جداء السلمي		
$\vec{u}.\vec{v} = \|\|\vec{u}\|\|\,\|\|\vec{v}\|\| \cos\alpha$	$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\|\vec{u}+\vec{v}\|\|^2 - \|\|\vec{u}\|\|^2 - \|\|\vec{v}\|\|^2\right]$	$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

طلبات مميزة:

1- أثبت أن النقطة J هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث ABC:
نثبت أن $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 0$ و $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AC} = 0$.

2- حساب $\cos\alpha$ عن طريق القانون الأول في الجداء السلمي.

3- اثبات أن شعاعين متساويين بالطول.

مبرهنة المسقط القائم:

بفرض $\overrightarrow{C'D'}$ مسقط الشعاع $\overrightarrow{CD}$ على حامل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ عندئذ يمكن كتابة:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$$

رسمة مثلث قائم

أي لجداء ضلع قائمة بالوتر نحسب جداء الضلع القائمة بنفسها:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$$

الشعاع الناظم على مستوي هو الشعاع العمودي على شعاعي توجيه فيه

$$\vec{n}.\vec{u} = 0 \ , \qquad \vec{n}.\vec{v} = 0$$

ويمكن استبدالها بالطريقة الغشاشة 😉:

....

....

....

....

معادلات المستوى			
الحالة	**النقطة**	**الناظم**	**ملاحظة**
علم ناظم ونقطة	من النص	من النص	-
علم مستوي موازي	من النص	ناظم المستوي المعطى	-
المستوي المحوري	منتصف القطعة المستقيمة	شعاع القطعة المستقيمة	أسلوب آخر: مجموعة النقاط المحققة للعلاقة: $MA = MB$
علم شعاعي توجيه	من النص	الجداء الخارجي لشعاعي التوجيه	-
علم ثلاث نقاط	إحدى هذه النقاط	الجداء الخارجي لشعاعين من النقاط الثلاثة	إذا كانت النقاط من الشكل: $A(a,0,0)\,,B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$ فتكون معادلة المستوي: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

علم مستويين معامدين	من النص	الجداء الخارجي لناظمي المستويين	-
علم مستوي معامد ونقطتين	إحدى النقطتين	الجداء الخارجي لناظم المستوي المعامد الشعاع المكون من النقطتين	-
مستوى معين بتقاطع مستقيمين	نقطة تقاطع المستقيمين	الجداء الخارجي لشعاعي توجيه المستقيمين	تعين نقطة التقاطع من خلال الحل المشترك لتمثيلي المستقيمين

التمثيل الوسيطي لمستقيم

الحالة	النقطة	شعاع التوجيه	الملاحظة
علم شعاع توجيه ونقطة	من النص	من النص	-
علم نقطتين	إحدى النقطتين	شعاع النقطتين	-
علم مستوي معامد	من النص	ناظم المستوي	-
الفصل المشترك	-	-	حل مشترك لمعادلتي المستوي وفرض أحد المجاهيل قيمة تحوي t

بعد نقطة عن مستوي

القانون	$dis(A,P)=\dfrac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

الكرة

علم مركز ونصف قطر	علم قطر	علم مركز ونقطة تمر منها
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ حيث: المركز $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ نصف القطر r	1- نوجد المركز وهو منتصف القطر. 2- نوجد نصف القطر. 3- نعوض في القانون السابق	1- نوجد نصف القطر وهو عبارة عن المسافة بين المركز والنقطة التي تمر منها الكرة. 2- نعوض في القانون

كرة تمس مستوي
1- المركز معلوم 2- نصف القطر هو $dis(\Omega,P)$ بعد مركز الكرة عن المستوي. 3- نعوض في القانون.

الأسطوانة

أسطوانة محورها يوازي oz	أسطوانة محورها oy	أسطوانة محورها ox
بفرض إحداثيات مركز القاعدة $A(x_1,y_1,z_1)$ و أن ارتفاع هذه	$\begin{cases}(x-x_1)^2+(z-z_1)^2=r^2\\ y_1\le y\le y_1+h\end{cases}$	$\begin{cases}(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2\\ x_1\le x\le x_1+h\end{cases}$

الأسطوانة h و نصف قطر قاعدتها r فإن هذه الأسطوانة تُعرّف بالشكل : $\begin{cases}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2\\ z_1\le z\le z_1+h\end{cases}$ وبوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases}x^2+y^2=r^2\\ 0\le z\le h\end{cases}$	و بوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases}x^2+z^2=r^2\\ 0\le y\le h\end{cases}$	و بوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases}y^2+z^2=r^2\\ 0\le x\le h\end{cases}$

المخروط

محوره يوازي oz	محوره يوازي oy	محوره يوازي ox
$\begin{cases}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(z-\\ z_1\le z\le z_1+h\end{cases}$	$\begin{cases}(x-x_1)^2+(z-z_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(y-y\\ y_1\le y\le y_1+h\end{cases}$	$\begin{cases}(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(x-\\ x_1\le x\le x_1+h\end{cases}$
و إذا كان الرأس هو المبدأ : $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{r^2}{h^2}z^2\\ 0\le z\le h\end{cases}$	و إذا كان الرأس هو المبدأ: $\begin{cases}x^2+z^2=\frac{r^2}{h^2}y^2\\ 0\le y\le h\end{cases}$	و إذا كان الرأس هو المبدأ: $\begin{cases}y^2+z^2=\frac{r^2}{h^2}x^2\\ 0\le x\le h\end{cases}$

الوضع النسبي لمستوي مع مستوي

شرط التوازي: ارتباط النواظم وإذا كان: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ كان المستويين منطبقين.	شرط التقاطع: عدم ارتباط النواظم	شرط التعامد: جداء النواظم معدوم.

الوضع النسبي لمستوي مع مستقيم

نعوض المستقيم في المستوي ونميز الحالات الآتية:

$0=0$ المستقيم محتوى في المستوي	$0=1$ المستقيم يوازي المستوي	$t=$ عدد المستقيم والمستوي متقاطعان في نقطة. لإيجاد احداثياتها نعوض t في المستقيم.

وضع نسبي لثلاث مستويات

طريقة التجميع	طريقة غاوس
1- إيجاد فصل مشترك d لمستويين من الثلاثة 2- دراسة وضع نسبي للمستوي المتبقي مع الفصل المشترك d ونميز الحالات: أ- الفصل المشترك يوازي المستوي: المستويات الثلاثة لا تشترك بأي نقطة	شبابيك القصف العشوائي تذكر الحذف بالتعويض 😉

ب- الفصل المشترك محتوى في المستوي: المستويات الثلاثة متقاطعة بهذا الفصل المشترك ت- الفصل المشترك يقطع المستوي: المستويات الثلاثة تتقاطع بنقطة.	

الوضع النسبي لكرة مع مستقيم

نعوض المستقيم في الكرة فنحصل على معادلة درجة ثانية ونميز الحالات:

لها حلان فيتقاطعان بنقطتان	لها حل وحيد فيتقاطعان بنقطة	مستحيلة الحل فلا يشتركان بأي نقطة

الوضع النسبي لكرة مع مستوي

نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي ونميز الحالات الآتية:

$dis < r$	$dis = r$	$dis > r$
المستوي يقطع الكرة في دائرة	المستوي يمس الكرة	المستوي لا يشترك مع الكرة بأي نقطة.
يطلب حساب نصف قطر دائرة المقطع باستخدام القانون: $r_c = \sqrt{r^2 - dis^2}$	**Nothing…keep going forward**	

الوضع النسبي لمستقيم مع مستقيم

ندرس ارتباط اشعة التوجيه ونميز حالتين:

اشعة التوجيه مرتبطة: المستقيمان متوازيان **لدراسة التطابق:** نفرض قيمة للوسيط t بأحد التمثيلين فنحصل على نقطة (x_0, y_0, z_0) تنتمي للمستقيم الأول ثم نختبر انتماءها للمستقيم الثاني وذلك من خلال تعويضها بالتمثيل الوسيطي فيجب الحصول على قيمة ذاتها للوسيط من المعادلات الثلاثة	الأشعة غير مرتبطة: المستقيمان غير متوازيان , ندرس التقاطع: $x_t = x_s$ $y_t = y_s$ $z_t = z_s$

ملاحظات:

1- لإثبات أن مستقيم يعامد مستوي نثبت أن الناظم و شعاع التوجيه مرتبطان
2- لإثبات أن شعاعاً معطى هو ناظم على مستوٍ معلوم يوجد اسلوبين :
أ- الأسلوب الأول : الشعاع عمودي على شعاعين في المستوي
ب- الأسلوب الثاني: الشعاع المعطى مرتبط مع ناظم المستوي

طلبات مميزة في الكرة

حساب نصف قطر دائرة المقطع	$R^2 = dis^2 + r^2$
إيجاد مركز دائرة المقطع	مسقط مركز الكرة على المستوي القاطع
إيجاد نقطة تماس مستوي مع كرة	مسقط المركز على المستوي المماس
إيجاد نقطة تماس مستقيم مع كرة (لا تشغل مخك مابدا مسقط قائم)	عوض قيمة t بالتمثيل الوسيطي

المجموعات النقطية	
$\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BM}\right\|$ أو $AM = BM$	تمثل مستوي محوري للقطعة $[AB]$
$\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = const$ أو $AM = const$	تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها $const$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$	تمثل كرة التي قطرها $[AB]$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$	تمثل المستوي الذي يمر من النقطة A ويقبل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له
معادلة من الشكل: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$	نتمم إلى مربع كامل لنصل إلى الشكل $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k$ ونميز الحالات: 1- $k < 0$ فتكون معادلة تمثل المجموعة الخالية Φ. 2- $k = 0$ فتكون معادلة تمثل نقطة التي إحداثياتها $A(x_0, y_0, z_0)$. 3- $k > 0$ فتكون المعادلة تمثل كرة التي نصف قطرها k ومركزها $A(x_0, y_0, z_0)$.
في باقي الحالات	1- نفرض $M(x, y, z)$ 2- نعوض في المعادلة 3- نصلح ثم نقارن شكل المعادلة المختزل مع الاشكال السابقة
لا ننسا الشكل العام لمعادلة المخروط والاسطوانة	
المساقط القائمة (تلت سطور وسطر والسر أن $\vec{u} = \vec{n}$)	
على مستوي:	على مستقيم:
1- نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار من D وشعاع توجيهه هو $\vec{n}$ ناظم المستوي P 2- نوجد تقاطع هذا المستقيم مع المستوي فنحصل على D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي P	1- نوجد معادلة المستوي P المعامد للمستقيم d والمار من النقطة D. 2- نوجد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي P ولتكن D' فتكون المسقط القائم للنقطة D على المستقيم d.
ملاحظة: إن DD' تمثل بعد النقطة D عن المستوي.	**ملاحظة:** إن DD' تمثل بعد النقطة D عن المستقيم.
يمكن حساب بعد نقطة عن مستوي بشكل مباشر: $\boldsymbol{dis(D, P) = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$	لا يوجد طريقة أخرى لحساب بعد نقطة ما عن المستقيم **الا المسقط القائم**
Hero's idea	
حالة خاصة جداً	نعرف بعد نقطة عن مستقيم بأنها طول أصغر قطعة مستقيمة واصلة بين النقطة وهذا المستقيم وبالتالي إذا كانت M نقطة دارجة المستقيم واستطعنا كتابة AM بالشكل $\sqrt{\lambda^2 + \text{عدد موجب}}$ فإننا: - يكون AM أصغر ما يمكن عندما $\lambda = 0$

<table>
<tr><td></td><td>- يكون بعد النقطة A عن المستقيم هي جذر العدد الموجب</td></tr>
<tr><td colspan="2">فوائد واستخدامات dis</td></tr>
<tr><td>حساب المسافة بين مستويين متوازيين</td><td>1- نثبت أن المستويين متوازيين (من خلال إثبات أن النواظم مرتبطة خطياً)
2- نأخذ نقطة كيفية A من المستوي الأول و ذلك بوضع $x = 0, y = 0$ في معادلة المستوي الأول و حساب z
3- نحسب بعد النقطة A عن المستوي الثاني فنحصل على المسافة بين المسستويين</td></tr>
<tr><td>بعد نقطة عن الفصل المشترك لمستويين متعامدين</td><td>إذا كان لدينا مستويين متعامدين وطُلب منا حساب بعد نقطة ما عن الفصل المشترك لهما فإننا نتبع الخطوات التالية:
1- نحسب h_1 بعد النقطة عن المستوي الأول
2- نحسب h_2 بعد النقطة عن المستوي الثاني
3- فحسب مبرهنة فيثاغورث يكون بعد النقطة عن الفصل المشترك هي $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$</td></tr>
<tr><td>الحجوم: القاعدة موجودة في مستوٍ كيفي</td><td>بعد رأس المجسم عن مستوي القاعدة</td></tr>
<tr><td colspan="2">حجوم المجسمات الفراغية</td></tr>
<tr><td>المجسم له قاعدتين</td><td>المجسم له قاعدة واحدة</td></tr>
<tr><td>$V = S \times h$</td><td>$V = \frac{1}{3} S \times h$</td></tr>
<tr><td colspan="2">حيث أن S مساحة القاعدة , h الارتفاع</td></tr>
<tr><td colspan="2">ملاحظة نذيرية:
بعد حساب الحجم يمكن استنتاج مساحة قاعدة أخرى له أو ارتفاع اخر له ويتم ذلك بحساب الحجم من منظور آخر (بدلالة القاعدة أو الارتفاع حسب الطلب)</td></tr>
</table>

الارتباط الخطي لثلاث اشعة:

نقول عن الاشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ إنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان α,β بحيث:

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

و $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً

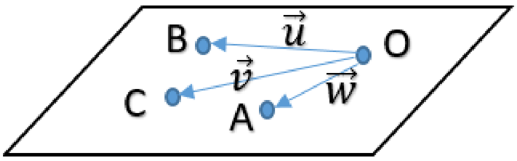
معنى الارتباط الخطي لثلاث أشعة: (مطالعة):

أنه يمكن استبدال هذه الاشعة بثلاث أشعة أخرى تشترك في نفس البداية وتقع في مستوٍ واحد. ((لايعني توازي بالضرورة))

أي يوجد نقطة o تجعل الاشعة $\overrightarrow{oc},\overrightarrow{oB},\overrightarrow{oA}$

تقع في مستوٍ واحد حيث

$$\vec{w}=\overrightarrow{oA},\ \vec{u}=\overrightarrow{oB},\ \vec{v}=\overrightarrow{oC}$$



فوئد الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

1- إثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد.

2- إيجاد معادلة مستوٍ يمر من ثلاث نقاط.

3- إثبات انتماء M الى مستوٍ مار بثلاث نقاط.

انتبه: أي جملة معادلات مكونة من ثلاث معادلات ومجهولين فقط، فإننا نحل معادلتين منهما حلاً مشتركاً، ثم نعوض في الثالثة للتحقق ونميز حالتين:

1) إذا كانت المعادلة الثالثة محققة ← للجملة حل مشترك هو الحل الذي أوجدناه من اول معادلتين.

2) اذا كانت المعادلة الثالثة غير محققة فتكون الجملة مستحيلة الحل.

التمرين (1)

نتأمل في معلم: $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط الاتية:

$A(0,1,-1)$, $B(1,0,0)$, $C(-1,2,1)$, $D(0,1,2)$

أثبت انتماء النقاط A,B,C,D الى مستوٍ واحد P

الحل

نشكل ثلاثة أشعة لها نفس البداية:

$$\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)$$
$$\overrightarrow{AC}=(-1,1,2)$$
$$\overrightarrow{AD}=(0,0,3)$$

نثبت ان الاشعة السابقة مرتبطة خطياً أي لنثبت أولاً : أن $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين (و هذا واضح لعدم تناسب مركباتهما حيث $\frac{3}{2}\neq\frac{0}{1}$) ثم لنثبت وجود عددين α,β يحققان ان:

$$\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\3\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\2\alpha+3\beta\end{pmatrix}$$

$$1=-\alpha \quad (1)$$
$$-1=\alpha \quad (2)$$
$$1=2\alpha+3\beta \quad (3)$$

من 1 نجد أن $\Rightarrow \alpha = -1$

نعوض في 3 :

$$1 = -2 + 3\beta$$

$$3 = 3\beta \Rightarrow \beta = 1$$

نعوض في 2 للتحقق:

$-1 = -1$ محققة

التمرين (2) دورة 2021 الأولى

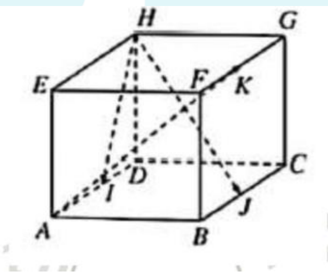
نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ النقاط التالية: $D(6,2,5), C(5,0,5), B(1,-2,1), A(2,0,1)$ ، المطلوب:

1) أثبت أن $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

2) عين العددين الحقيقيين α ، β بحيث: $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ ، واستنتج أن النقاط A ، B ، C ، D تقع في مستوٍ واحد .

التمرين (3)

في الشكل المجاور نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$ و طول حرفه 2 . و لتكن النقاط I و J و K منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$ بالترتيب . نختار معلماً متجانساً $(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$. و المطلوب:



1- جد إحداثيات الرؤوس و I, J, K

2- جد مركبات كلٍ من الأشعة $\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{AK}$

3- أثبت أن المستوي (HIJ) * يوازي المستقيم (AK)

التمرين (4)

نتأمل في معلم متجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

$A(2,0,1), B(1,-2,1), C(5,5,0),$
$D(-3,-5,6), E(3,1,2)$

أثبت انتماء النقاط A, B, C, D إلى مستوٍ واحد P و تبيّن إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P

التمرين (5)

في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط :

$A(3,2,1), B(1,2,0), C(3,1,-2)$

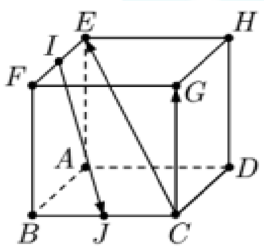
1- أثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة

2- عند أي قيمة للوسيط λ تنتمي النقطة $M(\lambda,1,3)$ إلى المستوي (ABC)

3- ما العلاقة بين x,y لتقع النقاط $A, B, D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد .

التمرين (6)

في الشكل المجاور مكعب، I و J منتصفات $[EF]$ و $[BC]$ على الترتيب:



1- أثبت أن $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG} = 2(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE})$

2- أثبت أن المستقيم (IJ) يوازي المستوي (CEG).

مركز الأبعاد المتناسبة

نقول إن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) و (B,β) إذا تحقق أن:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

حيث $\alpha+\beta\neq 0$

ويعمم الكلام السابق لأكثر من نقطتين أي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A.\alpha)$ و (B,β) و (C,γ) إذا تحقق أن:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

وحيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

بل أكثر من ذلك:

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ)و (D,δ) إذا كان الشرط محقق:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

وتسمى العلاقة السابقة:

- **علاقة الوجود (العلاقة الأم)** لأنه عندما يكون $\alpha+\beta=0$ عندئذ لا يوجد م أ م للنقاط (B,β) و (A,α).

- **نستخدم علاقة الوجود لتحديد أو تعيين α و β و γ ...**

1- نصلح شكل العلاقة لجعل الطرف الثاني $\vec{0}$ ونجعل البدايات كلها م أ م.

2- نقارن مع القانون

3- نختبر الشرط $(\alpha+\beta+\cdots\neq 0)$

ملاحظة: م أ م = مركز الأبعاد المتناسبة ولا تكتب بهاد الشكل بالامتحاااان^_^

نميز الحالات الآتية في م أ م:

الحالة الأولى: الانطلاق من علاقة شعاعية:

1) جد العددين α و β ليكون G م أ م للنقاط (A,α) و (B,β) انطلاقاً من العلاقة:

$$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}$$

الحل

$$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$-2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

ونلاحظ أنها من الشكل:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

إذن $\alpha=-2$ و $\beta=1$ حيث $\alpha+\beta\neq 0$

2) عين الاعداد α و β و γ لتكون M م أ م للنقاط المحققة للعلاقة:

$$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

الحل

سنضرب بالعدد 4:

$$4\overrightarrow{AM}=8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$
$$8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$8\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)+3\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right)+4\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$-8\overrightarrow{MA}+8\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$-7\overrightarrow{MA}+8\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

وهذه العلاقة من الشكل:

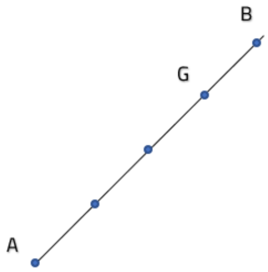
$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

وبالتالي $\alpha=-7$ و $\beta=8$ و $\gamma=3$ حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

الحالة الثانية: الانطلاق من شكل:

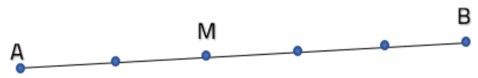
(مسائل 40 درجة):

1) عين α و β ليكون G م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):



$$\frac{AG}{AB}=\frac{3}{4}$$
$$4\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$$
$$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AG}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$\alpha=1\,,\beta=3\quad;\alpha+\beta\neq 0$$

2) عين α و β ليكون M م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):



لدينا طريقتان في الحل:

الطريقة الأولى:

من الشكل نلاحظ أن M م أ م للنقاط $(A,3)$ و $(B.2)$.

الطريقة الثانية:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{2}{5}$$
$$5\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$$
$$-2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\alpha=-3\,,\beta=-2\,;\alpha+\beta\neq 0$$

3)

$$\frac{MA}{MB}=\frac{1}{3}$$
$$3\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$$
$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$\alpha=3\,,\beta=-1\,;\alpha+\beta\neq 0$$

ملاحظات:

1- G م أ م لنقطتين من تثقيلتين مختلفتين بالإشارة فإن G تقع خارج القطعة وبالعكس

2- خاصة التجانس (هامة جداً)

G م أ م لـ (A,α) و (B,β):

$$\boldsymbol{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

نضرب بـ $k\neq 0$:

$$\boldsymbol{(k\alpha)\overrightarrow{GA}+(k\beta)\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

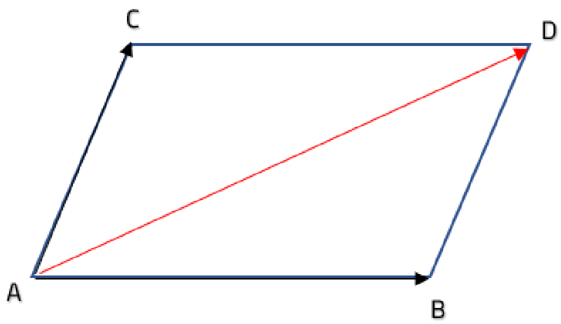
G م أ م لـ $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$.

(مسائل 100 درجة):

تذكرة:

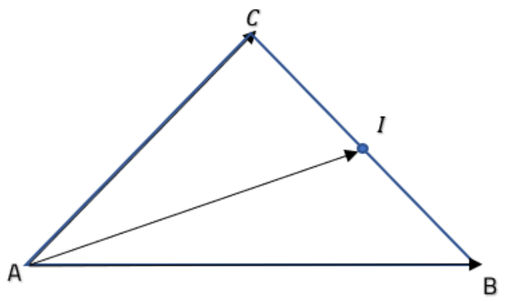
1) علاقة متوازي الأضلاع:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$



2) علاقة المتوسط في المثلث:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$$

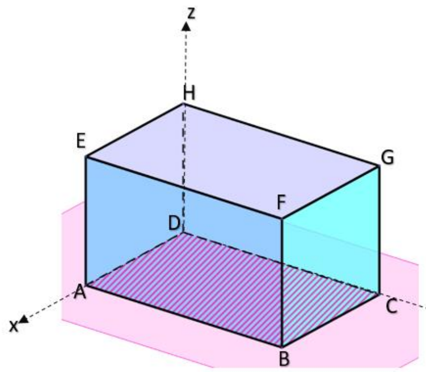


3) علاقة الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

أمثلة:

1) نتأمل في الشكل المجاور متوازي مستطيلات $ABCDEFGH$



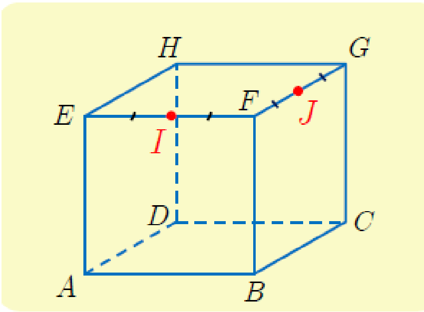
عين α و β و γ ليكون D م أ م للنقاط $(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)$.

الحل

من الشكل نلاحظ أن:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$
$$\alpha = 1\,,\beta = -1\,,\gamma = 1\,;\alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

2) نتأمل في الشكل المجاور مكعباً



عين α و β و γ ليكون I م أ م للنقاط $(A,\alpha),(F,\beta),(E,\gamma)$.

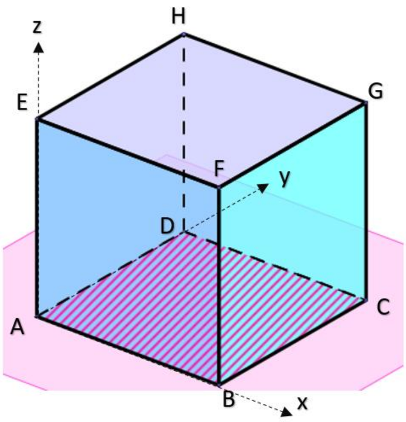
الحل

من علاقة المتوسط نجد:

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AI}$$
$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} - 2\overrightarrow{AI} = \vec{0}$$
$$0\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{IE} = \vec{0}$$
$$\alpha = 0\,,\beta = 1\,,\gamma = 1\,;\alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

عند اختفاء أحد النقاط المطلوب تثقيلها نكتبها في العلاقة بأمثال صفرية.

3) نتأمل جانباً مكعباً طول حرفه 3



نعرف معلماً متجانساً:

$$\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$$

1- جد معادلة المستوي (EBD).

$A(0,0,0)$	$E(0,0,3)$
$B(3,0,0)$	$F(3,0,3)$
$C(3,3,0)$	$G(3,3,3)$
$D(0,3,0)$	$H(0,3,3)$

نشكل الشعاعين:

$$\overrightarrow{EB}(3,0,-3)$$
$$\overrightarrow{ED}(0,3,-3)$$
$$\frac{0}{3} \neq \frac{-3}{-3}$$

غير مرتبطين خطياً، نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{EB} = 0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{ED} = 0$$
$$\begin{cases} 3a - 3C = 0 \\ 3B - 3C = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 3a = 3c$$
$$a = c$$

نفرض $c = 1 \Leftarrow a = 1$, نعوض في أحد المعادلات فنجد:

$$3b - 3 = 0] \Rightarrow b = 1$$
$$\Rightarrow \vec{n}(1,1,1)$$

وتكون معادلة المستوي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$1(x - 0) + 1(y - 0) + 1(z - 3) = 0$$
$$x + y + z - 3 = 0$$

2- برهن أن النقطة $K(5,2,-4)$ تنتمي للمستوي (EBD).

نعوض إحداثيات النقطة في المعادلة فنجد:

$$5 + 2 - 4 - 3 = 0 \Rightarrow 7 - 7 = 0$$
$$K \in (EBD)$$

3- عين α و β و γ ليكون K م أ م للنقاط $(E,\alpha),(B,\beta),(D,\gamma)$.

لدينا $K \in (EBD)$ فإن K و E و B و D في مستو واحد فإن الأشعة $\overrightarrow{KE},\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KD}$:

$$\overrightarrow{KE} = a\overrightarrow{KB} + b\overrightarrow{KD}$$
$$\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} -2a - 5b = -5 \\ -2a + b = -2 \\ 4a + 4b = 7 \text{ للتحقق} \end{cases}$$

بطرح 1 و 2 نجد:

$$-6b = -3 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

نعوض في 2:

$$-2a + \frac{1}{2} = -2$$
$$-2a = -\frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

نعوض في 3 للتحقق:

$$5 + 2 = 7 \Rightarrow \text{محققة}$$
$$\overrightarrow{KE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KD}$$
$$\frac{5}{4}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KE} = \vec{0}$$

K م أ م للنقاط:

$$\left(B,\frac{5}{4}\right),\left(D,\frac{1}{2}\right),(E,-1)$$

حسب التجانس مضرب بـ 4:

$$(B,5),(D,2),E(-4)$$

حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

انشاء مركز الأبعاد المتناسبة:

أي تحديد موضع م أ م.

- G م أ م لنقطتين لهما نفس الثقل عندئذ G في منتصف القطعة المستقيمة.
- G م أ م لثلاثة نقاط لهما نفس الثقل عندئذ G مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات).

مثال1: عين G م أ م للنقاط $(A,2)\ (B,2)(C,2)$.

الحل

G هي مركز ثقل المثلث ABC.

ارسم معنا :

- G م أ م لنقطتين أحدهما ثقيلتها معدومة عندئذ G تنطبق على الأخرى.

مثال2: عين G م أ م للنقاط $(A,0)\ (B,3)$.

الحل

G تنطبق على B.

- G م أ م للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ عندها نستخدم علاقة الانشاء وهي:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

مثال3: عين G م أ م للنقطتين $(A,1),(B,3)$:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

ارسم معنا :

أو بطريقة أخرى:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$$

ارسم معنا :

مثال4: عين M م أ م للنقاط $(A,5),(B,-2)$:

$$\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

ارسم معنا :

مثال5: عين M م أ م للنقاط $(A,10),(B,10)$:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{10}{20}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

الرسم:

نلاحظ أن النتيجة تطابق نتيجة الحالة الأولى.

الخاصة التجميعية:

إذا كان G م أ م للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$:

- نفرض I م أ م لـ A و B ويكون:
  1. موضع I: حسب ما تعلمنا سابقاً
  2. ثقل I: هو $\alpha+\beta$
- حسب الخاصة التجميعية G م أ م لـ $(I,\alpha+\beta)$ و (C,γ).

مثال1: جد G م أ م للنقاط
$(A,1),(B,2),(C,1),(D,3)$:

ارسم معنا :

نفرض I م أ م للنقاط $(A,1),(C,1)$ عندئذ I منتصف $[AC]$ وأن $(I,2)$.

نفرض J م أ م للنقاط $(B,2),(D,3)$ عندئذ:

$$\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BD}$$

وأن $(J,5)$, وبالتالي حسب الخاصة التجميعية فإن G م أ م لـ $(I,2),(J,5)$:

$$\overrightarrow{IG}=\frac{5}{7}\overrightarrow{IJ}$$

مثال2: عين G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$.

ارسم معنا :

الحل

المطلوب هنا هو إيجاد مركز الابعاد المتناسبة للنقاط:

$(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$

- نفرض I م أ م للنقطتان A و B عندها I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ وبالتالي $(I,2)$.
- نفرض أيضاً J م أ م للنقاط $(C,1),(D,1)$ وعندها J منتصف القطعة المستقيمة $[CD]$ وبالتالي $(J,2)$, فحسب الخاصة التجميعية إن G م أ م للنقاط $(I,2),(J,2)$.

وبطريقة أخرى:

k م أ م لـ $(A,1),(B,1),(C,1)$ وبالتالي k مركز ثقل المثلث ABC.

حسب الخاصة التجميعية فإن G م أ م $(K,3),(D,1)$:

$$\overrightarrow{KG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{KD}$$

ملاحظة هامة:

وجدنا أنه إذا كان G م أ م للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

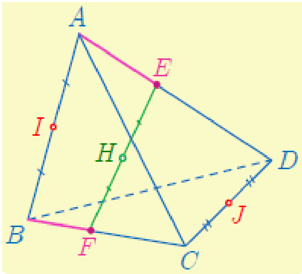
حيث $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ عدد حقيقي أي يمكننا اعتباره k:

$$\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AB}$$

وهذا يعني أن A و B G على استقامة واحدة.

وهذا يعني انه يمكن اثبات أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة بإثبات أن إحداهما م أ م للنقطتين الباقيتين.

التمرين (1)



I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ ولدينا النقطتان E و F تحققان:

$$\overrightarrow{AE} = a.\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BF} = a.\overrightarrow{BC}$$

و H منتصف $[EF]$ والمطلوب إثبات أن H و I و J على استقامة واحدة.

الحل

- لدينا $\overrightarrow{AE} = a.\overrightarrow{AD}$ إذن E م أ م للنقاط: $(D, a), (A, 1-a)$ وأن $(E, 1)$.
- لدينا $\overrightarrow{BF} = a.\overrightarrow{BC}$ إذن F م أ م للنقاط: $(C, a), (B, 1-a)$ وأن $(F, 1)$.

وبما أن H منتصف $[EF]$ فهي م أ م للنقاط $(E, 1), (F, 1)$ وحسب الخاصة التجميعية H م أ م للنقاط:

$(A, 1-a), (B, 1-a), (C, a), (D, a)$

- بما أن I منتصف $[AB]$ إذن I م أ م للنقاط: $(A, 1-a), (B, 1-a)$ وأن $(I, 2-2a)$.
- بما أن J منتصف $[CD]$ إذن J م أ م للنقاط: $(C, a), (D, a)$ وأن $(J, 2a)$.

فحسب الخاصة التجميعية إن H م أ م للنقاط $(I, 2-2a), (J, 2a)$ وبالتالي H و I و J على استقامة واحدة.

التمرين (2)

$ABCD$ رباعي وجوه ويوجد:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

أثبت أن G م أ م للنقاط $(A, 1), (B, 3), (C, 1), (D, 2)$ يقع على $[EF]$ ثم عين G.

الحل

- F م أ م للنقاط $(A, 1), (D, 2)$ وأن $(F, 3)$.
- E م أ م للنقاط $(B, 3), (C, 1)$ وأن $(E, 4)$.

فحسب الخاصة التجميعية G م أ م $(E, 4), (F, 3)$ وبالتالي إن G و E و F على استقامة واحدة:

$$\overrightarrow{FG} = \frac{4}{7}\overrightarrow{FE}$$

■ إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة :

إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط : $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$

فإن إحداثيات مركز الثقل :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$
$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$
$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

مثال: في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط : $A(1,1,-2), B(2,3,-2), C(4,0,-1)$

و ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط : $(A, 2), (B, 2), (C, -1)$

1- جد إحداثيات G

2- اكتب معادلة الكرة التي مركزها G و نصف قطرها $\sqrt{2}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

خاصة الإختزال:

إذا كان G م أ م للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ فإن:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

وشرط تطبيق الإختزال: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

- أما إذا كانت $\alpha+\beta+\gamma=0$ عندئذ يمكن إخفاء M بإصلاح للعلاقة الشعاعية:

مثال₁: اختزل العلاقات الآتية:

1) $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

$$3+1-2\neq 0$$

حسب علاقة الاختزال:

$$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=(3+1-2)\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MG}$$

حيث G م أ م للنقاط $(A,3),(B,1),(C,-2)$.

2) $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$$2-1-1=0$$

نخفي M.

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$$
$$=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}$$
$$=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}$$
$$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{IA}$$

حيث I منتصف $[BC]$.

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$$

نضرب ب -1:

$$-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AI}$$
$$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{IA}$$

حيث I منتصف $[BC]$، الرسم للتوضيح:

3) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

$$1+1+1=3\neq 0$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

G م أ م للنقاط:

$$(A,1),(B,1),(C,1)$$

فإن G مركز ثقل المثلث ABC، الرسم للتوضيح:

تذكرة: خاصة التجانس:

إذا كان G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(A,\alpha),(B,\beta)$$

عندها:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

نضرب بـ $k\neq 0$:

$$k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

G مركز أبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,k\alpha),(B,k\beta)$$

تمرينات ومسائل:

$\frac{21}{43}$: نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ و E و F تحققان:

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

أثبت أن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$$

يقع على $[EF]$ ثم عين G.

الحل

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BE}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$$

$$\gamma = 1$$
$$\beta + 1 = 4 \Rightarrow \beta = 3$$

E مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(B,3)\,,(C,1),(E,4)$$
$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AF} = \frac{\delta}{\alpha+\delta}\overrightarrow{AD}$$
$$\delta = 2\,,\alpha = 1$$
$$(F,3)$$

وبالتالي فإن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(E,4),(F,3)$$

حسب الخاصة التجميعية فإن G و E و F تقع على استقامة واحدة.

$$\overrightarrow{EG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$$

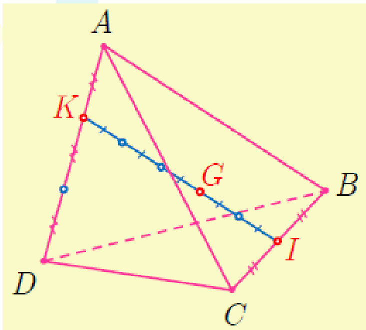
وظائف:

$\frac{25}{44}, \frac{10}{31}, \frac{2}{35}, \frac{1}{35}, \frac{7}{96}, \frac{2}{94}, \frac{1}{94}$

مع تدرب صفحة 81 و82.

مسائل عامة في مركز الأبعاد المتناسبة

$\frac{1}{31}$: بالإستفادة من المعلومات في الشكل عين الأعداد a و b و c و d ليتحقق ما يلي:



1) K م أ م للنقطتين $(D,d),(A,a)$.

2) I م أ م للنقطتين $(C,c)\,,(B,b)$.

3) G م أ م للنقاط:

$$(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)$$

الحل

1) من الشكل نلاحظ أن K م أ م للنقاط $(A,2),(D,1)$ و $(K,3)$.

2) من الشكل نلاحظ أن I م أ م للنقاط $(B,1)\,,(C,1)$ و $(I,2)$.

3) من الشكل نلاحظ أن G م أ م للنقاط $(K,3),(I,2)$:

لما كان K م أ م للنقطتين $(A,2),(D,1)$ فحسب التجانس نضرب بـ $\frac{2}{3}$:

$$\left(A,\frac{4}{3}\right),\left(D,\frac{2}{3}\right),(K,2)$$

لما كان I م أ م للنقطتين $(B,1),(C,1)$ فحسب خاصة التجانس نضرب بـ $\frac{3}{2}$:

$$\left(B,\frac{3}{2}\right),\left(C,\frac{3}{2}\right),(I,3)$$

حسب الخاصة التجميعية إن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$\left(A,\frac{4}{3}\right),\left(B,\frac{3}{2}\right),\left(C,\frac{3}{2}\right),\left(D,\frac{2}{3}\right)$$

إذن:

$$a = \frac{4}{3}\,,b = \frac{3}{2}\,,c = \frac{3}{2}\,,d = \frac{2}{3}$$

$\frac{4}{31}$: ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. و k عدد حقيقي غير معدوم ولا يساوي 1، ولتكن I و J و K و L النقاط المعرفة وفق:

$$\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AJ} = k\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{CK} = k\overrightarrow{CD}\,,\overrightarrow{CL} = k\overrightarrow{CB}$$

1) أثبت أن:

$$\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{LK}$$

واستنتج أن النقاط I و J و K و L تقع في مستوي واحد.

2) ما طبيعة الرباعي $IJKL$؟

الحل

1) لدينا:

- $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$
$= -k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD} = k\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)$
$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{CL} + \overrightarrow{CK}$
$= -k\overrightarrow{CB} + k\overrightarrow{CD} = k\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$
$\Rightarrow \overrightarrow{LK} = k\overrightarrow{BD}$

بما أن $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ بالتالي المستقيمان (IJ) و (LK) متوازيان وهما يقعان في مستوي واحد.

الرسم للتوضيح:

2) بما أن $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ وبالتالي $IJKL$ متوازي أضلاع.

$\frac{10}{41}$: A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة و E و D تحققان:

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}\ ,\ 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$$

1) أثبت أن A و B و C تقع في مستو واحد.
2) بفرض I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$ أثبت أن A و J و I تقع على استقامة واحدة.

الحل

الرسم:

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE} \Rightarrow \overrightarrow{EC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$$
$$3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

نلاحظ أن A و E و C على استقامة واحدة وأن B و D و A على استقامة واحدة وبالتالي المستقيمان (BD) و (EC) متقاطعان في A وبالتالي A و B و C و D و E في مستو واحد.

- حسب المتوسط:

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}\right)$$
$$2\left(\overrightarrow{AI}\right) = \frac{2}{3}\left(2\left(\overrightarrow{AJ}\right)\right)$$
$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

فالنقاط J ,I ,A على استقامة واحدة.

$\frac{25}{44}$: $ABCDEFGH$ مكعب و I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ و M م أ م لـ $(B,1),(A,1),(G,1)$ والمطلوب:

1) أثبت أن M تنتمي إلى $[IJ]$ وعين موضعها.
2) أثبت أن M تنتمي إلى $[KL]$ وعين موضعها.
3) استنتج أن I و J و K و L تقع في مستو واحد، وماهي طبيعة $ILJK$؟

الحل

- I منتصف $[AE]$ وبالتالي I م أ م للنقاط $(A,1),(E,1)$ و $(I,2)$.
- J منتصف $[BG]$ وبالتالي J م أ م للنقاط $(G,1),(B,1)$ وأن $(J,2)$.

حسب الخاصة التجميعية M م أ م للنقاط $(I,2),(J,2)$ إذن M تقع في منتصف $[IJ]$.

- بشكل مماثل M تقع في منتصف $[KL]$.

إذن المستقيمان (KL) و (IJ) متقاطعان في M

وبالتالي I و J و K و L تقع في مستو واحد.

بما أن قطرا الرباعي $ILJK$ متناصفان فإن الرباعي هو متوازي أضلاع.

$\frac{2}{94}$: $ABCD$ رباعي وجوه, أثبت أن النقاط M و B و C و D تقع في مستو واحد ثم وضع النقطة M:

1) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

M مركز أبعاد متناسبة للنقاط وبالتالي النقاط تقع في مستو واحد, وM مركز ثقل المثلث BDC.

2) $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

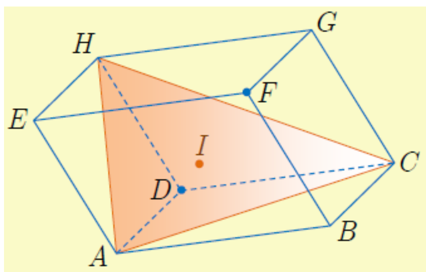
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

فإن M م أ م للنقاط $(B,1),(C,1),(D,2)$

ولتوضيع M:

نفرض I م أ م لـ $(B,1),(C,1)$ إذن I منتصف $[BC]$ و $(I,2)$ فحسب الخاصة التجميعية M م أ م $(D,2),(I,2)$ وبالتالي M منتصف $[DI]$.

$\frac{5}{95}$:



I مركز ثقل المثلث AHC, أثبت أن I و D و F على استقامة واحدة وعين موقع I على $[DF]$:

الحل

لدينا:

- $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}$
- $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CI}$
- $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HI}$

بالجمع نجد:

$$3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}+\underbrace{\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{HI}\right)}_{=\vec{0}}$$

لأن I مركز ثقل AHC

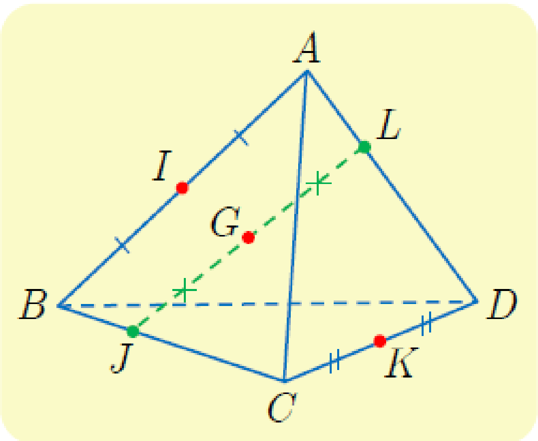
$$3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}$$
$$=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DH}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DF}$$
$$\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$$

I و D و F على استقامة واحدة.

مثال: $ABCD$ رباعي وجوه و K و I منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[CD]$ على الترتيب و النقطتان J و L معرفتان بالعلاقتين:

$$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ و أخيراً G منتصف $[JL]$ أثبت أن النقاط G و I و K على استقامة واحدة



مسألة مستقيمات متقاطعة :

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ما . و لنعرف النقاط P,Q,S,R بالشكل :

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\ ,\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}\ ,\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

نهدف إلى إثبات تلاقي المستقيمين (PQ) و (RS)

1- أثبت أن P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,\beta)\,,(C,\gamma)$ و أن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(D,\delta)$ حيث $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ثوابت يُطلب تعيينها

2- ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1),(B,4),(C,1),(D,3)$
أثبت أن G تقع على المستقيم (PQ)

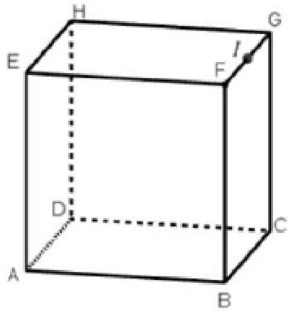
3- أثبت بأسلوب مماث أن G تقع على المستقيم (RS)

4- استنتج تقاطع المستقيمان $(PQ),(RS)$

اختبار

السؤال (1)

في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب و I منتصف $[FG]$ والمطلوب:

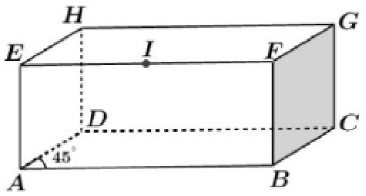


عين النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}$$

السؤال (2)

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$ وقياس الزاوي $\widehat{DAB}$ يساوي $45°$ والنقطة I منتصف $[EF]$:



1- احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

2- عين موضع النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

السؤال (3)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$A(2,0,1)\,,B(1,-2,1)\,,C(5,0,5)\,,D(6,2,5)$

1- أثبت أن $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

2- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث:

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

واستنتج أن النقاط D,C,B,A تقع في مستو واحد.

السؤال (4)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي $P:2x+y-2z-4=0$.

1- احسب بعد النقطة A عن المستوي P.

2- اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

السؤال (5)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ والمطلوب:

1- احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ ثم استنتج $\cos(\widehat{BAC})$.

2- إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC، عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

السؤال (6)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-2,1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكون من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة:

$$MA=MB$$

وما طبيعة المجموعة S.

التمرين (1)

نتأمل الهرم $S-ABCD$ قاعدته مربع طول ضلعه 4 وارتفاعه S.

وطول كل حرف من حروفه الجانبية 4 والنقطة O مرتسم S القائم على القاعدة:

1- احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$.

2- احسب طول القطر CA ثم احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS}$.

3- عين G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$(S,1)\,,(B,3)\,,(A,2)$$

التمرين (2)

المستقيمين d و d' معرفان وسيطياً وفق:

$$d:\begin{cases}x=t+2\\ y=2t+1\ ;\ t\in\mathbb{R}\\ z=-t\end{cases}$$

$$d':\begin{cases}x=2s-1\\ y=s-2\ ;s\in\mathbb{R}\\ z=3s-2\end{cases}$$

المطلوب:

1- أثبت أن d و d' متقاطعان ثم عين احداثيات I نقطة التقاطع.

2- جد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين d و d'.

التمرين (3)

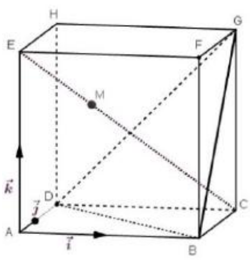
في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2,2,4)\,,B(2,0,-2)$:

1- اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

2- اعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$، ما طبيعة المجموعة S؟

المسألة (1)

$ABCDEFG$ مكعب طول حرفه يساوي 2, نتأمل المعلم المتجانس $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ في المعلم



$\overrightarrow{AB}=2\vec{\imath}$ و $\overrightarrow{AD}=2\vec{\jmath}$ و $\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$:

1- اكتب معادلة المستوي (GBD).

2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (EC).

3- جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD).

4- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$$

5- أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC).

المسألة (2)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$$A(1,1,0)\ ,B(1,2,1)\ ,C(4,0,0)$$

1- أثبت أن النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

2- أثبت ان معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$

3- ليكن المستويان:

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$

$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي:

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} ;t \in \mathbb{R}$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC).

5- احسب بعد A عن المستقيم d.

المسألة (3)

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$$E(1,-1,1)\ ,D(0,4,0)\ ,C(4,0,0)$$

$$B(1,0,-1), A(2,1,3)$$

1- جد $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CE}$ ، $\overrightarrow{CD}$.

2- أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

3- أثبت أن (AB) يعامد للمستوي (CDE).

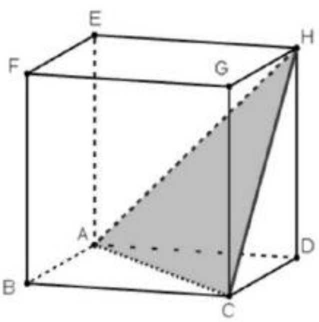
4- اكتب معادلة المستوي (CDE).

5- احسب بعد B عن المستوي (CDE).

6- اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE).

المسألة (4)

نتأمل في معلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$.



1- اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط:

$$A\ ,C\ ,H\ ,F\ ,D$$

2- اكتب معادلة المستوي (ACH).

3- أثبت أن المستوي P الذي معادلته:

$$P: -2x + 2y - 2z + 1 = 0$$

يوازي المستوي (ACH).

4- بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن D و I و F على استقامة واحدة.

5- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S.

المسألة (5)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$$P: 2x-y+2z-2=0$$

$$Q: x+y+z-1=0$$

$$R: x-z-1=0$$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان مشترك Δ, اكتب تمثيله الوسيطي.

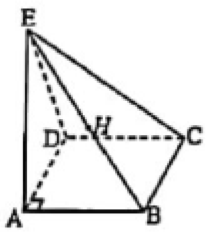
2- تحقق أن المستوي يعامد Δ ويمر بالنقطة A.

3- أثبت أن المستويات P , Q , R تتقاطع بالنقطة I يطلب تعيين احداثياتها.

4- استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

المسألة (6)

$EABCD$ هرم رباعي رأسه E وقاعدته مربع طول ضلعه 3, $[AE]$ عمودي على $(ABCD)$ و $EA=3$.



نختار المعلم المتجانس:

$$\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$$

1- عين إحداثيات A , B , C , D , E.

2- جد معادلة المستوي (EBC).

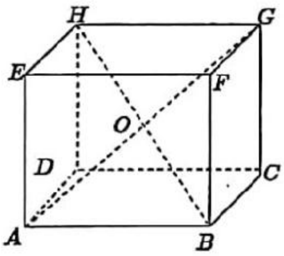
3- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).

4- استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC).

5- احسب حجم رباعي الوجوه $AEBC$.

المسألة (7)

مكعب طول حرفه 2, O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$.



نختار معلم متجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.

والمطلوب:

1- جد إحداثيات النقاط A و B و G و H و O.

2- أعط معادلة المستوي (GOB).

3- احسب $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$.

4- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).

5- أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).

6- جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).

المسألة (8)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$A(-1,2,3)$, $B(2,1,1)$, $C(-3,4,-1)$, $D(3,1,1)$

1- جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان.

2- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).

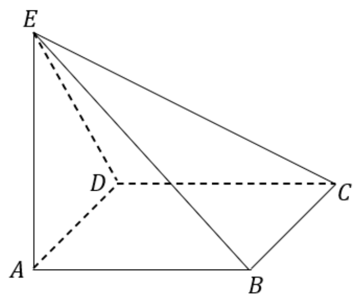
3- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC).

4- احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.

5- بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين (CG) و (AB) متوازيان.

المسألة (9)

$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته مربع, المستقيم $[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$, $AB=4$ و $AE=3$. نتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:



1- جد إحداثيات النقاط الرؤوس.

2- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق:

$$4\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CE}$$

3- احسب $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BC}$ واستنتج نوع المثلث EBC ثم احسب مساحته.

4- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC).

5- اكتب معادلة المستوي (EBC) واحسب بعد النقطة A عن المستوي (EBC) ثم استنتج حجم الهرم $AEBC$.

المسألة (VIE 1)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:
$A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(1,1,1)$

1- جد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC, وأثبت أن (OG) عمودي على المستوي (ABC).

2- جد معادلة المستوي (ABC).

3- نعرف النقاط $C'(0,0,4)$, $B'(0,2,0)$, $A'(2,0,0)$ للمستوي $A'B'C'$. أثبت أن $2x+2y+z-4=0$ معادلة المستوي $(A'B'C')$.

4- أثبت أن Δ الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$ يقبل التمثيل الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=3-t;t\in\mathbb{R} \\ z=-2\end{cases}$$

5- احسب بعد النقطة $D(1,1,1)$ عن المستقيم Δ.

6- احسب حجم رباعي الوجوه $A'-OB'C'$

7- احسب بعد النقطة O عن المستوي $(A'B'C')$ ثم استنتج مساحة المثلث $A'B'C'$.

المسألة (VIE 2)

لتكن S الكرة التي مركزها $A(1,1,1)$ ونصف قطرها $r=3$ والمستوي:

$$P:x-z=1$$

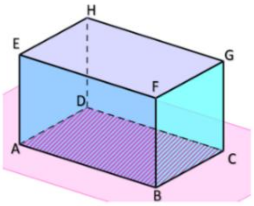
أثبت أن المستوي P يقطع الكرة S في دائرة C, عين مركزها ونصف قطرها.

بنوك الأتمتة للأشعة التحليلية

1- ليكن لديك الاشعة $\vec{v} = \sqrt{2}\vec{\imath} + \sqrt{6}\vec{\jmath} - \vec{k}$ ، عندئذٍ $||\vec{v}||$ يساوي :

10	d	7	c	9	b	3	a

2- في الشكل المجاور نتأمل متوازي مستطيلات ABCDEFGH النقطة P النقطة المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ تنطبق على مركز الوجه



$BCGF$	d	$ADHE$	c	$EFGH$	b	$ABCD$	a

3- لدينا المعلم الكيفي $(F;\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FD})$ عندئذٍ إحداثيات N التي تحقق: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB}$ هي:

$N\left(\frac{1}{2},2,0\right)$	D	$N\left(1,\frac{1}{2},0\right)$	C	$N\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$	B	$N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$	A

4- لتكن النقاط $A(1,2,-1), B(2,1,0)$ و C نظيرة A بالنسبة للمبدأ . أي من المعادلات الآتية تمثل معادلةً للمستوي (ABC)

$x-3y-2z=0$	d	$x-2y-3z+1=0$	c	$x-2y-3=0$	b	$x-2y-3z=0$	a

5- لتكن النقاط $A(1,3,-1), B(2,5,2), C(3,4,\alpha)$ أحد قيم العدد α التي تجعل المثلث ABC مثلثاً متساوي الساقين رأسه B

2	d	3	c	1	b	-3	a

6- معادلة المستوي المار من النقطة $A(3,-2,2)$ و شعاعا توجيهه $\vec{u}(1,1,0), \vec{v}(-1,1,1)$

$-x+y+1=0$	d	$x-y+2z=-5$	c	$x-y+2z-9=0$	b	$3x-y+2z=9$	a

7- المستوي المحدد بالنقاط $(2,0,0), (0,3,0), (0,0,5)$ له المعادلة :

$x+y+z=30$	d	$15x+10y+6z=1$	c	$x+y+z=1$	b	$15x+10y+6z=30$	a

8- في معلمٍ متجانس نتأمل الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ و لنعرف الشعاعين :

$\overrightarrow{w_1} = 2\vec{u} - \vec{v}$ ، $\overrightarrow{w_2} = 2\vec{u} + \vec{v}$

فإذا علمت أن $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}$ متعامدان يمكن إثبات أن :

$\|\|\vec{u}\|\| = \frac{1}{2}\|\|\vec{v}\|\|$	d	$\|\|\vec{u}\|\| = 2\|\|\vec{v}\|\|$	c	$\vec{u},\vec{v}$ مرتبطان خطياً	b	$\vec{u},\vec{v}$ لهما الطول ذاته	a

9- لتكن لدينا النقاط $A(1,2,-3), B(-1,3,3), C(4,-1,2)$ فإن إحداثيات D التي تجعل ABCD متوازي الأضلاع هي :

$D(6,-2,-4)$	d	$D(-2,0,-8)$	c	$D(2,0,8)$	b	$D(6,-2,4)$	a

10- بفرض A, M نقطتان من الفراغ ويحققان أن $AM^2 = 3 + (x+1)^2$ عندئذٍ أصغر قيمة لـ AM

$\sqrt{3}$	d	3	c	-1	b	1	a

11- قيمة العدد الحقيقي m التي تجعل الأشعة $\vec{v}(-1,2,0)$ ، $\vec{u}(1,0,2)$ ، $\vec{w}(-4,m,-2)$ مرتبطة خطياً

1	d	-3	c	6	b	3	a

12- معادلة المستوي P المار من النقطة $A(0,1,0)$ و يقبل $\vec{v}(0,3,-1)$, $\vec{u}(0,1,2)$ شعاعي توجيه :

a	$x=0$	b	$z=2$	c	$y=1$	d	$y-z+1=0$

13- قيمة العدد الحقيقي λ التي تجعل المستويان :

$$P:\quad x+2y-\lambda z+1=0$$
$$Q:\quad (3\lambda-7)x+4y-6z+5=0$$

a	3	b	-3	c	2	d	لا يمكن تعيينها

14- قيمة العدد λ الذي يجعل المستويين الآتيين متعامدين :

$$2x+3y-4z+1=0$$
$$\lambda x+2y+\frac{\lambda}{2}z-3=0$$

a	3	b	-3	c	2	d	غير موجودة

15- إذا علمت ان نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وان $\vec{u}.\vec{v}=-4$ المقدار $2\vec{u}(2\vec{v}+3\vec{u})$ يساوي:

a	134	b	140	c	-166	d	143

16- P مار من $A(2,5,-2)$ وعمودي على كل من Q وR وحيث:

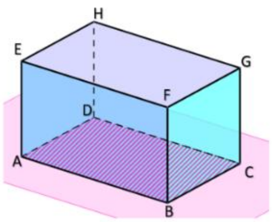
$$\begin{cases} Q: x-2y+3z-5=0 \\ R: x+y+z+1=0 \end{cases}$$

a	$P:-10x+4y+6z+12=0$	b	$P:-10x-y-z-2=0$
c	$P:10x+4y-6z+12=0$	d	$P:x+y+z+1=0$

17- في الشكل المجاور . متوازي مستطيلات ABCDEFGH فيه

$AB=4$, $BC=CG=2$ و بفرض J منتصف $[CG]$ عندئذٍ قيمة الجداء

$\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{JH}$ هي :



a	16	b	15	c	12	d	3

18- نفترض أن $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ و النقاط B,C,D ليست على استقامة واحدة عندئذٍ يمكن التأكيد على أنّ

a	النقاط A,M,B على استقامة واحدة	b	المستقيم (AM) يوازي المستوي (BCD)
c	المستقيم (AM) يوازي أحد المستقيمين (BC) , (BD)	d	$P:x+y+z+1=0$

19- نفترض أن $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=1$ و نفترض أن I منتصف $[AB]$ عندئذٍ أي من العلاقات الآتية صحيحة

a	$IM^2=1+IA^2$	b	$IA^2=1+IM^2$	c	$IA^2=IM^2$	d	$IA^2=\frac{1}{2}IM^2$

20- أكمل العبارة الآتية : أعان الله المدرسين الذين ...

a	لا يملكون أقلاماً ملونة	b	يمسحون السبورة بأنفسهم
c	لا يملكون طلاب مثلكم	d	يدرسوننا

21- في معلم متجانس . نتأمل النقطة $A(3,4,1)$ و لتكن B مسقط A على المستوي xoz و النقطة C مسقط B على محور الرواقم . عندئذٍ طول القطعة المستقيمة [AC]

$\sqrt{3}$	d	2	c	$\sqrt{5}$	b	5	a

22- إذا كان d هو الفصل المشترك للمستويين :

$$P: x-2y+3z=5 \quad , \quad Q: x+y+z=-1$$

عندئذٍ d هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$

$\left(-\frac{5}{3}z+1,\frac{2}{3}z-2,3z\right)$	d	$\left(-5z+1,\frac{2}{3}z-2,z\right)$	c	$\left(-\frac{5}{3}z+1,\frac{2}{3}z-2,z\right)$	b	$\left(-5z+\frac{1}{3},2z-\frac{2}{3},3z\right)$	a

23- المستويان $2x+2y+2z=0\ ,x+y-4z=0$

متقاطعان دون تعامد	d	متقاطعان و متعامدان	c	طبوقان	b	متوازيان دون تطابق	a

24- في معلم متجانس لتكن النقطتان $A(1,2,-1), B(3,0,1)$. النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة [AB] إذا وفقط إذا كان $x+my+nz-1=0$ عندئذٍ

$m=1$ $n=-1$	d	$m=n=1$	c	$m=0$ $n=-1$	b	$m=-1$ $n=1$	a

25- الكرة S مركزها A و نصف قطرها 3 . و المستوي P يقطعها في دائرة نصف قطرها $\sqrt{2}$. قيمة $dis(A,P)$ يساوي

2	d	$\sqrt{2}$	c	$\sqrt{11}$	b	$\sqrt{7}$	a

26- في معلم متجانس . لتكن النقاط $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1), E(1,1,1)$ و النقطة M منتصف [BA] عندئذٍ قيمة $\cos(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{OE})$ ي

0	d	-1	c	1	b	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	a

27- لدينا ABCD رباعي وجوه . M تنتمي إلى الحرف [AB] و N تنتمي إلى الحرف [AC] . G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,1),(C,1),(D,1)$ و بنفس الوقت G مركز ثقل المثلث DMN عندئذٍ قيمة العدد α

3	d	2	c	1	b	$\frac{3}{2}$	a

28- نتأمل النقطتين $A(-1,2,3), B(1,4,-5)$. معادلة الكرة التي مركزها A و تمس المستوي المحوري للقطعة [AB]

$x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=18$	b	$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=72$	a
$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=36$	d	$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=18$	c

29- ليكن d المستقيم الذي يُعطى وسيطياً بالمعادلات $x=t+1, y=t-2\ , z=3t$ حيث $t\in R$. و المستوي $P: 2x+ay-z+b=0$ فإذا علمت أن المستقيم d محتوى في المستوي P فإن قيمة الثنائية (a,b)

$(1,0)$	d	$(-1,-4)$	c	$(-1,4)$	b	$(0,1)$	a

30- في معلمٍ متجانس لديك النقاط $A(3,2,1), B(1,2,0), C(3,1,-2)$. العلاقة بين x, y لتكون النقاط $A, B, C, D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد

$-x+6y-13=0$	d	$x+6y+5=0$	c	$x+6y-11=0$	b	$x+6y-19=0$	a

31- بفرض G مركز ثقل المثلث ABC . إن مجموعة النقاط M(x, y, z) التي تحقق :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=6\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

كرة مركزها G و نصف قطرها 6	b	كرة مركزها G طول نصف قطرها AB	a
غير ذلك	d	المستوي المحوري للقطعة [AB]	c

32- رباعي وجوه ABCD فيه G مركز ثقل المثلث (ABC) مجموعة النقاط M(x, y, z) التي تحقق

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

كرة مركزها G و نصف قطرها DG	b	كرة مركزها G طول نصف قطرها AB	a
غير ذلك	d	المستوي المحوري للقطعة [AB]	c

33- مجموعة النقاط M(x, y, z) المحققة للشروط :

$$x^2+z^2-\frac{9}{4}y^2=0 \quad ,0\le y\le 4$$

مخروط دوراني محوره محور التراتيب ونصف قطر قاعدته 6	b	أسطوانة محورها محور التراتيب	a
مخروط دوراني محور محور التراتيب و نصف قطر قاعدته 3	d	مخروط دوراني محوره محور الفواصل و نصف قطر قاعدتها 3	c

34- في معلم متجانس $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ إن معادلة المستوي (ABC)

$x+y+z=0$	b	$x+y+z-1=0$	a
$x-y-z=0$	d	$x+y+z+1=0$	c

35- المستويان $P_1: 2x+y-z+2=0 \quad ,P_2: x+2y-z+1=0$ متقاطعان بمستقيم تمثله مجموعة الحلول :

$(x,3x,x-1): x\in R$	b	$(5,2z,z): z\in R$	a
$(y-1,y,3y) \;: y\in R$	d	$(y+1,y,5y) \;: y\in R$	c

36- لتكن النقطتان $A(-1,2,3)$ و $B(1,2,-1)$ و المستوي $x+y+z=1$ فإن إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي P

$I(2,2,-3)$	d	$I(-2,-2,3)$	c	$I(3,2,2)$	b	$I(3,-2,2)$	a

37- في معلم متجانس نتأمل النقطة $A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ فإن قيمة $\cos(\widehat{BAC})$

$-\frac{2}{5}$	d	$\frac{2}{5}$	c	$-\frac{4}{5}$	b	$\frac{4}{5}$	a

38- مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة $x^2+y^2+z^2-2y-8=0$ تمثل

كرة نصف قطرها 9	d	كرة نصف قطرها 3	c	المجموعة الخالية	b	نقطة وحيدة	a

39- لدينا ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين . طول كل من ساقيه $\sqrt{2}$ قيمة الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ تساوي

$\sqrt{2}$	d	$-\sqrt{2}$	c	2	b	-2	a

40- $ABCDEFGH$ مكعب . I منتصف [FG] عندئذٍ يساوي الشعاع

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HJ}$

يساوي

$\overrightarrow{AJ}$	d	$\overrightarrow{AG}$	c	$(AH)^{\rightarrow}$	b	$\overrightarrow{AD}$	a

41- معادلة المستوي المعامد لمستقيم d معادلاته الوسيطية

$x=0\,,y=-t\,,z=-t+1$

$y-z+3=0$	d	$x+y+3=0$	c	$y-z-3=0$	b	$z+y-3=0$	a

42- المستقيم d المعرف وسيطياً وفق :

$$d:\begin{cases}x=at-1\\ y=3t+2\\ z=2t\end{cases}$$

قيمة العدد لتنتمي النقطة $A(-2,5,2)$ للمستقيم d

1	d	-1	c	-2	b	0	a

43- في معلم متجانس :

$$d:\begin{cases}x=3t+1\\ y=2t\\ z=-t+1\end{cases}\;;t\in R\quad,\Delta:\begin{cases}x=s+2\\ y=1\\ z=3s+1\end{cases}\;;s\in R$$

متخالفان و متعامدان	d	متوازيان دون انطباق	c	متقاطعان دون تعامد	b	منطبقان	a

44- لدينا النقاط $A(1,2,0)$, $B(0,0,1)$, C(1,5,5) . إن إحداثيات النقطة D' مسقط $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC)

$(2,4,-1$	d	$(1,2,4)$	c	$(-4,2,1)$	b	$(-2,-4,1)$	a

45- إحداثيات النقطة E من محور التراتيب و متساوية البعد عن النقطتين $A(2,0,2)$, B(2,1,0) هي :

$\left(0,-\frac{3}{2},0\right)$	d	$\left(0,\frac{3}{2},0\right)$	c	$(0,-2,0)$	b	$(0,2,0)$	a

46- في معلم متجانس لدينا النقاط $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,1)$. بعد المبدأ عن المستوي (ABC) يساوي

$\frac{36}{49}$	d	$\frac{1}{36}$	c	$\frac{6}{7}$	b	$\frac{7}{6}$	a

47- ليكن المستوي $P: 2x-2y+az+3=0$

و ليكن المستقيم :

$x=1+t\quad,y=2-t\quad,z=3+2t$

قيمة الثابت a الذي يجعل المستقيم السابق يوازي المستوي P

2	d	-2	c	-1	b	-4	a

48- في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط $M(3,3,3)$ و المستويان :

$P: 2x+y+2z-6=0$
$Q: 2x-2y-z+6=0$

متعامدان . بعد النقطة M عن الفصل المشترك لهما يساوي

$\sqrt{5}$	d	$2\sqrt{5}$	c	$\sqrt{10}$	b	2	a

49- $ABCD$ رباعي وجوه, و M نقطة تحقق :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DB})$$

a	M منطبقة على A	b	Mمنطبقة على C	c	M منطبقة على منتصف [AB]	d	M منطبقة على [AC]

50- إن قيمة العددين x,y المحققان للعلاقة $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3),(B,1),(C,2)$

a	$x = \frac{1}{6}, y = -\frac{1}{3}$	b	$x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{6}$	c	$y = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{6}$	d	$x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}$

51- ليكن $ABCD$ رباعي وجوه و ليكن I مركز ثقل المثلث BCD . و النقطة K نظيرة A بالنسبة لـ I . فإن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

a	$(A,-3)$ $(B,2)$ $(D,2)$ $(C,-2)$	b	$(A,-3)$ $(B,-2)$ $(D,2)$ $(C,2)$	c	$(A,-3)$ $(B,2)$ $(D,2)$ $(C,2)$	d	$(A,-3)$ $(B,-2)$ $(D,-2)$ $(C,-2)$

52- $ABCD$ رباعي وجوه I مركز ثقل المثلث ABC, H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,\alpha),(C,1),(B,1),(A,1)$

قيمة α التي تجعل H منتصف $[DI]$ هي:

a	1	b	2	c	3	d	-2

53- المستويان P, Q معادلتاهما $P: x + 2y = 4$, $Q: x - y = 1$ عندئذ التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لهما:

a	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$	B	$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \{t \in \mathbb{R}\}$	C	$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \{t \in \mathbb{R}\}$	d	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \{t \in \mathbb{R}\}$

54- المعادلات الثلاث $P_3: 3x + y = 4$, $P_2; 2x - y = 1$, $P_1: x + 2y + z = 5$ تمثل ثلاثة مستويات:

a	متوازية	b	متقاطعة بنقطة واحدة	c	متقاطعة بفصل مشترك	d	متعامدة

55- A و B نقطتان مختلفتان في الفراغ، عندئذ مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $MA = 4MB$ هي:

a	نقطة وحيدة	c	المستوي المحوري لـ $[AB]$	d	مستقيم	e	كرة

56- $P: x + y - z + 2 = 0$ معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ حيث $I(2,0,1)$, عندئذ إحداثيات J هي:

a	$(0,2,-1)$	b	$(0,-2,3)$	c	$(1,2,3)$	d	$(1,1,2)$	e	$(3,4,1)$

57- نتأمل ثلاث نقاط A, B, C من الفراغ وعددا حقيقيا α من المجال $[-1,+1]$ نرمز بالرمز G_α الى مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha), (B, 1+\alpha^2), (C,-\alpha)$, إن $\overrightarrow{BG_\alpha}$ تساوي:

a	$-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	b	$\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	c	$\frac{1-\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	d	$\frac{\alpha-1}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	e	$\frac{1+\alpha^2}{\alpha}\overrightarrow{AC}$

58- ليكن لدينا الكرة S التي مركزها $(1,0,1)$ ونصف قطرها R والمستوي $P: 2x + y - 2x = 12$.

إذا كان تقاطع S وP هو دائرة نصف قطرها $r = 3$, إن R يساوي:

a	$2\sqrt{3}$	b	5	c	3	d	$3\sqrt{2}$

59- المستقيمان L وL' معرفان وسيطياً وفق الآتي $L\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 1 \\ z = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$, $L'\begin{cases} x = t+1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} t \in \mathbb{R}$

إن إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين L , L' هي:

a	$(2,-1,1)$	b	$(1,1,2)$	c	$(-1,-1,2)$	d	$(2,1,1)$

60- $ABCM$ متوازي أضلاع عندئذ M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

A	$(A;1),(B;1),(C;-1)$	B	$(A;-1),(B;1),(C;1)$	C	$(A;1),(B;-1),(C;1)$	d	$(A;-1),(B;1),(C;2)$

61- في معلم متجانس للفراغ، لتكن $A(1,2,1)$ والمستقيم (d) الممثل وسيطياً وفق:

$x = 0 , y = -t , z = -t + 1 : t \in \mathbb{R}$ عندئذ معادلة المستوي المار بالنقطة A ويعامد (d) هي:

a	$z+y-3=0$	b	$y-z-3=0$	c	$x+y+3=0$	d	$y-z+3=0$	e	$x+3=0$

62- في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. معادلات ثلاثة مستويات، بحل الجملة الخطية الموافقة فإن هذه المستويات:

$$P_1: x + y + z = 1$$
$$P_2: -2y + z = 1$$
$$P_3: -4y + 14z = -2$$

a	متوازية	b	تشترك بمستقيم	c	لا تشترك بأية نقطة	d	تشترك بنقطة	e	متعامدة

63- نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, المستويين P وQ : $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ فإن التمثيلات الوسيطية لفصلهما المشترك بدلالة $t \in \mathbb{R}$ هو:

a	$\begin{cases} x = -t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$	b	$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$	c	$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}$	d	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$	e	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$

64- إذا علمت أن نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأن $\vec{u}.\vec{v} = -5$ فإن $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-3\vec{v})$ يساوي:

a	4	b	8	c	2	d	5	e	3

65- ABCDEFGH مكعب طول حرفه 2 نعرف عليه معلماً $\left(D;\frac{1}{2}\overrightarrow{DA},\frac{1}{2}\overrightarrow{DC},\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}\right)$. عندئذٍ معادلة مجموعة نقطة الفراغ التي تنتج عن دوران الضلع [BF] من المستطيل $BFHD$ حول (DH)

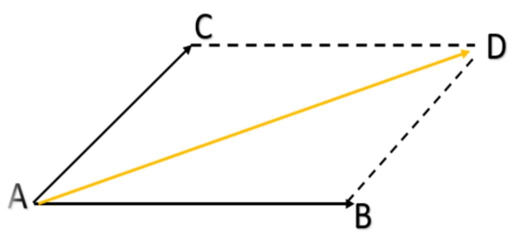
a	$x^2 + y^2 = 8 \ ,0 \le z \le 2$	b	$x^2 + y^2 = 2 \ , \quad 0 \le z \le 2$
c	$x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \ , \quad 0 \le z \le 2$	d	$x^2 + y^2 = 2 \ ,0 \le z \le 1$

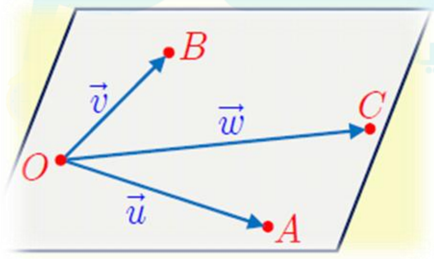
66- بفرض A,B نقطتان متمايزتان في الفراغ , في الخيارات الآتية نضع توصيفاً لمجموعة النقاط M المحققة للشرط المذكور

a	$\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$ المستوي المحوري للقطعة $[AB]$	b	$\mathrm{MB} = \mathrm{AB}$ كرة مركزها B و نصف قطرها AB
c	$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ تمثل نقطة وحيدة هي منتصف القطعة $[\mathrm{AB}]$	d	$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ نقطة وحيدة $\mathrm{M} = \mathrm{A}$

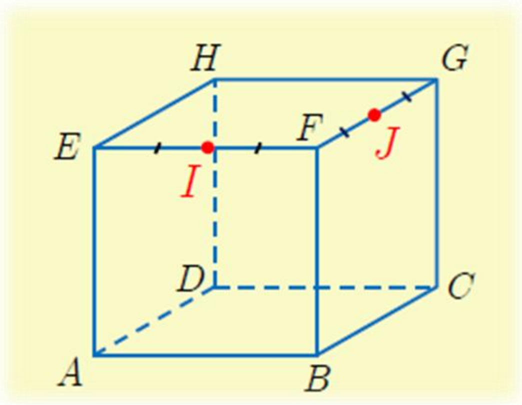
67- أكمل العبارة الآتية : أعان الله المدرسين الذين ...

a	لا يملكون أقلاماً ملونة	b	يمسحون السبورة بأنفسهم
c	لا يملكون طلاب مثلكم	d	يدرسوننا

الأشعة شعاعياً	
تساوي شعاعين	هو مفهوم هام حيث لا يشترط الانطباق بين الشعاعين وإنما فقط تساوي المنحنيين والجهتين والطويلتين
الشعاعان المتعاكسان	هما شعاعين لهما نفس المنحى و الطويلة ولكن بجهتين متعاكستين وفي هذه الحالة ندعو أحد الشعاعين نظير الآخر والنتيجة: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
جمع الأشعة شعاعياً	
قاعدة شال (لا تحتاج للرسم)	تستخدم قاعدة شال لجمع الأشعة المتعاقبة (نهاية الشعاع الأول تنطبق على بداية الشعاع الثاني) مثلاً $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$ عندئذٍ يكون: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ويمكن تعميمها: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$
قاعدة متوازي الأضلاع (تحتاج للرسم)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ حيث D النقطة التي تجعل $ABDC$ متوازي أضلاع ($\overrightarrow{AD}$ هو قطر متوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين). 

الارتباط الخطي شعاعياً	
التعريف	نقول عن الشعاعين $\vec{u},\vec{v}$ إنهما مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا كان أحدهما ينتج عن الآخر بضربه بعدد ثابت غير معدوم k أي: $\vec{u} = k\,\vec{v}$
التفسير الهندسي	قولنا إن الشعاعين $\vec{u},\vec{v}$ مرتبطان خطياً. هذا يعني أن لهما نفس المنحى أي: الارتباط الخطي يعني توازي.
ملاحظة	إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً قلنا أن النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة. أي إذا كان الشعاعان المرتبطان مشتركان بنقطة أي النقاط الثلاثة تقع على استقامة واحدة
الارتباط الخطي لثلاثة اشعة شعاعياً	
نقول عن الأشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ إنها ثلاث أشعة مرتبطة خطياً إذا تحقق الشرطان:	1- $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً 2- يوجد عددان حقيقيان α,β يحققان: $\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$
التفسير الهندسي	إذا كان $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ثلاث أشعة مرتبطة خطياً بحيث: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\,\vec{v}$ عندئذٍ يوجد نقطة O في الفراغ تجعل النقاط O,A,B,C في مستوٍ واحد بحيث: $\overrightarrow{OA} = \vec{u}\ ,\quad \overrightarrow{OB} = \vec{v}\ ,\ \overrightarrow{OC} = \vec{w}$ 
فوائد هامة	1- إثبات وقع 4 نقاط في مستوٍ واحد: • نثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ غير مرتبطين • نثبت وجود عددين حقيقين α,β بحيث : $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ 2- إثبات أن المستقيم (ED) يوازي المستوى (ABC): (i) نثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً (ii) نثبت وجود عددين حقيقين α,β يحققان: $\overrightarrow{ED} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

1- في الشكل المجاور مكعب



النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$ تنطبق على النقطة:

H	d	C	c	B	b	F	a

2- النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ تنطبق على النقطة:

H	d	C	c	E	b	F	a

3- النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$ تنطبق على النقطة:

E	d	C	c	B	b	F	a

4- النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$ تنطبق على النقطة:

خارج المكعب	d	C	c	B	b	F	a

5- النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}\right)$ تنطبق على النقطة:

H	d	I	c	B	b	F	a

6- موضع النقطة N المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$:

H	d	C	c	J	b	F	a

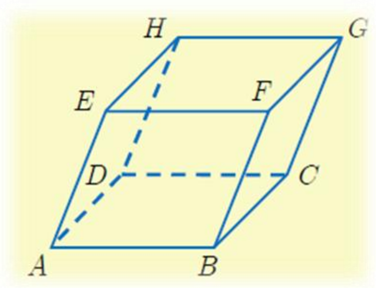
7- موضع النقطة N المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$:

H	d	C	c	J	b	F	a

8- موضع النقطة N المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$:

H	d	I	c	B	b	F	a

9- في الشكل المجاور متوازي سطوح



موضع النقطة P المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$:

a	خارج المكعب	b	مركز $ADHE$	c	مركز $ABFE$	d	مركز $BFGC$

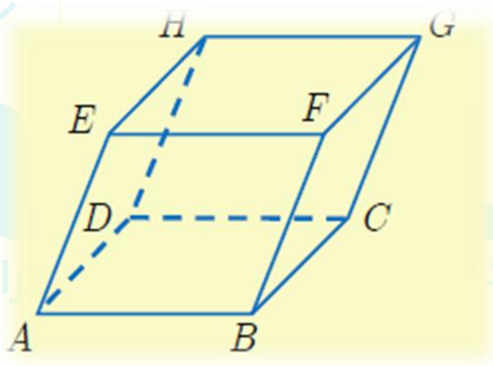
10- موضع النقطة Q المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$:

a	مركز $DAEH$	b	مركز $ADHE$	c	مركز $EFGH$	d	مركز $BFGC$

11- موضع النقطة R المحققة للعلاقة $\overrightarrow{CR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$:

a	خارج المكعب	b	مركز $ADHE$	c	مركز $ABFE$	d	مركز $BFGC$

12- في الشكل المجاور متوازي سطوح



الشعاع الذي يساوي المقدار $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}$ هو:

a	$\overrightarrow{HA}$	b	$\overrightarrow{AH}$	c	$\overrightarrow{GB}$	d	$\overrightarrow{GD}$

13- علاقة الشعاع السابق بالشعاع $\overrightarrow{AH}$ هي:

a	عدم توازي	b	تعامد	c	توازي	d	غير ذلك

علاقة وجود مركز الأبعاد المتناسبة	
لنقطتين	$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
لثلاثة نقاط	$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
لأربعة نقاط	$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
استخدامها	لتعيين قيمة كل من التثقيلات
الخطوات	4- نصلح شكل العلاقة لجعل الطرف الثاني $\vec{0}$ ونجعل البدايات كلها م أ م. 5- نقارن مع القانون 6- نختبر الشرط $(\alpha+\beta+\cdots\neq 0)$
ملاحظة	1- G مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين من تثقيلتين مختلفتين بالإشارة فإن G تقع خارج القطعة وبالعكس 2- لا تنسا خاصة التجانس: عند ضرب العلاقة الأم بـ عدد $k\neq 0$ تبقى صحيحة ومحققة.

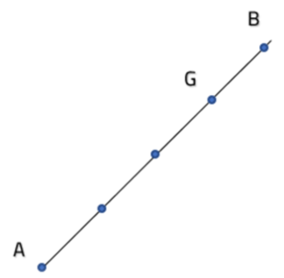
1- العددين α و β المحققان لأن يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) , (B,β) المحققة للعلاقة: $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}$

a	$\alpha=2,\beta=1$	b	$\alpha=-2,\beta=1$	c	$\alpha=3,\beta=1$	d	$\alpha=2,\beta=2$

2- الأعداد α و β و γ لتكون النقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ المحققة للعلاقة: $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

a	$\alpha=1,\beta=2,\gamma=3$	b	$\alpha=1,\beta=4,\gamma=3$	c	$\alpha=4,\beta=2,\gamma=3$	d	$\alpha=-7,\beta=8,\gamma=3$

3- تأمل الشكل , إن قيمة كل من α و β ليكون G م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):

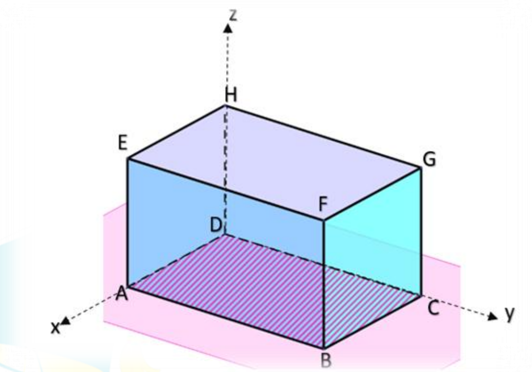


a	$\alpha=2,\beta=1$	b	$\alpha=-2,\beta=1$	c	$\alpha=1,\beta=3$	d	$\alpha=2,\beta=2$

4- تأمل الشكل , إن قيمة كل من α و β ليكون M م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):

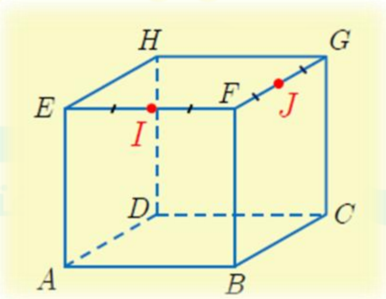
a	$\alpha = 2\,,\beta = 1$	b	$\alpha = -2\,,\beta = 1$	c	$\alpha = 3\,,\beta = 2$	d	$\alpha = 2\,,\beta = 2$

5- تأمل في الشكل المجاور متوازي مستطيلات $ABCDEFGH$ فإن قيمة كل من α و β و γ ليكون D م أ م للنقاط $(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)$ هي:



a	$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$	b	$\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$	c	$\alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 3$	d	$\alpha = -7, \beta = 8, \gamma = 3$

6- في الشكل المجاور مكعباً.



إن قيمة كل من α و β و γ ليكون I م أ م للنقاط $(A,\alpha),(F,\beta),(E,\gamma)$ هي:

a	$\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 1$	b	$\alpha = 1, \beta = 4, \gamma = 3$	c	$\alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 3$	d	$\alpha = -7, \beta = 8, \gamma = 3$

انشاء مركز الأبعاد المتناسبة (تحديد موضع مركز الأبعاد)	
لنقطتين	$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$
لأكثر من نقطتين	1- الخاصة التجميعية: هي عبارة عن فرض مركز ابعاد متناسب لنقطتين باختيارك ثم وضعهم ضمن مركز مثل: $(A,1)\ (B,2)\ (C,-1)$ بفرض K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين A و B فإن: $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ فيكون ثقل 3 (المقام) وبالتالي يمكن كتابة: $(A,1)\ (B,2)\ (C,-1)$ $(K,3)\ (C,-1)$ 2- ثم نستخدم علاقة الانشاء للنقطتين الباقيتين في النهاية, في مثالنا السابق تبقى: $(K,3)\ ,(C,-1)$ نطبق علاقة الانشاء , بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين C , K: $\overrightarrow{KG} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{KC}$ وبالتالي ثقل G هو 2. شو ستفدنا؟! G مركز أبعاد للنقطتين K و C وبالتالي G مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و B و C.
حالات خاصة	• G م أ م لنقطتين لهما نفس الثقل عندئذ G في منتصف القطعة المستقيمة. • G م أ م لثلاثة نقاط لهما نفس الثقل عندئذ G مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات).
ملاحظات	1- لإثبات أن ثلاثة نقاط تقع على استقامة واحدة يكفي أن نثبت أن واحدة منهم مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المتبقيتين 2- لإثبات أن أربعة نقاط تقع في مستو واحد يكفي اثبات أن أحدهم مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاثة المتبقية.

إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة	بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ فإن إحداثيات G: $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ $z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

1- ثقل مركز الأبعاد للنقطتين $(A,1),(B,3)$ يساوي:

a	4	b	2	c	1	d	3

2- مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)\ (B,2)(C,2)$ يقع:

a	نقطة تلاقي المتوسطات	b	نقطة تلاقي المتوسطات	c	نقطة تلاقي المتوسطات	d	نقطة تلاقي المتوسطات

3- مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,0)\ (B,3)$ يقع:

a	على B	b	على A	c	خارج $[AB]$	d	منتصف $[AB]$

4- مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,10),(B,10)$ يقع:

a	على B	b	على A	c	خارج $[AB]$	d	منتصف $[AB]$

خاصة الاختزال في مركز الأبعاد المتناسبة	
القانون	$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$
شرط التطبيق	$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$
شرط الحذف والإصلاح	$\alpha+\beta+\gamma=0$
ملاحظة: تستخدم علاقة الاختزال في السؤال عن المجموعات النقطية:	
المجموعات النقطية	
$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|=\left\|\overrightarrow{BM}\right\|$ أو $AM=BM$	$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|=\left\|\overrightarrow{BM}\right\|$ أو $AM=BM$
$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|=const$ أو $AM=const$	$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|=const$ أو $AM=const$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$	$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$	$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$
معادلة من الشكل: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$	معادلة من الشكل: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$
في باقي الحالات	في باقي الحالات
لا ننسا الشكل العام لمعادلة المخروط والاسطوانة	

مسائل وتمرينات عامة

نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ و E و F تحققان:

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

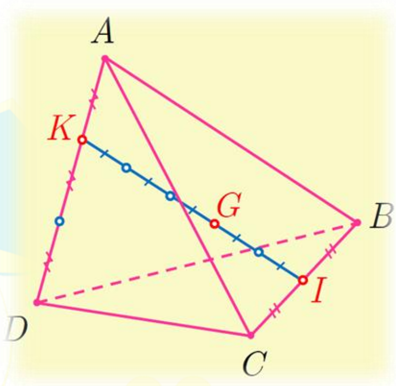
أثبت أن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$$

يقع على $[EF]$ ثم عين G.

تدرّب ① ص 31

بالاستفادة من المعلومات المبينة في الشكل المجاور.



عيّن a و b و c و d ما يأتي:

1. K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(A,a)\,,(D,d)$$

2. I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

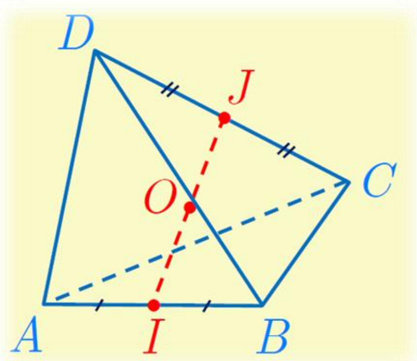
$$(C,c)\,,(B,b)$$

3. G مركز الأبعاد الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة:

$$(A,a)\,,(B,b)\,,(C,c)\,,(D,d)$$

السؤال الأول ص 35

$ABCD$رباعي وجوه. فيه I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ و O منتصف $[IJ]$.



1- املأ الفراغ:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\cdots+\overrightarrow{CD}$$

و استنتج أنّ:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$

2- بسّط كلّاً من $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$ و $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}$.

و استنتج أنّ:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$$

3- لماذا $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$؟

استنتج أنّ:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

4- لتكن K منتصف $[AD]$, و L منتصف $[BC]$.أثبت أنّ: $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, و استنتج أنّ: $IKJL$ متوازي أضلاع.

السؤال الثاني ص 35

$ABCD$ رباعي وجوه. وضّع على شكل النقاط الآتية:

1. I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(A,1)\ ,(B,2)$$

2. J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(D,1)\ ,(C,2)$$

3. K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(D,1),(C,2),(B,2),(A,1)$$

4. L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(B,-2),(A,1)$$

5. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(C,-1),(B,-2),(A,1)$$

6. N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(D,1),(C,-1),(B,-2),(A,1)$$

السؤال 25 ص 44

نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$, و النقاط I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ بالترتيب. و النقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(A,1),(B,1),(G,1),(E,1)$$

1. أثبت أنّ M تنتمي إلى $[IJ]$ و عيّن موضعها على هذه القطعة.
2. أثبت أنّ M تنتمي إلى $[KL]$ و عيّن موضعها على هذه القطعة.
3. استنتج أنّ I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد و عيّن طبيعة الرباعي $ILJK$.

السؤال الأول ص 94

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. و ليكن α عدداً حقيقيّاً, و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. النقطتان E و F معرّفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF} = \alpha\overrightarrow{BC}$.

و أخيراً H هي منتصف $[EF]$. المطلوب:

1. تحقق أنّ E هي مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1-\alpha)$ و (D, α), و كذلك أنّ النقطة F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$(B, 1-\alpha)$ و (C, α).

2. a. أثبت أنّ النقطة H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(A, 1-\alpha), (B, 1-\alpha), (C, \alpha), (D, \alpha)$

b. استنتج وقوع النقاط I و J و H على استقامة واحدة.

السؤال الثاني ص 94

$ABCD$ رباعي وجوه. أثبت في كل من الحالتين الآتيتين أنّ النقاط M و B و C و D تقع في مستوٍ واحد, ثمّ وضّح النقطة M.

1. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$
2. $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC}$

السؤال السابع ص 96

نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. K نقطة من $[AB]$ تُحقق $AK = \frac{1}{3}AB$, و L نقطة من القطعَة المستقيمة $[CD]$ تُحَقق $CL = \frac{2}{3}CD$. و أخيراً I هي منتصف $[AD]$, و J هي منتصف $[BC]$.

نعرّف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(A, 2), (B, 1), (C, 1), (D, 2)$

1. a. أثبت أنّ النقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة.

b. أثبت أنّ النقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة.

2. استنتج وقوع النقاط I و J و K و L في مستوٍ واحد.

تدرّب ص 81 + 80

السؤال الأوّل

النقطتان A و B نقطتان مختلفتان. في الحالات الآتية عيّن t التي تحقق $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

1. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$(B, 1), (A, -2)$

2. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$(A, 2), (B, 3)$

السؤال الثاني

أعطِ في الحالات الآتية α و β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:

$(A, \alpha), (B, \beta)$

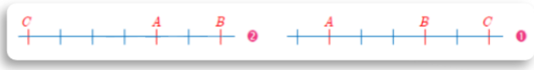
1. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$

2. $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

3. $\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

السؤال الثالث

في الشكل الآتي التدريجات متساوية. عبّر في كل حالة عن كل واحدة من النقاط A و B و C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الأخريين.



السؤال الرابع

نتأمّل مثلثاً ABC. في كل حالة مما يأتي، جد عددين x و y بحيثُ: $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

1. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(A,-1)\,,(B,1)\,,(C,1)$

2. M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(A,3)\,,(B,1)\,,(C,2)$

السؤال الخامس

نتأمل مثلثاً ABC.في كل حالة مما يأتي، جد الأعداد α و β و γ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)$.

1. $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

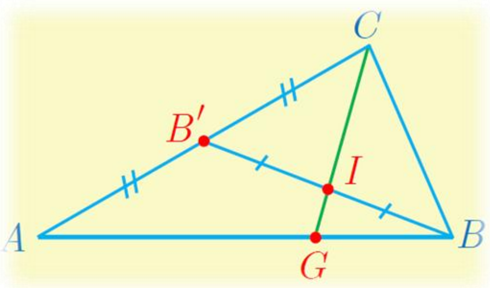
2. $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$

3. $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$

4. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

السؤال السادس

انطلاقاً من الشكل المجاور.

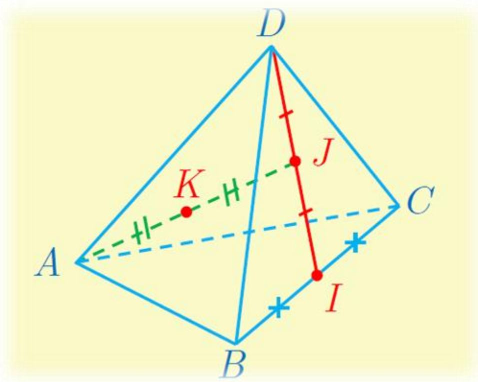


جد الأمثال α و β و γ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)$. و استنتج λ التي تحقق:

$$\overrightarrow{GA}+\lambda\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

السؤال السابع

انطلاقاً من الشكل المجاور.



جد الأمثال α و β و γ و δ لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)\,,(D,\delta)$.

السؤال الثامن

$ABCD$ رباعي وجوه. استعمل الخاصة التجميعية لتعيين موضع النقطة G في الحالات الآتية:

1. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,1)\,,(B,1)\,,(C,1)\,,(D,3)$$

2. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,-1)\,,(B,2)\,,(C,-1)\,,(D,-2)$$

3. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,1)\,,(B,2)\,,(C,3)\,,(D,6)$$