتها هي حل المعادلة:

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ & \sqrt{1 + (x-1)^2} = x \\ & \Rightarrow 1 + (x-1)^2 = x^2 \\ & \Rightarrow 1 + x^2 - 2x + 1 = x^2 \\ & \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} l_n = 1 \end{aligned}$$

ومنه المتتالية $l_n$ متناقصة ومحدودة من الأدنى ومتقاربة من الواحد.

وبالتالي القضيّة الخاطئة هي أنّ المتتالية متقاربة من الصفر.

**3) الجواب** $\frac{2}{\pi}$ لأنّ:

$$u_n = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{3}{\pi^3} + \cdots + \frac{\pi}{\pi^n}$$

لنثبت أوّلاً أنّ:

$$E(n): 2^n \geq n$$

$E(0)$ و $E(1)$ محققتان وضوحاً لأنّ:

$$2^1 \geq 1 \ , \quad 2^0 \geq 0$$

ولنثبت صحة $E(n)$ لكل $n \geq 1$ عندئذٍ:

$$2^{n+1} = 2.2^n \geq 2n \geq n + n \geq n + 1$$

ومنه $E(n+1)$ محققة وبالتالي:

$$2^n \geq n \ : \ \forall n$$

بالاستفادة مما سبق نستبدل كل عدد $k$ بالبسط بـ $2^k$ :

$$\begin{aligned} u_n &\leq \frac{2^1}{\pi} + \frac{2^2}{\pi^2} + \frac{2^3}{\pi^3} + \cdots + \frac{2^n}{\pi^n} \\ &= q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n \\ & \ ; \ q = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_n \leq a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n}{1-\frac{2}{\pi}}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n}{\frac{\pi-2}{2}}\right) = \frac{2}{\pi-2}\left(1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\right)$$

$$\leq \frac{2}{\pi-2}$$

ومنه المتتالية محدودة من الأعلى بـ:

$$\frac{2}{\pi-2}$$

وهو أصغر حد راجح.

لدينا أيضاً:

$$\frac{2}{\pi-2} < \frac{2}{\pi-3} < \pi$$

ومنه فإنّ:

$$\pi \ , \ \frac{2}{\pi-3}$$

حدود راجحة أيضاً، لكن:

$$\frac{2}{\pi} < \frac{2}{\pi-2}$$

ومنه $\frac{2}{\pi}$ ليس حد راجح.

**4) الجواب:** $y_{n+1}$ لأنّ:

لدينا:

$$y_{n+1} = x_n + y_n$$

نحسب الحدود الأولى:

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = x_0 + y_0 = x_0 + 0 = x_0$$
$$y_2 = x_1 + y_1 = x_0 + x_1$$
$$y_3 = x_2 + y_2 = x_0 + x_1 + x_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = x_{n-1} + y_{n-1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}$$
$$y_{n+1} = x_n + y_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

ومنه:

$$y_{n+1} = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

**5) الجواب:** $y_n = \frac{3}{n^2}$ لأنّ:

$$(\text{الحد الأصغر})(\text{عدد الحدود}) \leq u_n$$
$$\leq (\text{الحد الأكبر})(\text{عدد الحدود})$$
$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 3 \, . \frac{1}{n^2}$$
$$\Rightarrow u_n \leq \frac{3}{n^2} \Rightarrow u_n = \frac{3}{n^2}$$

**6) الجواب:** 1 لأنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+n}\right) = 1$$

**7) الجواب:** $\sqrt{n+1}$ لأنّ:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

نضرب بالمرافق فنجد:

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$
$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$u_0 = \sqrt{1} - 0 = \sqrt{1}$$
$$u_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} \ , \ u_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$
$$u_3 = \sqrt{4} - \sqrt{3} \, , \ldots \, , u_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$
$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
$$\Rightarrow s_n = \sqrt{n+1}$$

**8) الجواب:** 2 لأنّ:

$$f(x) = x$$

$x$ هي فاصلة نقطة تقاطع $C_f$ مع منصف الربع الأوّل، من الرسم نجد:

$$x = 0 \ , \ x = 1$$

وبالتالي عدد حلول المعادلة هو 2 .

**9) الجواب:** متزايدة

نلاحظ أنّ $f$ متزايدة على $[0\,,1]$ .

نريد إثبات أنّ:

$$u_{n+1} \geq u_n$$

نثبت صحة $E(0)$ أي نريد إثبات أنّ:

$$u_1 \geq u_0$$

لدينا:

$$u_1 = f(u_0)$$

وبما أنّ $f$ متزايدة على المجال $[0\,,1]$ و $0 <$ نجد $u_0 < 1$:

$$f(u_0) \geq u_0 \Rightarrow u_1 \geq u_0$$

ونفرض صحة $u_{n+1} \geq u_n$ ولنثبت أنّ:

$$u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

لدينا:

$$f(u_{n+1}) = u_{n+2}$$

ومن الفرض $u_{n+1} \geq u_n$ و $f$ متزايدة فإنّ:

$$f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$$
$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$$
$$\Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

ومنه المتتالية متزايدة.

**10) الجواب:** المتتالية محدودة من الأعلى فقط.

بما أنّ:

$$0 < u_0 < 1$$

و $f$ متزايدة و $u_{n+1} = f(u_n)$ فإنّ:

$$0 < u_n < 1$$

أي أنّ $u_n$ محدودة. وبما أنّ المتتالية متزايدة ومحدودة فإنّ نهايتها المحتملة هي:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

**11) الجواب:**

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$
$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

وبالتالي المتتالية متزايدة.

**12) الجواب:** $x_n \geq \frac{1}{2}$ لأنّ:

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$x_n = u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

لدينا $n$ حد وأصغر هذه الحدود هو:

$$\frac{1}{2n}$$

ومنه:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_n \geq \frac{1}{2}$$

**13) الجواب:** $x_n \geq \frac{1}{2}$ مكرر عن **12**

**14) الجواب:** $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ لأنّ:

الخاصة $E(1)$ صحيحة وضوحاً لأنّ:

$$u_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$ عندئذٍ:

$$u_{2^{n+1}} = u_{2^n} + u_{2^n.2} - u_{2^n} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة، أي أنّ:

$$\forall n \geq : \quad u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$$

## انتهت حلول المقرر.. تذكر:

**مع شغف الرياضيات العلامة الكاملة**

**لم تعد حلماً.. بل أصبحت خطّة.**