المسألة الأولى :

ساق متجانسة طولها (متر $\ell = \frac{3}{2}$) نجعلها شاقولية، ونعلقها من محور أفقي عمودي على مستويها الشاقولي ومار من طرفها العلوي ، نزيح الساق عن وضع توازنها بزاوية (60°) ، ثم نتركها دون سرعة ابتدائية . **المطلوب** :

1) استنتج بالرموز علاقة سرعتها الزاوية عند المرور بالشاقول ، وأحسب قيمتها ، ثم أحسب السرعة الخطية لمركز عطالتها علماً أن عزم عطالة الساق بالنسبة إلى محور مار من منتصفها وعمودي عليها ($I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} m \ell^2$).

2) برهن أن دور اهتزازات الساق بسعة صغيرة يساوي (2) ثانية حول محور أفقي يبعد عن مركز عطالتها ($\frac{\ell}{6}$) ، وأحسب طول النواس البسيط المواقت لهذا النواس الثقلي .

3) **نأخذ الساق، ونعلقها من منتصفها بسلك فتل شاقولي وبعد أن تتوازن تزاح عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي ، ونتركها دون سرعة** إبتدائية فتؤدي (10) نوسات خلال (5 s) ، وعندما نثبت على طرفيها كتلتين نقطيتين متماثلتين ($m_1=m_2=20\ g$) يصبح زمن الدور (1 s) . استنتج عبارة كتلة الساق بدلالة الكتل النقطية، وأحسب كتلة الساق، ثم أحسب ثابت فتل سلك التعليق . $g=10\ m.s^{-2}$, $\pi^2=10$)

الحل:

1- نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين :

الوضع الأول : لحظة تركه دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max}$

الوضع الثاني : لحظة المرور بالشاقول $\theta = 0$

$$\Delta \bar{E}_K = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1-2)}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = \overline{W}_{\vec{W}} + \overline{W}_{\vec{R}}$$

بدون سرعة ابتدائية $\boxed{E_{K_1} = 0}$

لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لاتنتقل $\boxed{W_{\vec{R}} = 0}$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = mgh$$

$$h = d(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{1}{2} . I_\Delta}} = \sqrt{\frac{2mgd(1 - \cos\theta_{max})}{I_\Delta}}$$

نعين قيم كل من $d . I_\Delta . m$

$$\boxed{d = oc = \frac{\ell}{2}}$$

(محور الدوران لم يمر من منتصف الساق لذلك نطبق نظرية هايغنز لتعيين عزم عطالة النواس)

هايغنز $I_\Delta = I_{\Delta/c} + m.d^2$

$$I_\Delta = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{4}{12} m\ell^2$$

$$\boxed{I_\Delta = \frac{1}{3} m\ell^2}$$

2- $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

نعين قيم كل من $d . I_\Delta . m$

$$\boxed{\text{فرضاً } d = oc = \frac{\ell}{6}}$$

(محور الدوران لم يمر من منتصف الساق لذلك نطبق نظرية هايغنز لتعيين عزم عطالة النواس)

هايغنز $I_\Delta = I_{\Delta/c} + m.d^2$

$$I_\Delta = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell^2}{36}\right) = \frac{4}{36} m\ell^2$$

$$\boxed{I_\Delta = \frac{1}{9} m\ell^2}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{9} m\ell^2}{m \times 10 \times \frac{\ell}{6}}} \xrightarrow{\text{بالاختصار}} T_0 = 2\sqrt{\frac{6}{9}\ell}$$

$$T_0 = 2\sqrt{\frac{6}{9} \times \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{T_0 = 2\ S}$$

مركب $T_0 = T'_0$ بسيط

$$2\pi \sqrt{\frac{\ell'}{g}} = 2 \Longrightarrow \pi \sqrt{\frac{\ell'}{10}} = 1$$

$$\boxed{\ell' = 1\ m}$$

-3

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta/c\ \text{ساق}}}{K}} \xrightarrow{\text{الدور بدون كتل}} T_0 = \frac{\text{زمن النوسات}\ t}{\text{عدد النوسات}\ N} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\ sec$$

$$T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta\ \text{جملة}}}{K}} \xrightarrow{\text{الدور مع كتل}} T'_0 = 1\ sec$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mg\frac{\ell}{2}(1-\cos\theta_{max})}{\frac{1}{3}m\ell^2}} \longleftarrow \text{نعوض قيم كل من } d\,.I_\Delta.m$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g.(1-\cos\theta_{max})}{\frac{1}{3}.l}} = \sqrt{\frac{10.\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{3}\frac{3}{2}}} = \sqrt{10}$$

$$\xRightarrow{\pi\approx\sqrt{10}} \boxed{\omega \simeq \pi\, rad.s^{-1}}$$

حساب السرعة الخطية لمركز عطالة الساق لحظة المرور في الشاقول

$v = \omega.r$ لكن: $r = d$

$$\Rightarrow v = \omega.d$$

$$v = \pi \times \frac{3}{4}$$

$$\boxed{v = \frac{3}{4}\pi\ \ m.s^{-1}}$$

$$\frac{T_0}{T'_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c}\,\text{ساق}}{K}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta_{\text{جملة}}}}{K}}} \Longrightarrow \frac{T_0}{T'_0} = \sqrt{\frac{I_{\Delta/c}\,\text{ساق}}{I_{\Delta_{\text{جملة}}}}}$$

$$\sqrt{\frac{I_{\Delta/c}\,\text{ساق}}{I_{\Delta_{\text{جملة}}}}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \xRightarrow{\text{نربع الطرفين}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{I_{\Delta/c}}{I_{\Delta_{\text{جملة}}}} \Rightarrow I_{\Delta_{\text{جملة}}} = 4.I_{\Delta/c}$$

ولكن $\ _{\text{جملة}}I_\Delta = I_{\Delta/c} + 2I_{\Delta/m1}$

$$\Rightarrow I_{\Delta/c} + 2I_{\Delta/m1} = 4.I_{\Delta/c}$$

$$3.I_{\Delta/c} = 2.I_{\Delta/m1} \Rightarrow$$

$$3.\frac{1}{12}m\ell^2 = 2.m_1r_1^2 \Rightarrow$$

$$3.\frac{1}{12}m\ell^2 = 2m_1.\frac{\ell^2}{4} \xRightarrow{\text{بالاختصار}}$$

$$m = 2m_1 \Rightarrow m = 2\times 2\times 10^{-2} \Rightarrow$$

$$\boxed{m_{\text{ساق}} = 4\times 10^{-2}\ kg}$$

حساب ثابت فتل السلك k من أحد الدورين :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c}\,\text{ساق}}{K}} \xRightarrow{\text{نربع الطرفين}} T_0^2 = 4\pi^2.\frac{I_{\Delta/c}\,\text{ساق}}{K} \xRightarrow{\text{نعزل } k}$$

$$k = 4\pi^2.\frac{I_{\Delta/c}\,\text{ساق}}{T_0^2} = 4\pi^2.\frac{\frac{1}{12}m\ell^2}{T_0^2} = 4\times 10\,\frac{\frac{1}{12}\times 4\times 10^{-2}\times\frac{9}{4}}{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = 1.2\, m.N.rad^{-1}}$$

المسألة الثانية :

A. يتألف نواس ثقلي من قرص متجانس نصف قطره $(r=\frac{1}{6}\ m)$ يمكنه أن ينوس في مستو شاقولي حول محور أفقي يمر بنقطة من محيطه وعمودي على مستويه الشاقولي .

1. استنتج العلاقة المحددة للدور الخاص للنواس بدلالة نصف قطره في حالة السعات الصغيرة ، انطلاقاً من علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي بالرموز ثم أحسب قيمته .

2. أحسب طول النواس الثقلي البسيط المواقت لهذا النواس .

3. نزيح القرص عن وضع توازنه الشاقولي بزاوية $(\theta_{max}=60^\circ)$ ونتركه دون سرعة إبتدائية ، استنتج العلاقة المحددة لسرعته الزاوية ω لحظة مروره بالشاقول بالرموز ثم أحسب قيمتها .

B. نعلق القرص من مركزه بسلك فتل شاقولي ثابت فتله $(k=8\times10^{-4}\ m.N.rad^{-1})$ مكوناً نواس فتل ، ندير القرص عن وضع توازنه أفقياً حول سلك بزاوية $(\bar{\theta}=+30^\circ)$ ونتركه دون سرعة ابتدائية في اللحظة $(t=0)$ فيهتز بدور $(T=4\ s)$.

1. أحسب عزم عطالة القرص حول محوره .

2. استنتج التابع الزمني لحركة القرص انطلاقاً من الشكل العام للمطال الزاوي .

3. أحسب الطاقة الحركية للقرص لحظة مروره في وضع التوازن .

عزم عطالة القرص حول محوره ($I_{\Delta/c}=\frac{1}{2}mr^2$) ، ($\pi^2=10$ ، $g=10\ m.s^{-2}$)

الحل:

(A

.1 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mg.d}}$

نعين قيم كل من $d\ .I_\Delta.m$

$\boxed{d = oc = r}$

(محور الدوران لم يمر من مركز القرص لذلك نطبق

نظرية هايغنز لتعيين عزم عطالة النواس)

هايغنز$I_\Delta = I_{\Delta/c} + m.d^2$

$I_\Delta = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2$

$\boxed{I_\Delta = \frac{3}{2}mr^2}$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mr^2}{mg.r}}$

لكن: $\pi^2 = 10 \rightarrow \pi \simeq \sqrt{10} \simeq \sqrt{g}$

$T_0 = \sqrt{\frac{3}{2}r}$

$T_0 = 2\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{1}{6}} = 2\times\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{T_0 = 1\ s}$

.2

$T_{0\,مركب} = T'_{0\,بسيط}$

$1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}} \Rightarrow 1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{10}} \Rightarrow \sqrt{l'} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{نربع الطرفين}}$

$\boxed{\ell' = \frac{1}{4}m}$

.3

نطبق نظرية الطاقة الحركية على القرص بين وضعين

الوضع الأول : لحظة تركه دون سرعة ابتدائية $\theta = \theta_{max}$

الوضع الثاني : لحظة المرور بالشاقول $\theta = 0$

$\Delta \overline{E}_K = \sum \overline{W}_{\vec{F}_{(1-2)}}$

$E_{K_2} - E_{K_1} = \overline{W}_{\vec{W}} + \overline{W}_{\vec{R}}$

(B

-1 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \xrightarrow{\text{نربع الطرفين}} T_0^2 = 4\pi^2.\frac{I_\Delta}{K}$

$16 = 4.10.\frac{I_\Delta}{8.10^{-4}} \xrightarrow{\text{نختصر}} 16 = \frac{I_\Delta}{2.10^{-5}}$

$\boxed{I_\Delta = 32\times10^{-5}\ kg.m^2}$

-2 $\overline{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$

تعيين الثوابت θ_{max} ، ω_0 ، $\overline{\varphi}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{\pi}{2}\ rad.s^{-1}}$

$\theta + \theta_{max} = \frac{\pi}{6}\ rad$ ترك دون سرعة ابتدائية

تعيين $\overline{\varphi}$ من شروط البدء : $t = 0$ ، $\theta = +\theta_{max}$

$+\theta_{max} = \theta_{max}\cos\overline{\varphi} \Rightarrow \cos\overline{\varphi} = 1 \Rightarrow \boxed{\overline{\varphi} = 0}$ ترك دون سرعة ابتدائية

نعوض قيم الثوابت بالشكل العام: $\boxed{\overline{\theta} = \frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2}t \quad rad}$

-3 عند المرور بوضع التوازن: $\theta = 0 \Leftarrow E = E_k \Leftarrow E_p = 0$

$E = E_k = \frac{1}{2}K\theta_{max}^2$

$E_k = \frac{1}{2}.8.10^{-4}.\frac{\pi^2}{36} \xrightarrow{\text{نختصر}} \boxed{E_K = \frac{1}{9}\times10^{-3}\ J}$

بدون سرعة ابتدائية $\boxed{E_{K_1} = 0}$

لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لاتنتقل $\boxed{W_{\vec{R}} = 0}$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = mgh$$

$$h = d(1 - \cos\theta_{max})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{1}{2} \cdot I_\Delta}} = \sqrt{\frac{2mgd(1 - \cos\theta_{max})}{I_\Delta}}$$

من $d \,.\, I_\Delta . m$ نأخذ قيم كل من $\longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2mgr(1-\cos\theta_{max})}{\frac{3}{2}mr^2}}$

طلب الدور

$$\xRightarrow{\text{نختصر}} \omega = \sqrt{\frac{2.g(1-\cos\theta_{max})}{\frac{3}{2}.r}} \xRightarrow{\text{نعوض}} \omega = \sqrt{\frac{2.10\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}.\frac{1}{6}}} = \sqrt{4.10}$$

$$\omega = 2\sqrt{10} = 2\pi \ rad.s^{-1}$$