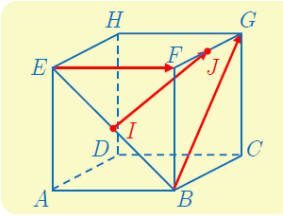
الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

نقول عن الأشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ إنها ثلاث أشعة مرتبطة خطياً إذا تحقق الشرطان:

1- $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً
2- يوجد عددان حقيقيان α,β يحققان:

$$\vec{w}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}$$

السؤال (1)



في الشكل المجاور مكعب و I منتصف $[EB]$ و J منتصف $[FG]$

والمطلوب إثبات أن الأشعة

$$\overrightarrow{EF}\,,\overrightarrow{BG}\,,\overrightarrow{IJ}$$

مرتبطة خطياً.

الحل

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

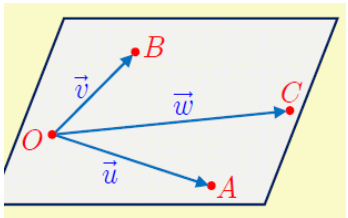
التفسير الهندسي:

إذا كان $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ثلاث أشعة مرتبطة خطياً بحيث:

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\,\vec{v}$$

عندئذٍ يوجد نقطة O في الفراغ تجعل النقاط O,A,B,C في مستوٍ واحد بحيث:

$$\overrightarrow{OA}=\vec{u}\ ,\quad \overrightarrow{OB}=\vec{v}\ ,\ \overrightarrow{OC}=\vec{w}$$



- **فوائد هامة للارتباط الخطي لثلاثة أشعة:**

1- إثبات وقع 4 نقاط في مستوٍ واحد:

- نثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ غير مرتبطين
- نثبت وجود عددين حقيقين α, β بحيث :

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$$

2- إثبات أن المستقيم (ED) يوازي المستوي (ABC):

(i) نثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

(ii) نثبت وجود عددين حقيقين α, β يحققان:

$$\overrightarrow{ED} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

السؤال (2)

A, B, C ثلاث نقاط متمايزة في الفراغ، أتكون الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطياً

.....

.....

نتيجة:

.....

.....

السؤال (3)

A, B, C ثلاث نقاط متمايزة في الفراغ. E نقطة تحقق $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC}$ و F نقطة تحقق $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. أتقع النقاط A,B,C,E,F في مستوٍ واحد .

.....

.....

.....

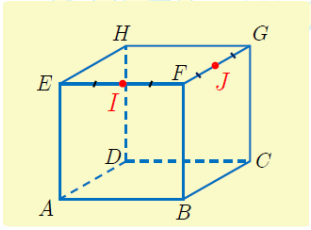
.....

.....

.....

السؤال (4)

$ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$



1) أتنتمي النقطة J إلى المستوي (ABI) ؟

2) أتقع الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ في مستوٍ واحد

.....

.....

.....

.....

■ الارتباط الخطي لثلاث اشعة:

نقول عن الاشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ إنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان α,β بحيث:

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

و $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً

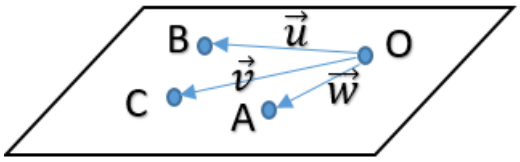
معنى الارتباط الخطي لثلاث أشعة: (مطالعة):

أنه يمكن استبدال هذه الاشعة بثلاث أشعة أخرى تشترك في نفس البداية وتقع في مستوٍ واحد. ((لايعني توازي بالضرورة))

أي يوجد نقطة o تجعل الاشعة $\overrightarrow{oc},\overrightarrow{oB},\overrightarrow{oA}$

تقع في مستو واحد حيث

$$\vec{w}=\overrightarrow{oA},\ \vec{u}=\overrightarrow{oB},\vec{v}=\overrightarrow{oC}$$



فوئد الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

1- إثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد.

2- إيجاد معادلة مستوٍ يمر من ثلاث نقاط.

3- إثبات انتماء M الى مستوٍ مار بثلاث نقاط.

انتبه: أي جملة معادلات مكونة من ثلاث معادلات ومجهولين فقط، فإننا نحل معادلتين منهما حلاً مشتركاً، ثم نعوض في الثالثة للتحقق ونميز حالتين:

1) إذا كانت المعادلة الثالثة محققة ← للجملة حل مشترك هو الحل الذي أوجدناه من اول معادلتين.

2) اذا كانت المعادلة الثالثة غير محققة فتكون الجملة مستحيلة الحل.

التمرين (3)

نتأمل في معلم: $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط الاتية:

$$A(0,1,-1)\ ,\ B(1,0,0)\ ,C(-1,2,1)\ ,\quad D(0,1,2)$$

أثبت انتماء النقاط A,B,C,D الى مستوٍ واحد P

الحل

نشكل ثلاثة أشعة لها نفس البداية:

$$\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-1,1,2)$$

$$\overrightarrow{AD}=(0,0,3)$$

نثبت ان الاشعة السابقة مرتبطة خطياً أي لنثبت أولاً : أن $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين (و هذا واضح لعدم تناسب مركباتهما حيث $\frac{3}{2}\neq\frac{0}{1}$) ثم لنثبت وجود عددين α,β يحققان ان:

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AD}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\2\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\3\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\2\alpha+3\beta\end{pmatrix}$$

$$1 = -\alpha \quad (1)$$
$$-1 = \alpha \quad (2)$$
$$1 = 2\alpha + 3\beta \quad (3)$$

من 1 نجد أن $\Rightarrow \alpha = -1$

نعوض في 3 :

$$1 = -2 + 3\beta$$

$$3 = 3\beta \Rightarrow \beta = 1$$

نعوض في 2 للتحقق:

$-1 = -1$ محققة

التمرين (3) دورة 2021 الأولى

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ النقاط التالية: $A(2,0,1), B(1,-2,1), C(5,0,5), D(6,2,5)$ ، المطلوب:

1- أثبت أن $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.
2- عين العددين الحقيقيين α, β بحيث: $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ ، واستنتج أن النقاط A, B, C, D تقع في مستوٍ واحد .

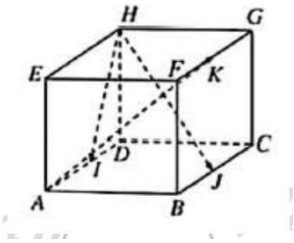
الحل

التمرين (4)

في الشكل المجاور نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$

و طول حرفه 2 . و لتكن النقاط

I و J و K منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$ بالترتيب . نختار معلماً متجانساً $(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$. و المطلوب:



1- جد إحداثيات الرؤوس و I,J,K

2- جد مركبات كلٍ من الأشعة $\overrightarrow{HI},\overrightarrow{HJ},\overrightarrow{AK}$

3- أثبت أن المستوي (HIJ) ∗ يوازي المستقيم (AK)

الحل

التمرين (5)

نتأمل في معلم متجانس $(o,\vec{\imath},\vec{j},\vec{k})$

$$A(2,0,1), B(1,-2,1), C(5,5,0), D(-3,-5,6), E(3,1,2)$$

أثبت انتماء النقاط A,B,C,D إلى مستوٍ واحد P و تبيّن إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (6)

في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط :

$$A(3,2,1), B(1,2,0), C(3,1,-2)$$

1- أثبت أن النقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة
2- عند أي قيمة للوسيط λ تنتمي النقطة $M(\lambda,1,3)$ إلى المستوي (ABC)
3- ما العلاقة بين x,y لتقع النقاط $A,B,D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد .

الحل

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

التمرين (7)

لتكن ε مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقة $x-2y+3z-5=0$:

1- أثبت أن النقاط $A(7,1,0), B(5,0,0), C(2,0,1)$ تنتمي إلى المجموعة ε

2- أثبت أن النقاط A,B,C تعين مستوياً P

3- أثبت أن مركبات الشعاع $\overrightarrow{BM}$ هي $(2y-3z,y,z)$

4- استنتج أن $\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BA}+z\overrightarrow{BC}$. ماذا يمكنك أن تستنتج من ذلك .

5- بالعكس أثبت أن أي نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي P تحقق المعادلة :

$$x-2y+3z-5=0$$

ما هي ε ؟

الحل

كمل لك أمي.. يلا هانت