الأعداد العقدية وتطبيقاتها

اشكال العدد العقدي

الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
$z = x + iy$	$z = r(\cos\theta + isin\theta)$	$z = re^{i\theta}$

الانتقال بين الأشكال

من جبري إلى مثلثي أو أسي

1- نحدد x, y
2- نحسب $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
3- نحسب النسب المثلثية :

$$cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad sin\theta = \frac{y}{r}$$

4- نستنتج الزاوية (القيمة و الربع المناسب)
5- نعوض في الشكل الأسي أو المثلثي حسب الطلب.

من مثلثي أو أسي إلى جبري

1- نحدد r, θ
2- نحسب النسب المثلثية للزاوية θ
3- نضع $x = rcos\theta$ و $y = rsin\theta$
4- نعوض في الشكل الجبري
$z = x + iy$

ملاحظة : قد نحتاج إلى إرجاع الزاوية إلى الربع الأول من خلال الخطوات :

1- نكتب البسط بدلالة مضاعف للمقام
2- نفرق
3- نميز حالتين :
أ- إذا وجدنا عدد زوجي مضروب بـ π نحذف الحد كاملاً
ب- إذا وجدنا عدد فردي مضروب بـ π نستبدله بـ π
4- نحدد الإشارات حسب الربع الموافق

منصة طريقتي التعليمية الافتراضية مع أنس أحمد

تمارين

1- اكتب بالشكل الأسي و المثلثي كل من الأعداد العقدية الآتية:

$z = \sqrt{2}i - \sqrt{6}$	$z = 3 - 3i$	$z = -3 + \sqrt{3}i$
$z = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + icos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$z = \frac{1 + i}{\sqrt{3}}$	$z = \frac{\sqrt{3} - 3i}{3 + 3\sqrt{3}i}$

2- اكتب بالشكل الجبري كل من الأعداد العقدية الآتية:

$z = 2\,e^{\frac{i2\pi}{3}}$	$z = e^{\frac{i9\pi}{4}}$	$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

تحويلات سريعة			
$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	$-1=e^{i\pi}$	$-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

اشكال مثلثية ناقصة			
$\sin(\theta)+i\cos(\theta)$	$-\cos(\theta)-i\sin(\theta)$	$-\cos(\theta)+i\sin(\theta)$	$\cos(\theta)-i\sin(\theta)$
نستبدل θ بـ $\frac{\pi}{2}-\theta$.	نستبدل θ بـ $\pi+\theta$.	نستبدل θ بـ $\pi-\theta$.	نستبدل θ بـ $-\theta$.
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)$	$\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)$	$\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$

العمليات على الشكل المثلثي أو الأسي			
المرافق	القوة	القسمة	الضرب
يحافظ على الطويلة ونعكس الزاوية	قوةّ للطويلة و أمثالاً للزاوية	نقسم الطويلات ونطرح الزوايا	نضرب الطويلات و نجمع الزوايا

تمارين

التمرين الأول: اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$z=\left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{10}$	$z=\overline{\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)}$	$z=\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$

التمرين الثاني: ليكن $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2=1-i$

1- اكتب $z_1, z_2, \frac{z_1}{z_2}$ بالشكل المثلثي

2- اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري

3- استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

التمرين الثالث: نتأمل النقطتين A, B اللتين يمثلهما العددان $a=2$ و $b=2e^{\frac{3i\pi}{4}}$ و ليكن I منتصف $[AB]$ و المطلوب :

1- ارسم شكلاً مناسباً و بين طبيعة المثلث OAB

2- استنتج قياس الزاوية $(\vec{u},\vec{OI})$

3- احسب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بالشكلين الجبري و الأسي ثم استنتج $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

التمرين الرابع: بفرض $z_1=e^{ia}$ و $z_2=e^{ib}$ استنتج $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$.

علاقات أويلر eular	
$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - isin(\theta)$	$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin(\theta)$
$2isin(\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$	$2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

تمارين

التمرين الأول: بسط كلاً من الأعداد الآتية مبيناً قيم x التي كون عندها z معرفاً:

$z = \frac{1+\cos(x) - isin(x)}{1+\cos(x)+isin(x)}$	$z = \frac{\cos(x)+isin(x)}{\cos(x)-isin(x)}$	$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

التمرين الثاني: ليكن $\alpha = e^{2i\frac{\pi}{5}}$ نضع

$$A = \alpha + \alpha^4 \qquad B = \alpha^2 + \alpha^3$$

1- أثبت أن $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ واستنتج أن A, B هما جذرا المعادلة $x^2 + x - 1 = 0 \ldots (*)$

2- عبر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

3- حل المعادلة $(*)$ واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

التمرين الثالث: ليكن $z = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$ أثبت أن $z = itan(\theta)$.

طويلة عدد عقدي

اثبات أن Z حقيقي	اثبات أن Z تخيلي	اثبات صحة علاقة تحوي $\lvert z\rvert^2$
1- نأخذ المرافق $\bar{Z}$ 2- نستفيد من كل عدد w طويلته 1 بأنه يحقق أن $\overline{w} = \frac{1}{w}$ 3- نصلح ونحاول اظهار أن: $\bar{Z} = Z$ عندئذٍ Z حقيقي	1- نأخذ المرافق $\bar{Z}$ 2- نستفيد من كل عدد w طويلته 1 بأنه يحقق أن $\overline{w} = \frac{1}{w}$ 3- نصلح ونحاول اظهار أن: $\bar{Z} = -Z$ عندئذٍ Z تخيلي	ننطلق من طرف لنصل للطرف الآخر وذلك باستخدام العلاقة: $\lvert z\rvert^2 = z.\bar{z}$

تمارين

التمرين الأول: ليكن $u = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{\frac{i\pi}{3}}$:

1- أثبت أن $|u| = 1$

2- أثبت أن العدد:

$$W = \frac{z - u\bar{z}}{1-u}$$

حقيقي.

التمرين الثاني: إذا كان β عدداً حقيقياً و كان العدد العقدي $W=\frac{\beta+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\beta}$

1- أثبت أن $|W|=1$

2- من أجل $\beta=1$. أثبت أن W^{12} حقيقي

التمرين الثالث: أثبت صحة المساواة:

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2|z|^2+2|z'|^2$$

الصيغ العقدية للتحويلات الهندسية		
الانسحاب $\underbrace{z'}_{\text{صورة}}=\underbrace{z}_{\text{أصل}}+Z_{\vec{w}}$	التحاكي $\underbrace{z'}_{\text{صورة}}-\underbrace{w}_{\text{مركز}}=\underbrace{k}_{\text{نسبة تحاكي}}\left(\underbrace{z}_{\text{اصل}}-w\right)$	الدوران $\underbrace{z'}_{\text{صورة}}-\underbrace{w}_{\text{مركز}}=\underbrace{e^{i\theta}}_{\text{زاوية}}(\underbrace{z}_{\text{اصل}}-w)$
التناظر المركزي $\underbrace{z'}_{\text{صورة}}-\underbrace{w}_{\text{مركز}}=-(\underbrace{z}_{\text{اصل}}-w)$	تناظر محوره ox $\underbrace{z'}_{\text{صورة}}=\bar{z}$	تناظر محوره oy $\underbrace{z'}_{\text{صورة}}=-\bar{z}$

تمارين

التمرين الأول: ليكن $z=3+5i$ العدد العقدي الممثل للنقطة M . في كلٍ من الحالات الآتية جد z' العدد الممثل للنقطة M' :

1- M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}(3,4)$

2- M' صورة M وفق انسحاب شعاعه $2\vec{u}-\vec{v}$

3- M' صورة M وفق تحاكٍ مركزه $A(2+i)$ و نسبته -3 :

4- M' صورة M وفق تناظر محوري محوره Ox

5- M' صورة M وفق دوران مركزه المبدأ و زاويته $\frac{\pi}{6}$

التمرين الثاني: لتكن النقطتان:

$$G(3-\sqrt{3}i)\,,H(3+\sqrt{3}i)$$

وليكن R الدوران الذي مركزه O وتحقق $R(G)=H$

احسب $(\overrightarrow{OG}\,,\overrightarrow{OH})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران .

ملاحظة غير ملاحظة: عندما يطلب الصيغة العقدية أي تحديد عناصر التحويل دون تعويض الصورة والأصل.

الكسر الذهبي $\frac{b-a}{c-d}$

1- نعوض الأعداد ونبسط.
2- نكتب الكسر بالشكل الأسي.
3- نحدد الطويلة والزاوية ونميز الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

$$\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

يكون (AB) و (CD) متعامدين

الحالة الثانية:

$$\left|\frac{d-c}{b-a}\right| = 1$$

يكون $AB = CD$

الحالة الثالثة:

اجتماع الحالتين:

$$\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3} \ \& \ \left|\frac{d-a}{b-a}\right| = 1$$

عندئذٍ يكون المثلث ABD متساوي الأضلاع

الحالة الرابعة :

$$\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) \in \{0, \pi\}$$

النقاط A, B, D على استقامة واحدة **أو:**

$$\frac{d-a}{b-a} = k \in R$$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ مرتبطان خطياً.

الحالة الخامسة:

$$\arg\left(\frac{d-e}{b-e}\right) = \arg\left(\frac{c-e}{d-e}\right)$$

المستقيم (DE) منصف للزاوية BEC

الحالة السادسة:

$$\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right) > \frac{\pi}{2}$$

المثلث ABD منفرج الزاوية A.

تمارين

التمرين الأول: لتكن النقاط A, B, C, D التي تمثلها الأعداد :

$$a = 2 - 2i \, , b = -1 + 7i$$
$$c = 4 + 2i \, , d = -4 - 2i$$

1- لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد $w = -1 + 2i$ أثبت أن النقاط A, B, C, D تقع على دائرة واحدة مركزها Ω

2- ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E منتصف $[AB]$. احسب e ثم برهن أن $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$

3- ماذا تستنج .

التمرين الثاني: لتكن النقاط A, B, C نقاط المستوي التي تمثل الاعداد العقدية :

$$a = 2 \quad , \qquad b = 1 + \sqrt{3}i$$
$$c = -1 + i\sqrt{3}$$

1- أثبت أن $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC

2- ليكن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل . عين a', b', c'

التمرين الثالث: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس نتأمل النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد $a = 8\,, b = -4 + 4i\,, c = -4i$

1- احسب $\frac{b-c}{a-c}$ و ماذا تستنج
2- جد العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{4}$
3- جد العدد العقدي e الممثل للنقطة E التي تجعل الرباعي $ACBE$ مربعاً

التمرين الرابع: نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد:

$$a = 6 - i\,, b = -6 + 3i\,, c = -18 + 7i$$

1- احسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ و ماذا تستنج
2- بفرض $d = 1 + 6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O و زاويته θ
3- جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N التي تجعل الرباعي $OAND$ مربعاً

التمرين الخامس: لتكن M النقطة التي تمثل العدد العقدي $z = -1 + i$ و المطلوب :

1- أثبت أن z^8حقيقي (بطريقتين)
2- جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$

التمرين السادس: نتأمل النقاط A, B, C التي تمثلها الأعداد

$$a = -1\,, b = 2 + i\sqrt{3}\,, c = \bar{b} \quad , d = 3$$

و المطلوب :

1- ارسم النقاط A, B, C, D ثم احسب AB, AC, BC و استنتج طبيعة المثلث ABC
2- عين $\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)$ و استنتج طبيعة المثلث ACD
3- أثبت أن D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$$(A, -1)\,, (B, 2), (C, 2)$$

مسائل التطبيقات العقدية

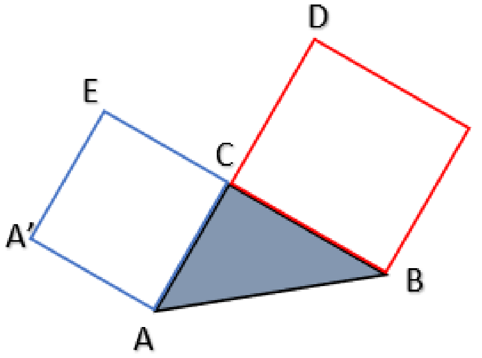
1- أي معلومة عن ضلعين مشتركين بالرأس متساويين بالطول فأحدهما دوران للآخر (مربع، مثلث متساوي الساقين , ... etc)
2- عندما يذكر (مثلث مباشر التوجيه): عميل حالك اعمى.
3- الدوران المباشر عكس عقارب الساعة
4- ربع الدورة يساوي $\frac{\pi}{2}$
5- يُفضل عند تطبيق دوران ما: جعل الصورة هي النقطة المراد حسابها و الأصل هي النقطة التي نريد الكتابة بدلالتها
6- حالة خاصة: بعض المسائل لا تحوي أي اضلاع متساوية لذلك نفرض احداثيات النقاط ونوجد علاقات بينها.

مسائل

المسألة الأولى: ليكن المثلث ABC في المستوي

ننشئ على ضلعيه $[AC]$ و $[BC]$ و خارجه المربعين $ACEA'$, $CBB'D$ كما في الشكل المجاور

تمثل الأعداد a,b,c,a',b' النقاط A,B,C,A',B'

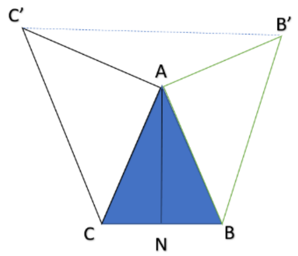


1- B' صورة C وفق دوران مركزه B . عينه و اكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b,c

2- أثبت أن $a' = i(c-a)+a$

3- عين بدلالة a,b العدد m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$

المسألة الثانية: في الشكل المجاور نتأمل مثلثاً ABCمتساوي الساقين رأسه A , ننشئ على ضلعيه مثلثين قائمين و متساويي الساقين ABB',ACC' و النقطة N منتصف CB



و بفرض a,b,c,b',c',n الأعداد العقدية التي تمثلها النقاط A,B,C,B',C',N

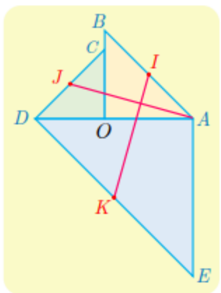
1- أوجد بدلالة c,b الأعداد b',c',n

2- اكتب العدد $\frac{c'-b}{c-b'}$ بالشكلين الجبري و الأسي

3- أثبت $(C'B)$ يعامد (CB') و أن $C'B = CB'$

4- بفرض A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B',2)$ و $(C'3)$ و $(C,1)$ و $(B,1)$, احسب $\frac{c}{b}$

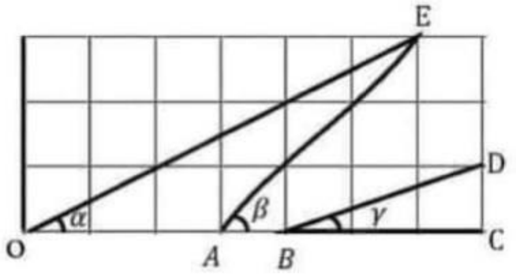
المسألة الثالثة: نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ المثلثات



OAB , ODB , AFD قائمة و متساوية الساقين و مباشرة و النقاط I,J,K منتصفات أوتار هذه المثلثات كما هو موضح في الشكل . و لتكن الأعداد a,b,c,e,d الممثلة للنقاط A,B,C,E,D

1-عبر بدلالة a,c عن e,d,b ثم استنتج z_I,z_J,z_K

2-أثبت أن $z_K - z_I = i(z_J - a)$ و استنتج أن IK يعامد AI و أن لهما نفس الطول

خواص الـ arg
مشان ما نطول عليكون بعرف تعبانين.. نفس خواص اللوغارتم 😉 والمرافق يغير الإشارة
مثال: في معلم متجانس: α, β, γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}), (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}), (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ على الترتيب و المطلوب : 1- اكتب كلاً من $Z_{\overrightarrow{OE}}$ و $Z_{\overrightarrow{AE}}$ و $Z_{\overrightarrow{BD}}$ بالشكل الجبري و الأسي 2- احسب الجداء $Z_{\overrightarrow{OE}} \cdot Z_{\overrightarrow{AE}} \cdot Z_{\overrightarrow{BD}}$ بالشكلين الجبري و الأسي 3- استنتج قياساً للزاوية $\alpha + \beta + \gamma$ 

المعادلات العقدية		
أولاً: معادلات الدرجة الأولى:		
معادلة تحوي z	معادلة تحوي $\bar{z}$	معادلة تحوي z و $\bar{z}$
نعزل z	نأخذ المرافق ثم نعزل z	1- نفرض $z = x + iy$ فيكون $\bar{z} = x - iy$ 2- نعوض ونصلح. 3- نقارن الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي
تمارين		
$-2z + 3 = iz$	$-\bar{z} + 3i = 2i\bar{z} + 1$	$z + 2\bar{z} = 3 + 3i$

ثانياً: معادلات الدرجة الثانية:		
$z^2=-k^2$	$z^2=a+ib$	$az^2+bz+c=0$
نضع $-1=i^2$ ثم نجذر	-1 نفرض $Z=x+iy$ -2 نضع المعادلات $\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \ldots (1)\\ x^2-y^2=a \quad \ldots (2)\\ 2xy=b \quad \ldots (3)\end{cases}$ -3 نجمع (1) و (2) فنحسب x_1 و x_2 -4 نطرح (1) و (2) فنحسب y_1 و y_2 -5 من المعادلة (3) نميز حالتين: أ- $2xy=b>0$ فنأخذ x و y من نفس الإشارة ونضعها بالشكل الجبري ب- $2xy=b<0$ فنأخذ x و y من إشارتين متعاكستين ونضعها بالشكل الجبري **صيغة يمكن تجي مو اكيد:** جد الجذور التربيعية للعدد العقدي $a+ib$.	أ- حالة $\Delta>0$: للمعادلة حلان $Z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, Z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ب- حالة $\Delta=0$: للمعادلة حل وحيد : $Z=-\frac{b}{2a}$ ت- حالة $\Delta<0$: أي $\Delta=-k^2$ عندها للمعادلة حلان عقديان $Z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $Z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ث- حالة $\Delta=a+ib$ (عدد عقدي): عندئذٍ نفرض $w=x+iy$ هو الجذر التربيعي لـΔ عندها $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$ $x^2-y^2=a$ $2xy=b$ ونوجد الحلول فنحصل على جذري المميز Δ : w_1, w_2 $Z_1=\frac{-b+w_1}{2a}, Z_2=\frac{-b+w_2}{2a}$
ثالثاً: معادلات من الدرجة الثالثة فما فوق:		
الحل المعلوم حقيقي أو تخيلي	الحل تخيلي والمعاملات حقيقية	يوجد صيغ متكافئة لتعيين الثوابت
نقسم على (الحل $-z$)	نقسم على $\left(z^2-\text{الحل}\right)^2$	ننشر ونطابق
نمط مميز: أوجد حلول المعادلة إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً:		

-1 نفرض الحل $z=bi$ ونعوض ونصلح فنحصل على المعادلة (1).
-2 نأخذ مرافق طرفي المعادلة (1) فنحصل على المعادلة (2).
-3 نجمع (1) و (2) ونحسب b.
-4 نقسم على $z-bi$.
-5 مبرووك عليك!

منصة طريقي مع أنس أحمد التعليمية الافتراضية

التمرين الأول: حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية:

$z^2 + (1+4i)z - 5 - i = 0$	$z^2 = -3 + 4i$	$z^2 + 2(1+i)z + i + \frac{3}{4} = 0$
$2z^2 - 5z + 6 = 0$	$z^2 - 2\sin(\theta)\, z + 1 = 0$	$Z^2 - 2(1+\sqrt{2})Z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$

التمرين الثاني: ليكن كثير الحدود:

$$P(Z) = Z^4 - 19Z^2 + 52Z - 40$$

عين عددين حقيقيين a و b يحققان أن

$$P(Z) = (Z^2 + aZ + b)(Z^2 + 4Z + 2a)$$

ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z) = 0$.

التمرين الثالث: لتكن المعادلة:

$$Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 = 0$$

1- أثبت أن $Z = -1$ حل للمعادلة

2- اكتب المعادلة بالشكل :

$$(Z+1)Q(Z) = 0$$

3- أوجد حلول هذه المعادلة

التمرين الرابع:

$$P(z) = z^3 - 2(\alpha + i\sqrt{3})z^2 - 4(\alpha - i\sqrt{3})z + 8$$

المطلوب :

1- عين α إذا علمت أن $z = 2$ حل للمعادلة $P(z) = 0$

2- بفرض $\alpha = 1$. جد كثير حدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ بحيث :

$$P(z) = (z-2)Q(z)$$

ثم استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$

أفكار يجب تمثلها:

الجذور التكعيبية لعدد عقدي $z^3 = a + ib$	خواص حلول معادلة من الدرجة الثانية
1- نكتب $w = a + ib$ بالشكل الأسي: $w = m\, e^{i\alpha}$ 2- نفرض $z = re^{i\theta}$ ونعوض. 3- $r^3 e^{i3\theta} = m\, e^{i\alpha}$ بالمقارنة نجد: $r = \sqrt[3]{m}\,, \theta = \frac{\alpha + 2\pi k}{3}\ ; k \in \{0,1,2\}$	$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ و $z_1 . z_2 = \frac{c}{a}$ 1- الحلان معلومان والمطلوب هو التحقق أنهما حلول 2- حل معلوم و مطلوب حساب الآخر 3- الحلان معلومان و مطلوب حساب a, b, c

التمرين الأول: جد حلول كلٍ من المعادلات:

$$z^3 = 1$$

$$3j^3 - 27i = 0$$

التمرين الثاني: أثبت أن العدد $z = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ حل للمعادلة

$$1 + z + z^2 = 0$$

ثم استنتج الحل الآخر , و اكتبهما بالشكل الجبري

المجموعات النقطية		
$Re(z) = a$ المستقيم الشاقولي $x = a$	$Im(z) = b$ المستقيم الأفقي $y = b$	$\|z - a\| = r$ الدائرة التي مركزها $A(a)$ونصف قطرها r
$\|z - a\| = \|z - b\|$ محور القطعة المستقيمة $[AB]$ $A(a), B(b)$	$arg z = \theta$ نصف المستقيم الذي يصنع زاوية θ مع محور الفواصل دون المبدأ	في باقي الحالات نضع $z = x + iy$ ونعزل ونستنتج المعادلة انتبه!! إذذا كانت المعادلة بدلالة arg نضع $z = re^{i\theta}$ ونطبق خواص الـ arg.

التمرين الأول: صف مجموعة النقاط $M(z)$ في الحالات الآتية:

$\|z + 2\| = \|z - 1 + i\|$	$\|z\| = 3$	$\|z - 1\| = \sqrt{2}$
$Re(iz) = 3$	$\arg iz^2 = \frac{2\pi}{3}$	$\arg(\bar{z}) = \arg\left(\frac{1}{i}\right)$

التمرين الثاني: في حالة عدد عقدي $z \neq -1$ نتأمل العدد العقدي $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ وبفرض أن

$z = x + iy$ و

$Z = X + iY$والمطلوب:

1- اكتب X, Y بدلالة x, y

2- أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل العدد Z حقيقي هي مستقيم محذوف منه نقطة

3- أثبت أن مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل العدد Z تخيلي بحت هي دائرة محذوف منها نقطة

اختبار في الأعداد العقدية وتطبيقاتها

التمرين الأول: ليكن z العدد العقدي الذي يحقق:

$$\bar{z} = \frac{9}{z} \quad ,\arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

اكتب z بالشكل الأسي.

التمرين الثاني: ليكن المجموع $S = 1 + i + i^2 + \cdots + i^7$:

1- بسط عبارة S.
2- اكتب S بالشكل المثلثي.
3- أثبت أن S^8 حقيقي.

التمرين الثالث:

أ- حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة $z^2 - 8z + 41 = 0$

ب- نعتبر في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس النقاط A, B, C, D التي تمثلها الأعداد العقدية

$$a = 4 + 5i \ ,b = 3 + 4i \ \ ,c = 6 + 7i$$
$$,d = 4 + 7i$$

1- احسب $\frac{c-b}{a-b}$ و استنتج أن النقاط A, B, C على استقامة واحدة
2- بفرض $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ وفق الدوران الذي مركزه D و زاويته $-\frac{\pi}{2}$, أثبت أن :
$z' = -iz - 3 + 11i$
3- عين صورة C وفق الدوران السابق و ما طبيعة المثلث ACD
4- ليكن T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{DC}$ و لتكن B' صورة B وفق T و A' صورة A وفق T و المطلوب :
   a- اكتب الصيغة العقدية للانسحاب ثم استنتج a', b'
   b- اكتب الشكل الجبري و الأسي للعدد $Z = \frac{d-b}{a'-b'}$
   c- استنتج أن المستقيمين $(A'B')$ و (DB) متعامدين و أن $DB = A'B'$
5- ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E منتصف [AD] أثبت أن النقاط A', B', B, C تقع على دائرة واحدة مركزها E

التمرين الرابع: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A,B,C,M التي تمثلها الأعداد :

$$a=-i \quad , \quad b=1-i \ , \qquad m=-1+i \quad ,d=2i$$

1- مثل A,B,C,M في المستوي
2- احسب العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة النقطة D وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$
3- أثبت أن النقاط O,B,M على استقامة واحدة
4- احسب $\frac{d-c}{m}$ بالشكل الأسي ثم استنتج أن $(DC),(OM)$ متعامدان
5- حل المعادلة $Z^3=4z^2+29z=0$
6- عين العددين z,w المحققان :

$$2z-w=-3$$
$$2\bar{z}-\bar{w}=-3+2\sqrt{3}i$$

7- أوجد e صورة m وفق تحاكٍ مركزه b و نسبته -3
8- أوجد الجذرين التربيعين للعدد العقدي $z=3-4i$

التمرين الخامس: اكتب $\cos^3 x$ على شكل عبارة خطية للنسب المثلية لمضاعفات الزاوية ثم احسب $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$ ثم احسب ثم احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحصور بين منحني التابع المعرف وفق $f(x)=\cos^3 x$ والمستقيمان $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ ومحور الفواصل.

بنوك الاتمتة

1- ليكن لدينا الاعداد العقدية: $z_1=2+4i$, $z_2=3-i$, $z_3=-\frac{5}{2}i$ ان مرافق z_1 :

$2-4i$	d	$-2+4i$	c	$-2-4i$	b	$2+4i$	a

2- مرافق $\overline{Z_3}$ هو:

$-\frac{2}{5}i$	d	$-\frac{5}{2}i$	c	$\frac{5}{2}i$	b	$\frac{2}{5}i$	a

3- المجموع z_1+z_3 يساوي:

$5-3i$	d	$-5+3i$	c	$-5-3i$	b	$5+3i$	a

4- المقدار z_3-z_1 يساوي:

$2+\frac{13}{2}i$	d	$2-\frac{13}{2}i$	c	$-2+\frac{13}{2}i$	b	$-2-\frac{13}{2}i$	a

5- المقدار $z_1.z_2$ يساوي:

$-10-10i$	d	$10+10i$	c	$10-10i$	b	$-10+10i$	a

6- إن $Re(z_3)$:

$-\frac{5}{2}$	d	1	c	0	b	$-\frac{2}{5}$	a

7- إن $Im(z_2)$:

1	d	3	c	-1	b	-3	a

-8 العدد z_1^2 يساوي:

$12+8i$	d	$12-16i$	c	$-12+8i$	b	$-12+16i$	a

ليكن لدينا العددان العقديان: $Z_1=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $Z_2=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ اوجد:

-9 طويلة العدد Z_1:

غير ذلك	d	$\lvert Z_1\rvert=1$	c	$\lvert Z_1\rvert=0$	b	$\lvert Z_1\rvert=2$	a

-10 طويل العدد Z_2:

$\lvert Z_2\rvert=2$	d	$\lvert Z_2\rvert=3$	c	$\lvert Z_2\rvert=-3$	b	$\lvert Z_2\rvert=1$	a

-11 مرافق Z_1 هو:

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	d	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	c	$-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	b	$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	a

-12 مرافق Z_2 هو:

غير ذلك	d	$3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	c	$3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	b	$-3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	a

-13 إن $\arg(Z_2)$ تساوي:

$\frac{3\pi}{4}$	d	$-\frac{\pi}{4}$	c	$\frac{\pi}{4}$	b	$-\frac{3\pi}{4}$	a

-14 العدد Z_1^7 يساوي:

$\cos\left(\frac{\pi}{21}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{21}\right)$	d	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$	c	$7(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right))$	b	$\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$	a

-15 العدد Z_2^2 يساوي:

$27\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{12}\right)\right)$	b	$27\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	a
$27\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	d	$9\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	c

-16 إن المقدار $Z_1.Z_2$:

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$	b	$3\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$	a
$3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$	d	$3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$	c

-17 الشكل الجبري للعدد $Z=\frac{1}{2-i}$

$\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$	d	$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$	c	$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$	b	$-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$	a

-18 الشكل الجبري للعدد $Z=(1+i)e^{i\frac{\pi}{4}}$

$2-2i$	d	$\sqrt{2}i$	c	$\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	b	$2+2i$	a

-19 الشكل المثلثي للعدد $Z=\sqrt{3}-3$

غير ذلك	d	$(3-\sqrt{3})(\cos\pi + i\sin\pi)$	c	$\sqrt{3}\cos(\pi) + i\sin(\pi)$	b	$3\cos(\pi) + i\sin(\pi)$	a

20- الشكل المثلثي للعدد $Z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$	b	$2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$	a
$2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	d	$2\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)$	c

21- الشكل المثلثي للعدد $Z = \left(\frac{3i-1}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}\right)$

$\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)$	b	$\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$	a
$(a\ ,C)$	d	$\cos(\pi) + i\sin(\pi)$	c

22- الشكل الأسي للعدد $Z = (1-\sqrt{2})\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$(\sqrt{2}-\sqrt{3})e^{i\frac{4\pi}{3}}$	b	$(\sqrt{2}-1)e^{i\frac{4\pi}{3}}$	a
$(\sqrt{2}+1)e^{i\frac{4\pi}{3}}$	d	$(1-\sqrt{2})e^{i\frac{4\pi}{3}}$	c

23- الشكل الأسي للعدد $Z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$

$32e^{i\frac{6\pi}{4}}$	d	$32e^{i\frac{5\pi}{3}}$	c	$32e^{i\frac{4\pi}{3}}$	b	$32e^{-i\frac{4\pi}{3}}$	a

24- الشكل الأسي للعدد $Z = (1+\sqrt{3}i)^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$(a\ ,b)$	d	$16e^{i\frac{5\pi}{3}}$	c	$16e^{i\frac{8\pi}{3}}$	b	$16e^{i\frac{2\pi}{3}}$	a

25- الشكل الجبري للعدد $Z = (1+i)^{2016}$

$(a\ ,b)$	d	$Z = 2^{1008}$	c	$Z = 2i^{1008}$	b	$Z = -2^{1008}$	a

26- الشكل المثلثي للعدد $Z = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).2(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$

$2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$	b	$12\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	a
$2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	d	$2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$	c

27- بفرض ليكن z عدداً عقدياً يحقق:

$$\bar{z} = \frac{9}{z}\ , \arg(iz) = \frac{\pi}{3}$$

الشكل الأسي للعدد z هو:

$3e^{i\frac{\pi}{2}}$	d	$e^{i\frac{\pi}{6}}$	c	$3e^{i\frac{\pi}{3}}$	b	$3e^{-i\frac{\pi}{6}}$	a

28- إن طويلة العدد العقدي $\alpha = \sin x + i\cos x$ تساوي:

$2\cos(x)$	d	1	c	$\sin^2 x$	b	e	a

29- إن الشكل المثلثي للعدد العقدي $w = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]^5$ هو:

$-2[\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$	d	$2[\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$	c	$2(\cos(0) + i\sin(0))$	b	$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$	a

30- إذا كان $z = 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$ فإن $\arg(\bar{z})$:

$\frac{5\pi}{6}$	d	$\frac{2\pi}{3}$	c	$-\frac{5\pi}{14}$	b	$\frac{3\pi}{14}$	a

31- إذا كان $z = 1 + i$ فإن $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$:

$\frac{1}{2}$	d	1	c	$-\frac{1}{2}$	b	-1	a

32- الشكل الأسي للعدد العقدي $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ هو:

$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$	d	$2e^{i\frac{\pi}{12}}$	c	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$	b	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$	a

33- إذا كان $\alpha = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ فإن $z = \alpha + \alpha^4$ هو:

$-2i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	d	$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	c	$-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	b	$2i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	a

34- إذا كان $z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^4}$ فإن $|\bar{z}|$ تساوي

$,4 + 3i$	d	$6 + i$	c	4	b	2	a

35- إذا كان $z = a + ib$ فإن الشكل الجبري للعدد $\frac{1}{z}$ هو:

$\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}$	b	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}i$	a
$\frac{a}{a^2-b^2} - i\frac{b}{a^2-b^2}$	d	$\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$	c

36- بفرض $a, b, c. d, e$ الأعداد العقدية الممثلة للنقاط A, B, C, D, E فإذا كان:

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

عندئذٍ يمكن استنتاج أن:

المستقيم (EA) منصف للزاوية $\widehat{CAD}$	b	المستقيم (EA) منصف للزاوية $\widehat{DEC}$	a
المستقيم (DA) منصف للزاوية $\widehat{CDE}$	d	المستقيم (CA) منصف للزاوية $\widehat{ECD}$	c

37- إذا كانت الأعداد العقدية b, c, d تمثل النقاط B, C, D وكان $\frac{d-b}{c-b} = e^{\frac{\pi}{2}i}$ فإن المثلث BCD

متساوي الأضلاع	d	قائم في B فقط	c	قائم في B ومتساوي الساقين	b	متساوي الساقين	a

38- يرتبط العددان العقديان a, b الممثلان لنقطتان A, B بالعلاقة $b = ia$ فإن التحويل الهندسي الذي

يقرن النقطة B بالنقطة A هو:

تناظر	d	انسحاب	c	دوران	b	تحاكي	a

39- $\arg(z_1 . z_2)$ يساوي:

$\arg(z_1 + z_2)$	d	$\arg(z_1) - \arg z_2$	c	$\arg z_1 + \arg z_2$	b	$\arg z_1 \times \arg z_2$	a

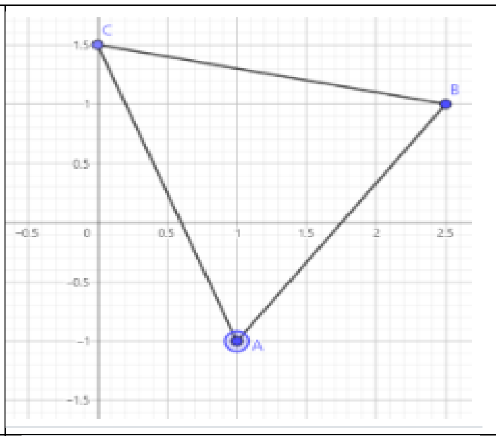
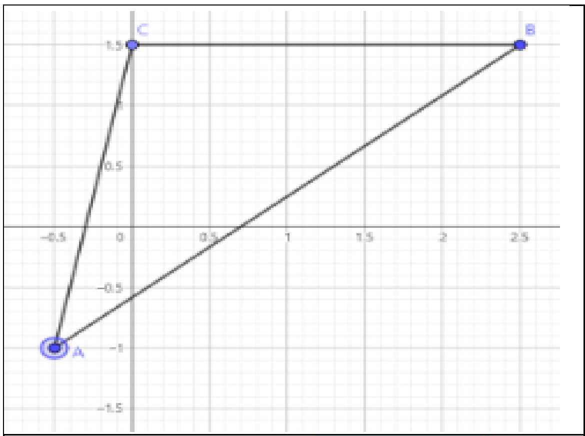
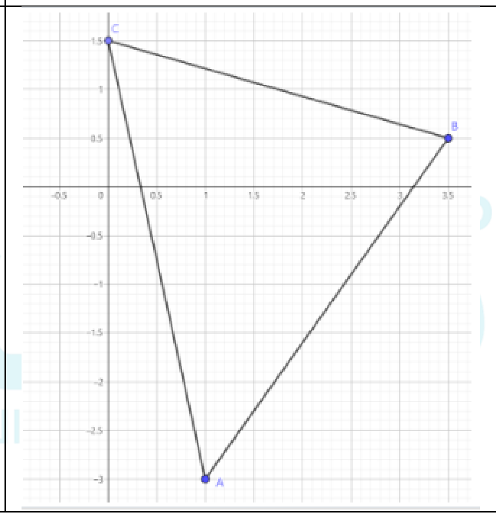
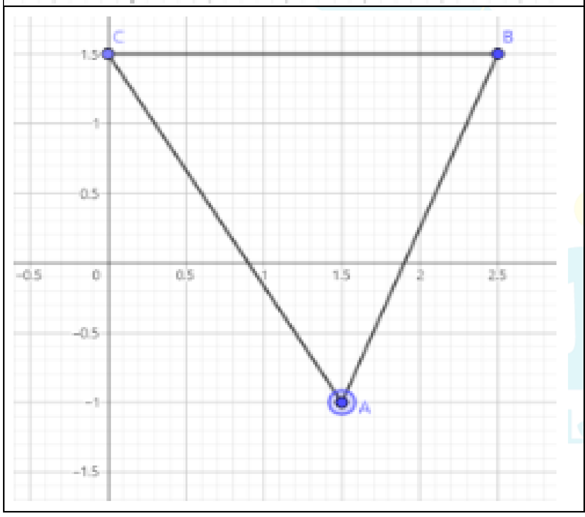
40- إذا كان العددان a, b العددان العقديان الممثلان للنقطتين A, B وكان $a - 1 = 2b - 2$

عندئذٍ التحويل الذي يقرن النقطة B بالنقطة A هو:

a	تحاكٍ نسبته 2	b	انسحاب شعاعه $-2\vec{j}$	c	تحاكٍ نسبته -2	d	تحاكٍ نسبته 1

41- لتكن لدينا النقاط A, B, C تمثلها الاعداد العقدية $a = 1 - 3i$, $b = \frac{7}{2} + i$, $c = \frac{3}{2}i$

وضع النقاط A , B , C في شكل:

a		b	
c		d	

42- ان الاعداد العقدية التي تمثل الاشعة $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$:

A	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{3} - 4i \\ Z_{\overrightarrow{AC}} = -1 + \frac{9}{2}i \\ Z_{\overrightarrow{BC}} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$	b	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{2} + 4i \\ Z_{\overrightarrow{AC}} = -1 + \frac{9}{2}i \\ Z_{\overrightarrow{BC}} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$	c	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{2} + 4i \\ Z_{\overrightarrow{AC}} = 1 - \frac{9}{2}i \\ Z_{\overrightarrow{BC}} = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$	d	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{2} + 4i \\ Z_{\overrightarrow{AC}} = 1 - \frac{9}{2}i \\ Z_{\overrightarrow{BC}} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases}$

43- ان اطوال اضلاع المثلث ABC :

a	$\begin{cases} AB = \frac{\sqrt{80}}{3} \\ AC = \frac{\sqrt{85}}{2} \\ BC = \frac{\sqrt{50}}{2} \end{cases}$	b	$\begin{cases} AB = \frac{\sqrt{89}}{2} \\ AC = \frac{\sqrt{85}}{2} \\ BC = \frac{\sqrt{50}}{2} \end{cases}$	c	$\begin{cases} AB = \frac{\sqrt{80}}{3} \\ AC = \frac{\sqrt{84}}{2} \\ BC = \frac{\sqrt{51}}{2} \end{cases}$	d	$\begin{cases} AB = \frac{\sqrt{89}}{2} \\ AC = \frac{\sqrt{82}}{2} \\ BC = \frac{\sqrt{55}}{2} \end{cases}$

44- ان نوع المثلث ABC هو:

a	مختلف الاضلاع وقائم في A	b	متساوي الساقين وقائم في A	c	متساوي الاضلاع	d	مختلف الاضلاع

45- ان العدد العقدي Z_1 الممثل للنقطة I منتصف $[AB]$ هو:

a	$Z_1 = \frac{9}{4} - i$	b	$Z_1 = \frac{4}{9} - i$	c	$Z_1 = -\frac{9}{4} + i$	d	$Z_1 = -\frac{9}{4} - i$

46- ان العدد العقدي Z_G الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC:

a	$g = 1 - \frac{1}{6}i$	b	$g = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}i$	c	$g = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}i$	d	$g = \frac{3}{2} - \frac{2}{6}i$

47- اوجد العدد العقدي Z_M الممثل للنقطة M مركز الابعاد المتناسبة لـ $(C,-1),(B,1),(A,2)$

a	$Z_M = \frac{4}{11} - \frac{4}{13}i$	b	$Z_M = -\frac{11}{4} + \frac{13}{4}i$	c	$Z_M = -\frac{11}{4} - \frac{13}{4}i$	d	$Z_M = \frac{11}{4} - \frac{13}{4}i$

48- هل النقطة C تنتمي الى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r = \frac{3}{2}$

a	نعم	b	لا

49- هل النقطة B تنتمي الى الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها $r = \frac{5}{\sqrt{2}}$

a	نعم	b	لا

50- لتكن لدينا النقاط D, C, B, A تمثلها الاعداد العقدية:

$$Z_A = -2\,, \qquad Z_B = 2\,, \qquad Z_C = -1 + i\,, \qquad Z_D = 1 - 3i$$

ان المثلث ACD:

a	متساوي الساقين وقائم	b	مختلف الاضلاع وقائم	c	متساوي الاضلاع	d	مختلف الاضلاع

51- ان المثلث BCD

a	متساوي الساقين وقائم	b	مختلف الاضلاع وقائم	c	متساوي الاضلاع	d	مختلف الاضلاع

52- ان العدد العقدي Z_E الممثل للنقطة E التي تجعل الرباعي $BCED$ مربع:

a	$Z_E = 2 + 2i$	b	$Z_E = -2 + 2i$	c	$Z_E = 2 - 2i$	d	$Z_E = -2 - 2i$

53- ان المستقيمان $(ED),(BC)$:

a	متوازيان	b	متعامدان	c	متقاطعان	d	متخالفان

54- ان المستقيمان $(CD),(BE)$:

a	متوازيان	b	متعامدان	c	متقاطعان	d	متخالفان

55- ان العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[CD]$

a	$Z_I = 1 - 2i$	b	$Z_I = i$	c	$Z_I = -i$	d	$Z_I = 1 + 2i$

56- ان النقاط E, I, B:

a	تقع على استقامة واحدة	b	لا تقع على استقامة واحدة	c	$Z_I = 1 + 2i$	d	غير ذلك

57- لتكن النقاط A, B, C, D التي تمثلها الاعداد:

$$a = 2 - 2i\ , b = -1 + 7i\ , c = 4 + 2i\ , d = -4 - 2i$$

ليكن e العدد العقدي الممثل للنقطة E منتصف $[AB]$ ان العدد e:

a	$\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$	b	$-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$	c	$\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$	d	$-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

58- برهن ان $\frac{c-e}{a-e}=\frac{a-e}{d-e}$ ماذا تستنتج بخصوص المستقيم (EA) ؟

a	المستقيم محور في المثلث ACD	b	المستقيم متوسط في المثلث ACD	c	المستقيم منصف في المثلث ACD	d	غير ذلك

59- لتكن النقاط A, B, C نقاط المستوي التي تمثل الاعداد العقدية:

$$a=2 \quad , b=1+\sqrt{3}i \quad , c=-1+i\sqrt{3}$$

ان $\frac{a-b}{c-b}$ يساوي:

a	$e^{\frac{\pi}{3}i}$	b	$e^{\frac{2\pi}{3}i}$	c	$e^{\frac{\pi}{6}i}$	d	$e^{i\frac{4\pi}{3}}$

60- في المستوي العقدي المنسوب الى معلم متجانس نتأمل النقاط A, B, C التي تمثل الاعداد

$$a=8 , b=-4+4i , c=-4i$$

ان$\frac{b-c}{a-c}$ يساوي:

a	$-8-4i$	b	$8+4i$	c	$-i$	d	i

61- ان المثلث ABC:

a	قائم ومتساوي الساقين	b	قائم فقط	c	متساوي الساقين فقط	d	متساوي الاضلاع

62- نتأمل في المستوي العقدي المنسوب الى معلم متجانس النقاط A, B, C التي تمثلها الاعداد

$$a=6-i \quad , b=-6+3i \quad , c=-18+7i$$

ان العدد $\frac{b-a}{c-a}$:

a	$\frac{1}{2}$	b	1	c	i	d	$-i$

63- ماذا تستنتج؟

a	النقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة	b	المستقيمان $(AC), (AB)$ غير مرتبطين خطيا	c	النقاط A, B, C تعين مستويا	d	المثلث ABC متساوي الاضلاع

64- بفرض $d=1+6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته θ ان الزاوية θ :

a	$\frac{\pi}{3}$	b	$\frac{\pi}{2}$	c	$\frac{\pi}{4}$	d	$\frac{\pi}{6}$

65- نتأمل النقاط A, B, C, D التي تمثل الاعداد

$$a=-1 \quad , b=2+i\sqrt{3} \ , c=\bar{b} \ , d=3$$

ان العدد $\frac{a-c}{d-c}$ يساوي:

a	$\frac{\sqrt{3}}{2}i$	b	$-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	c	i	d	$-i$

66- ان $\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)$:

a	$-\frac{\pi}{2}$	b	$\frac{\pi}{2}$	c	$-\pi$	d	π

67- ان المثلث ACD :

a	متساوي الاضلاع	b	متساوي الساقين فقط	c	قائم ومتساوي الساقين	d	قائم الزاوية

68- أولا: لتكن لدينا النقطة A التي يمثلها العدد العقدي $a = 1 + i$ والمطلوب:

ان العدد العقدي b الممثل للنقطة B صورة A وفق الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$

a	$b = 3 - 2i$	b	$b = 3 + 2i$	c	$b = -3 + 2i$	d	$b = -3 - 2i$

69- ان العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة A وفق تحاك مركزه $\Omega(2 + 2i)$ ونسبته $k = 2$

a	$c = 2 + 2i$	b	$c = 2 - 2i$	c	$c = -2 - 2i$	d	$c = 0$

70- ان العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة A وفق تحاك مركزه المبدأ ونسبته $k = 2$

a	$d = 2 - 2i$	b	$d = 2 + 2i$	c	$d = -2 + 2i$	d	$d = -2 - 2i$

71- ان العدد العقدي e الممثل للنقطة E صورة A وفق دوران مركزه $\Omega(3 - i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

a	$e = 1 - 3i$	b	$e = 1 + 3i$	c	$e = -1 - 3i$	d	$e = -1 + 3i$

72- ان العدد العقدي m الممثل للنقطة M صورة A وفق دوران مركزه المبدأ وزاويته $\frac{\pi}{4}$

a	$m = 2i$	b	$m = 2\sqrt{2}i$	c	$m = \sqrt{2}i$	d	$m = \frac{1}{\sqrt{2}}i$

73- ثانيا: لتكن لدينا النقطة A يمثلها العدد العقدي $a = 1 - 3i$ والمطلوب:

ان العدد العقدي b الممثل للنقطة B صورة A وفق التناظر المحوري الذي محوره (ox)

a	$b = 1 - 3i$	b	$b = -1 + 3i$	c	$b = -1 - 3i$	d	$b = 1 + 3i$

74- ان العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة A وفق التناظر المحوري الذي محوره (oy)

a	$c = 1 + 3i$	b	$c = -1 - 3i$	c	$c = -1 + 3i$	d	$c = 1 - 3i$

75- ان العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه المبدأ

a	$d = 1 - 3i$	b	$d = -1 - 3i$	c	$d = -1 + 3i$	d	$d = 1 + 3i$

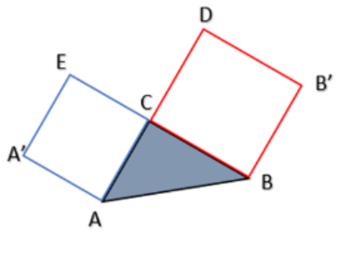
76- ان العدد العقدي e الممثل للنقطة E صورة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه $\Omega(2 - 5i)$

a	$e = 3 - 7i$	b	$e = 3 + 7i$	c	$e = -3 + 7i$	d	$e = -3 - 7i$

ليكن المثلث ABC في المستوي

ننشئ على ضلعيه $[BC], [AC]$ وخارجه المربعين $ACEA'$, $CBB'D$ كما في

الشكل المجاور تمثل الاعداد a, b, c, a', b' للنقاط A, B, C, A', B'



77- B' صورة C وفق دوران مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ فان b' :

a	$c - b - ib$	b	$b + i(b - c)$	c	$b - c + ib$	d	$b - i(b - c$

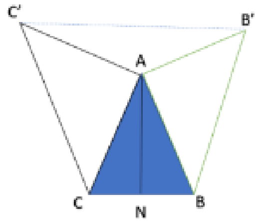
78- ان العلاقات الاتية صحيحة:

a	$a' = i(c - a) + a$	b	$a' = i(c + a) + a$	c	$a' = i(c + a) - a$	d	جميع الإجابات خاطئة

79- ان M منتصف $[A'B']$ تعطى بالعلاقة:

a	$(b + a) + i(b - a)$	b	$(b - a) + i(b + a)$	c	$\frac{(b + a) + i(b + a)}{2}$	d	$\frac{(b + a) + i(b - a)}{2}$

في الشكل المجاور نتأمل مثلثا ABC متساوي الساقين رأسه A وننشئ على ضلعيه مثلثين قائمين ومتساويي الساقين ABB', ACC' والنقطة N منتصف CB



وبفرض a, b, c, b', c', n الاعداد العقدية التي تمثلها النقاط A, B, C, B', C', N

80- ان الاعداد b', c', n تساوي:

$\begin{cases} n = \frac{b+c}{2} \\ b' = ib \\ c' = ic \end{cases}$	d	$\begin{cases} n = \frac{b+c}{2} \\ b' = -ib \\ c' = ic \end{cases}$	c	$\begin{cases} n = \frac{b-c}{2} \\ b' = -ib \\ c' = -ic \end{cases}$	b	$\begin{cases} n = \frac{b+c}{2} \\ b' = ib \\ c' = -ic \end{cases}$	a

81- ان العدد $\frac{c'-b}{c-b'}$ بالشكل الجبري يساوي:

$2i$	d	$-2i$	c	$-i$	b	i	a

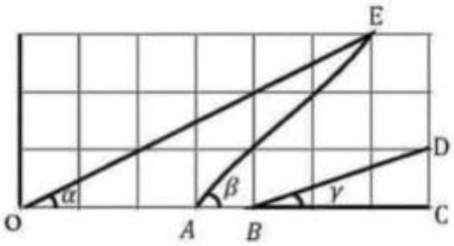
82- ان العدد $\frac{c'-b}{c-b'}$ بالشكل الاسي يساوي:

$e^{-i\frac{\pi}{2}}$	d	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	c	$2e^{i\frac{\pi}{2}}$	b	$2e^{-i\frac{\pi}{2}}$	a

83- ان المستقيمان $(BC'), (B'C)$:

غير ذلك	d	متوازيان	c	متعامدان ومتساويان	b	متعامدان	a

في معلم متجانس: α, β, γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}), (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}), (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE})$ على الترتيب والمطلوب:



84- ان الاعداد e, d, c, b, a :

$a = -3, b = 4$ $c = -7, d = 7 - i$ $e = 6 + 3i$	d	$a = 3, b = -4$ $c = 7, d = 7 + i$ $e = -6 + 3i$	c	$a = -3, b = 4$ $c = -7, d = 7 + i$ $e = 6 - 3i$	b	$a = 3, b = 4$ $c = 7, d = 7 + i$ $e = 6 + 3i$	a

85- ان كلا من $Z_{\overrightarrow{BD}}, Z_{\overrightarrow{AE}}, Z_{\overrightarrow{OE}}$ بالشكل الجبري:

$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{BD}} = 3 + i \\ Z_{\overrightarrow{AE}} = 3 + 3i \\ Z_{\overrightarrow{OE}} = 6 + 3i \end{cases}$	d	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{BD}} = 3 - i \\ Z_{\overrightarrow{AE}} = 3 - 3i \\ Z_{\overrightarrow{OE}} = 6 - 3i \end{cases}$	c	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{BD}} = 3 - i \\ Z_{\overrightarrow{AE}} = 3 - 3i \\ Z_{\overrightarrow{OE}} = 6 + 3i \end{cases}$	b	$\begin{cases} Z_{\overrightarrow{BD}} = 3 + i \\ Z_{\overrightarrow{AE}} = 3 - 3i \\ Z_{\overrightarrow{OE}} = 6 + 3i \end{cases}$	a

86- ان $Z_{\overrightarrow{BD}}, Z_{\overrightarrow{AE}}, Z_{\overrightarrow{OE}}$ بالشكل الجبري:

$-i$	d	$-90i$	c	i	b	$90i$	a

87- ان $Z_{\overrightarrow{BD}}, Z_{\overrightarrow{AE}}, Z_{\overrightarrow{OE}}$ بالشكل الاسي:

$e^{i\frac{\pi}{2}}$	d	$90e^{i\frac{\pi}{2}}$	c	$e^{-i\frac{\pi}{2}}$	b	$90e^{-i\frac{\pi}{2}}$	a

88- ان قياس الزاوية $\alpha + \beta + \gamma$:

$\frac{\pi}{12}$	d	$\frac{\pi}{6}$	c	$\frac{\pi}{2}$	b	$\frac{\pi}{3}$	a

89- حل المعادلة $3Z-2=6Z+1$ هو:

a	1	b	3	c	-1	d	2

90- حل المعادلة $2Z+i\bar{Z}=5+4i$ هو:

a	$3+i$	b	$3-i$	c	$2+i$	d	$2-i$

91- حل المعادلة $\frac{\bar{z}-3}{\bar{z}+3}=i$ هو:

a	$-3i$	b	$-4i$	c	3	d	$3i$

92- حلول المعادلة $7Z^2=-3iZ$ هو:

a	$\begin{cases}0\\ -\frac{3}{7}i\end{cases}$	b	$\begin{cases}3\\ -\frac{2}{7}i\end{cases}$	c	$\begin{cases}0\\ \frac{3}{7}i\end{cases}$	d	$\begin{cases}0\\ -\frac{7}{3}i\end{cases}$

93- حل المعادلة $-7\bar{Z}=-7+7i$ هو:

a	$7+7i$	b	$1-i$	c	$1+i$	d	$-1-i$

94- حلول المعادلة $4Z^2-100=0$ هو:

a	$\begin{cases}25\\ -25\end{cases}$	b	$\begin{cases}2\\ -2\end{cases}$	c	$\begin{cases}5\\ -5\end{cases}$	d	$\begin{cases}26\\ -26\end{cases}$

95- حلول المعادلة $Z^2-5=12i$ هو:

a	$\begin{cases}-3+2i\\ 3+2i\end{cases}$	b	$\begin{cases}3+2i\\ 3-2i\end{cases}$	c	$\begin{cases}3+2i\\ -3-2i\end{cases}$	d	$\begin{cases}-3-2i\\ 3-2i\end{cases}$

96- حلول المعادلة $iZ^2+Z+3+i=0$ هو:

a	$\begin{cases}1-i\\ 1+2i\end{cases}$	b	$\begin{cases}-1-i\\ 2-i\end{cases}$	c	$\begin{cases}-1-i\\ 1+2i\end{cases}$	d	$\begin{cases}1-i\\ -2+i\end{cases}$

97- حل المعادلة $Z^2-(1+\sqrt{3})Z+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$ هو:

a	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$	b	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	c	$1+\sqrt{3}$	d	$\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}$

98- حلول المعادلة $(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)=0$ هو:

a	$\begin{cases}1+i\\ -1-\sqrt{3}i\\ 1+\sqrt{3}i\end{cases}$	b	$\begin{cases}1+i\\ -1-\sqrt{3}i\\ -1+\sqrt{3}i\end{cases}$	c	$\begin{cases}1+i\\ 1-\sqrt{3}i\\ 1+\sqrt{3}i\end{cases}$	d	$\begin{cases}1-i\\ 1-\sqrt{3}i\\ 1+\sqrt{3}i\end{cases}$

99- حلول المعادلة $(2-Z-Z^2)^3=0$ هو:

a	$\begin{cases}-2\\ -3\end{cases}$	b	$\begin{cases}1\\ -2\end{cases}$	c	$\begin{cases}1\\ 2\end{cases}$	d	$\begin{cases}-1\\ -2\end{cases}$

100- حلول المعادلة $Z^3=27i$ هو:

a	$\begin{cases}3e^{-i\frac{\pi}{6}}\\ 3e^{i\frac{5\pi}{6}}\\ 3e^{-i\frac{3\pi}{2}}\end{cases}$	b	$\begin{cases}3e^{i\frac{\pi}{6}}\\ 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}\\ 3e^{i\frac{3\pi}{2}}\end{cases}$	c	$\begin{cases}3e^{-i\frac{\pi}{6}}\\ 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}\\ 3e^{-i\frac{3\pi}{2}}\end{cases}$	d	$\begin{cases}3e^{i\frac{\pi}{6}}\\ 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}\\ 3e^{i\frac{3\pi}{2}}\end{cases}$

101- ليكن u عددا عقديا لا يساوي الواحد وطويلته تساوي الواحد ان العدد $W=\frac{Z-u\bar{Z}}{i-iu}$

a	حقيقي	b	تخيلي بحت	c	حقيقي بحت	d	غير ذلك

102- ان المقدار $|Z-Z'|^2+Z'\bar{Z}+Z\bar{Z}'$ يساوي

a	$\lvert Z\rvert^2-\lvert Z'\rvert^2$	b	$\lvert Z\rvert^2+\lvert Z'\rvert^2$	c	$\lvert Z'\rvert^2-\lvert Z\rvert^2$	d	$\lvert Z\rvert^2+\lvert Z'\rvert^2-Z'\bar{Z}$

103- ان طويلة العدد $Z=\sin\theta+i\cos\theta$ يساوي

a	2	b	12	c	1	d	4

104- ان زاوية العدد $Z=\cos\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي

$\frac{\pi}{12}$	d	$\frac{\pi}{6}$	c	$\frac{\pi}{3}$	b	$\frac{\pi}{4}$	a

105- ان طويلة العدد $Z = \cos\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي

2	d	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	c	$\sqrt{2}$	b	1	a

106- بفرض w, z عددين عقدين طويلة كل منهما تساوي الواحد ويحققان ان $z.w \neq -1$ فان:

$$Z = \frac{z+w}{zw+1}$$

فان Z:

غير ذلك	d	تخيلي بحت	c	تخيلي	b	حقيقي	a

107- إن المقدر $P(z) = 5z^3 - 3z^2 - z - 1 = 0$ يكتب بالشكل:

$P(z) = (z-1)(5z^2 - 2z + 1)$	b	$P(z) = (z-1)(5z^2 + 2z + 1)$	a
$P(z) = (z+1)(5z^2 + 2z + 3)$	d	$P(z) = (z+1)(5z^2 + 2z + 1)$	c

108- إن حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي:

$\{1\}$	b	$\left\{1, -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i\right\}$	a
$\left\{1, \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, -\frac{1}{10} + \frac{2}{5}i\right\}$	d	$\left\{1, -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right\}$	c

109- ليكن المقدار $P(z) = 2z^3 - 5z^2 + 3z - 2 = 0$, إن $P(2)$ يساوي:

0	d	1	c	i	b	$-2i$	a

110- إن $P(z)$ يكتب بالشكل:

$(z-2)(2z^2 - z - 1)$	b	$(z-2)(2z^2 - z + 1)$	a
$(z+2)(2z^2 - z + 1)$	d	$(z+2)(2z^2 + z + 1)$	c

111- إن عدد حلول المعادلة $P(z) = 0$ هو:

مستحيلة الحل	d	1	c	2	b	3	a

112- إن العدد العقدي z الذي يحقق المعادلة $2iz + \bar{z} = 3 + 3i$ هو:

$1 - i$	d	$1 + i$	c	$1 + 2i$	b	$= 1 - 2i$	a

113- إذا كان العددين العقديين $1 + i$ و $1 - 2i$ جذرين المعادلة $z^2 + pz + q = 0$ فإن:

$p = i + 2$ $q = 3 + i$	d	$p = i + 2$ $q = 3 - i$	c	$p = i - 2$ $q = 3 - i$	b	$p = i - 2$ $q = 3 + i$	a

114- إذا كان e^{ix}, e^{-ix} جذور المعادلة $z^2 + pz + q = 0$ عندئذٍ:

$p = \frac{\cos(3x)}{2}$ $q = 2$	d	$p = \sin(x)$ $q = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$	c	$p = 2$ $q = 3$	b	$p = -2\cos(x)$ $q = 1$	a

115- مجموعة النقاط $M(z)$ المحققة للشرط $\arg(-iz) = -\frac{\pi}{3}$:

تمثل مستوي محوري لقطعة مستقيمة	d	تمثل مستقيم يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل	c	تمثل نصف المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل محذوف منه المبدأ	b	تمثل دائرة	a

116- مجموعة النقاط $M(z)$ المحققة للشرط $|2z - 4 + 6i| = |2z - 4|$:

a	تمثل نصف المستقيم الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل محذوف منه المبدأ	b	تمثل محور لقطعة مستقيمة	c	تمثل مستقيم يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور الفواصل	d	تمثل دائرة

117- مجموعة النقاط $M(z)$ المحققة للشرط $\text{Re}(2+i+z)=4$ تمثل

a	نقطة إحداثياتها $(1,4)$	b	المستقيم $x=2$ الشاقولي	c	المستقيم $y=2$ الأفقي	d	دائرة نصف قطرها 4

118- أي من الزوايا الآتية يكافئ الزاوية $-\frac{25\pi}{14}$

a	$\frac{4\pi}{14}$	b	$\frac{5\pi}{14}$	c	$\frac{3\pi}{14}$	d	$\frac{10\pi}{14}$

119- أي من الزوايا الآتية يكافئ الزاوية $\frac{7\pi}{6}$

a	$\frac{4\pi}{6}$	b	$-\frac{5\pi}{6}$	c	$\frac{5\pi}{6}$	d	$\frac{\pi}{6}$

120- ن $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$ تساوي:

a	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$	b	$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})$	c	$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB})$	d	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

121- إذا كان $Z=\frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{i\pi}{3}}$ فأي من الخواص الآتية صحيحة

a	$\lvert Z\rvert=\sqrt{2}$	b	$Z=\bar{Z}$	c	$Z=e^{-\frac{\pi}{12}i}$	d	$Z=e^{\frac{i13\pi}{12}}$

122- بفرض $Z'=e^{ib}$, $Z=e^{ia}$ بكتابة الجداء ZZ' بطريقتين مختلفتين يمكن استنتاج أن:

a	$\cos(a+b)=cosa\ sinb+cosb\ sina$	b	$Cos(a+b)=cosa\ cosb-sina\ sinb$
c	$\cos(a+b)=cosa\ cosb+sina\ sinb$	d	$\cos(a+b)=sina\ sinb+sina\ sinb$

123- العدد $Z=\frac{1+cosx-isinx}{1+cosx+isinx}$ يساوي:

a	$\frac{1}{1+e^{-ix}}$	b	$\frac{1}{1+e^{ix}}$	c	e^{-ix}	d	e^{ix}

124- ليكن $a=\alpha+i\beta$ عدداً عقدياً معطى وليكن $z=x+iy$ عدداً عقدياً يحقق أن:

$$z^2-a^2=\bar{z}^2-\bar{a}^2$$

عندئذٍ قيمة $x.y$ تساوي:

a	$\alpha+\beta$	b	$\alpha\beta$	c	$\frac{\alpha}{\beta}$	d	$\frac{\beta}{\alpha}$

125- بفرض $t=\frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1}$ عندئذٍ t تساوي:

a	$\cot\theta$	b	$i\tan\theta$	c	$\tan\theta$	d	$i\cot\theta$

126- بفرض z_1,z_2 الجذرين التربيعين للعدد $w=-3+4i$ عندئذٍ z_1+z_2 يساوي:

i	d	0	c	1	b	-1	a

-127 بفرض z_1, z_2, z_3 الجذور التربيعية للعدد $z = 4i$ عندئذٍ قيمة المجموع $z_1 + z_2 + z_3$ يساوي:

i	d	0	c	1	b	-1	a

-128 بفرض $z_1, z_2 z_{,3}, z_4, \dots, z_n$ الجذور من المرتبة n لعدد z طويلته 1 عندئذٍ $z_1 + z_2 + z_3 +,,, + z_n$يساوي:

i	d	0	c	1	b	-1	a

-129 بفرض $z = e^{\frac{i2\pi}{11}}$ فإن قيمة المجموع: $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{10}$ يساوي:

i	d	0	c	1	b	-1	a

-130 ليكن MPN مثلثاً ما والنقاط A, B, C منتصفات الأضلاع $[MN], [PM], [NP]$ على الترتيب

وبفرض g العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC و g' العدد العقدي الممثل لمركز ثقل المثلث MNP عندئذٍ:

$g = i\, g'$	d	$g' = ig$	c	$g' = \bar{g}$	b	$g' = g$	a

-131 إن مجموعة نقاط المستوي العقدي $M(z)$ حيث $\lvert z - 2 + 5i \rvert = \lvert z - 3 + 2i \rvert$ تمثل:

مستقيم أفقي محذوف منه نقطة	d	محور لقطعة مستقيمة	c	مستوري محوري لقطعة مستقيمة	b	دائرة	a

التحليل التوافقي والاحتمالات

حول أساسيات الحساب				
اسم القانون	طريقة حسابه	قيم مميزة	خواص	طريقة غشاشة
العاملي	$n! = n(n-1)\dots 2 \times 1$ $4! = 4.3.2.1$ $3! = 3.2.1$ $5! = 5.4.3.2.1$	$0! = 1$ $1! = 1$	خاصة الـ stop: $n! = n(n-1)!$ $n! = n.(n-1)(n-2)!$	None
التراتيب	$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ الكبير عاملي على طرحون عاملي	$P_n^0 = 1$ $P_n^1 = n$ $P_n^n = n!$	None	"الرجوع من n , r خطوة" $P_{\text{الانطلاق}}^{\text{عدد الخطوات}}$ $P_5^2 = 5.4$ $P_6^3 = 6.5.4$
التوافيق	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ الكبير عاملي على الصغير عاملي بطرحهم عاملي	$\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{n} = 1$	المتمم: $\binom{n}{r} = \binom{n}{\text{كمالتو}}$ $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$ $\binom{100}{99} = \binom{100}{1}$	نفس التراتيب بس منزوع من البسط ومن المقام $\binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{3.2.1}$ $\binom{10}{4} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1}$

1- قيمة المقدار $(3!)^2$ تساوي:

a	$9!$	b	36	c	$3!$

2- قيمة المقدار P_9^3 تساوي:

a	P_9^6	b	$9!$	c	504

3- قيمة المقدار $\binom{10}{8}$ تساوي:

a	80	b	90	c	45

4- قيمة المقدار $P_4^3 \times 4!$ تساوي:

a	48	b	576	c	$P_4^! \times 4!$

5- قيمة المقدار $3! \times 7$ تساوي:

a	42	b	$21!$	c	$10!$

6- قيمة n التي تحقق المعادلة $P_{n+2}^3 = 6P_{n+2}^1$ هي:

a	3	b	2	c	-2

7- قيمة n التي تحقق المعادلة $14\binom{n}{2} = 3\binom{n}{4}$ هي:

a	-5	b	5	c	10

8- قيمة n التي تحقق المعادلة $\binom{10}{n+2} = \binom{10}{3n}$ هي:

a	1	b	2	c	$(a$ و $b)$

9- قيمة n التي تحقق المعادلة $\binom{10}{n+1} = \binom{10}{2n}$ هي:

a	(1)و(2)	b	(1)و(3)	c	(2)و(3)

<table dir="rtl">
<tr><th colspan="3">مسائل التوافيق</th></tr>
<tr><td>مسائل المصافحات</td><td colspan="2">عدد المصافحات = $\binom{\text{عدد الاشخاص}}{2} - \binom{\text{المتخاصمين}}{2}$
ملاحظة: قد يكون المجهول عدد الأشخاص وليس عدد المصافحات</td></tr>
<tr><td rowspan="6">مسائل الرؤوس</td><td colspan="2">عدد المثلثات: $\binom{n}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">عدد الرباعيات:
$\binom{n}{4}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\binom{n+1}{3} - \frac{n}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">عدد المستطيلات:
$\binom{n/2}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">عدد المثلثات القائمة:
$\frac{n(n-2)}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">عدد أقطار مضلع محدب
$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$</td></tr>
<tr><td>ملاحظة</td><td colspan="2">• نقصد بقطر مضلع محدب أي قطعة مستقيمة واصلة بين رأسين غير متتاليين وليس بشرط المرور من المركز على خلاف قطر الدائرة الذي يشترط المرور من المركز</td></tr>
<tr><td>Hero’s ideas</td><td colspan="2">• عدد المثلثات المنفرجة:
1- نثبت أحد الرؤوس
2- نحاول تشكيل زاوية من هذا الرأس بحيث تصل بين رأسين أحدهما على الأقل فوق القطر
3- نضرب بعدد الرؤوس الكلي ويمكن حفظ أنه في المسدس عددها 6 وفي المثمن عددها 24
• عدد المثلثات الحادة:
الكلي ناقص القائمة ناقص المنفرجة
• عدد نقاط تقاطع أقطار مضلع:
$\binom{n}{4} + n$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">مسائل الأضلاع</td><td colspan="2">نعلم أن أي مضلع يمكن تحديده لعدد من المستقيمات الشاقولية والأفقية وعليه:</td></tr>
<tr><td>عدد الرباعيات</td><td>$\binom{\text{الأفقيات}}{2}\binom{\text{الشاقوليات}}{2}$</td></tr>
<tr><td>عدد المثلثات</td><td>$\binom{\text{الأفقيات}}{1}\binom{\text{الشاقوليات}}{2}$</td></tr>
<tr><td>عدد متوازيات الأضلاع</td><td>$\binom{\text{الأفقيات المتوازية}}{2}\binom{\text{الشاقوليات المتوازية}}{2}$</td></tr>
</table>

مسائل الهدايا (n عدد الأشخاص)	عدد الهدايا أكثر من عدد الأشخاص بواحد	عدد الهدايا يساوي عدد الأشخاص	عدد الهدايا أصغر من عدد الأشخاص
	$\binom{n+1}{2}.n!$	$n!$	$P_n^{\text{هدايا}}$
مسائل اللجان	لجان مع مناصب	لجان بلا مناصب	
	$P^{\text{بدي}}_{\text{عندي}}$	$\binom{\text{عندي}}{\text{بدي}}$	
مسائل الكرات	تتالي دون إعادة	تتالي مع إعادة	معاً
	نترجم الشروط إلى رموز مثل (RBW)		
	$P_n^r.\frac{(\text{عددهم})!}{(\text{التكرار})!}$	$n^r.\frac{(\text{عددهم})!}{(\text{التكرار})!}$	$\binom{n}{r}$
مسائل الخانات	**ملء خانات (كلمة سر)** • نستخدم المبدأ الأساسي في العد • نبدأ بملء الخانات المشروطة	**تشكيل اعداد** • نستخدم المبدأ الأساسي في العد • نبدأ بملء الخانات المشروطة • يوجد شرط ضمني: الصفر لا يوضع بالخانة اليسرى • يوجد شرط ضمني آخر: العدد الزوجي هو الذي آحاده زوجية فقط. • يوجد شرط ضمني آخر: مضاعف العدد 5 أي آحاده 0 أو 5.	
Hero's ideas	1- عندما يقول (ما عدد النتائج المختلفة) فالمقصود عدد النتائج 2- عدد النتائج التي أرقامها مختلفة مثنى مثنى أي أن التكرار ممنوع. 3- عند كتابة عدد طرق ملء خانة معينة فإن العدد الكلي ينقص عنصر واحد		
مسائل الشروط المتقاطعة	يكون المطلوب هنا ملء الخانات **(دون تكرار)** ويوجد بعض الخانات التي تشترك بالشروط		
	1- نضع الشروط تحت خاناتها 2- نناقش إحدى هذه الخانات ونميز حالتين a- إذا أخذنا من العناصر المشتركة: فإن عدد الإمكاناتفي الخانة الأخرى ينقص عنصراً b- إذا أخذنا من العناصر غير المشتركة: فإن عدد الإمكانات بالخانة الأخرى لا يتأثر 3- نملئ بقي الخانات وفق المبدأ الأساسي 4- نجمع النتيجتين		
ترتيب الكتب على رفوف	مبدأ أساسي في العد		

لجنة تحوي مناصب وبعض عناصرها متخاصمة	1- تمييز حالات: ....

يلتقي عشرة أصدقاءفي حفل , يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط

1- عدد المصافات التي جرتفي الحفل هو:

a	36	b	45	c	50	d	100

2- عدد المصافحات إذا علمت أنفي الحفل شخصين متخاصمين هو:

a	36	b	45	c	50	d	44

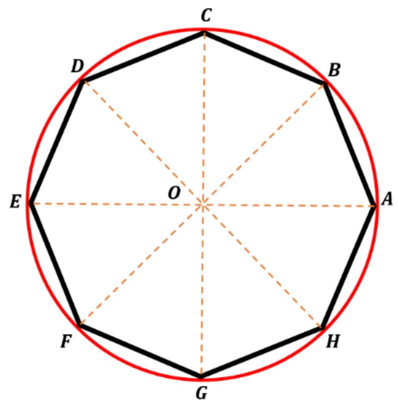
3- عدد المصافحات إذا علمت أنفي الحفل أربعة أشخاص هو:

a	36	b	45	c	6	d	100

4- إذا علمت أنفي الحفل تمت 66 مصافحة فإن عدد الأشخاصفي الحفل هو:

a	66	b	12	c	50	d	100

- نتأمل في معلم متجانس $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$ في المستوي الشكل المرسوم جانباً.



لدينا ثمان نقاط A,B,C,D,E,F,G,H موزعة على دائرة نصف قطرها 1 . g التي تمثل رؤوس مثمن منتظم

أجب عن الأسئلة الآتية

5- الشكل الجبري للعدد b

a	$\sqrt{2}+i\sqrt{2}$	b	$1+i$	c	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$	d	$\sqrt{3}+i$

6- الشكل الجبري للعدد d :

a	$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$	b	$1+i$	c	$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}$	d	$-\sqrt{3}+i$

7- الشكل الجبري للعدد c :

a	1	b	i	c	$-i$	d	-1

8- الشكل الجبري للعدد a :

a	1	b	i	c	$-i$	d	-1

9- ليكن I منتصف $[AD]$ استنتج قياساً للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})$:

a	$\frac{\pi}{8}$	b	$\frac{3\pi}{8}$	c	$-\frac{\pi}{8}$	d	$\frac{5\pi}{8}$

10- الشكل الجبري للعدد Z_1 هو :

a	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}$	b	$\frac{2-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{4}$	c	$\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{i\sqrt{2}}{4}$	d	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{4}$

11- عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن:

a	72	b	36	c	63	d	57

12- عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من النقاط $A, B, C, D, E, F, G, H , O$ تساوي:

a	84	b	81	c	80	d	79

13- عدد المثلثات القائمة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن:

a	16	b	8	c	4	d	32

14- عدد الرباعيات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن:

a	70	b	80	c	199	d	100

15- عدد المستطيلات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن:

a	6	b	5	c	4	d	3

16- عدد المثلثات المنفرجة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن:

a	20	b	50	c	24	d	12

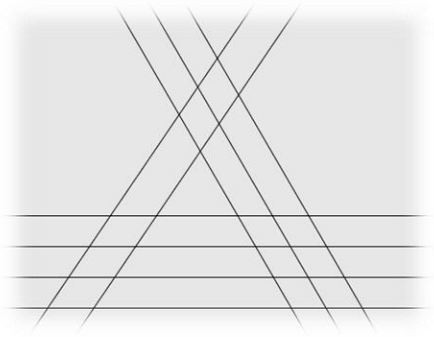
17- عدد اقطار المثمن:

a	20	b	10	c	30	d	5

18- ان عدد متوازيات الاضلاع في الشبكة المجاورة هو:

a	40	b	60	c	20	d	12

19- في الشكل المجاور، نتأمل ثلاث مجموعات من المستقيمات المتوازية. فإن عدد متوازيات الأضلاع الموجودة بالشكل هي:



a	27	b	42	c	132	d	84

20- يريد نذير توزيع 5 قالب من الحلوى على 4 طالباتفي الصف فإن عدد الطرائق الممكنة ليتم فيها التوزيع:

a	80	b	240	c	10	d	84

21- تريد المصممة أن توزع ستة إعلانات رقميةفي 7 مجموعات على منصات التواصل الاجتماعي فيكون عدد الطرائق الممكنة للقيام بالعملية السابقة يساوي:

a	80	b	42	c	5040	d	84

22- في صف يتكون من عشرة طلاب بين ذكور واناث إذا أردنا تشكيل لجنة لحماية البيئة مؤلفة من 4 طلاب فإن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو:

a	80	b	42	c	210	d	84

23- في شركة "توليدو" يجري اختيار مدير عام وأمين سر للشركة من 15 موظفاً فإن عدد الطرائق الممكنة لاختيارهم تساوي:

a	210	b	310	c	500	d	300

24- مغلف يحوي بطاقات تحمل الأرقام {0,0,2,2,2,3,3,3,3} نسحب ثلاث بطاقات على التتالي بدون إعادة فيكون عدد النتائج المختلفة للسحب هو:

a	84	b	504	c	27

25- بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات مجموع أرقامها أصغر تماما من 4 :

a	24	b	42	c	264

26- بكم طريقة يمكن اختيار البطاقات مجموع ارقامها أكبر تماما من7:

a	12	b	14	c	132

27- لدينا الصندوق يحوي 5 كرات بيضاء وكرة واحدة صفراء, ان نتيجة سحب ثلاث كرات من الصندوق معا يساوي:

a	84	b	80	c	64	d	24

28- ان نتيجة سحب ثلاث كرات بدون إعادة علما ان السحبة تشتمل على كرتين بيضاء على الأكثر:

a	316	b	489	c	498	d	298

29- ان نتيجة سحب ثلاث مع إعادة علما ان السحبة تشتمل على كرتين فقط من نفس اللون هو:

a	286	b	486	c	386	d	586

30- ان نتيجة سحب ثلاث كرات مختلفة الألوان بدون إعادة هو:

a	90	b	30	c	60	d	120

31- ان نتيجة سحب ثلاث كرات من الصندوق على التتالي مع إعادة هو:

a	529	b	629	c	829	d	729

32- ان نتيجة سحب ثلاث كرات من الصندوق على التتالي دون إعادة هو:

a	504	b	405	c	604	d	406

33- لتكن المجموعة $S = \{0,1,2,3,4,5\}$ فإن عدد الطرائق الممكنة لتشكيل عدد زوجي مؤلف من ثلاث خانات هو:

a	108	b	200	c	350	d	90

34- لتكن المجموعة $S = \{7,1,2,3,4,5\}$ فإن عدد الطرائق الممكنة لتشكيل عدد فردي من مضاعفات الـ 5 ومؤلف من 3 خانات هو:

a	36	b	60	c	50	d	30

35- لتكن المجموعة $S = \{0,1,9,3,4,5\}$ فإن عدد الطرائق الممكنة لتشكيل عدد زوجي مؤلف من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى هو:

a	16	b	35	c	36	d	50

36- وصل منذ أيام طرداً لفريق شغف الرياضيات يحتوي على خمسة نوطات و أربعة مكثفات ورقية نريد أن نرتبهم على رف خشبي فإذا علمت أن أول ثلاثة ستكون نوطات فإن عدد الطرائق الممكنة لترتيب الورقيات هو:

a	$6!$	b	$5!$	c	$6!\,.P_5^3$	d	$5!\,.P_5^3$

37- نريد توزيع ثلاثة مناصب إدارية في المعهد (مدير – موجه – محاسب) على 7 موظفين فإذا علمت أن هناك اثنان من الموظفين لا يجتمعان معاً في ذات المكتب فإن عدد الطرائق الممكنة لاختيار الكادر الإداري هو:

a	180	b	200	c	160	d	120

حول منشور ثنائي الحد	
القانون	$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ طريقة المرجوحة
قانون الحد T_r	$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$
الخطوات	1- نعوض المعطيات 2- نصلح القانون لتجميع المجاهيل المتماثلة 3- نضع شرطاً على الأس 4- نعزل r 5- نعوض في آخر صيغة لـ T_r
ملاحظة	1- إذا كان السؤال يطلب المنشور كاملاً نستعمل قانون المنشور 2- إذا كان السؤال يطلب حداً معيّناً نستعمل قانون الحد T_r 3- إذا كان يطلب شرطاً ليحوي المنشور على حد معين نطبق نفس الخطوات ونعزل r ثم نضع شرطاً على n لجعل r عدد طبيعي. 4- إذا كان السؤال (أيمكن أن يحوي المنشور على حد معين) نطبق قانون الحد فإذا كانت r عدد كسري فإنه لا يمكن 5- قد يكون السؤال عن أمثال حد ما فنختار الأمثال فقط في النهاية
Hero's ideas	• لإيجاد قيمة مجموع يحوي توافيق فإننا نلاحظ أن أول حد سيكون من الشكل $\binom{n}{0} a^n$ وآخر حد $\binom{n}{n} b^n$ فتكون قيمة المجموع: $(a+b)^n$. • إذا كان السؤال عن آحاد وعشرات ومئات .... عدد مرفوق لأس فإننا نكتب الأساس بالشكل $(\alpha + 10)$ ثم: 1- الآحاد نحسب T_0 2- العشرات نحسب $T_0 + T_1$ 3- المئات نحسب $T_0 + T_1 + T_2$ • راجع سؤال مجموعة قيم المجموع $(a+b)$ في منشور $(1+ax)^5 + (1+bx)^4$
اكتب $\sin^n\theta$ أو $\cos^n\theta$ على شكل عبارة خطية لنسب المثلثية لمضاعفات الزاوية	1- نستفيد من دستوري أولر: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

	2- نطبق منشور ثنائي الحد 3- نجمع القوة التي أسسها متعاكسة 4- نعيد تطبيق قانون أولر بشكل عكسي: $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ $2isin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ **ملاحظة:** يمكن أن نستفيد من الحالة السابقة لإزالة حالة عدم تعيين أو حساب تكامل

1- إن قيمة المجموع:

$$S = 3^n\binom{n}{0} + 3^{n-1}\binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

a	3^n	b	5^n	c	2^n	d	4^n

2- إن قيمة المجموع:

$$S = 3^n\binom{n}{0} + 2\times 3^{n-1}\binom{n}{1} + 4\times 3^{n-2}\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}$$

a	2^n	b	5^n	c	3^n	d	4^n

3- إن آحاد وعشرات ومئات العدد 11^{11}:

a	661	b	601	c	111	d	611

4- قيمة المجموع

$$5^{n-1}\times 2\times\binom{n}{1} + 5^{n-2}\times 4\times\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\times\binom{n}{n}$$

a	7^n	b	$7^n - 1$	c	$7^n - 5^n$	d	$7^n - 5$

5- قيمة المجموع

$$2^5\binom{6}{1} + 2^4\binom{6}{2} + \cdots + \binom{6}{0}$$

a	243	b	81	c	179	d	24

6- يكتب التابع $f(x) = \cos^3 x$ بعبارة خطية للنسب المثلثية لمضاعفات الزاوية بالشكل:

a	$\frac{3}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(3x)$	b	$\frac{3}{4}\cos(x) + \cos(3x)$	c	$\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$	d	$\frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(x)$

7- يكتب التابع $f(x) = sin^3 x$ بعبارة خطية للنسب المثلثية لمضاعفات الزاوية بالشكل:

a	$-\frac{1}{4}\sin(5x) + \frac{3}{4}\sin(x)$	b	$-\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$	c	$-\frac{1}{4}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin(x)$	d	$\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$

8- إذا علمت أن $(e^{ix} + e^{-ix})^3 = e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}$ فإن $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$ تساوي:

a	-3	b	3	c	1	d	-1

9- الحد الذي يحوي x^2 في منشور $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$ هو

a	$210x^2$	b	210	c	$70x^2$	d	70

10- الشرط الذي يجب أن يحققه العدد الطبيعي n حتى يحوي المنشور $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ حداً ثابتاً هو

a	من مضاعفات 2	b	عدد كسري	c	من مضاعفات 3	d	عدد زوجي

11- آحاد وعشرات العدد 12^{12} هي

a	56	b	65	c	96	d	36

12- القيم المحتملة للمجموع $(a+b)$ إذا علمت أن أمثال x في منشور $(1+ax)^5(1+bx)^4$ هي 62:

a	$\{3,4,15\}$	b	$\{13,14,15\}$	c	$\{13,0,15\}$	d	$\{13,14,1\}$

13- يحتوي مغلف على 5 بطاقات , اثنتان تحملان الرقم1 , واثنتان تحملان الرقم 2 , واحدة تحمل الرقم 3 , نسحب من المغلف بطاقتين على التالي دون إعادة , عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما 4 هو:

a	4	b	5	c	6	d	12

14- يحتوي مغلف على 5 بطاقات , اثنتان تحملان الرقم1 , واثنتان تحملان الرقم 2 , واحدة تحمل الرقم 3 , نسحب من المغلف بطاقتين على التالي دون إعادة , عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين بطاقتين بطاقتين مجموعهما 2 أو 5 هو:

a	4	b	5	c	6	d	12

15- يحتوي مغلف على 5 بطاقات , اثنتان تحملان الرقم1 , واثنتان تحملان الرقم 2 , واحدة تحمل الرقم 3 , نسحب من المغلف بطاقتين على التالي دون إعادة , عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما عدد فردي هو:

a	4	b	5	c	6	d	12

16- رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ثلاثة كتب للمؤلف A و 4 كتب للمؤلف B , عدد الطرائق الممكنة لترتيب الكتب على الرفوف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B:

a	$4!$	b	$5!$	c	$4!.P_4^3$	d	$5!.P_4^3$

17- رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ثلاثة كتب للمؤلف A و 4 كتب للمؤلف B , عدد الطرائق الممكنة لترتيب الكتب على الرفوف إذا كان كتاباً ما للمؤلف Bفي البداية هو:

a	$6!.4$	b	$6!$	c	$6!.8$	d	2800

18- قيمة r التي تحقق $\frac{1}{\binom{6}{r}}+\frac{1}{\binom{5}{r}}=\frac{1}{\binom{4}{r}}$ هي:

a	2	b	15	c	15 , 2	d	0

19- لتكن المجموعة $S=\{2,3,5,6,7,9\}$, عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلة و أرقامها مأخوذة من S و كل عدد منها من مضاعفات العدد 5 و أصغر من 500 يساوي:

a	8	b	10	c	18	d	20

20- التقى عشرة أصدقاءفي حفل, عدد المصافحات التي ممكن ان تتم بينهم إذا علمت أنفي الحفل ثلاثة اشخاص متخاصمين هو:

a	42	b	45	c	3	d	50

مسائل الاحتمالات – القسم (1)

<table>
<tr><th>تجربة قطعة النقود</th><th>تجربة حجر النرد</th><th>تجربة الولادات</th></tr>
<tr>
<td>- رمي مرة واحدة (أو قطعة واحدة
$\Omega = \{H, T\}$
- رمي مرتين (أو قطعتين):
$\Omega = \{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$
- رمي 3 مرات (أو 3 قطع نقود):
$\Omega = \left\{\begin{matrix} HHH \\ HHT, HTH, THH \\ TTH, THT, HTT \\ TTT \end{matrix}\right\}$</td>
<td>- مرة واحدة (حجر واحد):
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- مرتين (أو حجرين):
جدول:
<table><tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td>
<td>- ولادة واحدة:
$\Omega = \{\mathrm{B}, \mathrm{G}\}$
- ولادتين:
$\Omega = \{BB, BG, GB, GG\}$
- 3 ولادات:
$\Omega = \left\{\begin{matrix} BBB \\ BBG.BGB.GBB \\ GGB.GBG.BGG \\ GGG \end{matrix}\right\}$
- 4 ولادات:
$\Omega = \left\{\begin{matrix} BBBB \\ BBBG, BBGB, BGBB, GBBB \\ GGGB, GGBG, GBGG, BGGG \\ BGBG, GBGB, BBGG, GGBB \\ BGGB, GBBG \\ GGGG \end{matrix}\right\}$</td>
</tr>
</table>

- **الحدث:** هو أي مجموعة جزئية من المجموعة التي تحوي جميع العناصر (Ω)
- **الأحداث المميزة:**
  - الحدث البسيط: هو الحدث الذي يحوي عنصر وحيد.
  - الحدث المستحيل: هو الحدث الذي لا يحوي أي عناصر (المجموعة الخالية ϕ)
  - الحدث الأكيد: هو الحدث الذي يحوي جميع العناصر (المجموعة Ω)
  - التقاطع (AgB) : هي العناصر المشتركة بين الحدثين
  - الاجتماع (AgأB) : هي العناصر المشتركة وغير المشتركة بين A و B
  - المعاكس A' هي العناصر غير الموجودة في A
  - الحدثان المتنافيان: هما الحدثان اللذان لا يقعان معاً (لا يوجد بينهما عناصر مشتركة) أي:

$$A \cap B = \phi$$

قوانين هامة:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{عدد الحالات الممكنة}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

كحالة خاصة: إذا كان A و B متنافيان فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{0}_{\text{لأنهم متنافيان}}$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

التمرين (1)

نلقي حجر نرد وليكن A الحدث الدال على ظهور عدد فردي و B الحدث الدال على ظهور عدد أولي و C الحد الدال على ظهور عدد أكبر تماماً من 3

1- احسب احتمال وقوع كلٍ من الأحداث A, B, C
2- احسب احتمال وقوع الأحداث $C \cup B$,$A \cup B$,$B \cap C$,$A \cap C$,$A \cap B$
3- احسب احتمال A' بطريقتين

التمرين (2)

في مدرستنا 30% من الطلاب يدرسون اللغة الفرنسية و 40% يدرسون الروسية و 60% يدرسون إحدى اللغتين على الأقل . احسب احتمال أن يكون طالباً مختاراً بشكل عشوائي ممن يدرسون اللغتين في آنٍ معاً

الاستقلال الاحتمالي والاحتمال الشرطي

■ **شرط الاستقلال الاحتمالي:**

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

1- نحسب احتمال A
2- نحسب احتمال B
3- نحسب احتمال $A \cap B$
4- نختبر الشرط

مثال: في تجربة القاء حجر نرد متجانس ليكن A حدث ظهور عدد أولي و B حدث ظهور عدد زوجي, أيكون الحدثان A و B مستقلان؟!

- **الاحتمال الشرطي:** رمزه $A|B$ ويقرأ بأحد الأساليب:
  1- A علماً أن B قد وقع
  2- A بشرط B
  3- A بعد B

قانونه:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

"احتمال التقاطع على احتمال الذي وقع"

التمرين (1)

في تجربة مراقبة جنس المولود في عائلة مكونة من 4 ولادات :نعرف الأحداث الآتية :

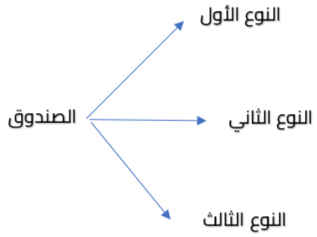
A : الأطفال الأربعة من نفس الجنس

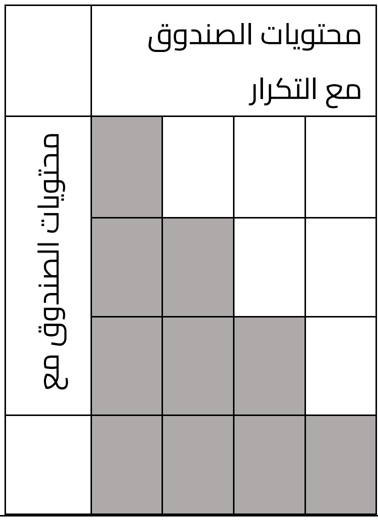
B : لدى العائلة طفلان وطفلتان

C : المولود الثالث أنثى:

1- احسب $P(A), P(B), P(C)$
2- هل A, C مستقلان احتمالياً
3- هل B, C مستقلان احتمالياً
4- احسب $P(A|C)\ ,\ P(B|C)$
5- دمج متغير عشوائي: ليكن X المتغير العشوائي الدال على عدد الاناث في العائلة, اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

مسائل الاحتمالات – القسم (2)

<table>
<tr><th>سحب أو اختيار عنصر واحد</th><th>سحب أو اختيار عنصرين</th><th>سحب أو اختيار 3 عناصر</th></tr>
<tr>
<td>مخطط شجري

</td>
<td>جدول:
نضع في السطر الأول
والعمود الأول
محتويات الصندوق كاملة
مع ذكر التكرار مثلاً
$R \quad R \quad R \quad B \quad W \quad W$</td>
<td>قوانين</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>السحب على التالي مع إعادة:
نضع الجدول كاملاً
<table>
<tr><td></td><td colspan="4">محتويات الصندوق مع التكرار</td></tr>
<tr><td rowspan="3">محتويات الصندوق مع</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td>
<td>السحب على التالي مع إعادة
القانون n^r
$$P(A) = \frac{\text{التباديل} \times \text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>السحب على التالي دون إعادة :
نحذف القطر الرئيسي:
<table>
<tr><td></td><td colspan="4">محتويات الصندوق مع التكرار</td></tr>
<tr><td rowspan="3">محتويات الصندوق مع</td><td>■</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>■</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>■</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>■</td></tr>
</table></td>
<td>السحب على التالي دون إعادة:
القانون P_n^r
$$P(A) = \frac{\text{التباديل} \times \text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$$</td>
</tr>
</table>

	السحب معاً : نحذف القطر الرئيسي و ما تحته : 	السحب معاً : القانون $\binom{n}{r}$ $P(A)=\frac{\text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$
نضع الاحتمالات على الشجرة : $\frac{\text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$	القانون دائماً : $P(A)=\frac{\text{الممكنة}}{\text{الكلية}}$ و نعد الحالات عداً مباشراً	في كل الحالات : نحسب الحالات الكلية $n(\Omega)$ من القانون و نثبت المقام على كامل المسألة عند حساب $n(\Omega)$ لانضرب بالتباديل عدد التباديل : $\frac{(\text{عدد الكرات المسحوبة})!}{(\text{التكرار})!}$

منصة طريقي مع أنس أحمد التعليمية الافتراضية

المسألة (1)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء و كرتين سوداوين : نسحب من الصندوق كرة و نسجل لونها

ثم نعيدها و نضاعف الكرات من لونها ثم نسحب كرة أخرى و المطلوب:

1- احسب احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء
2- احسب احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون
3- احسب احتمال أن تكون الأولى سوداء
4- احسب احتمال أن تكون الكرات متمايزة في اللون
5- دمج مع متحول عشوائي: ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الكرات الحمراء المسحوبة, اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

المسألة (2)

مغلف يحوي بطاقتين حمراوين تحملان الأرقام 0,1 و بطاقتين زرقاوين تحملان الرقمين 1,2 و بطاقة بيضاء تحمل الرقم 1, نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع إعادة و المطلوب :

1- احسب احتمال أن تكون الكرتين من نفس اللون
2- احسب احتمال أن تكون الكرتين من لونين مختلفين
3- احسب احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين يساوي 2
4- احسب احتمال أن يكون مجموع الرقمين عدد فردي
5- احسب احتمال أن تكون الكرات من نفس اللون ومجموعها مساوي للعدد 2
6- ليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع الرقمين الظاهرين , اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

المسألة (3)

أعد المسألة السابقة في حالة السحب على التتالي دون إعادة

المسألة (4)

أعد المسألة السابقة في حالة السحب معاً

صندوق يحوي 10 كرات ستة منها حمراء و ثلاثة بيضاء و واحدة سوداء

نسحب من الصندوق 3 كراتٌ معاً

1- ما احتمال ظهور كرات من نفس اللون
2- ما احتمال ظهور كرتين حمراوين فقط
3- ما احتمال ظهور كرات ألوانها مختلفة مثنى مثنى
4- ما احتمال ظهور كرة حمراء واحد على الأقل
5- ما احتمال ظهور كرة سوداء واحدة على الأقل
6- ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الكرات السوداء , اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

المسألة (5)

أعد المسألة السابقة في حال السحب على التتالي دون إعادة

المسألة (6)

أعد المسألة السابقة في حال السحب على التتالي مع إعادة

المسألة (7)

يحتوي صندوق على 5 كرات. ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملان الأرقام 1 و 2. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق والمطلوب:

1- ما احتمال الحدث A "الكرتين المسحوبتين من اللون ذاته".

2- ما احتمال الحدث B "مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3".

3- ما احتمال الحدث B علماً أن A قد وقع؟

4- ليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الألوان المختلفة الظاهرة , اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب كلاً من : التوقع الرياضي , التباين , الانحراف المعياري.

منصة طريقي التعليمية الافتراضية مع أنس أحمد

مسائل إضافية في المتحول العشوائي

التمرين (1)

نلقي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية و ليكن X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد مرات ظهور الكتابة (T)

النتائج في فضاء العينة	كيف نعبر عنها وفق X	قيمة X الموافقة
HHH	عدد مرات ظهور T هنا ولا مرة	$X = 0$
HHT	عدد مرات ظهور T هنا مرة واحدة	$X = 1$
HTH	عدد مرات ظهور T هنا مرة واحدة	$X = 1$
THH	عدد مرات ظهور T هنا مرة واحدة	$X = 1$
TTH	عدد مرات ظهور T هنا مرتين	$X = 2$
THT	عدد مرات ظهور T هنا مرتين	$X = 2$
HTT	عدد مرات ظهور T هنا مرتين	$X = 2$
TTT	عدد مرات ظهور T هنا 3 مرات	$X = 3$

فتكون قيم X هي $X = \{0,1,2,3\}$ (لا نكرر القيمة أكثر من مرة عندما نكتب مجموعة قيم X)

القانون الاحتمالي :

$$P(X = 0) = P(\{HHH\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = P(\{HHT, HTH, THH\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = p(\{TTH, THT, HTT\}) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = P(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$$

جدول القانون الاحتمالي:

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$x_i p_i$					
$x_i^2 p_i$					

التوقع الرياضي :

$$E(x) = \sum x_i pi$$

$$E(x) = \cdots \dots \dots$$

التباين :

$$V(x) = \sum x_i^2 p_i - E^2(x)$$

$$V(x) = \cdots \dots - (\dots \dots)^2 =$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \cdots$$

التمرين (2)

نلقي قطعة نقود متوازنة 3 مرات و نتأمل لعبةً تقتضي بالحصول على نقطة واحدة كلما ظهر وجه الصورة (H) و خسارة نقطة كلما ظهر وجه الكتابة (T) و ليكن X المتحول العشوائي الذي يدلّ على مجموع النقاط التي يحصل عليه اللاعبفي نهاية اللعبة

النتائج في فضاء العينة	كيف نعبر عنها وفق X	قيمة X الموافقة
HHH	هنا اللاعب سيربح 3 نقاط لأنه قد ظهر الوجه H 3 مرات	$X=3$
HHT	هنا اللاعب سيربح نقطتين مقابل HH ويخسر نقطة مقابل T أي 1-1+1+ فيكون المجموع 1 نقطة	$X=1$
HTH	هنا اللاعب سيربح نقطتين مقابل HH ويخسر نقطة مقابل T أي 1-1+1+ فيكون المجموع 1 نقطة	$X=1$
THH	هنا اللاعب سيربح نقطتين مقابل HH ويخسر نقطة مقابل T أي 1-1+1+ فيكون المجموع 1 نقطة	$X=1$
TTH	هنا اللاعب سيربح نقطة مقابل H ويخسر نقطتين مقابل TT أي 1-1-1+ فيكون المجموع 1 - نقطة	$X=-1$
THT	هنا اللاعب سيربح نقطة مقابل H ويخسر نقطتين مقابل TT أي 1-1-1+ فيكون المجموع 1 - نقطة	$X=-1$
HTT	هنا اللاعب سيربح نقطة مقابل H ويخسر نقطتين مقابل TT أي 1-1-1+ فيكون المجموع 1 - نقطة	$X=-1$
TTT	هنا سيخسر اللاعب ثلاث نقاط مقابل TTT	$X=-3$

فتكون مجموعة قيم X هي $X=\{3,1,-1,-3\}$

القانون الاحتمالي :

$$P(X=3)=P(\{HHH\})=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=P(\{HHT,HTH,THH\})=\frac{3}{8}$$

$$P(X=-1)=p(\{TTH,THT,HTT\})=\frac{3}{8}$$

$$P(X=-3)=P(\{TTT\})=\frac{1}{8}$$

جدول القانون الاحتمالي :

x_i	-3	1	-1	3	$\sum$
p_i					1
$x_i p_i$					
$x_i^2 p_i$					

التوقع الرياضي :

$$E(x) = \sum x_i pi$$

$$E(x) = \cdots \dots \dots$$

التباين :

$$V(x) = \sum x_i^2 p_i - E^2(x)$$

$$V(x) = \cdots \dots - (\dots \dots)^2 =$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \cdots$$

التمرين (3)

نلقي حجري نرد متوازنين وليكن X المتحول العشوائي الدال على أصغر العددين الظاهرين

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1) أصغرهما 1 $X=1$	(1,2) أصغرهما 1 $X=1$	(1,3) أصغرهما 1 $X=1$	(1,4) أصغرهما 1 $X=1$	(1,5) أصغرهما 1 $X=1$	(1,6) أصغرهما 1 $X=1$
2	(2,1) أصغرهما 1 $X=1$	(2,2) أصغرهما 2 $X=2$	(2,3) أصغرهما 2 $X=2$	(2,4) أصغرهما 2 $X=2$	(2,5) أصغرهما 2 $X=2$	(2,6) أصغرهما 2 $X=2$
3	(3,1) أصغرهما 1 $X=1$	(3,2) أصغرهما 2 $X=2$	(3,3) أصغرهما 3 $X=3$	(3,4) أصغرهما 3 $X=3$	(3,5) أصغرهما 3 $X=3$	(3,6) أصغرهما 3 $X=3$
4	(4,1) أصغرهما 1 $X=1$	(4,2) أصغرهما 2 $X=2$	(4,3) أصغرهما 3 $X=3$	(4,4) أصغرهما 4 $X=4$	(4,5) أصغرهما 4 $X=4$	(4,6) أصغرهما 4 $X=4$
5	(5,1) أصغرهما 1 $X=1$	(5,2) أصغرهما 2 $X=2$	(5,3) أصغرهما 3 $X=3$	(5,4) أصغرهما 4 $X=4$	(5,5) أصغرهما 5 $X=5$	(5,6) أصغرهما 5 $X=5$
6	(6,1) أصغرهما 1 $X=1$	(6,2) أصغرهما 2 $X=2$	(6,3) أصغرهما 3 $X=3$	(6,4) أصغرهما 4 $X=4$	(6,5) أصغرهما 5 $X=5$	(6,6) أصغرهما 6 $X=6$

نلاحظ أن مجموعة قيم X هي

$X = \{1,2,3,4,5,6\}$

(إذا كان الطلب أكبرهما يُحلّ بنفس الأسلوب تماماً)

القانون الاحتمالي:

$P(X = 1) = \frac{11}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X = 1$ في الجدول

$P(X = 2) = \frac{9}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X = 2$ في الجدول

$P(X = 3) = \frac{7}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X = 3$ في الجدول

$P(X = 4) = \frac{5}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X = 4$ في الجدول

$P(X = 5) = \frac{3}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X = 5$ في الجدول

$P(X = 6) = \frac{1}{36}$ قمنا بعد المرات التي يكون فيها $X = 6$ في الجدول

(مسامح بجدول القانون الاحتمالي و بلقي الطلبات)

التمرين (4)

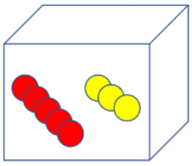
نلقي حجري نرد متوازنين وليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع العددين الظاهرين

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1) مجموعها 2 $X = 2$	(1,2) مجموعها 3 $X = 3$	(1,3) مجموعها 4 $X = 4$	(1,4) مجموعها 5 $X = 5$	(1,5) مجموعها 6 $X = 6$	(1,6) مجموعها 7 $X = 7$
2	(2,1) مجموعها 3 $X = 3$	(2,2) مجموعها 4 $X = 4$	(2,3) مجموعها 5 $X = 5$	(2,4) مجموعها 6 $X = 6$	(2,5) مجموعها 7 $X = 7$	(2,6) مجموعها 8 $X = 8$
3	(3,1) مجموعها 4 $X = 4$	(3,2) مجموعها 5 $X = 5$	(3,3) مجموعها 6 $X = 6$	(3,4) مجموعها 7 $X = 7$	(3,5) مجموعها 8 $X = 8$	(3,6) مجموعها 9 $X = 9$
4	(4,1) مجموعها 5 $X = 5$	(4,2) مجموعها 6 $X = 6$	(4,3) مجموعها 7 $X = 7$	(4,4) مجموعها 8 $X = 8$	(4,5) مجموعها 9 $X = 9$	(4,6) مجموعها 10 $X = 10$
5	(5,1) مجموعها 6 $X = 6$	(5,2) مجموعها 7 $X = 7$	(5,3) مجموعها 8 $X = 8$	(5,4) مجموعها 9 $X = 9$	(5,5) مجموعها 10 $X = 10$	(5,6) مجموعها 11 $X = 11$
6	(6,1) مجموعها 7 $X = 7$	(6,2) مجموعها 8 $X = 8$	(6,3) مجموعها 9 $X = 9$	(6,4) مجموعها 10 $X = 10$	(6,5) مجموعها 11 $X = 11$	(6,6) مجموعها 12 $X = 12$

فمجموعة قيم X هي $X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

بشكل مماثل للمسألة السابقة (بالعد المباشر) يمكن إيجاد الاحتمالات

التمرين (5)



صندوق يحوي 5 كرات حمراء و 3 كرات صفراء نسحب من الصندوق 3 كرات معاً و ليكن **X** المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة

☺هنا نحن نسحب 3 كرات (بسسس 3 كرات) و X يراقب عدد الكرات الحمراء المحتمل أن نسحبها

الحالات الممكنة للسحب	التفسير	قيمة X الموافقة
3 كرات صفراء	ولا كرة حمراء	$X = 0$
كرتين صفراويين وكرة حمراء	كرة واحدة حمراء	$X = 1$
كرتين حمراوين وكرة صفراء	كرتين حمراء	$X = 2$
ثلاث كرات حمراء	ثلاث كرات حمراء	$X = 3$

فتكون قيم $X = \{0,1,2,3\}$

القانون الاحتمالي في مسائل سحب الكرات يجب أولاً حساب عدد الحالات الكلية ليكون مقام لكل المسألة

بما أن السحب 3 كرات معاً : $n(\Omega) = \binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56$

$$P(X=0) = P(YYY) = \frac{\binom{3}{3}}{56} = \frac{1}{56}$$

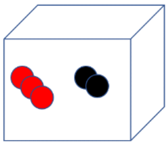
$$P(X=1) = P(YYR) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{56} = \frac{15}{56}$$

$$P(X=2) = P(RRY) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{56} = \frac{30}{56}$$

$$P(X=3) = P(RRR) = \frac{\binom{5}{3}}{56} = \frac{10}{56}$$

أكمل الجدول و التوقع و التباين و الانحراف

التمرين (6)



صندوق يحوي كرتين سوداء و 3 كرات حمراء. نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي دون إعادة

و ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة

الحالات الممكنة للسحب	التفسير	قيمة X الموافقة
3 كرات حمراء	-	$X = 3$
كرتين حمراوين وكرة سوداء	كرتين حمراء	$X = 2$
كرتين سوداوين وكرة حمراء	كرة واحدة حمراء	$X = 1$

فقيم المتحول X هي $X = \{1,2,3\}$

لاحظ هنا انه من المستحيل أن يكون $X = 0$ لأن $X = 0$ تعني عدم ظهور ولا كرة حمراء و هذا مستحيل فأقل ما يمكن أن يحدث أن نحصل على كرتين سوداين و كرة حمراء فأقل قيمة لـ X هي 1 ثم 2 ثم 3

القانون الاحتمالي :

نحسب عدد الحالات الكلي $n(\Omega) = P_5^3 = 5.4.3 = 60$

$$P(X = 3) = P(RRR) = \frac{P_3^3}{60} = \frac{6}{60}$$

$$P(X = 2) = P(RRB) = \frac{P_3^2 P_2^1 \times \underbrace{3}_{\text{تباديل}}}{60} = \frac{36}{60}$$

$$P(X = 1) = P(BBR) = \frac{P_2^2 P_3^1 \times \underbrace{3}_{\text{تباديل}}}{60} = \frac{18}{60}$$

جدول القانون الاحتمالي :

x_i	3	2	1	$\sum$
p_i				1
$x_i p_i$				
$x_i^2 p_i$				

التوقع الرياضي :

$$E(x) = \sum x_i pi$$

$$E(x) = \cdots \ldots \ldots$$

التباين :

$$V(x) = \sum x_i^2 p_i - E^2(x)$$

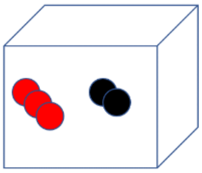
$$V(x) = \cdots \ldots - (\ldots \ldots)^2 =$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \cdots$$

التمرين (7)

صندوق يحوي كرتين سوداء و 3 كرات حمراء. نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي مع إعادة



و ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة

الحالات الممكنة للسحب	التفسير	قيمة X الموافقة
3 كرات حمراء	-	$X = 3$
كرتين حمراوين وكرة سوداء	كرتين حمراء	$X = 2$
كرتين سوداوين وكرة حمراء	كرة واحدة حمراء	$X = 1$
3 كرات سوداء (السحب مع إعادة)	ولا كرة حمراء	$X = 0$

فقيم المتحول X هي $X = \{0,1,2,3\}$

القانون الاحتمالي :

عدد الحالات الكلي $n(\Omega) = 5^3 = 125$

$$P(X = 3) = P(RRR) = \frac{3^3}{125} = \frac{27}{125}$$

$$P(X = 2) = P(RRB) = \frac{3^2 . 2^1 \times \underbrace{3}_{\text{تباديل}}}{125} = \frac{54}{125}$$

$$P(X=1)=P(RBB)=\frac{3^1.2^2\times\underbrace{3}_{\text{تباديل}}}{125}=\frac{36}{125}$$

$$P(X=0)=P(BBB)=\frac{2^3}{125}=\frac{8}{125}$$

التمرين (8)

صندوق يحوي 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرة صفراء . نسحب من الصندوق 3 كرات معاً و ليكن X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الألوان المختلفة الظاهرة

(((عدد الألوان المختلفة يعني كم لون ممكن يظهر بالسحب.. فمستحيل ما يظهر ولا لون فمستحيل يكون $X=0$))))) سنرمز للخضراء G والحمراء R والصفراء Y

الحالات الممكنة للسحب	التفسير	قيمة X الموافقة
GGG	لون واحد الأخضر	X = 1
GGR	لونين الأخضر والأحمر	$X=2$
GGY	لونين الأخضر والأصفر	$X=2$
GRY	3 ألوان اخضر وأحمر وأصفر	$X=3$
RRR	لون واحد الأحمر	$X=1$
RRG	لونين الأحمر والأخضر	$X=2$
RRY	لونين الأصفر والأحمر	$X=2$

فقيم X تكون $X=\{1,2,3\}$

القانون الاحتمالي : لنحسب عدد الحالات الكلي : $n(\Omega)=\binom{8}{3}=56$

$$P(X=1)=P(GGG,RRR)=\frac{\binom{3}{3}\binom{4}{3}}{56}=\frac{4}{56}\quad,\quad P(X=3)=P(RGY)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{56}=\frac{12}{56}$$

إن حالة $X=2$ صعبة الحساب لذا سنستفيد من خاصية الحدث المتمم :

$$P(X=2)=1-\left(P(X=1)+P(X=3)\right)=1-\left(\frac{4}{56}+\frac{12}{56}\right)=\frac{36}{56}$$

لا يوجد ما هو مستحيلفي الرياضيات

إن إبداع الطالب دائماً يمكن استخراجه إذا ما تم عرض المعلومة بطريقة مناسبة وأسلوب محبب و طالما لدى الطالب الرغبة على بلوغ أسمى المستويات فإن من واجب المدرس الارتقاء بهم لتحقيق أعلى معدلات التميز و النجاح .... نذير تيناوي

#لن_يبلى_الشغف

المسألة (1)

يحتوي صندوق على 5 كرات , اثنتان تحملان الرقم , واثنتان تحملان الرقم , واحدة تحمل الرقم , نسحب من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة , نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع رقمي الوجهين الظاهرين

عين مجموعة قيم X واكتب قانونه الاحتمالي ثم احسب التوقع و التباين و الانحراف المعياري

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين

المسألة (1)

نتأمل التجربة الآتية:

صندوق يحوي ثلاث كرات : واحدة حمراء تحمل الرقم 1 اثنتان زرقاوان تحملان ارقم 2 و 3 نسحب من الصندوق عشوائياً كرتين على التتالي مع إعادة ولتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة :

- نعرف على Ω المتحول العشوائي X الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد الكرات الزرقاوات المسحوبة
- ونعرف على Ω المتحول العشوائي Y الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموعة رقمي الكرتين المسحوبين

1- اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي

2- اكتب قيم Y و قانونه الاحتمالي

3- اكتب قانون الاحتمال للزوج (X, Y)

4- هل X, Y مستقلان عشوائياً

المسألة (2)

نلقي حجري نرد متوازنين نرمز بالرمز S إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها وليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 2 و Y الذي يمثل باقي قسمة S على 4 والمطلوب:

1- عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S.

2- عين القانونين الاحتماليين للمتحولين العشوائيين X و Y.

3- عين القانون الاحتمالي للزوج (X, Y).

4- هل المتحولان X و Y مستقلان احتمالياً؟!

المسألة (3)

يتطلب انجاز منهاج الرياضياتفي جلسة شغف الرياضيات الامتحانية مرحلتين المرحلة A شرح الأفكار النظرية

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X_A = x)$	0.2	0.5	0.3

والمرحلة B حل مسائل وتمارين شاملة تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يعطى قانون احتمالها بالجدول الآتي:

وتستغرف المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B يعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

المتحولان العشوائيان X_B و X_A مستقلان احتمالياً. نرمز بالرمز E للحدث "تستغرق انجاز المنهاج ثلاثة أيام أو

x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_B = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

أقل". احسب احتمال الحدث E.

المسألة (4)

أكمل الجدول الآتي إذا علمت أن X و Y مستقلان احتمالياً:

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

التمثيل الشجري

قواعد التمثيل الشجري:

- توافق كل عقدة حالة من حالات التجربة
- قانون العقد: مجموع جميع الاحتمالات المكتوبة على الفروع الصادرة من العقد يساوي 1
- يمثل مسار تام بدءاً من جذر الشجرة إلى نهاية طرف نهائي فيها الحدث الموافق لتقاطع جميع الأحداث التي يمر بها المسار
- إن احتمال مسار يساوي جداء ضرب الاحتمالات المسجلة على الفروع التي تكوّن هذا المسار
- احتمال الحدث D يساوي مجموع احتمالات المسارات المؤدية إلى D

المسألة (1)

يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح الكهربائية , عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح , صنعت الورشة A منها 1200 مصباح وصنعت البقية الورشة B , هناك نسبة 4% من المصابيح التي من صناعة الورشة A معطوبة , في حين تكون نسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة , نسحب عشوائياً مصباحاً من الطلب , نرمز بالرمز A إلى الحدث " المصباح مصنوعفي الورشة A " وبالرمز B إلى الحدث " المصباح مصنوعفي الورشة B " وبالرمز D إلى الحدث " المصباح معطوب " , المطلوب :

1- أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة
2- احسب احتمال أن يكون المصباح معطوب
3- إذا كان المصباح معطوباً فما احتمال أن يكون مصنوعافي الورشة A

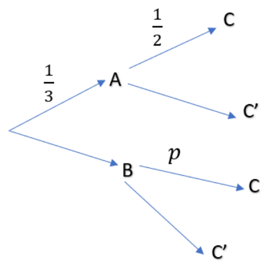
المسألة (2)

في مدرستنا يمارس **30%** من الطلاب لعبة كرة المضرب , ونعلم أن مدرستنا تضم **60%** ذكور وأن **55%** من هؤلاء لا يلعبون كرة المضرب ’ ما احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين الطالبات لا تمارس كرة المضرب .

المسألة (3)

نتأمل في الشكل المجاور تمثيلاً شجرياً لتجربة عشوائية

احسب p ليكون الحدثان A, C مستقلان احتمالياً .



المسألة (4)

صندوق يحوي ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين نسحب من الصندوق كرة تلو الأخرى حتى لا يتبقى في الصندوق الا كرات من اللون ذاته، وليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد مرات السحب اللازمة، عين مجموعة قيم X واكتب قانونه الاحتمالي ثم احسب التوقع و التباين و الانحراف المعياري

المسألة (5)

نتأمل صندوقاً يحوي على 3 كرات سوداء و أربع كرات حمراء .نسحب من عشوائياً كرة من الصندوق و نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق ثم نحسب مجدداً كرة من الصندوق . لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث (الكرة المحسوبة في المرة الثانية حمراء اللون)

و ليكن R_1 الحدث (الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون)

1- أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة
2- احسب احتمال R_2
3- إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون ما احتمال أن تكون الكرة الأولى في المرة الأولى سوداء اللون ؟

المسألة (6)

تحاول سعاد إدخال الوتد في حلقات تلقيها, تكرر سعاد التجربة عدداً من المرات عندما تنجح سعاد في ادخال الحلقة فإن احتمال نجاحها في ادخال الحلقة اللاحقة هو $\frac{1}{3}$ وعندما تفشل في ادخال الحلقة يصبح احتمال فشلها في ادخال اللاحقة $\frac{4}{5}$ نفترض أن احتمال نجاح سعاد في ادخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها, نتأمل أيا كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n الحدثين الآتيين:

A_n : نجحت سعاد في ادخال الحلقة عند المرة n.

B_n: فشلت سعاد في ادخال الحلقة عند المرة n.

ونعرف $p_n = P(A_n)$:

1- عين p_1 وبرهن أن $p_2 = \frac{4}{15}$.

2- أثبت انه أيا كانت $n \geq 2$ كان $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$.

3- نعرف في حالة $n \geq 1$ المقدار u_n بالعلاقة $u_n = p_n - \frac{3}{13}$ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية وعين حدها الأول u_1 وأساسها q.

4- استنتج قيمة u_n ثم p_n بدلالة n, ثم احسب نهاية p_n.

5- ماذا تستنتج؟

المسألة (7)

لدينا n صندوقاً $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء و كرة واحدة حمراء . و كل صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين و كرة واحدة حمراء .

نسحب كرة من الصندوق الأول u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 و نضعها في الصندوق u_3 و هكذا ... , حتى نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} و نضعها في الصندوق u_n .

يرمز بالرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)

1- قيمة $P(R_1)$ تساوي :

a	$\frac{1}{3}$	b	$\frac{2}{5}$	c	$\frac{1}{4}$	d	$\frac{3}{4}$

2- يكون $P(R_2)$ مساوياً لـ :

a	$\frac{1}{4}P(R_1) - \frac{1}{4}$	b	$\frac{3}{4}P(R_1) + \frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{4}P(R_1) + \frac{1}{4}$	d	$\frac{1}{4}P(R_1) + \frac{3}{4}$

3- في حالة $2 \leq k \leq n$ يكون $P(R_k)$ مساوياً لـ :

a	$\frac{1}{4}P(R_{k-1}) - \frac{1}{4}$	b	$\frac{3}{4}P(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{4}P(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$	d	$\frac{1}{4}P(R_{k-1}) + \frac{3}{4}$

4- نعرف $x_k = P(R_k) - \frac{1}{3}$ عندئذٍ تكون المتتالية $(x_k)_{k\geq1}$:

a	هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	b	هندسية أساسها $-\frac{1}{4}$	c	هندسية أساسها $\frac{1}{4}$	d	ليست هندسية

5- عبارة x_k بدلالة k :

a	$\left(\frac{1}{4}\right)^k$	b	$\left(-\frac{1}{4}\right)^k$	c	$-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k$	d	$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k$

6- عبارة $P(R_k)$ بدلالة k :

a	$\left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{3}$	b	$\left(-\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{3}$	c	$-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{3}$	d	$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{1}{3}$

الأجوبة : كلن C ^_^

التجربة البرنولية

تستخدمفي حال عدد مرات التكرار كان أكبر من 3 أو حجم فضاء العينة مجهول و السحب على التتالي مع إعادة أو قطعة نقود غير متجانسة

1- نرمز لاحتمال النجاحفي المرة الواحدة p و احتمال الفشل $q = 1 - p$
2- عدد مرات تكرار التجربة n
3- مجموعة قيم المتحول الحداني :

$$X = \{0,1,2,3, \dots , n\}$$

4- القانون الاحتمالي :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

5- التوقع $E(x) = np$
6- التباين $V(x) = npq$
7- الانحراف المعياري $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

التمرين (1) دورة 2021

تتأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود و ووجهان ملونان بالأحمر . نلقي هذا الحجر خمس مرات متتالية و نعرف المتحول العشوائي X الذي يدل على عدد الوجوه السوداء التي نحصل عليها و المطلوب :

1- اكتب قيم المتحول العشوائي X واحسب $P(X = 0)$
2- احسب التوقع الرياضي للمتحول X واحسب تباينه

التمرين (2)

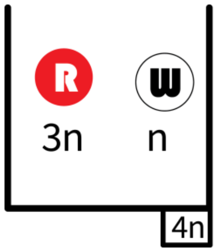
قطعة نقود غير متجانسة فيها احتمال ظهور صورة يساوي مثلي احتمال ظهور كتابة نلقي هذه القطعة ثلاثة مرات وليكن X املتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور كتابة عين قيم المتحول العشوائي X ثم اكتب جدول القانون الاحتمال واحسب كل من: التوقع الرياضي , التباين و الانحراف المعياري.

التمرين (3)

يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء ، عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء

1- نسحب عشوائياً كرة ، ما احتمال أن تكون حمراء اللون
2- نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي و مع إعادة و نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عملية السحب ، ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X

الحل



❶ لنفرض أن عدد الكرات البيضاء هو n عندئذٍ يكون عدد الكرات الحمراء $3n$ و عدد الكرات الكلي في الصندوق

$3n + n = 4n$ و بالتالي احتمال أن تكون كرة مسحوبة عشوائياً حمراء اللون يساوي

$$\frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

❷ قيم المتحول العشوائي X :

$$X = \{0,1,2,3\}$$

$P = \frac{3}{4}$ ((احتمال ظهور كرة حمراء)) و منه

$$q = 1 - p = \frac{1}{4}$$

و السحب يتكرر هنا 3 مرات $\Leftarrow \boxed{n = 3}$

$$P(X = k) = \binom{3}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{3-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{3} = \frac{1}{64}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{2} = \frac{9}{64}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{1} = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{0} = \frac{27}{64}$$

التمرين (4) سؤال دورة

تأمل في الجدول الآتي تجربة برنولية

k	0	1	2	3
P_k				$\frac{1}{27}$

1- أوجد وسطاء القانون الاحتمالي n, p, q

2- اكتب القانون الاحتمالي و أكمل الجدول السابق

الحل

لدينا $k = 0,1,2,\dots\dots,n$ إذن $\boxed{n = 3}$ نعلم ان القانون الاحتمالي الحداني

$$P(X = k) = \binom{3}{k} p^k q^{3-k} \dots\dots (\star)$$

من الجدول لدينا $P(X = k) = \frac{1}{27}$ نعوض في $(\star)$

$$\binom{3}{3} p^3 q^{3-3} = \frac{1}{27}$$

$$p^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{3}}$$

إذن

$$\boxed{q = \frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow P(X = k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27}$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{27}$$

k	0	1	2	3	Σ
p_k	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

إضافي : احسب التوقع و الانحراف المعياري

$$E(x) = np = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$$V(x) = npq = 3 \times \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_{(x)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

اختبار

المسألة (1)

يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء و عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء و المطلوب :

1- نسحب عشوائياً من الصندوق كرة . ما احتمال أن تكون بيضاء اللون
2- نسحب من الصندوق 3 كرات على التالي مع إعادة . نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاثة . اكتب مجموعة قيم X و جدول قانونه الاحتمالي .

المسألة (2)

يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام 5g4g3g2g1 نسحب من الصندوق كرتين على التالي مع الإعادة و المطلوب :

1- كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب
2- كم عدد النتائج المختلفة و التي تشتمل على كرتين مجموعهما عدد فردي

المسألة (3)

عين قيمة n التي تحقق المعادلة :

$$P_{n+3}^{3} = 16\binom{n+2}{2}$$

المسألة (4)

صندوق يحوي 9 كرات متماثلة منها 4 كرات خضراء و 5 كرات حمراء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً . و نتأمل متحولاً عشوائياً X يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء يأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين و كرة خضراء يأخذ القيمة 0 عدا ذلك و المطلوب

اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X و احسب توقعه الرياضي

المسألة (5)

في مجتمع للبالغين تبلغ نسبة المصابين بمرض *30% corona* وبينت الدراسات أن *70%* من المصابين تظهر عليهم أعراض ارتفاع درجة الحرارة و أن *25%* من غير المصابين تظهر عليهم أعراض ارتفاع درجة الحرارة

1- أعط تمثيلاً شجرياً للمسألة
2- احسب احتمال أن تظهر على شخص ما أعرض ارتفاع درجة الحرارة
3- ما احتمال أن يكون الشخص غير مصاب بـ *corona* علماً أنه يعاني ارتفاع حرارة

المسألة (6)

يحتوي مغلف على 5 بطاقات , اثنان تحملان الرقم , واثنان تحملان الرقم , واحدة تحمل الرقم ,
نسحب من المغلف بطاقتين على التالي دون إعادة و المطلوب :

1- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما 4
2- ما عدد النتائج التي تشتمل على بطاقتين مجموعهما عدد فردي

المسألة (7)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء و كرتين بيضاوين و كرة زرقاء

نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً و المطلوب :

1- ما عدد النتائج التي تشتمل على 3 كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى
2- ما عدد النتائج التي تشتمل على كرتين من نفس اللون
3- ما عدد النتائج التي تشتمل على كرات من لون واحد

المسألة (8)

احسب قيمة r إذا علمت :

$$\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$$

المسألة (9)

نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير و نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمس أشخاص . بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة علماً بأنفي المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعانفي اللجنة ذاتها

المسألة (10)

صندوق يحوي 3 كرات حمراء مرقمة بالأرقام 1و2 و3 و كرتين زرقاوين مرقمين بالأرقام 1و2 و كرتين بيضاوين مرقمين بالأرقام 2و3, نسحب من الصندوق 3 كرات معاً

1- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات مختلفة الألوان
2- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات تحمل نفس الرقم
3- ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات مختلفة اللون و تحمل نفس الرقم

المسألة (11)

نتأملفي الشكل المجاور 6 خانات يمكن لأي منها أن تُملأ بأحد الرقمين 1+ أو 1−

1- بكم طريقة يمكن ملء هذه الخانات
2- بكم طريقة يمكن ملء هذه الخانات حتى يكون مجموع أرقمها مساوياً للصفر
3- ليكن X المتحول العشوائي الدال على مجموع الأرقام في الخانات بعد ملئها . اكتب قيم X

المسألة (VIE 1)

في تجربة القاء حجري نرد متوازنين نعرف X المتحول العشوائي الدال على أكبر العددين الظاهرين، المطلوب:

1- اكتب مجموعة قيم X وجدول قانونه الاحتمالي.
2- احسب توقعه الرياضي $E(x)$.
3- إذا علمت أن اكبر العددين الظاهرين هو 6 فما احتمال ظهور العدد 1؟

المسألة (VIE 2)

نتأمل جانباً جدول القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي X، المطلوب:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{\alpha}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{\beta}{16}$

1- عين العددين α و β إذا علمت أن $E(x)=2$.
2- من أجل $\alpha=6$ و $\beta=1$ ، احسب تباين المتحول العشوائي $V(x)$.

المسألة (VIE 3)

تقدم طالب لامتحان مؤتمت مؤلف من 8 أسئلة لكل سؤال جواب صحيح واحد من أصل 4 ويجيب هذا الطالب بالحزر (التشليف) وليكن X المتحول العشوائي الدال على عدد الأسئلة التي ينجح في الإجابة عنها الطالب:

1- اكتب قيم X وقانونه الاحتمالي.
2- احسب التوقع الرياضي.
3- ما احتمال أن يجيب الطالب على سؤالين صحيحين فقط؟

المسألة (VIE 4)

لدينا n صندوقاً $I_1, I_2, I_3 \dots, I_n$ يحوي الصندوق I_1 كرتين حمراوين وكرة سوداء أما باقي الصناديق الأخرى فكل منها يحوي كرتين حمراوين وكرتين سوداوين، نسحب من I_1 كرة ونضعهافي I_2 ثم نسحب كرة من I_2 ونضعهافي I_3 ونكمل التجربة إلى أن نصل إلى I_n , وليكن $P_k = P(R_k)$ ظهور كرة حمراءفي المرة k حيث $1 \le k \le n$.

1- احسب P_1 و P_2.

2- اكتب P_{n+1} بدلالة P_n.

3- بفرض $P_{n+1} = f(P_n)$.

أ- عين $f(x)$.

ب- جد ℓ حل المعادلة $f(x) = x$

ت- نضع المتتالية $v_n = P_n - \ell$, أثبت أنها هندسية وعين أساسها.