حلول بنوك الشغف في الجبر

السؤال الأول

1- لدينا:

$$E(x) = \sum x_i p_i = 0 + \frac{3}{8} + 2b + \frac{3}{8} = 2b + \frac{6}{8}$$

ولكن:

$$E(x) = \frac{7}{8} \Rightarrow 2b + \frac{6}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow 2b = \frac{1}{8} \Rightarrow b = \frac{1}{16}$$

ومجموع الاحتمالات يجب أن يكون يساوي الواحد أي:

$$a + \frac{3}{8} + b + \frac{1}{8} = 1$$

$$a + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = 1$$

$$a = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{8}$$

2- التباين:

$$V(x) = \sum x_i^2 p_i - \left(E(x)\right)^2$$

$$\sum x_i^2 p_i = 0 + \frac{3}{8} + 4\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{9}{8} = \frac{14}{8}$$

نعوض:

$$V(x) = \frac{14}{8} - \frac{49}{64} = \frac{112 - 49}{64} = \frac{63}{64}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{63}{64}}$$

السؤال الثاني

$$X = \{0,1,2,3\}$$

$$P(X = k) = \binom{3}{k} p^k q^{3-k}$$

$$E(X) = np$$

$$\Rightarrow p = \frac{E(x)}{n} = \frac{1}{3}$$

فيكون:

$$q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(X = k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$$

$$P(X = 0) = \frac{8}{27}, P(X = 1) = 3\frac{1}{3}\frac{4}{9} = \frac{12}{27}, P(X = 2) = 3\frac{1}{9}\frac{2}{3} = \frac{6}{27}, P(X = 3) = \frac{1}{27}$$

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

السؤال الثالث

1- لدينا:

$$\Delta = 16\sin^2\theta - 16 = -16(1 - \sin^2\theta) = -16\cos^2\theta$$

$$z_1 = \frac{4\sin\theta + i\sqrt{16\cos^2\theta}}{2} = \frac{4\sin\theta + 4i\cos\theta}{2} = 2(\sin\theta + i\cos\theta)$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 2(\sin\theta - i\cos\theta)$$

2- بتعويض $\theta = \frac{\pi}{3}$:

$$z_1 = 2\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

والآخر مرافقه:

$$z_2 = \overline{z_1} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

السؤال الرابع

1- نقسم على $Z + 1$ قسمة إقليدية وبالتالي المعادلة تكتب بالشكل :

$$(Z + 1)(Z^2 - 4Z + 7) = 0$$

2- إما

$$Z+1=0$$

$$Z=-1$$

أو

$$Z^2-4Z+7=0$$

$$\Delta=16-4\times 7=16-28=-12$$

للمعادلة جذران عقديان:

$$z_2=\frac{4+i2\sqrt{3}}{2}=2+i\sqrt{3}$$

$$z_3=\overline{z_1}=2-i\sqrt{3}$$

3- نرمز للحلول السابقة بـ a و b و c:

$$|AB|=|b-a|=\left|2+i\sqrt{3}+1\right|=\sqrt{12}$$

$$|BC|=|c-b|=\left|2-i\sqrt{3}-2-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{12}$$

$$|AC|=|c-a|=\left|2-i\sqrt{3}+1\right|=\sqrt{12}$$

المثلث متساوي الأضلاع

السؤال الخامس

$$w=-8-6i$$

$$x^2+y^2=\sqrt{64+36}=10$$

$$x^2-y^2=-8$$

$$2xy=-6$$

بجمع المعادلتين الأولى والثانية:

$$2x^2=2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$$

بطرح المعادلتين الأولى والثانية:

$$2y^2=18\Rightarrow y^2=9\Rightarrow y=\pm 3$$

من المعادلة الثالثة نجد أن $2xy<0$ فإن x و y متعاكسين بالإشارة:

$$w_1=1-3i\ ,\qquad w_2=-1+3i$$

لدينا:

$$\Delta=4-4\left(3+\frac{3}{2}i\right)=4-12-6i$$
$$=-8-6i$$

$$z_1=\frac{-2+1-3i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

$$z_2=\frac{-2-1+3i}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$$

السؤال السادس

$$\boldsymbol{z^2+(1+4i)z-5-i=0}$$

$$\Delta=(1+4i)^2-4(1)(-5-i)$$

$$=1+8i-16+20+4i=5+12i$$

نوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي الناتج

بفرض:

$$w^2=5+12i$$

$$x^2+y^2=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

$$x^2-y^2=5$$

$$2xy=12$$

بجمع المعادلة الأولى والثانية:

$$2x^2=18$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm 3$$

بطرح المعادلة الأولى والثانية نجد:

$$2y^2=8$$

$$y^2=4$$

$$y=\pm 2$$

من المعادلة الثالثة نجد أن $2xy>0$ فالحلو من إشارات متماثلة:

$$w_1=3+2i$$

$$w_2=-3-2i$$

وتكون حلول المعادلة:

$$z_1=\frac{-b+w_1}{2a}=\frac{-1-4i+3+2i}{2}$$

$$= \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

$$z_2 = \frac{-b-w_1}{2a} = \frac{-1-4i-3-2i}{2}$$

$$= -2-3i$$

السؤال السابع

-1

$$Z_A + Z_B = -\frac{p}{1}$$
$$2 = -p$$
$$\boxed{p=-2}$$

$$Z_A . Z_B = \frac{q}{1}$$
$$\boxed{2=q}$$

-2 الشكل المثلثي Z_A:

$$r=\sqrt{2} \quad , \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$Z_A = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$Z_B = \overline{Z_A} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

حيث أن المرافق يحافظ على الطويلة و يعكس الزاوية

-3 لدينا $w = Z_A^6 + Z_B^6$

$$w = 2^6\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{6\pi}{4}\right)\right)$$
$$+2^6\left(\cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{4}\right)\right)$$

و لكن الساين يخرج الناقص و الكوساين يخفيها

$$w = 2^6\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\end{bmatrix}$$
$$= 2^6\,(0) = 0$$

السؤال الثامن

$$S = z^0 + z^1 + z^2 + \cdots + z^{n-1}$$

و هو مجموع متتالية هندسية أساسها $q = z$ و عدد حدودها $n = n-1-0+1$ و حدها الأول $a = 1$:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q}$$
$$S = 1\frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-1}{1-z} = 0$$

(النتيجة المرجوة أنه إذا كان z جذر من المرتبة n للواحد . كان المجموع S معدوماً)

السؤال التاسع

-1 نفرض $z = re^{i\theta}$ و نكتب $8i = 8e^{\frac{i\pi}{2}}$ و نعوض:

$$\left(re^{i\theta}\right)^3 = 8e^{\frac{i\pi}{2}}$$
$$r^3\, e^{i3\theta} = 8\, e^{\frac{i\pi}{2}}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad , \quad k = 0,1,2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi + 4\pi k}{6}, \qquad k = 0,1,2 \end{cases}$$

و بالتالي الجذور التكعيبية للعدد $8i$ هي :

$$z_0 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$$
$$z_1 = 2e^{\frac{i5\pi}{6}}$$
$$z_2 = 2e^{\frac{i9\pi}{6}} = 2e^{\frac{i3\pi}{2}} = 2e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

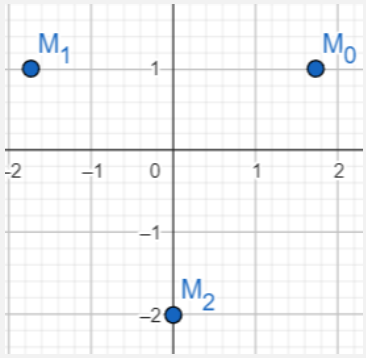
لكتابتها بالشكل الجبري :

$$z_0 = 2e^{\frac{i\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2e^{\frac{i5\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + isn\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2e^{-\frac{i\pi}{2}} = -2i$$

-2 التمثل في الشكل المجاور:



$$M_0M_1 = |z_1 - z_0| = 2\sqrt{3}$$
$$M_1M_2 = |z_2 - z_1| = |\sqrt{3} - 3i|$$
$$= \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$$
$$M_0M_2 = |z_2 - z_0| = |-\sqrt{3} - 3i|$$
$$= 2\sqrt{3}$$

فالمثلث متساوي الأضلاع

السؤال العاشر

1- لدينا $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$:

$$1 + j + j^2 = 1\,\frac{1 - j^3}{1 - j} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{\frac{i2\pi}{3}}}$$
$$= \frac{1 - 1}{1 - e^{\frac{i2\pi}{3}}} = 0$$

ثم :

$$-j^2 = 1 + e^{\frac{i2\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}\left(e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\,e^{\frac{i\pi}{3}}$$
$$= 2\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

2- حسب الصيغة العقدية للدوران المذكور:

$$z' - a = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - a)$$
$$z' = a + \underbrace{e^{\frac{i\pi}{3}}}_{-j^2}(z - a)$$
$$z' = a - j^2(z - a)$$

3- بما أن C صورة B وفق دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$ و مركزه A إذن :

$$\frac{c - a}{b - a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$$
$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \quad \& \quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3}$$

فالمثلث متساوي الأضلاع

بتعويض b في الصيغة الأخيرة :

$$c = a - j^2(b - a)$$
$$c = a - j^2b + j^2a$$
$$a - j^2b + j^2a - c = 0$$

نضرب $-j^2$:

$$-j^2a + j^4b - j^4a + cj^2 = 0$$

لكن لاحظ أن $j^4 = e^{\frac{8\pi}{3}i} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$

$$-j^2a + jb - ja + cj^2 = 0$$
$$(-j^2 - j)a + jb + cj^2 = 0$$

وحسب أول الطلب $-j^2 - j = 1$:

$$a + jb + cj^2 = 0$$

السؤال الحادي عشر

1- الدوران هنا :

$$b - p = e^{-\frac{i\pi}{2}}(a - p)$$
$$b - p = -i(a - p)$$
$$b - p = -ia + ip$$
$$p + ip = b + ia$$
$$(1 + i)p = b + ia$$
$$p = \frac{b + a}{1 + i} = \frac{(b + ia)(1 - i)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\big(ia(1 - i) + b(1 - i)\big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(a(1 + i) + b(1 - i)\big)$$

2- بشكل مماثل نجد :

$$r = \frac{1}{2}\big(c(1 + i) + d(1 - i)\big)$$
$$s = \frac{1}{2}\big(a(1 + i) + d(1 - i)\big)$$
$$q = \frac{1}{2}\big(c(1 + i) + b(1 - i)\big)$$

الآن :

$$l_1 = p + r = \frac{1}{2}\big(a(1 + i) + b(1 - i)\big)$$
$$+ \frac{1}{2}\big(c(1 + i) + d(1 - i)\big)$$
$$= \frac{1}{2}[(a + c)(1 + i) + (b + d)(1 - i)]$$
$$l_2 = q + s == \frac{1}{2}\big(c(1 + i) + b(1 - i)\big)$$
$$+ \frac{1}{2}\big(a(1 + i) + d(1 - i)\big)$$
$$= \frac{1}{2}[(a + c)(1 + i) + (b + d)(1 - i)]$$

فنعم : $l_1 = l_2$ و بالتالي :

$$p + r = q + s$$
$$p - q = s - r$$
$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS}$$

فالرباعي متوازي أضلاع .

السؤال الثاني عشر

1- لنحسب كل طرف :

$$l_1 = b - c = -4 + 8i$$
$$l_2 = i(a - c) = i(8 + 4i) = -4 + 8i$$
$$l_1 = l_2$$

2-

$$b - c = i(a - c)$$
$$\frac{b - c}{a - c} = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

$$\left|\frac{b - c}{a - c}\right| = 1 \quad , \quad \arg\left(\frac{b - c}{a - c}\right) = \frac{\pi}{2}$$

فالمثلث ABC قائم و متساوي الساقين رأسه C

3- لدينا :

$$z' = e^{\frac{i\pi}{3}} z$$
$$z' - 0 = e^{\frac{i\pi}{3}} (z - 0)$$

دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

$$a' = e^{\frac{i\pi}{3}} a$$
$$a' = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(8) = \boxed{4 + 4\sqrt{3}i}$$

$$b' = e^{\frac{i\pi}{3}} b$$
$$b' = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(-4 + 4i)$$
$$b' = -2 + 2i - 2i\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$
$$b' = \boxed{(-2 - 2\sqrt{3}) + i(2 - 2\sqrt{3})}$$

$$c' = e^{\frac{i\pi}{3}} c$$
$$c' = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(-4i) = \boxed{2\sqrt{3} - 2i}$$

4-

A - لدينا :

$$p = \frac{a' + b}{2} = \frac{4 + 4\sqrt{3}i - 4 + 4i}{2} = \boxed{(2 + 2\sqrt{3})i}$$

$$q = \frac{b' + c}{2} = \frac{(-2 - 2\sqrt{3}) + i(2 - 2\sqrt{3}) - 4i}{2} = \frac{(-2 - 2\sqrt{3}) + i(-2 - 2\sqrt{3})}{2}$$
$$q = \boxed{(-1 - \sqrt{3}) + (-1 - \sqrt{3})i}$$

$$r = \frac{c' + a}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 2i + 8}{2} = \boxed{(4 + \sqrt{3}) - i}$$

السؤال الثالث عشر

-1

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

-2 $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

$$b - o = \underbrace{e^{\frac{2\pi}{3}i}}_{d} (a - o)$$
$$b = da$$

-3 $Z_{\overrightarrow{OA}} = a - 0 = a$

$$c = b + z_{\overrightarrow{OA}}$$
$$c = da + a$$
$$c = a(1 + d)$$
$$c = a\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

و من ثم :

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{i\pi}{3}}$$
$$\arg\left(\frac{c}{a}\right) = \arg\left(\frac{c - o}{a - o}\right) = \frac{\pi}{3}$$

فالمثلث OAC مثلث متساوي الأضلاع

السؤال الرابع عشر

-1 لدينا:

$$P(-1) = -1 - 1 - 2 - 4 = 0$$

بالقسمة الإقليدية على $(z + 1)$ نجد:

$$Q(z) = z^2 - 2z + 4$$

2- لدينا:

$$P(z)=(z+1)(z^2-2z+4)$$

إما:

$$z_1=-1$$

أو:

$$z^2-2z+4=0$$

$$\Delta=4-4(4)=-12<0$$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان:

$$z_2=\frac{2+i2\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$$

$$z_3=\overline{z_2}=1-i\sqrt{3}$$

3- لدينا:

$$a=-1\,,b=1+i\sqrt{3}\,,c=1-i\sqrt{3}$$

$$AB=\left|1+i\sqrt{3}+1\right|=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$$

$$AC=\left|1-i\sqrt{3}+1\right|=\sqrt{7}$$

$$BC=\left|1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$$

المثلث متساوي الساقين

4- لدينا:

$$a+c=n+b$$

$$n=a+c-b$$

$$=-1+1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}=-1-2\sqrt{3}i$$

$$a+c=n+b$$

$$b-a=c-n$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NC}$$

الرباعي متوازي أضلاع.

5- أ- لدينا:

$$a'-0=2(a-0)\Rightarrow a'=-2$$

$$b'-0=2(b-0)\Rightarrow b'=2+2\sqrt{3}i$$

$$c'-0=2(c-0)\Rightarrow c'=2-2\sqrt{3}i$$

ب- لدينا:

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{c'-a'}{b'-a'}$$

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{2c-2a}{2b-2a}$$

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{2(c-a)}{2(b-a)}$$

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{c-a}{b-a}$$

نلاحظ أن الكسران متساويان وبالتالي:

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=\arg\left(\frac{c'-a'}{b'-a'}\right)$$

السؤال الخامس عشر

نريد توزيع 6 هدايا على 5 تلاميذ بحيث يحصل كل تلميذ على هدية واحدة على الأقل . ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية

دائماً القانون : $\binom{n+1}{2}\ n!$

$$\binom{6}{2}.5!$$

السؤال السادس عشر

-1 $\binom{8}{6}=\binom{8}{2}=28$

-2 $\binom{6}{4}=15$

السؤال السابع عشر

1- لدينا:

$$\binom{6}{3}=\frac{6.5.4}{3.2.1}=20$$

2- لدينا:

$$\binom{6}{3}-\binom{2}{2}\binom{4}{1}=20-4=16$$

السؤال الثامن عشر

$$(1+ax)^5=\sum_{r=0}^{n=5}\binom{5}{r}(1)^{5-r}(ax)^r$$

$$(1+ax)^5 = \binom{5}{0}(ax)^0 + \binom{5}{1}(ax) + \binom{5}{2}(ax)^2 + \binom{5}{3}(ax)^3 + \binom{5}{4}(ax)^4 + \binom{5}{5}(ax)^5$$

$$(1+ax)^4 = (1+5ax+10a^2x^2+10a^3x^3 + 5a^4x^4 + a^5x^5)$$

بالمثل :

$$(1+bx)^4 = (1+4bx+6b^2x^2+4b^3x^3 + b^4x^4)$$

الآن لو حاولنا نشر $(1+\mathrm{ax})^5(1+bx)^4$ لوجدنا

ان أمثال x ستكون حصراً :

$$(5a+4b)x$$

و حسب الفرض :

$$5a+4b=62$$

لدينا :

$$5a+4b \le 5a+5b$$
$$62 \le 5(a+b)$$
$$\frac{62}{5} \le a+b$$

وبالعكس :

$$4a+4b \le 5a+4b$$
$$4(a+b) \le 62$$
$$a+b \le \frac{62}{4}$$

إذن :

$$\frac{62}{5} \le a+b \le \frac{62}{4}$$
$$12.4 \le a+b \le 15.5$$

و لما كان a,b عددان حقيقيان : فإن $a+b \in \{13,14,15\}$

السؤال التاسع عشر

لدينا:

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}\left[e^{ix}+e^{-ix}\right]^3$$

$$=\frac{1}{8}\left[e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{-2ix}e^{ix}+e^{-3ix}\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[\left(e^{i3x}+e^{-i3x}\right)+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[2\cos(3x)+6\cos(x)\right]$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)$$

لدينا:

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos(x)$$

نعوض في النهاية:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^3 x - 3\cos(x)}{\cos(x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[4\cos^2 x - 3] = -3$$

لنحسب التكامل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)\ dx$$

$$=\left[\frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{12}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

السؤال العشرون

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)^n$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}1^{n-r}\left(\frac{x}{3}\right)^r$$

$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{x}{3}+\binom{n}{2}\frac{x^2}{3^2}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{x^n}{3^n}$$

نعوض $x=1$:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^n = \binom{n}{0} + \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{3^2}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{3^n}\binom{n}{n}$$

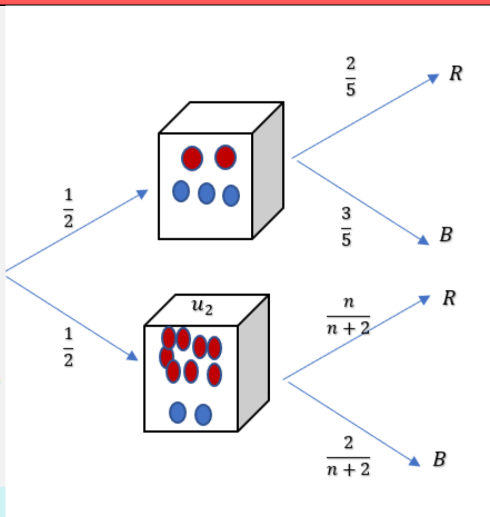
$$S_n = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

فتكون:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

لأن $\frac{4}{3} > 1$.

السؤال الواحد والعشرون



$$P(U_1 \cap R) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

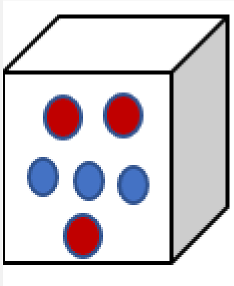
$$P(R) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+2}\right) = \frac{1}{5} + \frac{n}{2n+4}$$

$$P(U_1|R) = \frac{P(U_1\cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{n}{2n+4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7n+4}{10n+20}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{10n+20}{7n+4} = \frac{2n+4}{7n+4}$$

وحسب الشرط "

$$\frac{2n+4}{7n+4} = \frac{2}{5}$$
$$10n+20 = 14n+8$$
$$4n = 12$$
$$n = 3$$



$$n(\Omega) = P_6^3 = 120$$
$$X = \{0,1,2,3\}$$
$$P(X=0) = P(BBB)$$
$$= \frac{P_3^3 \cdot \frac{3!}{3!}}{120} = \frac{6}{120}$$
$$P(X=1) = P(RBB)$$
$$= \frac{P_3^1 . P_3^2 . \frac{3!}{2!}}{120} = \frac{54}{120}$$
$$P(X=2) = P(RRB) = \frac{P_3^2 . p_3^1 . \frac{3!}{2!}}{120} = \frac{54}{120}$$
$$P(X=3) = P(RRR) = \frac{P_3^3 . \frac{3!}{3!}}{120} = \frac{6}{120}$$

x_i	0	1	2	3	$\sum$
p_i	$\frac{6}{120}$	$\frac{54}{120}$	$\frac{54}{120}$	$\frac{6}{120}$	1
$x_i p_i$	0	$\frac{54}{120}$	$\frac{108}{120}$	$\frac{18}{120}$	$\frac{176}{120}$

1- فالتوقع :

$$E(X) = \sum x_i p_i = \frac{176}{120}$$

2- عدد الكلمات

$$\frac{7!}{2!\,2!} = \frac{7.6.5.4.3.2!}{2!\ .2!} = 7.6.5.3.2 = 2360$$

السؤال الثاني و العشرون

1- قيم X و قيم Y

$$X = \{0,1,2\}$$
$$Y = \{0,1,2,3,4\}$$

و بما أننا في هذه التجربة نراقب عدد مرات ظهور مسألة جبر من عدم ظهورها .. فهي مسألة برونولية

و احتمال النجاح (ورود نموذج يحوي مسألة جبر) : $p = \frac{1}{4}$ و عليه يكون $q = \frac{3}{4}$:

- في X لدينا $n = 2$: و القانون الاحتمالي :

$$P(X=k) = \binom{2}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{2-k}$$

	R_1	B_1	B_2
R_1	$X = 0$ $Y = 2$	$X = 1$ $Y = 2$	$X = 1$ $Y = 3$
B_1	$X = 1$ $Y = 2$	$X = 2$ $Y = 2$	$X = 2$ $Y = 3$
B_2	$X = 1$ $Y = 3$	$X = 2$ $Y = 3$	$X = 2$ $Y = 4$

- في Y لدينا $n = 4$ و القانون الاحتمالي :

$$P(Y = k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}$$

2- الرمز p_2 يعني احتمال أن الجماعة التي حصلت على نموذجين تبقى متفائلة . وهذا يتحقق إذا كان عدد النماذج التي تحوي مسألة جبر أقل من النصف أي:

$$p_2 = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$
$$= \binom{2}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{2}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^1$$
$$p_2 = \frac{9}{16} + \frac{6}{16} = \frac{15}{16}$$

الرمز p_4 يعني احتمال أن الجماعة التي حصلت على 4 نماذج تبقى متفائلة . و هذا يتحقق إذا كان عدد النماذج التي تحوي مسألة جبر أقل من نصف النماذج التي حصلوا عليها أي:

$$p_4 = P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$p_4 = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2$$
$$p_4 = \frac{81}{256} + \frac{108}{256} + \frac{54}{256} = \frac{243}{256}$$

الآن بالمقارنة بين $p_2 = \frac{15}{16} = \frac{240}{256}$ و $p_1 = \frac{243}{256}$

نجد أن $p_1 > p_2$ بالتالي احتمال أن تكون جماعة النموذجين متفائلة أكبر منه في جماعة الأربعة نماذج

السؤال الثالث والعشرون

$$X = \{0,1,2\}, Y = \{2,3,4\}$$

قانون X الاحتمالي:

$$P(X = 0) = \frac{1}{9}, P(X = 1) = \frac{4}{9}, P(X = 2) = \frac{4}{9}$$

x_i	0	1	2	Σ
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

قانون Y:

$$P(Y = 2) = \frac{4}{9}, \quad P(Y = 3) = \frac{4}{9}, \quad P(Y = 4) = \frac{1}{9}$$

y_i	2	3	4	Σ
p_i	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

جدول قانون الزوج (X, Y):

قيم Y / قيم X	2	3	4	قانون X
0	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
قانون Y	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

استقلال المتحولين العشوائيين:

$$P(X = 0) = \frac{1}{9}, P(Y = 3) = \frac{4}{9}$$
$$\Rightarrow P(X = 0).P(Y = 3) = \frac{4}{81}$$
$$P(X = 0 \cap Y = 3) = 0$$

غير مستقلان احتمالياً.

السؤال الرابع والعشرون

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	0.12	0.2	0.08	0.4
1	0.06	0.1	0.04	0.2
2	0.12	0.2	0.08	0.4
قانون Y	0.3	0.5	0.2	

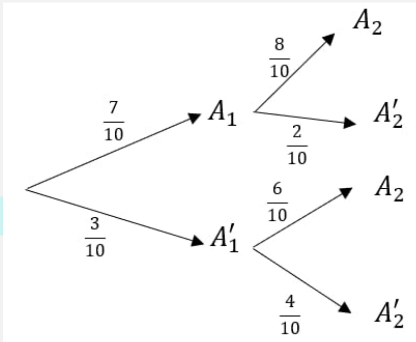
السؤال الخامس والعشرون

لدينا حسب المسألة :

احتمال النجاح بعد نجاح 0.8 أي : $P(A_2|A_1)=\frac{8}{10}$

احتمال إنجاح بعد فشل 0.6 أي : $P(A_2|A_1')=\frac{6}{10}$

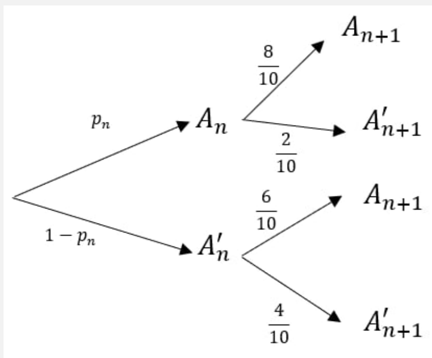
و لدينا $P(A_1)=\frac{7}{10}$



$$p_2=P(A_2)=\frac{7}{10}\frac{8}{10}+\frac{3}{10}\frac{6}{10}=\frac{74}{100}=0.74$$

-3

-1 لدينا:



$$p_{n+1}=\frac{8}{10}p_n+(1-p_n)\frac{6}{10}$$

$$p_{n+1}=\frac{8}{10}p_n+\frac{6}{10}-\frac{6}{10}p_n$$

$$p_{n+1}=\frac{2}{10}p_n+\frac{6}{10}=(0.2)p_n+0.6$$

-2 لدينا:

$$u_{n+1}=p_{n+1}-\frac{75}{100}$$

$$u_{n+1}=\frac{2}{10}p_n+\frac{6}{10}-\frac{75}{100}$$

$$=\frac{2}{10}p_n-\frac{15}{100}=\frac{2}{10}\left(p_n-\frac{75}{100}\right)=\frac{2}{10}u_n$$

هندسية أساسها $\frac{2}{10}$.

$$u_n=u_1.q^{n-1}=\left(\frac{7}{10}-\frac{75}{100}\right)\left(\frac{2}{10}\right)^{n-1}$$

$$=-\frac{5}{10}\left(\frac{2}{10}\right)^{n-1}$$

فتكون:

$$p_n=u_n+\frac{75}{100}=-\frac{5}{10}\left(\frac{2}{10}\right)^{n-1}+\frac{75}{100}$$

$$\lim_{n\to+\infty}p_n=\frac{75}{100}$$

السؤال السادس والعشرون

-1 يكون العدد $\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}$ تخيلياً بحتاً إذا كان :

$$\arg\left(\frac{Z_M-Z_C}{Z_M-Z_B}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$$

و هذا يعني ان $(CM)\perp(BM)$ أي :

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BM}=0$ و هي تمثل الدائرة

قطرها $[BC]$ محذوفاً منها النقطة B

-2 من الصيغة العقدية للدوران :

$$Z_D-o=e^{\frac{i\pi}{2}}(Z_B-o)$$
$$Z_D=e^{\frac{i\pi}{2}}Z_B$$
$$Z_D=i\left(\sqrt{3}-i\right)$$
$$Z_D=i\sqrt{3}+1$$
$$\boxed{Z_D=1+i\sqrt{3}}$$

3- جد العدد العقدي $W = Z_A - Z_B$ ثم حل في C المعادلة $Z^2 = W$

$$W = Z_A - Z_B$$
$$W = \sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i = 2i$$

$$Z^2 = 2i$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) :

$$2x^2 = 2$$
$$x^2 = 1$$
$$\boxed{x = \pm 1}$$

بطرح (1) و (2) :

$$2y^2 = 2$$
$$y^2 = 1$$
$$\boxed{y = \pm 1}$$

وحسب (3) : $2xy = 2 > 0$ فإن x, y من نفس الإشارة :

$$z_1 = 1 + i$$
$$z_2 = -1 - i$$

السؤال السابع والعشرون

$$X = \{0,1,2,3\}$$

$$P(X = k) = \binom{3}{k} p^k q^{3-k}$$

$$E(X) = np$$

$$\Rightarrow p = \frac{E(x)}{n} = \frac{1}{3}$$

فيكون:

$$q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(X = k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$$

$$P(X = 0) = \frac{8}{27}, P(X = 1) = 3\frac{1}{3}\frac{4}{9} = \frac{12}{27}, P(X = 2) = 3\frac{1}{9}\frac{2}{3} = \frac{6}{27}, P(X = 3) = \frac{1}{27}$$

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

السؤال الثامن والعشرون

1- صيغة التحويل:

$$z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$$
$$z' - \omega = i(z - \omega)$$
$$\omega(1 - i) = z' - iz$$
$$\omega(1 + i)(1 - i) = (1 + i)z' - i(1 + i)z$$
$$2\omega = (1 + i)z' - (i - 1)z$$
$$\omega = \frac{1}{2}[(1 - i)z + (1 + i)z']$$

2- A صورة B وفق دوران ربع دورة مباشر حول D وبالتالي:

$$d = \frac{1}{2}[(1 - i)b + (1 + i)a] \quad \ldots\ldots (1)$$

B صورة C وفق دوران ربع دورة مباشرة حول M وبالتالي:

$$m = \frac{1}{2}[(1 - i)c + (1 + i)b] \quad \ldots\ldots (2)$$

C صورة A وفق دوران ربع دورة مباشرة حول N وبالتالي:

$$n = \frac{1}{2}[(1 - i)a + (1 + i)c] \quad \ldots\ldots (3)$$

3- بجمع العلاقات: (1) و(2) و(3) نجد:

$$d + m + n = \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c)$$

ومنه:

$$\frac{d + m + n}{3} = \frac{a + b + c}{3}$$

إذن: للمثلثين ABC وDMN مركز الثقل نفسه.

4- لدينا $a = 0$ وبالتالي:

$$d = \frac{1}{2}(1-i)b \,, n = \frac{1}{2}(1+i)c \,, m = \frac{1}{2}[(1-i)c + (1+i)b]$$

لدينا:

$$m - a = m = \frac{1}{2}[(1-i)c + (1+i)b]$$

$$n - d = \frac{1}{2}[(1+i)c - (1-i)b]$$

$$n - d = \frac{1}{2}i[(1-i)c + (1+i)b]$$

$$\frac{n-d}{m-a} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

فالمستقيمان (AM) و(DN) متعامدان.

وبما أن: $n - d = i(m-a)$ فإن: $|m-a| = |n-d|$ ومنه: $AM = DN$

السؤال التاسع والعشرون

1- لدينا:

$$b = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

2- لدينا:

$$a = 1 \,, c = i \,, d = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

3- لدينا:

نلاحظ أن المثلث AOD متساوي ساقين طول كل من ضلعيه 1 و OI منصف في المثلث وبالتالي:

$$arg(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

4- لدينا:

$$Z_I = \frac{a+d}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{(2-\sqrt{2}) + i\sqrt{2}}{4}$$

بالشكل الأسي:

$$Z_I = |\overrightarrow{OI}| e^{i\frac{3\pi}{8}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2 + 2}{16}} e^{i\frac{3\pi}{8}} = \frac{\sqrt{4 - 4\sqrt{2} + 2 + 2}}{4} e^{i\frac{3\pi}{8}} = \frac{\sqrt{8 - 4\sqrt{2}}}{4} e^{i\frac{3\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

لدينا:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

ثانياً:

1- ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن

$$\binom{n}{3} = \binom{8}{3} = 56$$

2- ما عدد الرباعيات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن

$$\binom{n}{4} = \binom{8}{4} = 70$$

3- ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن

$$\frac{n}{2} \times (n-2) = 4 \times 6 = 24$$

4- ما عدد المثلثات المنفرجة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن

نلاحظ أن كل رأس يحدد 3 مثلثات منفرجة فعددها الكلي $3 \times 8 = 24$

5- ما عدد المثلثات الحادة التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن

$\left(\text{عدد المثلثات}\right) - \left(\text{القائمة + المنفرجة}\right) = \text{الحادة}$

$\Rightarrow 56 - (24 + 24) = 8$

6- ما عدد المستطيلات التي يمكن تشكيلها من رؤوس المثمن

$$\binom{n/2}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

7- ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من النقاط $\{A, B, C, D, E, F, G, H, O\}$

$$\binom{n+1}{3} - \frac{n}{2}$$

$$\binom{9}{3} - 4 = 84 - 4 = 80$$

8- نسمي قطراً في المثمن : كل قطعة مستقيمة واصلة بين رأسين غير متتاليين , ما عدد أقطار المثمن

$$\binom{n}{2} - n$$

$$\binom{8}{2} - 8$$

$$= 20$$

9- ما عدد نقاط تقاطع أقطار المثمن

$$\binom{n}{4} + n$$

$$\binom{8}{4} + 8 = 78$$

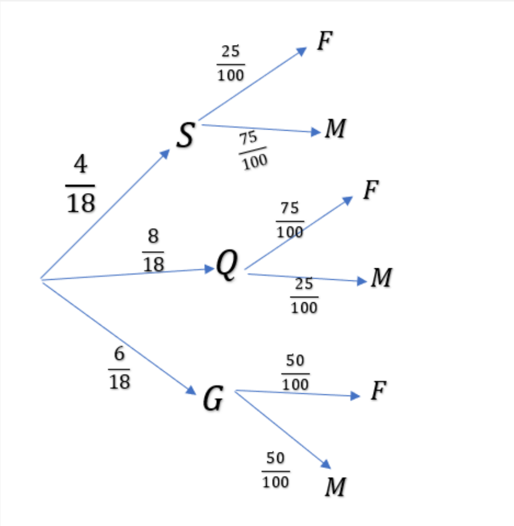
10- ما عدد الكلمات المؤلفة من 4 أحرف مختلفة من حروف رؤوس المثمن

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

السؤال الثلاثون

لنرّمز أولاً :

S : السباحة Q : القوى G : جمباز



1- لدينا:

$A:\ QQQ$

$$P(A) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{56}{816}$$

$B:\quad SSS\ ,\quad QQQ\quad ,\quad GGG$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{8}{3} + \binom{6}{3}}{816} = \frac{4 + 56 + 20}{816} = \frac{80}{816}$$

2- لننظم هذه المعلومات في مخطط شجري :

$$p_1 = P(F \cap Q) = \frac{8}{18} \cdot \frac{75}{100} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$$

$$p_2 = P(F) = P(S \cap F) + P(Q \cap F) + P(G \cap F)$$
$$= \frac{4}{18} \cdot \frac{25}{100} + \frac{8}{18} \cdot \frac{75}{100} + \frac{6}{18} \cdot \frac{50}{100}$$
$$= \frac{1}{18} + \frac{6}{18} + \frac{3}{18} = \frac{10}{18}$$

$$p_3 = P(G|F) = \frac{P(F \cap G)}{P(F)} = \frac{\frac{3}{18}}{\frac{10}{18}} = \frac{3}{10}$$

السؤال الواحد والثلاثون

1- عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S هي :

$$\binom{16}{3} = \frac{16 \times 15 \times 14}{3 \times 2 \times 1} = 560$$

2- يكون مجموع الأعداد الثلاثة مضاعفاً للعدد 3 إذا كان مجموع بواقي قسمة هذه الأعداد على 3 هو مضاعف لـ 3 أي لنقسم المجموعة الكلية إلى :

- S_0 مجموعة الأعداد من S التي باقي قسمتها على 3 يساوي الصفر :
$S_0 = \{0,3,6,9,12,15\}$
- S_1 مجموعة الأعداد من S التي باقي قسمتها على 3 يساوي الواحد :
$S_1 = \{1,4,7,10,13\}$
- S_2 مجموعة الأعداد من S التي باقي قسمتها على 3 يساوي 2 :
$S_2 = \{2,5,8,11,14\}$

الآن ليكون مجموع الأعداد مضاعفاً للعدد 3 :

$S_0S_0S_0$ أو $S_1S_1S_1$ أو $S_2S_2S_2$ أو $S_0S_1S_2$

$$\binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{1}\binom{5}{1}\binom{5}{1}$$
$$= 20 + 10 + 10 + 150$$
$$= 190$$

فبالتالي عدد المجموعات الجزئية المؤلفة من 3 أعداد مجموعها <u>ليس</u> مضاعفاً للعدد 3 :

$$560 - 190 = 370$$

حلول المتابعة المنزلية الجبر

السؤال الأول

$$n(\Omega) = \binom{7}{3} = 35$$

A: الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل.

فيكون A': الحصول على ولا كرة حمراء:

$$(A'A'A')$$

$$P(A') = \frac{\binom{4}{3}}{35} = \frac{4}{35}$$

فيكون احتمال A:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

B: الحصول على كرتين سوداوين على الأقل:

$$(BBB')\ or\ (BBB)$$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{4}{3}}{35} = \frac{18+4}{35} = \frac{22}{35}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

احتمال التقاطع أن يكون لدينا كرتين سوداوين وكرة حمراء أي:

$$(BBR)$$

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{35} = \frac{18}{35}$$

نعوض:

$$P(A|B) = \frac{\frac{18}{35}}{\frac{22}{35}} = \frac{18}{22}$$

السؤال الثاني

1- مجموعة قيم المتحول العشوائي

$$\{-1, +1, +3\}$$

(حمراء, زرقاء, زرقاء) $P(X=-1)$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} \times 3 = \frac{3}{10}$$

(حمراء, حمراء, زرقاء) $P(X=+1)$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{10}$$

(حمراء, حمراء, حمراء) $P(X=+3)$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

x	-1	$+1$	$+3$
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i . p_{i'}$$

$$= -1 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 . p_{i'} - (E(X))^2$$

$$= (-1)^2 \times \frac{3}{10} + (1)^2 \times \frac{6}{10} + (3)^2 \times \frac{1}{10} - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{144}{100} = \frac{36}{25}$$

$$o(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{6}{5}$$

-2

$$P(A) = P(X = +1) + P(X = +3) = \frac{7}{10}$$

-3

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(X = +1)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{6}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{6}{7}$$

السؤال الثالث

بما أن السحب 3 كرات معاً :

$$n(\Omega) = \binom{8}{3} = 56$$

الحدث A : RGW :

$$P(A)=\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{56}=\frac{18}{56}$$

الحدث B : 111 , 000

$$P(B)=\frac{\binom{3}{3}+\binom{4}{3}}{56}=\frac{5}{56}$$

الحدث $A\cap B$ يعني التقاطع أي ان يكون من كل لون كرة و الأرقام الثلاثة المسحوبة ذاتها :

$R_1G_1W_1$

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{56}=\frac{2}{56}$$

في الطلب الثاني مطلوب :

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{56}}{\frac{18}{56}}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$$

المتغير العشوائي يدل على عدد مرات الحصول على 1 :

الحالات	قيم X
$1'1'1'$	$X=0$
$1\,1'1'$	$X=1$
$1\,1\,1'$	$X=2$
$1\,1\,1$	$X=3$

قيم X : $X=\{0,1,2,3\}$

$$P(X=0)=P(1'1'1')=\frac{\binom{4}{3}}{56}=\frac{4}{56}$$

$$P(X=1)=P(1\,1'1')=\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{56}=\frac{24}{56}$$

$$P(X=2)=P(1\,1\,1')=\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{56}=\frac{24}{56}$$

$$P(X=3)=P(1\,1\,1)=\frac{\binom{4}{3}}{56}=\frac{4}{56}$$

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

السؤال الخامس

$$(1+x)^5=\binom{5}{0}(1)^5(x)^0+\binom{5}{1}(1)^4(x)^1+\binom{5}{2}(1)^3(x)^2+\binom{5}{3}(1)^2(x)^3+\binom{5}{4}(1)^1(x)^4+\binom{5}{5}(1)^0(x)^5$$

$$(1+x)^5=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}(x)^1+\binom{5}{2}(x)^2+\binom{5}{3}(x)^3+\binom{5}{4}(x)^4+\binom{5}{5}(x)^5$$

الآن بفرض $x=1$ في الطرفين :

$$(1+1)^5=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$$

$$32=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$$

السؤال السادس

نلاحظ من الشكل أن N صورة النقطة A وفق دوران مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$n-0=e^{-\frac{i\pi}{2}}(a-0)$$
$$n=-ia$$

نلاحظ أن Q صورة B وفق دوران حول O زاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$q-0=e^{\frac{i\pi}{2}}(b-0)$$
$$q=ib$$

نلاحظ من الشكل أن ال(OR) قطر في متوازي الأضلاع : $OQRN$ فينحقق أن :

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{ON}$$
$$r-0=q-0+n-0$$
$$r=q+n=ib-ai$$

الآن كتابة $\frac{b-a}{r}$:

$$\frac{b-a}{r}=\frac{b-a}{ib-ia}=\frac{-1}{i}=i=e^{\frac{\pi}{2}i}$$

فنلاحظ أن $arg\left(\frac{b-a}{r-0}\right)=\frac{\pi}{2}$ فالمستقيمان (AB) و (OR) متعامدان .

كما ان $\left|\frac{b-a}{r-0}\right|=1$ فالطولان AB, OR متساويان

السؤال السابع

1- لدينا:

$$|W|=\left|\frac{\beta+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i\beta}\right|=\frac{\sqrt{\beta^2+3}}{\sqrt{3+\beta^2}}=1$$

2- لدينا:

$$W=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$$

نضرب بسط ومقام بـ i:

$$=\frac{i(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}=i$$

ويكون W^{12}:

$$i^{12}=(i^2)^6=(-1)^6=1$$

حقيقي.

السؤال الثامن

1- نعرف معلماً:

$$(A;\vec{u},\vec{v})$$

C' صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$:

$$c'-a=e^{-i\frac{\pi}{2}}(c-a)$$
$$c'=-ic$$

B' صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$b'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(b-a)$$

$$b'=ib$$

N منتصف القطعة $[CB]$:

$$n=\frac{c+b}{2}=\frac{1}{2}(c+b)$$

2- لدينا:

$$\frac{c'-b}{c-b'}=\frac{-ic-b}{c-ib}=\frac{c-bi}{i(c-ib)}$$
$$=\frac{1}{i}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

3- لدينا:

$$\arg\left(\frac{c'-b}{c-b'}\right)=-\frac{\pi}{2}$$
$$\left|\frac{c'-b}{c-b'}\right|=1$$

فيكون:

$$C'B\perp CB'$$
$$C'B=CB'$$

4- لدينا:

$$\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AC'}+2\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$c-a+3(c'-a)+2(b'-a)+(b-a)=0$$

ولكن $a=0$:

$$c+3c'+2b'+b=0$$
$$c-3ic+2bi+b=0$$

نقسم على b:

$$\frac{c}{b}-\frac{3ic}{b}+2i+1=0$$
$$\frac{c}{b}-3i\frac{c}{b}=-1-2i$$
$$\frac{c}{b}(1-3i)=-1-2i$$
$$\frac{c}{b}=\frac{-1-2i}{1-3i}=\frac{(-1-2i)(1+3i)}{1+9}$$

$$= \frac{-1-3i-2i+6}{10}$$

$$= \frac{5}{10} - \frac{5i}{10} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$$

أي:

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

السؤال التاسع

1- لدينا:

A صورة النقطة B وفق دوران مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$:

$$a - o = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b - o)$$

$$a = -ib$$

$$\Rightarrow b = ia$$

D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$d - o = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - o)$$

$$d = ic$$

E صورة النقطة D وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$e - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(d - a)$$

$$e = i(d - a) + a$$

$$= i(ic - a) + a$$

$$= -c - ia + a$$

$$= a - c - ia$$

ولدينا:

$$Z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{a+ia}{2} = \frac{1}{2}(a+ia)$$

$$Z_J = \frac{d+c}{2} = \frac{ic+c}{2} = \frac{1}{2}(c+ic)$$

$$z_K = \frac{d+e}{2} = \frac{ic+a-c-ia}{2}$$

$$= \frac{a-c+i(c-a)}{2} = \frac{a-c}{2} + i\frac{c-a}{2}$$

2- لدينا:

$$\ell_1 = z_K - z_I = \frac{a-c}{2} + i\frac{c-a}{2} - \frac{a}{2} - i\frac{a}{2}$$

$$= -\frac{c}{2} + i\frac{c-2a}{2}$$

ولدينا:

$$\ell_2 = i(z_J - a) = i\left(\frac{c}{2} + i\frac{c}{2} - a\right)$$

$$= i\left(\frac{c-2a}{2} + i\frac{c}{2}\right)$$

$$= i\frac{c-2a}{2} - \frac{c}{2} = \ell_1$$

بما أن:

$$z_K - z_I = i(z_J - a)$$

$$\frac{z_K - z_I}{z_J - a} = \frac{IK}{AJ} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\left|\frac{z_K - z_I}{z_J - a}\right| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_K - z_I}{z_J - a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

فيكون:

$$(AJ) \perp (IK) \quad \text{و} \quad AJ = IK$$

السؤال العاشر

أ) لدينا:

$$z^2 - 8z + 41 = 0$$

$$\Delta = 64 - 4(41)(1) = 64 - 164 = -100$$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{8+10i}{2} = 4 + 5i$$

$$z_2 = 4 - 5i$$

ب) لدينا:

$$a = 4 + 5i\,, b = 3 + 4i\,, c = 6 + 7i$$

$$d = 4 + 7i$$

1- لدينا:

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{6 + 7i - 3 - 4i}{4 + 5i - 3 - 4i}$$

$$= \frac{3 + 3i}{1 + i} = 3\frac{1 + i}{1 + i} = 3$$

إذن النقاط على استقامة واحدة لأن:

$$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BA}} = 3$$

$$\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BA}$$

وهذه علاقة ارتباط خطي.

2- لدينا:

$$z' - d = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - d)$$

$$= -i(z - d) + d$$

$$= -i(z - 4 - 7i) + 4 + 7i$$

$$= -iz + 4i - 7 + 4 + 7i$$

$$= -iz - 3 + 11i$$

3- لدينا:

$$c' - d = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c - d)$$

$$c' = -i(6 + 7i - 4 - 7i) + 4 + 7i$$

$$= -2i + 4 + 7i = 4 + 5i = a$$

المثلث ACD قائم في D.

4- T انسحاب شعاعه $\overrightarrow{DC}$ و B' صورة B وفق T

و A' صورة A وفق T:

a- لدينا:

$$T = \overrightarrow{DC} = c - d = 2$$

$$a = a' + T \Longrightarrow a' = a - T$$

$$= 4 + 5i - 2 = 2 + 5i$$

$$b' = b + T = 3 + 4i + 2 = 5 + 4i$$

b- لدينا:

$$\frac{d-b}{a'-b'} = \frac{4 + 7i - 3 - 4i}{2 + 5i - 5 - 4i} = \frac{1 + 3i}{-3 + i}$$

$$= \frac{i(1 + 3i)}{-3i - 1} = -\frac{i(1 + 3i)}{1 + 3i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

c- لدينا من الطلب السابق:

$$\arg\left(\frac{d-b}{a'-b'}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\left|\frac{d-b}{a'-b'}\right| = 1$$

وبالتالي:

$$DB \perp D'A' \;\;, DB = D'A'$$

5- لدينا:

$$e = \frac{a+d}{2} = \frac{4 + 5i + 4 + 7i}{2} = \frac{8 + 12i}{2}$$

$$= 4 + 6i$$

$$|A'E| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$|B'E| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$|BE| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$|CE| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

إذن النقاط تقع على كرة مركزها E ونصف قطرها $\sqrt{5}$.

السؤال الحادي عشر

لدينا شرط الاستقلال:

$$P(A)P(C) = P(A \cap C)$$

$$\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{5}p\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$$

$$\frac{6}{20} + \frac{3}{5}p = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{5}p=\frac{3}{4}-\frac{6}{20}$$
$$\frac{3}{5}p=\frac{15}{20}-\frac{6}{20}$$
$$\frac{3}{5}p=\frac{9}{20}$$
$$p=\frac{3}{4}$$

السؤال الثاني عشر

$$T_r=\binom{12}{r}(x)^{12-r}(x^{-2})^r$$
$$T_r=\binom{12}{r}x^{12-r}x^{-2r}$$
$$T_r=\binom{12}{r}x^{12-3r}$$

الحد الثابت هو الحد الموافق لـ $12-3r=0$ أي $r=4$

السؤال الثالث عشر

-1

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{-6+3i-6+i}{-18+7i-6+i}=\frac{-12+4i}{-24+8i}=\frac{(-12+4i)}{2(-12+4i)}=\frac{1}{2}\in R$$

على استقامة واحدة $C\,,B,A$

-2

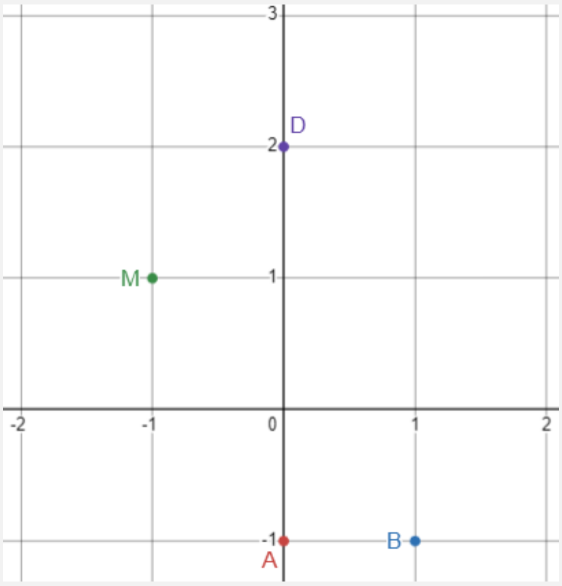
$$z'-w=e^{i\theta}(z-w)$$
$$d-0=e^{i\theta}(a-0)$$
$$d=e^{i\theta}\,a$$
$$e^{i\theta}=\frac{d}{a}=\frac{1+6i}{6-i}$$
$$e^{i\theta}=i$$
$$e^{i\theta}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

-3

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DN}$$
$$a=n-d$$
$$n=a+d$$
$$n=7+5i$$

السؤال الرابع عشر

1- لدينا:



2- C صورة D وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$c-0=e^{i\frac{\pi}{2}}(d-0)$$
$$c=id=i(2i)=-2$$

3- لدينا:

$$\frac{m-0}{b-0}=\frac{-1+i}{1-i}=\frac{-(1-i)}{1-i}=-1$$

النقاط على استقامة واحدة.

4- لدينا:

$$\frac{d-c}{m}=\frac{2i+2}{-1+i}=\frac{(2i+2)(-1-i)}{2}$$
$$=-(1+i)^2=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا:

$$\arg\left(\frac{d-c}{m}\right)=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow(DC)\perp(OM)$$

السؤال الخامس عشر

شروط الحل:

•

$$n+3\geq 3$$
$$n\geq 0$$

•

$$n+2 \ge 2$$
$$n \ge 0$$

إذن $n \ge 0$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 16\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$
$$n+3 = 8$$
$$n = 5$$

السؤال السادس عشر

1- مجموعة قيم المتحول العشوائي

$$\{-1,+1,+3\}$$

$P(X=-1)$ (حمراء, زرقاء, زرقاء)

$$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}\times 3=\frac{3}{10}$$

$P(X=+1)$ (حمراء, حمراء, زرقاء)

$$=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times 3=\frac{6}{10}$$

$P(X=+3)$ (حمراء, حمراء, حمراء)

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$$

x_i	-1	$+1$	$+3$
p_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i.p_i,$$

$$=-1\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i^2.p_i,-\left(E(X)\right)^2$$

$$=(-1)^2\times\frac{3}{10}+(1)^2\times\frac{6}{10}+(3)^2\times\frac{1}{10}-\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$V(X)=\frac{144}{100}=\frac{36}{25}$$

$$o(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{6}{5}$$

-2

$$P(A)=P(X=+1)+P(X=+3)=\frac{7}{10}$$

-3

$$P(B\setminus A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(X=+1)}{P(A)}=\frac{\frac{6}{10}}{\frac{7}{10}}=\frac{6}{7}$$

السؤال السابع عشر

أولاً:

إما:

$$z^2+4=0 \Rightarrow z^2=-4$$
$$\Rightarrow z^2=i^2 4 \Rightarrow z=\pm 2i$$

أو:

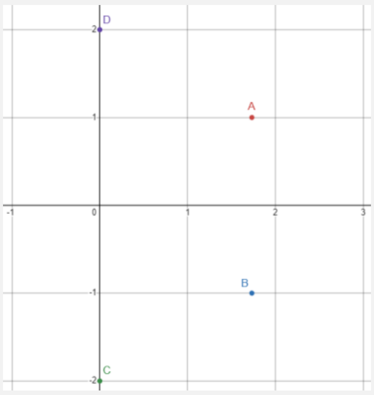
$$z^2-2\sqrt{3}z+4=0$$
$$\Delta=12-4(4)(1)=-4<0$$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان:

$$z_1=\frac{2\sqrt{3}+i\sqrt{4}}{2}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$$
$$z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}-i$$

ثانياً:

1- لدينا:



2- لدينا:

$$\ell_1 = d - c = 2i + 2i = 4i$$

$$\ell_2 = 2(a - b) = 2(\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i) = 4i$$

$ABCD$ شبه منحرف (من الرسم)

3- عند حساب طويلة الأعداد:

$$|a| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$|b| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$|c| = |d| = 2$$

نجد أنها تقع على دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها 2.

4- لدينا:

$$e - 0 = -(b - 0)$$

$$e = -b = i - \sqrt{3}$$

5- لدينا:

$$\ell_1 = a - c = \sqrt{3} + i + 2i = \sqrt{3} + 3i$$

$$\ell_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(e - c)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(i - \sqrt{3} + 2i)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3i - \sqrt{3})$$

$$= \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = \frac{6i + 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + 3i$$

محققة, المثلث AEC مثلث متساوي الأضلاع.

6- لدينا:

$$\ell_1 = b + e = \sqrt{3} - i + i - \sqrt{3} = 0$$

$$\ell_2 = c + d = -2i + 2i = 0$$

لدينا:

$$b + e = c + d$$

$$b - d = c - e$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EC}$$

فإن $DBCE$ مستطيلاً

السؤال الثامن عشر

1- لدينا:

$$z^2 - 6z + 18 = 0$$

يمكننا إما التعويض أو حل المعادلة, لنحل المعادلة:

$$\Delta = 36 - 18(4) = 36 - 72 = -36 < 0$$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان:

$$z_1 = \frac{6 + i\sqrt{36}}{2} = 3 + 3i = a$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 3 - 3i = b$$

2- لدينا:

$$a = 3 + 3i$$

$$r = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$$

$$cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$a = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$b = \bar{a} = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

الرجاء تصويب الإشارة قبل الحل:

$$a^4 + b^4 - 648$$

$$\left(3\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 + \left(3\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 - 648$$

$$3^4 \times 4 + 3^4 \times 4 - 648 = 0$$

3- لدينا:

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$$

$$= 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 18(\cos(0) + i\sin(0))$$

$$\frac{\boldsymbol{a}^3}{\boldsymbol{b}^5} = \frac{\left[3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^3}{\left[3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^5}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4}\right)}{18}$$

$$= \frac{\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)}{18}$$

$$= \frac{1}{18}(\cos(0) + i\sin(0))$$

$$-\boldsymbol{a} = -3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)\right]$$

$$= 3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

4- لدينا:

$$\frac{a}{b} = \frac{3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

وهذا يكافئ:

$$\frac{a - o}{b - o} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

بما أن:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = 1\,, \arg\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{2}$$

فالمثلث AOB قائم ومتساوي الساقين.

5- لدينا:

$$T: z' = z + 3 + 3i$$

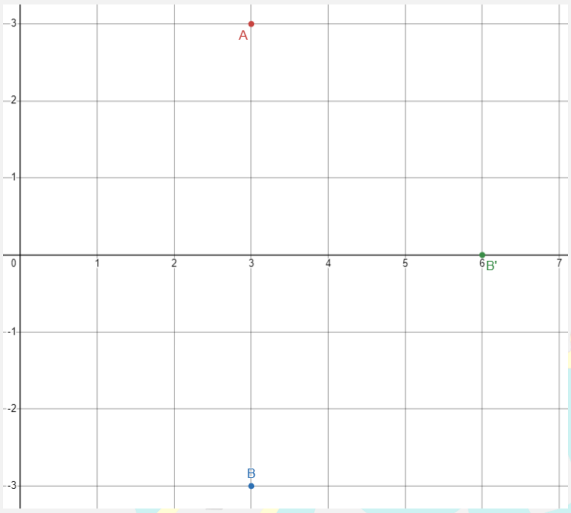
6- لدينا:

$$b' = b + 3 + 3i$$

$$= 3 - 3i + 3 + 3i$$

$$b' = 6$$

7- لدينا:



8- لدينا:

$$\frac{b - b'}{a - b'} = \frac{3 - 3i - 6}{3 + 3i - 6}$$

$$= \frac{-3 - 3i}{-3 + 3i} = \frac{(-3 - 3i)(-3 - 3i)}{18}$$

$$= \frac{(-3 - 3i)^2}{18} = \frac{9 + 18i - 9}{18} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

بما أن:

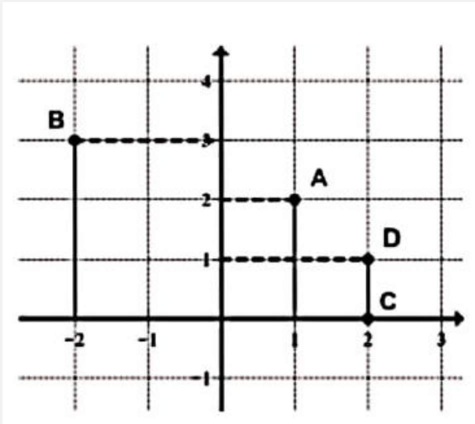
$$\left|\frac{b - b'}{a - b'}\right| = 1\ , \arg\left(\frac{b - b'}{a - b'}\right) = \frac{\pi}{2}$$

المثلث $BB'A$ قائم ومتساوي الساقين.

9- بما أن المثلثان AOB و $BB'A$ قائمان ومتساويا الساقين فنلاحظ أن الرباعي $OABB'$ سيكون مربعاً.

السؤال التاسع عشر

1-



2-

$$g=\frac{a+b+c+d}{4}$$
$$=\frac{1+2i-2+3i+2+2+i}{4}=\frac{3+6i}{4}$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}i$$

3-

$$\frac{a-c}{d-c}=\frac{1+2i-2}{2+i-2}=\frac{-1+2i}{i}=2+i$$
$$\frac{b-c}{a-c}=\frac{-2+3i-2}{1+2i-2}=\frac{-4+3i}{-1+2i}$$
$$=\frac{(-4+3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}$$
$$=\frac{4+8i-3i+6}{1+4}=\frac{10+5i}{5}=2+i$$

ومنه نجد أن $\frac{a-c}{d-c}=\frac{b-c}{a-c}$

نستنتج مما سبق أن $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$

فالمستقيم (AC) منصف للزاوية $\widehat{BCD}$

السؤال العشرون

1-

$$z_1=2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=1+\sqrt{3}i$$

2-

$$z_1.z_2=(2+2i).(1+\sqrt{3}i)$$
$$\Rightarrow z_1.z_2=(2-2\sqrt{3})+(2+2\sqrt{3})i$$
$$z_1.z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow z_1.z_2=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

وبالتالي:

$$4\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12}=2+2\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

3- صيغة التناظر المركزي

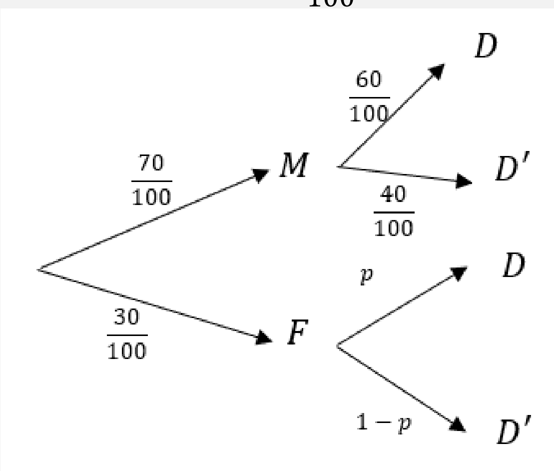
$$z'-w=-(z_1-w)$$
$$z'-(1-2i)=-(2+2i-1+2i)$$
$$z'=-6i$$

السؤال الواحد والعشرون

نرمز للذكور M والإناث F واللذين يلعبون D ولا يلعبون D'.

ولدينا احتمال D:

$$P(D)=\frac{45}{100}$$



1- لدينا:

$$P(M \cap D) = \frac{70}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{42}{100}$$

2- أولاً: لنحسب p:

$$P(D) = \frac{45}{100}$$

$$P(M \cap D) + P(F \cap D) = \frac{45}{100}$$

$$\frac{42}{100} + \frac{30}{100}p = \frac{45}{100}$$

$$\frac{30}{100}p = \frac{3}{100}$$

$$p = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

ثانياً:

$$P(D'|F) = \frac{P(D' \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{30}{100} \times \frac{9}{10}}{\frac{30}{100}} = \frac{27}{30}$$

3- لدينا:

$$P(F|D) = \frac{P(F \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{30}{100} \times \frac{1}{10}}{\frac{45}{100}} = \frac{3}{45}$$