معادلات المستوي		
علم ناظم ونقطة	علم شعاعي توجيه	علم ثلاثة نقاط
$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ حيث: ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$	1- نثبت أن $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين 2- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم 3- نشكل المعادلتين: $\vec{n}.\vec{u}=0$ $\vec{n}.\vec{v}=0$ 4- نحل المعادلتين حلاً مشتركاً ثم نعطي أحد المجاهيل قيمة اختيارية غير صفرية نعوض في القانون	1- نشكل شعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ نعيد خطوات الحالة السابقة
علم مستوي موازي	علم مستويين معامدين	علم مستوي معامد ونقطتين
1- بما أنهما متوازيان فلهما نفس الناظم نعوض في القانون	1- نحدد النواظم $\vec{n_1},\vec{n_2}$ 2- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي المطلوب 3- نشكل معادلتين : $\vec{n}.\vec{n_1}=0$ $\vec{n}.\vec{n_2}=0$ نكمل كما في الحالات السابقة	1- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ 2- نشكل شعاعاً $\overrightarrow{AB}$ و نحدد ناظم المستوي المعلوم $\vec{n'}$ 3- نشكل معادلتين : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ $\vec{n}.\vec{n'}=0$ نكمل كما في الحالة السابقة
معادلة المستوي المحوري	مستوي محدد بتقاطع مستقيمين	مساحة بالباقي
1- نحدد النقطة بأنها منتصف القطعة [AB] 2- نحدد الناظم بأنه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ نعوض في القانون	1- نعتبر نقطة تقاطع المستقيمين هي النقطة المطلوبة نعتبر شعاعي توجيه المستقيم هما شعاعي توجيه المستوي	
التمثيل الوسيطي لمستقيم		
علم نقطة وشعاع توجيه	علم نقطتين	علم مستوي معامد
$d:\begin{cases}x=at+x_0\\y=bt+y_0\\z=ct+z_0\end{cases}\quad t\in R$	1- نعتبر شعاع التوجيه $\overrightarrow{AB}$ 2- نختار النقطة A أو B 3- نعوض في القانون	نعتبر ناظم المستوي هو شعاع التوجيه و نعوض في القانون
الفصل المشترك		
1- ندرس ارتباط النواظم 2- نحل المعادلتين حلاً مشتركاً 3- نفرض أحد المجاهيل قيمة وسيطية t		
الكرة		
علم مركز ونصف قطر	علم قطر	علم مركز ونقطة تمر منها
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ حيث: المركز $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ نصف القطر r	1- نوجد المركز وهو منتصف القطر. 2- نوجد نصف القطر. 3- نعوض في القانون السابق	1- نوجد نصف القطر وهو عبارة عن المسافة بين المركز والنقطة التي تمر منها الكرة. 2- نعوض في القانون
كرة تمس مستوي		
1- المركز معلوم 2- نصف القطر هو $dis(\Omega,P)$ بعد مركز الكرة عن المستوي. 3- نعوض في القانون.		

الأسطوانة		
أسطوانة محورها يوازي oz	أسطوانة محورها oy	أسطوانة محورها ox
بفرض إحداثيات مركز القاعدة $A(x_1,y_1,z_1)$ و أن ارتفاع هذه الأسطوانة h و نصف قطر قاعدتها r فإن هذه الأسطوانة تُعرّف بالشكل : $\begin{cases}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2\\ z_1\le z\le z_1+h\end{cases}$ وبوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases}x^2+y^2=r^2\\ 0\le z\le h\end{cases}$	$\begin{cases}(x-x_1)^2+(z-z_1)^2=r^2\\ y_1\le y\le y_1+h\end{cases}$ و بوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases}x^2+z^2=r^2\\ 0\le y\le h\end{cases}$	$\begin{cases}(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2\\ x_1\le x\le x_1+h\end{cases}$ و بوجه الخصوص إذا كان مركز القاعدة هو المبدأ فتصبح المعادلة: $\begin{cases}y^2+z^2=r^2\\ 0\le x\le h\end{cases}$
المخروط		
محوره يوازي oz	محوره يوازي oy	محوره يوازي ox
$\begin{cases}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(z-z_1\\ z_1\le z\le z_1+h\end{cases}$ و إذا كان المركز هو المبدأ : $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{r^2}{h^2}z^2\\ 0\le z\le h\end{cases}$	$\begin{cases}(x-x_1)^2+(z-z_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(y-y_1\\ y_1\le y\le y_1+h\end{cases}$ و إذا كان المركز هو المبدأ: $\begin{cases}x^2+z^2=\frac{r^2}{h^2}y^2\\ 0\le y\le h\end{cases}$	$\begin{cases}(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\frac{r^2}{h^2}(x-x_1\\ x_1\le x\le x_1+h\end{cases}$ و إذا كان المركز هو المبدأ: $\begin{cases}y^2+z^2=\frac{r^2}{h^2}x^2\\ 0\le x\le h\end{cases}$

التمرين الأول: في كلٍ من الحالات الآتية: اكتب معادلة المستوي P :

1- المستوي P يمر من $A(2,3,1)$ و ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AB}$ حيث $B(3,2,0)$	2- المستوي $P=(ABC)$ حيث $A(3,2,2),B(0,1,0),C(1,1,1)$
3- المستوي P هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ حيث $A(1,1,1),B(3,2,0)$	4- المستوي P المار من النقطتين $A(1,1,1),B(3,-1,1)$ و معامد للمستوي : $x+y+z=1$
5- المستوي P معامد للمستويين : $Q:2x+y-z-1=0$ $R:x+y-3z=0$	6- المستوي P مار بالنقطة $A(1,1,1)$ ويوازي المستوي: $Q:2x+3y-z=1$

7- المستوي P مار من المبدأ ويعامد المستقيم:

$$d:\begin{cases}x=t+1\\ y=0\\ z=-t+1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

التمرين الثاني: اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d في الحالات الآتية :

1- المستقيم d يمر من النقطة $A(-1,1,0)$ و يقبل الشعاع $\vec{u}(2,3,-1)$ شعاع توجيه له	2- المستقيم $d=(AB)$ حيث : $A(1,1,2)\ ,B(3,0,1)$
3- المستقيم d يمر من المبدأ و يعامد المستوي $x-y+z=3$	4- المستقيم d المعطى بتقاطع المستويين : $P:2x-y+z-2=0$ $Q:x+y+2z-1=0$

التمرين الثالث: اكتب معادلة الكرة S في الحالات الآتية:

1- مركزها $A(1,1,3)$ و تمر من $B(0,2,2)$	2- تقبل $[AB]$ قطراً لها حيث : $A(1,2,3)\ ,B(5,2,1)$

3- مركزها $A(1,2,-1)$ و تمس المستوي $P:x-z=1$

التمرين الرابع: اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها يوازي (oz) ومركز قاعدتها $A(1,1,3)$ و ارتفاعها 5 ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{2}$.

التمرين الخامس: اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها يوازي (oy) ومركز قاعدتها السفلى $A(2,3,1)$ ومركز قاعدتها العليا $B(2,8,1)$, ونصف قطرها 3.

التمرين السادس: اكتب معادلة المخروط الذي محوره يوازي (ox) ومركز قاعدته المبدا ونصف قطرها 1 وارتفاعه 3.

التمرين السابع: ماذا تمثل مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة:

$$x^2+y^2-z^2=0\quad;0\le z\le 3$$

الوضع النسبي لمستوي مع مستوي		
شرط التوازي: ارتباط النواظم وإذا كان: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ كان المستويين منطبقين.	شرط التقاطع: عدم ارتباط النواظم	شرط التعامد: جداء النواظم معدوم.
الوضع النسبي لمستوي مع مستقيم		
نعوض المستقيم في المستوي ونميز الحالات الآتية:		
$0=0$ المستقيم محتوى في المستوي	$0=1$ المستقيم يوازي المستوي	$t=$ عدد المستقيم والمستوي متقاطعان في نقطة. لإيجاد احداثياتها نعوض t في المستقيم.
الوضع النسبي لمستقيم مع مستقيم		
ندرس ارتباط اشعة التوجيه ونميز حالتين:		
اشعة التوجيه مرتبطة: المستقيمان متوازيان	الأشعة غير مرتبطة: المستقيمان غير متوازيان , ندرس التقاطع: $x_t=x_s$ $y_t=y_s$ $z_t=z_s$	

ملاحظات:

1- لإثبات أن مستقيم يعامد مستوي نثبت أن الناظم و شعاع التوجيه مرتبطان

2- لإثبات أن شعاعاً معطى هو ناظم على مستوي معلوم يوجد اسلوبين :

أ- الأسلوب الأول : الشعاع عمودي على شعاعين في المستوي

ب- الأسلوب الثاني: الشعاع المعطى مرتبط مع ناظم المستوي

التمرين الأول: في كلٍ من الحالات الآتية , ادرس تقاطع المستويين P,Q و في حال التوازي بيّن فيما إذا كانا منطبقين أم لا .

$P: 2x+y-z=0$, $Q: x+y+z=1$	$P: 2x-y+z-3=0$ $Q: 4x-2y+2z-1=0$

التمرين الثاني: ادرس الوضع النسبي للمستقيمين الآتيين:

$$d:\begin{cases} x=3t+1 \\ y=4t \\ z=-t+1 \end{cases} ;t\in R$$

$$d':\begin{cases} x=-9s+4 \\ y=-12s+4 \\ z=3s \end{cases} ;s\in R$$

التمرين الثالث: d و d' مستقيمان معرفان وفق:

$$d:\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t \\ z=t-1 \end{cases} ;t\in R$$

$$d':\begin{cases} x=3s-4 \\ y=s-1 \\ z=5s-6 \end{cases} :s\in R$$

1- أثبت أن d,d' متقاطعان في نقطة N يُطلب تعيين إحداثياتها

2- جد معادلة المستوي P المحدد بهذين المستقيمين

التمرين الرابع: ادرس الوضع النسبي للمستوي مع المستقيم المعطى:

1- $P: 2x - y - z = 3$

$$d: \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 0 \\ z = 4t - 7 \end{cases} : t \in R$$

2- $P: 2x + y - 3z - 1 = 0$

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = t + 7 \end{cases} : t \in R$$

المساقط القائمة	
على مستوي:	على مستقيم:
1- نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار من D وشعاع توجيهه هو ناظم المستوي P $\vec{n}$ 2- نوجد تقاطع هذا المستقيم مع المستوي فنحصل على D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي P	1- نوجد معادلة المستوي P المعامد للمستقيم d والمار من النقطة D. 2- نوجد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي P ولتكن D' فتكون المسقط القائم للنقطة D على المستقيم d.
ملاحظة: إن DD' تمثل بعد النقطة D عن المستوي.	**ملاحظة:** إن DD' تمثل بعد النقطة D عن المستقيم.
يمكن حساب بعد نقطة عن مستوي بشكل مباشر: $\boldsymbol{dis(D,P) = \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$	لا يوجد طريقة أخرى لحساب بعد نقطة ما عن المستقيم **الا المسقط القائم**

الوضع النسبي لمستوي مع كرة		
نحسب بعد مركز الكرة عن المستوي ونميز الحالات الآتية:		
$dis < r$	$dis = r$	$dis > r$
المستوي يقطع الكرة في دائرة	المستوي يمس الكرة	المستوي لا يشترك مع الكرة بأي نقطة.
يطلب حساب نصف قطر دائرة المقطع باستخدام القانون: $r_c = \sqrt{r^2 - dis^2}$	**Nothing…keep going forward**	

المسألة (1)

في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط :

$A(2,-2,2), B(1,1,0), C(1,0,1), D(0,0,1)$

1- تحقق أن النقاط (BCD) لا تقع على استقامة واحدة
2- أثبت أن $y + z - 1 = 0$ هي معادلة المستوي (BCD)
3- أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي (BCD)
4- عين إحداثيات K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)
5- اكتب معادلة الكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً لها

المسألة (2)

في معلمٍ متجانس نتأمل النقطة A(1,1,2) و المستويان :

$$P: x - y + 2z - 1 = 0$$
$$Q: 2x + y + z + 1 = 0$$

1- أثبت أن P, Q متقاطعان في فصل مشترك d
2- اكتب تمثيلاً للمستقيم d
3- اكتب معادلة المستوي R المار من A و يعامد كلاً من P, Q
4- جد إحداثيات B نقطة تقاطع d مع المستوي R و استنتج وضع المستويات P,Q,R
5- احسب بعد A عن المستقيم d

المسألة (3)

في معلمٍ متجانس نتأمل النقطة $A(1,2,0)$ و المستويات :

$$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$$
$$Q: x + y + z - 1 = 0$$
$$R: x - z - 1 = 0$$

1- أثبت أن المستويين P, Q متقاطعان في فصل مشترك Δ . اكتب تمثيله الوسيطي
2- تحقق أن المستوي R يعامد Δ و يمر من A
3- أثبت تقاطع المستويات P, Q, R في نقطة I يُطلب تعيينها
4- استنتج بعد A عن المستقيم Δ

المسألة (4)

في معلمٍ متجانس :

$$A(1,1,0), B(1,2,1), C(4,0,0)$$

1- تحقق ان A, B, C ليست على استقامة واحدة
2- أثبت أن المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة $x + 3y - 3z - 4 = 0$
3- ليكن المستويان :

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$
$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في فصل مشترك d له التمثيل الوسيطي

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \quad\quad t \in R \\ z = t \end{cases}$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويات

$$P, Q, (ABC)$$

5- احسب بعد A عن المستقيم d

المسألة (5)

في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط :

$$A(1,3,0), B(0,6,0), N(0,0,3), M(0,6,2)$$

1- اكتب معادلة المستوي (AMN)
2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من O ومعامد للمستوي (AMN)
3- أثبت أن المستوي الذي معادلته $z - 1 = 0$

المسألة (6)

1- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $\sqrt{3}$.
2- تحقق ان المستوي P الذي معادلته:

$$P: x - y + z + 3 = 0$$

يمس الكرة S.

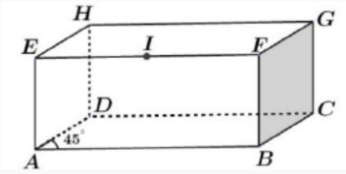
المسألة (7)

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن النقطة $A(1, -2, 0)$ والمستوي $P: x + 2y + z - 1 = 0$:

احسب بعد النقطة A عن المستوي P ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

المسألة (8)

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$ وقياس الزاوي $\widehat{DAB}$ يساوي $45°$ والنقطة I منتصف $[EF]$:



1- احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

2- عين موضع النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

المسألة (9)

في معلم متجانس $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ نتأمل النقطتين $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$:

1- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$.

2- أثبت أن المستقيمين (AB) و d متعامدان.

المسألة (10)

نتأمل في معلم متجانس $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ النقطتين $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$ والمستوي:

$$P: 3x - y - 3z - 8 = 0$$

1- أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P.

2- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB), ثم عين إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P.

المسألة (11)

نتأمل في معلم متجانس $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ النقاط الآتية:

$$A(2,0,1)\ ,B(1,-2,1)\ ,C(5,0,5)\ ,D(6,2,5)$$

1- أثبت أن $\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

2- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

واستنتج أن النقاط A, B, C, D تقع في مستو واحد.

المسألة (12)

في معلم متجانس $\left(O; \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ لدينا النقطة $A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ والمطلوب:

1- احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ ثم استنتج $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

2- إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC, عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$$\left|\left|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$

المسألة (13)

في معلم متجانس $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-2,1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكون من النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق العلاقة:

$$MA = MB$$

وما طبيعة المجموعة S.

المسألة (14)

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ نتأمل النقطتين $B(2,0,-2)$, $A(2,2,4)$:

1- اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.
2- اعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ، ما طبيعة المجموعة S؟

المسألة (15)

$ABCDEFG$ مكعب طول حرفه يساوي 2, نتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ في المعلم

$\overrightarrow{AB}=2\vec{\imath}$ و $\overrightarrow{AD}=2\vec{\jmath}$ و $\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$:

1- اكتب معادلة المستوي (GBD).
2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (EC).
3- جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD).
4- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$$

5- أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC).

المسألة (16)

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط:

$$A(1,1,0)\ ,B(1,2,1)\ ,C(4,0,0)$$

1- أثبت أن النقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة.
2- أثبت ان معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

$$x+3y-3z-4=0$$

3- ليكن المستويان:

$$P: x+2y-z-4=0$$

$$Q: 2x+3y-2z-5=0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC).
5- احسب بعد A عن المستقيم d.

المسألة (17)

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ نتأمل النقاط:

$$E(1,-1,1)\ ,D(0,4,0)\ ,C(4,0,0)$$

$$B(1,0,-1), A(2,1,3)$$

1- جد $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AB}$.
2- أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.
3- أثبت أن (AB) يعامد للمستوي (CDE).
4- اكتب معادلة المستوي (CDE).
5- احسب بعد B عن المستوي (CDE).
6- اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE).

المسألة (18)

نتأمل في معلم متجانس $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ المكعب $ABCDEFGH$.

1- اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط:

$$A\ ,C\ ,H\ ,F,D$$

2- اكتب معادلة المستوي (ACH).

3- أثبت أن المستوي P الذي معادلته:

$$P:-2x+2y-2z+1=0$$

يوازي المستوي (ACH).

4- بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن D و I و F على استقامة واحدة.

5- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S.

المسألة (19)

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$$P:2x-y+2z-2=0$$

$$Q:x+y+z-1=0$$

$$R:x-z-1=0$$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان مشترك Δ, اكتب تمثيله الوسيطي.

2- تحقق أن المستوي يعامد Δ ويمر بالنقطة A.

3- أثبت أن المستويات $P\ ,Q\ ,R$ تتقاطع بالنقطة I يطلب تعيين احداثياتها.

4- استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

المسألة (20)

مكعب طول حرفه 2, O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$.

نختار معلم متجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$. والمطلوب:

1- جد إحداثيات النقاط A و B و G و H و O.

2- أعط معادلة المستوي (GOB).

3- احسب $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$.

4- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).

5- أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).

6- جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).

المسألة (21)

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ نتأمل النقاط:

$$A(-1,2,3)\ ,B(2,1,1)\ ,C(-3,4,-1)\ ,D(3,1,1)$$

1- جد $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدان.

2- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).

3- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC).

4- احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.

5- بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين (CG) و (AB) متوازيان.

المسألة (22)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(1,1,2)$ والمستويان:

$$P: x - y + 2z - 1 = 0$$

$$Q: 2x + y + z + 1 = 0$$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان في فصل مشترك d.
2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d.
3- اكتب معادلة المستوي R المار من A المعامد للمستويين P و Q.
4- جد إحداثيات B الناتجة من تقاطع المستوي R والمستقيم d.
5- احسب بعد النقطة A عن المستقيم d.
6- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q.

المسألة (23)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$D(1,1,1)$, $C(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $A(1,0,0)$

1- جد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC, وأثبت أن (OG) عمودي على المستوي (ABC).
2- جد معادلة المستوي (ABC).
3- نعرف النقاط $C'(0,0,4)$, $B'(0,2,0)$, $A'(2,0,0)$ للمستوي $A'B'C'$. أثبت أن $2x + 2y + z - 4 = 0$ معادلة المستوي $(A'B'C')$.
4- أثبت أن Δ الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$ يقبل التمثيل الوسيطي:

$$\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t ; t \in \mathbb{R} \\ z = -2 \end{cases}$$

5- احسب بعد النقطة $D(1,1,1)$ عن المستقيم Δ.

حجوم المجسمات الفراغية	
المجسم له قاعدتين	المجسم له قاعدة واحدة
$V = S \times h$	$V = \frac{1}{3} S \times h$
حيث أن S مساحة القاعدة , h الارتفاع	
ملاحظة نذيرية: بعد حساب الحجم يمكن استنتاج مساحة قاعدة أخرى له أو ارتفاع اخر له ويتم ذلك بحساب الحجم من منظور آخر (بدلالة القاعدة أو الارتفاع حسب الطلب)	

المجموعات النقطية	
$\lVert\overrightarrow{AM}\rVert = \lVert\overrightarrow{BM}\rVert$ أو $AM = BM$	تمثل مستوي محوري للقطعة $[AB]$
$\lVert\overrightarrow{AM}\rVert = const$ أو $AM = const$	تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها $const$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$	تمثل كرة التي قطرها $[AB]$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$	تمثل المستوي الذي يمر من النقطة A ويقبل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له
معادلة من الشكل: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$	نتمم إلى مربع كامل لنصل إلى الشكل $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k$ ونميز الحالات: 1- $k < 0$ فتكون معادلة تمثل المجموعة الخالية Φ. 2- $k = 0$ فتكون معادلة تمثل نقطة التي إحداثياتها $A(x_0, y_0, z_0)$. 3- $k > 0$ فتكون المعادلة تمثل كرة التي نصف قطرها k ومركزها $A(x_0, y_0, z_0)$.
في باقي الحالات	1- نفرض $M(x, y, z)$ 2- نعوض في المعادلة 3- نصلح ثم نقارن شكل المعادلة المختزل مع الاشكال السابقة
لا ننسا الشكل العام لمعادلة المخروط والاسطوانة	

تطبيقات المسافة في الفراغ		
انتماء نقطة لكرة	انتماء نقطة لمستوي محوري	معرفة طبيعة مثلث
نحسب بعد النقطة عن مركز الكرة ونقارن من نصف القطر	نحسب بعد النقطة عن طرفي القطعة المستقيمة ونقارن بينهم	نحسب أطوال أضلاع المثلث ونقارن بينها ثم نختبر عكس فيثاغورث
جداء السلمي		
$\vec{u}.\vec{v} = \|\|\vec{u}\|\|\|\|\vec{v}\|\| \cos\alpha$	$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\|\vec{u}+\vec{v}\|\|^2 - \|\|\vec{u}\|\|^2 - \|\|\vec{v}\|\|^2\right]$	$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

طلبات مميزة:

1- أثبت أن النقطة J هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث ABC:
نثبت أن $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 0$ و $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AC} = 0$.

2- حساب $\cos\alpha$ عن طريق القانون الأول في الجداء السلمي.

3- اثبات أن شعاعين متساويين بالطول.

الارتباط الخطي لثلاث اشعة:

نقول عن الاشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ إنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان α,β بحيث:

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

و $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً

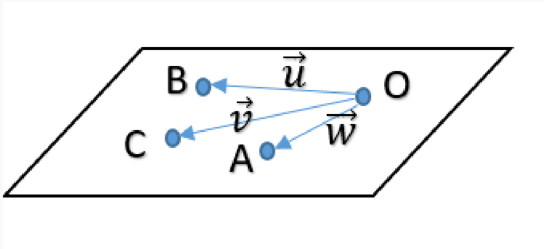
معنى الارتباط الخطي لثلاث أشعة: (مطالعة):

أنه يمكن استبدال هذه الاشعة بثلاث أشعة أخرى تشترك في نفس البداية وتقع في مستوٍ واحد. ((لايعني توازي بالضرورة))

أي يوجد نقطة o تجعل الاشعة $\overrightarrow{oc},\overrightarrow{oB},\overrightarrow{oA}$

تقع في مستوٍ واحد حيث

$$\vec{w}=\overrightarrow{oA},\ \vec{u}=\overrightarrow{oB}\ ,\vec{v}=\overrightarrow{oC}$$



فوئد الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

1- إثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد.

2- إيجاد معادلة مستوٍ يمر من ثلاث نقاط.

3- إثبات انتماء M الى مستوٍ مار بثلاث نقاط.

انتبه: أي جملة معادلات مكونة من ثلاث معادلات ومجهولين فقط، فإننا نحل معادلتين منهما حلاً مشتركاً، ثم نعوض في الثالثة للتحقق ونميز حالتين:

1) إذا كانت المعادلة الثالثة محققة ← للجملة حل مشترك هو الحل الذي أوجدناه من اول معادلتين.
2) اذا كانت المعادلة الثالثة غير محققة فتكون الجملة مستحيلة الحل.

التمرين (1)

تتأمل في معلم: $(0,\vec{i}\ ,\vec{j},\vec{k})$ النقاط الاتية:

$A(0,1,-1)\ ,\ \ B(1,0,0)\ \ ,C(-1,2,1)\ ,\ \ \ D(0,1,2)$

أثبت انتماء النقاط A,B,C,D الى مستوٍ واحد P

الحل

نشكل ثلاثة أشعة لها نفس البداية:

$$\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-1,1,2)$$

$$\overrightarrow{AD}=(0,0,3)$$

نثبت ان الاشعة السابقة مرتبطة خطياً أي لنثبت أولاً : أن $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين (و هذا واضح لعدم تناسب مركباتهما حيث $\frac{0}{1}\neq\frac{3}{2}$) ثم لنثبت وجود عددين α,β يحققان ان:

$$\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}+\beta\overrightarrow{AD}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\3\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\2\alpha+3\beta\end{pmatrix}$$

$$1=-\alpha\quad(1)$$
$$-1=\alpha\quad(2)$$
$$1=2\alpha+3\beta\quad(3)$$

من 1 نجد أن $\Longrightarrow\alpha=-1$

نعوض في 3 :

$$1=-2+3\beta$$

$$3=3\beta\Longrightarrow\beta=1$$

نعوض في 2 للتحقق:

$-1=-1$ محققة

التمرين (2)   دورة 2021 الأولى

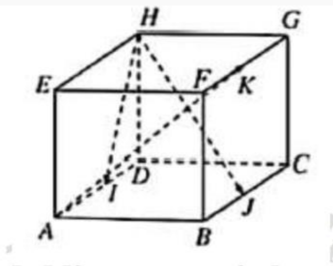
نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ النقاط التالية: $D(6,2,5),C(5,0,5),B(1,-2,1),A(2,0,1)$ ، المطلوب:

1) أثبت أن $\overrightarrow{AC}\ ,\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً.

2) عين العددين الحقيقيين $\alpha\ ,\beta$ بحيث: $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ ، واستنتج أن النقاط $D,C\ ,B\ ,A$ تقع في مستوٍ واحد .

التمرين (3)

في الشكل المجاور نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$ و طول حرفه 2 . و لتكن النقاط I و J و K منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$ بالترتيب . نختار معلما متجانساً $(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$. و المطلوب:



1- جد إحداثيات الرؤوس و I,J,K

2- جد مركبات كلٍ من الأشعة $\overrightarrow{HI},\overrightarrow{HJ},\overrightarrow{AK}$

3- أثبت أن المستوي (HIJ) * يوازي المستقيم (AK)

التمرين (4)

نتأمل في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$$A(2,0,1), B(1,-2,1), C(5,5,0),$$

$$D(-3,-5,6), E(3,1,2)$$

أثبت انتماء النقاط A,B,C,D إلى مستوٍ واحد و P و تبيّن إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوى P

التمرين (5)

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط :

$$A(3,2,1), B(1,2,0), C(3,1,-2)$$

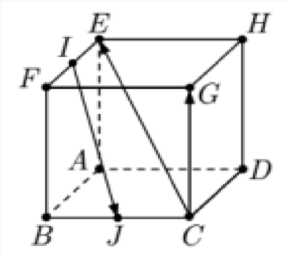
1- أثبت أن النقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة

2- عند أي قيمة للوسيط λ تنتمي النقطة $M(\lambda,1,3)$ إلى المستوي (ABC)

3- ما العلاقة بين x,y لتقع النقاط $A,B,D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد .

التمرين (6)

في الشكل المجاور مكعب، $\boldsymbol{I}$ و $\boldsymbol{J}$ منتصفات $[\boldsymbol{EF}]$ و $[\boldsymbol{BC}]$ على الترتيب:



1- أثبت أن $\overrightarrow{IJ}=2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})$

2- أثبت أن المستقيم (IJ) يوازي المستوي (CEG).

مركز الأبعاد المتناسبة

نقول إن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) و (B,β) إذا تحقق أن:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

حيث $\alpha+\beta\neq 0$

ويعمم الكلام السابق لأكثر من نقطتين أي G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A.\alpha)$ و (B,β) و (C,γ) إذا تحقق أن:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

وحيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

بل أكثر من ذلك:

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

(D,δ) و(C,γ) و (B,β) و (A,α) إذا كان الشرط محقق:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

وتسمى العلاقة السابقة:

- **علاقة الوجود (العلاقة الأم)** لأنه عندما يكون $\alpha+\beta=0$ عندئذ لا يوجد م أ م للنقاط (B,β) و (A,α).

- **نستخدم علاقة الوجود لتحديد أو تعيين α و β و γ ...**

1) نصلح شكل العلاقة لجعل الطرف الثاني $\vec{0}$ ونجعل البدايات كلها م أ م.

2) نقارن مع القانون

3) نختبر الشرط $(\alpha+\beta+\cdots\neq 0)$

ملاحظة: م أ م = مركز الأبعاد المتناسبة ولا تكتب بهاد الشكل بالامتحاااان^_^

نميز الحالات الآتية في م أ م:

الحالة الأولى: الانطلاق من علاقة شعاعية:

1) جد العددين α و β ليكون G م أ م للنقاط (A,α) و (B,β) انطلاقاً من العلاقة:

$$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}$$

الحل

$$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

$$2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB})-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

$$-2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

ونلاحظ أنها من الشكل:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

إذن $\alpha=-2$ و $\beta=1$ حيث $\alpha+\beta\neq 0$

2) عين الاعداد α و β و γ لتكون M م أ م للنقاط المحققة للعلاقة:

$$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

الحل

سنضرب بالعدد 4:

$$4\overrightarrow{AM}=8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

$$8\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$

$$8(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})+3(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})+4\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$

$$-8\overrightarrow{MA}+8\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}+4\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$

$$-7\overrightarrow{MA}+8\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

و هذه العلاقة من الشكل:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

وبالتالي $\alpha=-7$ و $\beta=8$ و $\gamma=3$ حيث

$$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

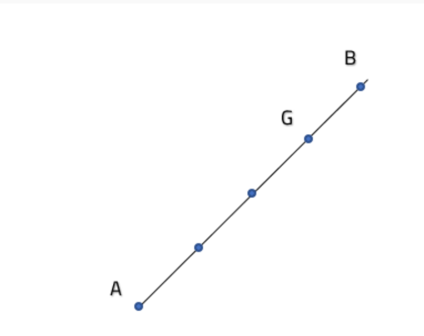
الحالة الثانية: الانطلاق من شكل:

(مسائل 40 درجة):

1) عين α و β ليكون G م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):

$$\frac{AG}{AB}=\frac{3}{4}$$

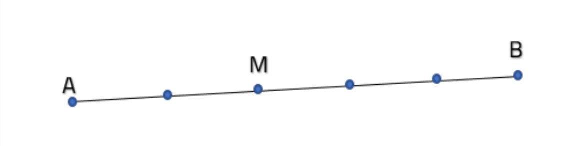
$$4\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$$



$$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AG}=\vec{0}$$

$$3\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$\alpha=1\,,\beta=3 \qquad ;\alpha+\beta\neq 0$$

2) عين α و β ليكون M م أ م للنقاط (A,α) و (B,β):



لدينا طريقتان في الحل:

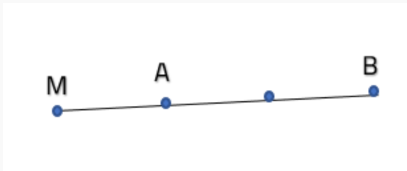
الطريقة الأولى:

من الشكل نلاحظ أن M م أ م للنقاط $(A,3)$ و $(B.2)$.

الطريقة الثانية:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{2}{5}$$
$$5\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$$
$$-2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AM}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$\alpha=-3\,,\beta=-2\,;\alpha+\beta\neq 0$$

3)



$$\frac{MA}{MB}=\frac{1}{3}$$
$$3\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$$
$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$\alpha=3\,,\beta=-1\,;\alpha+\beta\neq 0$$

ملاحظات:

1- G م أ م لنقطتين من تثقيلتين مختلفتين بالإشارة فإن G تقع خارج القطعة وبالعكس

2- خاصة التجانس (هامة جداً)

G م أ م لـ (A,α) و (B,β):

$$\boldsymbol{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

نضرب بـ $k\neq 0$:

$$\boldsymbol{(k\alpha)\overrightarrow{GA}+(k\beta)\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

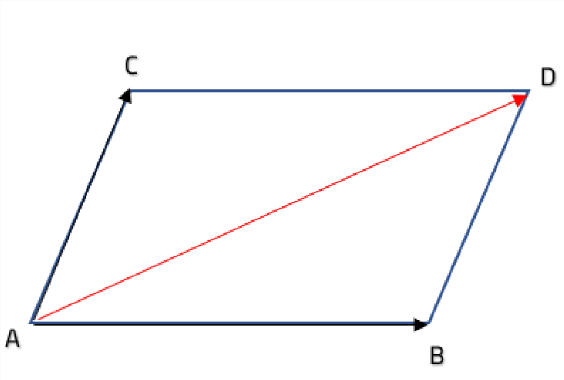
G م أ م لـ $(A,k\alpha)$ و $(B,k\beta)$.

(مسائل 100 درجة):

تذكرة:

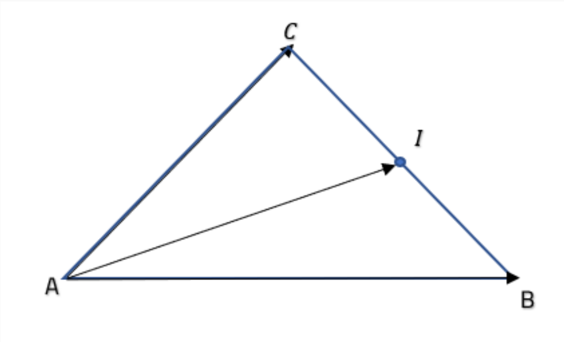
1) علاقة متوازي الأضلاع:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$



2) علاقة المتوسط في المثلث:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$$

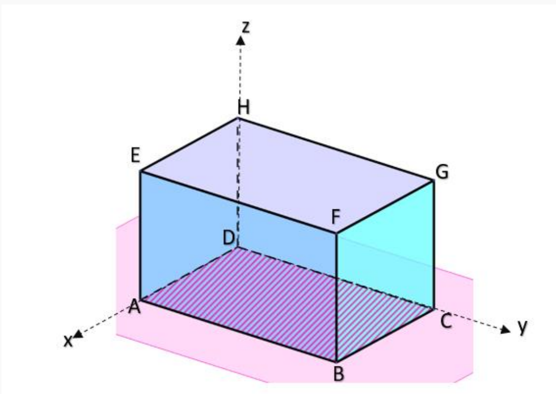


3) علاقة الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

أمثلة:

1) نتأمل في الشكل المجاور متوازي مستطيلات $ABCDEFGH$



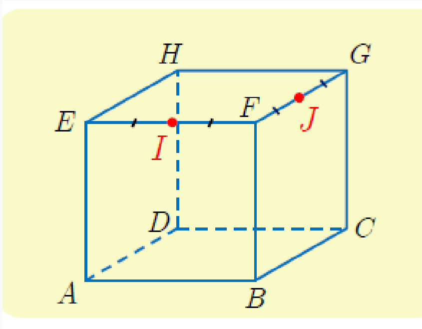
عين α و β و γ ليكون D م أ م للنقاط $(A,\alpha)\,,(B,\beta)\,,(C,\gamma)$.

الحل

من الشكل نلاحظ أن:

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$
$$\alpha=1\,,\beta=-1\,,\gamma=1\,;\alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

2) نتأمل في الشكل المجاور مكعباً



عين α و β و γ ليكون I م أ م للنقاط $(A,\alpha),(F,\beta),(E,\gamma)$.

الحل

من علاقة المتوسط نجد:

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AI}$$

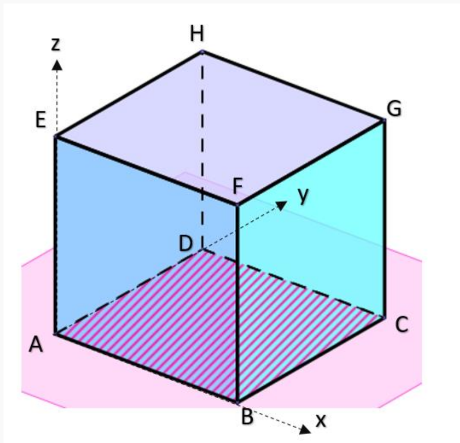
$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IE}-2\overrightarrow{AI}=\vec{0}$$

$$0\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{IE}=\vec{0}$$

$$\alpha=0\,,\beta=1\,,\gamma=1\,;\alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

عند اختفاء أحد النقاط المطلوب تثقيلها نكتبها في العلاقة بأمثال صفرية.

3) نتأمل جانباً مكعباً طول حرفه 3



نعرف معلماً متجانساً:

$$\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$$

1- جد معادلة المستوي (EBD).

$A(0,0,0)\quad E(0,0,3)$

$B(3,0,0)\quad F(3,0,3)$

$C(3,3,0)\quad G(3,3,3)$

$D(0,3,0)\quad H(0,3,3)$

نشكل الشعاعين:

$$\overrightarrow{EB}(3,0,-3)$$

$$\overrightarrow{ED}(0,3,-3)$$

$$\frac{0}{3}\neq\frac{-3}{-3}$$

غير مرتبطين خطياً، نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{EB}=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{ED}=0$$

$$\begin{cases}3a-3C=0\\3B-3C=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a=3c$$

$$a=c$$

نفرض $c=1 \Leftarrow a=1$, نعوض في أحد المعادلات فنجد:

$$3b-3=0]\Rightarrow b=1$$

$$\Rightarrow \vec{n}(1,1,1)$$

وتكون معادلة المستوي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$1(x-0)+1(y-0)+1(z-3)=0$$

$$x+y+z-3=0$$

2- برهن أن النقطة $K(5,2,-4)$ تنتمي للمستوي (EBD).

نعوض إحداثيات النقطة في المعادلة فنجد:

$$5+2-4-3=0\Rightarrow 7-7=0$$

$$K\in(EBD)$$

3- عين α و β و γ ليكون K م أ م للنقاط $(E,\alpha),(B,\beta),(D,\gamma)$.

لدينا $K\in(EBD)$ فإن K و E و B و D في مستو واحد فإن الأشعة $\overrightarrow{KE},\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KD}$:

$$\overrightarrow{KE}=a\overrightarrow{KB}+b\overrightarrow{KD}$$

$$\begin{pmatrix}-5\\-2\\7\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-5\\1\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-2a-5b=-5\\-2a+b=-2\\4a+4b=7\ \text{للتحقق}\end{cases}$$

بطرح 1 و 2 نجد:

$$-6b=-3\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

نعوض في 2:

$$-2a+\frac{1}{2}=-2$$

$$-2a=-\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow a=\frac{5}{4}$$

نعوض في 3 للتحقق:

$$5+2=7\Rightarrow \text{محققة}$$

$$\overrightarrow{KE}=\frac{5}{4}\overrightarrow{KB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KD}$$

$$\frac{5}{4}\overrightarrow{KB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KE}=\vec{0}$$

K م أ م للنقاط:

$$\left(B,\frac{5}{4}\right),\left(D,\frac{1}{2}\right),(E,-1)$$

حسب التجانس مضرب بـ 4:

$$(B,5),(D,2),E(-4)$$

حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

انشاء مركز الأبعاد المتناسبة:

أي تحديد موضع م أ م.

- G م أ م لنقطتين لهما نفس الثقل عندئذ G في منتصف القطعة المستقيمة.
- G م أ م لثلاثة نقاط لهما نفس الثقل عندئذ G مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات).

مثال₁: عين G م أ م للنقاط $(A,2)\ (B,2)(C,2)$.

الحل

G هي مركز ثقل المثلث ABC.

ارسم معنا :

- G م أ م لنقطتين أحدهما تثقيلتها معدومة عندئذ G تنطبق على الأخرى.

مثال₂: عين G م أ م للنقاط $(A,0)\ (B,3)$.

الحل

G تنطبق على B.

- G م أ م للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ عندها نستخدم علاقة الانشاء وهي:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

مثال₃: عين G م أ م للنقطتين $(A,1),(B,3)$:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

ارسم معنا :

أو بطريقة أخرى:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$$

ارسم معنا :

مثال₄: عين M م أ م للنقاط $(A,5),(B,-2)$:

$$\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

ارسم معنا :

مثال₅: عين M م أ م للنقاط $(A,10),(B,10)$:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{10}{20}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

الرسم:

نلاحظ أن النتيجة تطابق نتيجة الحالة الأولى.

الخاصة التجميعية:

إذا كان G م أ م للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$:

- نفرض I م أ م لـ A و B ويكون:
  1- موضع I: حسب ما تعلمنا سابقاً
  2- ثقل I: هو $\alpha+\beta$
- حسب الخاصة التجميعية G م أ م لـ $(I,\alpha+\beta)$ و (C,γ).

مثال₁: جد G م أ م للنقاط $(A,1),(B,2),(C,1),(D,3)$:

ارسم معنا :

نفرض I م أ م للنقاط $(A,1),(C,1)$ عندئذ I منتصف $[AC]$ وأن $(I,2)$.

نفرض J م أ م للنقاط $(B,2),(D,3)$ عندئذ:

$$\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BD}$$

وأن $(J,5)$, وبالتالي حسب الخاصة التجميعية فإن G م أ م لـ $(I,2),(J,5)$:

$$\overrightarrow{IG}=\frac{5}{7}\overrightarrow{IJ}$$

مثال₂: عين G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$.

ارسم معنا :

الحل

المطلوب هنا هو إيجاد مركز الابعاد المتناسبة للنقاط:

$(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$

- نفرض I م أ م للنقطتان A و B عندها I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ وبالتالي $(I,2)$.
- نفرض أيضاً J م أ م للنقاط $(C,1),(D,1)$ وعندها J منتصف القطعة المستقيمة $[CD]$ وبالتالي $(J,2)$، فحسب الخاصة التجميعية إن G م أ م للنقاط $(I,2),(J,2)$.

وبطريقة أخرى:

k م أ م لـ $(A,1),(B,1),(C,1)$ وبالتالي k مركز ثقل المثلث ABC.

حسب الخاصة التجميعية فإن G م أ م $(K,3),(D,1)$:

$$\overrightarrow{KG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{KD}$$

ملاحظة هامة:

وجدنا أنه إذا كان G م أ م للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

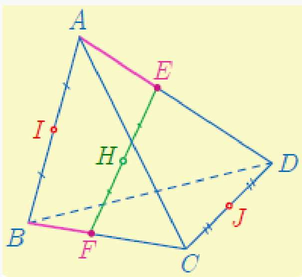
حيث $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ عدد حقيقي أي يمكننا اعتباره k:

$$\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AB}$$

وهذا يعني أن A و B و G على استقامة واحدة.

وهذا يعني انه يمكن اثبات أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة بإثبات أن إحداهما م أ م للنقطتين الباقيتين.

التمرين (1)



I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ ولدينا النقطتان E و F تحققان:

$$\overrightarrow{AE}=a.\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BF}=a.\overrightarrow{BC}$$

و H منتصف $[EF]$ والمطلوب إثبات أن H و I و J على استقامة واحدة.

الحل

- لدينا $\overrightarrow{AE}=a.\overrightarrow{AD}$ إذن E م أ م للنقاط: $(D,a),(A,1-a)$ وأن $(E,1)$.
- لدينا $\overrightarrow{BF}=a.\overrightarrow{BC}$ إذن F م أ م للنقاط: $(C,a),(B,1-a)$ وأن $(F,1)$.

وبما أن H منتصف $[EF]$ فهي م أ م للنقاط $(E,1),(F,1)$

وحسب الخاصة التجميعية H م أ م للنقاط:

$(A,1-a),(B,1-a),(C,a),(D,a)$

- بما أن I منتصف $[AB]$ إذن I م أ م للنقاط: $(A,1-a),(B,1-a)$ وأن $(I,2-2a)$.
- بما أن J منتصف $[CD]$ إذن J م أ م للنقاط: $(C,a),(D,a)$ وأن $(J,2a)$.

فحسب الخاصة التجميعية إن H م أ م للنقاط $(I,2-2a),(J,2a)$ وبالتالي H و I و J على استقامة واحدة.

التمرين (2)

$ABCD$ رباعي وجوه ويوجد:

$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

أثبت أن G م أ م للنقاط $(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$ يقع على $[EF]$ ثم عين G.

الحل

- F م أ م للنقاط $(A,1),(D,2)$ وأن $(F,3)$.
- E م أ م للنقاط $(B,3),(C,1)$ وأن $(E,4)$.

فحسب الخاصة التجميعية G م أ م $(E,4),(F,3)$ وبالتالي إن G و E و F على استقامة واحدة:

$$\overrightarrow{FG}=\frac{4}{7}\overrightarrow{FE}$$

■ **إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة :**

إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

فإن إحداثيات مركز الثقل :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

مثال: في معلمٍ متجانس نتأمل النقاط :

$A(1,1,-2),B(2,3,-2),C(4,0,-1)$

و ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

$(A,2),(B,2),(C,-1)$

1- جد إحداثيات G

2- اكتب معادلة الكرة التي مركزها G و نصف قطرها $\sqrt{2}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

■ خاصة الإختزال:

إذا كان G م أ م للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ فإن:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

وشرط تطبيق الإختزال: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

- أما إذا كانت $\alpha+\beta+\gamma=0$ عندئذ يمكن إخفاء M بإصلاح للعلاقة الشعاعية:

مثال1: اختزل العلاقات الآتية:

1) $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

$$3+1-2\neq 0$$

حسب علاقة الاختزال:

$$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=(3+1-2)\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MG}$$

حيث G م أ م للنقاط $(A,3),(B,1),(C,-2)$.

2) $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$$2-1-1=0$$

نخفي M.

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$$
$$=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}$$
$$=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}$$
$$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{IA}$$

حيث I منتصف $[BC]$.

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$$

نضرب ب -1:

$$-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AI}$$
$$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{IA}$$

حيث I منتصف $[BC]$, الرسم للتوضيح:

3) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

$$1+1+1=3\neq 0$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

G م أ م للنقاط:

$$(A,1),(B,1),(C,1)$$

فإن G مركز ثقل المثلث ABC, الرسم للتوضيح:

تذكرة: خاصة التجانس:

إذا كان G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(A,\alpha),(B,\beta)$$

عندها:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

نضرب بـ $k\neq 0$:

$$k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

G مركز أبعاد المتناسبة للنقاط:

$$(A,k\alpha),(B,k\beta)$$

تمرينات ومسائل:

$\frac{21}{43}$: نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ و E و F تحققان:

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

أثبت أن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(A,1),(B,3),(C,1),(D,2)$$

يقع على $[EF]$ ثم عين G.

الحل

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BE}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$$
$$\gamma=1$$
$$\beta+1=4\Rightarrow\beta=3$$

E مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(B,3),(C,1),(E,4)$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{\delta}{\alpha+\delta}\overrightarrow{AD}$$
$$\delta=2,\alpha=1$$
$$(F,3)$$

وبالتالي فإن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$(E,4),(F,3)$$

حسب الخاصة التجميعية فإن G و E و F تقع على استقامة واحدة.

$$\overrightarrow{EG}=\frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$$

وظائف:

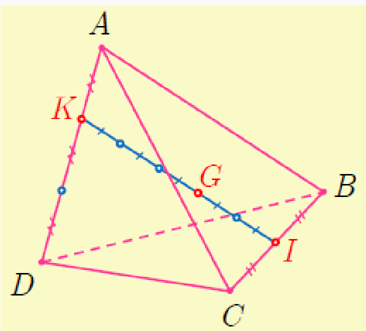
$\frac{25}{44},\frac{10}{31},\frac{2}{35},\frac{1}{35},\frac{7}{96},\frac{2}{94},\frac{1}{94}$

مع تدرب صفحة 81 و82.

مسائل عامة في مركز الأبعاد المتناسبة:

$\frac{1}{31}$: بالإستفادة من المعلومات في الشكل عين الأعداد a و b و c و d ليتحقق ما يلي:

1) K م أ م للنقطتين $(A,a),(D,d)$.



2) I م أ م للنقطتين $(B,b),(C,c)$.

3) G م أ م للنقاط:

$$(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)$$

الحل

1) من الشكل نلاحظ أن K م أ م للنقاط $(A,2),(D,1)$ و $(K,3)$.

2) من الشكل نلاحظ أن I م أ م للنقاط $(B,1)$, $(C,1)$ و $(I,2)$.

3) من الشكل نلاحظ أن G م أ م للنقاط $(K,3),(I,2)$:

لما كان K م أ م للنقطتين $(A,2),(D,1)$ فحسب التجانس نضرب بـ $\frac{2}{3}$:

$$\left(A,\frac{4}{3}\right),\left(D,\frac{2}{3}\right),(K,2)$$

لما كان I م أ م للنقطتين $(B,1),(C,1)$ فحسب خاصة التجانس نضرب بـ $\frac{3}{2}$:

$$\left(B,\frac{3}{2}\right),\left(C,\frac{3}{2}\right),(I,3)$$

حسب الخاصة التجميعية إن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$$\left(A,\frac{4}{3}\right),\left(B,\frac{3}{2}\right),\left(C,\frac{3}{2}\right),\left(D,\frac{2}{3}\right)$$

إذن:

$$a=\frac{4}{3}\,,b=\frac{3}{2}\,,c=\frac{3}{2}\,,d=\frac{2}{3}$$

4/31: ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. و k عدد حقيقي غير معدوم ولا يساوي 1، ولتكن I و J و K و L النقاط المعرفة وفق:

$$\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AJ}=k\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{CK}=k\overrightarrow{CD}\,,\overrightarrow{CL}=k\overrightarrow{CB}$$

1) أثبت أن:

$$\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{LK}$$

واستنتج أن النقاط I و J و K و L تقع في مستوي واحد.

2) ما طبيعة الرباعي $IJKL$؟

الحل

1) لدينا:

- $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}$

$=-k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}=k\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{BD}$

- $\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{CK}=-\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{CK}$

$=-k\overrightarrow{CB}+k\overrightarrow{CD}=k\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{LK}=k\overrightarrow{BD}$

بما أن $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ بالتالي المستقيمان (IJ) و (LK) متوازيان وهما يقعان في مستوي واحد.

الرسم للتوضيح:

2) بما أن $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ وبالتالي $IJKL$ متوازي أضلاع.

10/41: A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة و E و D تحققان:

$$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE}\,,3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$$

1) أثبت أن A و B و C تقع في مستو واحد.

2) بفرض I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$ أثبت أن A و J و I تقع على استقامة واحدة.

الحل

الرسم:

$$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE}\Rightarrow\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$$

$$3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

نلاحظ أن A و E و C على استقامة واحدة وأن B و D و A على استقامة واحدة وبالتالي المستقيمان (BD) و (EC) متقاطعان في A وبالتالي A و B و C و D و E في مستو واحد.

- حسب المتوسط:

$$2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}\right)$$

$$2\left(\overrightarrow{AI}\right)=\frac{2}{3}\left(2\left(\overrightarrow{AJ}\right)\right)$$

$$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

فالنقاط $A\,,I\,,J$ على استقامة واحدة.

25/44: $ABCDEFGH$ مكعب I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ و M م أ م لـ $(G,1),(A,1),(B,1)$ والمطلوب:

1) أثبت أن M تنتمي إلى $[IJ]$ وعين موضعها.

2) أثبت أن M تنتمي إلى $[KL]$ وعين موضعها.

3) استنتج أن I و J و K و L تقع في مستو واحد، وماهي طبيعة $ILJK$؟

الحل

- I منتصف $[AE]$ وبالتالي I م أ م للنقاط $(A,1),(E,1)$ و $(I,2)$.
- J منتصف $[BG]$ وبالتالي J م أ م للنقاط $(G,1),(B,1)$ وأن $(J,2)$.

حسب الخاصة التجميعية M م أ م للنقاط $(I,2),(J,2)$ إذن M تقع في منتصف $[IJ]$.

- بشكل مماثل M تقع في منتصف $[KL]$.

إذن المستقيمان (KL) و (IJ) متقاطعان في M وبالتالي I و J و K و L تقع في مستو واحد.

بما أن قطرا الرباعي $ILJK$ متناصفان فإن الرباعي هو متوازي أضلاع.

$\frac{2}{94}$: $ABCD$ رباعي وجوه, أثبت أن النقاط M و B و C و D تقع في مستو واحد ثم وضع النقطة M:

1) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

M مركز أبعاد متناسبة للنقاط وبالتالي النقاط تقع في مستو واحد، و M مركز ثقل المثلث BDC.

2) $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

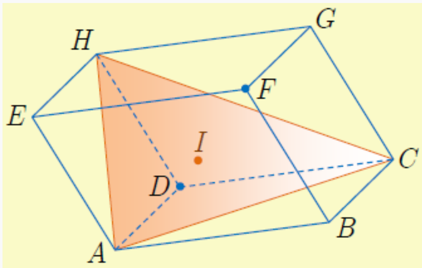
فإن M م أ م للنقاط $(B,1),(C,1),(D,2)$ ولتوضيع M:

نفرض I م أ م لـ $(C,1),(B,1)$ إذن I منتصف $[BC]$ و $(I,2)$

فحسب الخاصة التجميعية M

م أ م $(D,2),(I,2)$ وبالتالي M منتصف $[DI]$.

$\frac{5}{95}$:



I مركز ثقل المثلث AHC, أثبت أن I و D و F على استقامة واحدة وعين موقع I على $[DF]$:

الحل

لدينا:

- $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}$
- $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CI}$
- $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HI}$

بالجمع نجد:

$$3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}+\underbrace{\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{HI}\right)}_{=\vec{0}}$$

لأن I مركز ثقل AHC

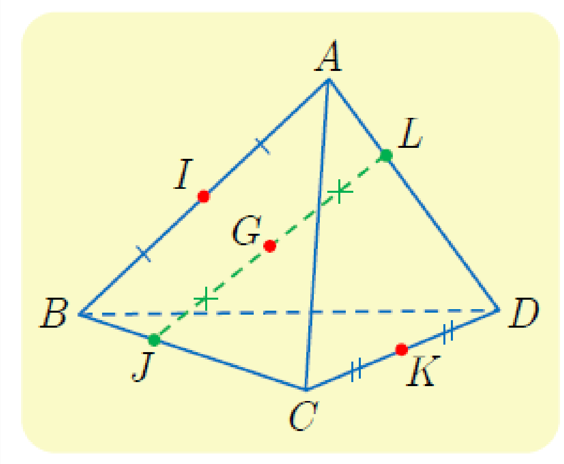
$$3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}$$
$$=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DH}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DF}$$
$$\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$$

I و D و F على استقامة واحدة.

مثال: $ABCD$ رباعي وجوه و K و I منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[CD]$ على الترتيب و النقطتان J و L معرفتان بالعلاقتين:

$$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ و أخيراً G منتصف $[JL]$ أثبت أن النقاط G و I و K على استقامة واحدة



مسألة مستويات متقاطعة :

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ما . و لنعرف النقاط P,Q,S,R بالشكل :

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\ ,\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}\ \ ,\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

نهدف إلى إثبات تلاقي المستويين (PQ) و (RS)

1- أثبت أن P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (B,β) , (C,γ) و أن Q مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(D,\delta)$ حيث $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ثوابت يُطلب تعيينها

2- ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(A,1),(B,4),(C,1),(D,3)$$

أثبت أن G تقع على المستقيم (PQ)

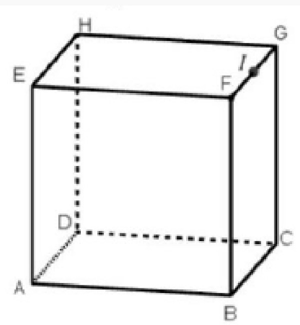
3- أثبت بأسلوب مماث أن G تقع على المستقيم (RS)

4- استنتج تقاطع المستقيمين $(PQ),(RS)$

اختبار

السؤال (1)

في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب و I منتصف $[FG]$ والمطلوب:



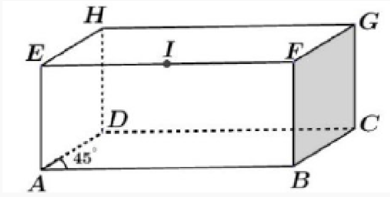
عين النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}$$

السؤال (2)

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$ وقياس الزاوي $\widehat{DAB}$ يساوي $45°$ والنقطة I منتصف $[EF]$:

1- احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
2- عين موضع النقطة M التي تحقق:



$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

السؤال (3)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$$A(2,0,1)\,,B(1,-2,1)\,,C(5,0,5)\,,D(6,2,5)$$

1- أثبت أن $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.
2- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث:

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

واستنتج أن النقاط A,B,C,D تقع في مستو واحد.

السؤال (4)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(2,1,2)$ والمستوي $P: 2x+y-2z-4=0$.

1- احسب بعد النقطة A عن المستوي P.
2- اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

السؤال (5)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ والمطلوب:

1- احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ ثم استنتج $\cos(\widehat{BAC})$.
2- إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC, عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

السؤال (6)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-2,1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكون من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة:

$$MA=MB$$

وما طبيعة المجموعة S.

التمرين (1)

نتأمل الهرم $S-ABCD$ قاعدته مربع طول ضلعه 4 ورأسه S.

وطول كل حرف من حروفه الجانبية 4 والنقطة O مرتسم S القائم على القاعدة:

1- احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$.
2- احسب طول القطر CA ثم احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS}$.
3- عين G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$(S,1)\,,(B,3)\,,(A,2)$$

التمرين (2)

المستقيمين d و d' معرفان وسيطياً وفق:

$$d:\begin{cases}x=t+2\\ y=2t+1\,;\ t\in\mathbb{R}\\ z=-t\end{cases}$$

$$d':\begin{cases}x=2s-1\\ y=s-2\ \ ;s\in\mathbb{R}\\ z=3s-2\end{cases}$$

المطلوب:

1- أثبت أن d و d' متقاطعان ثم عين احداثيات I نقطة التقاطع.
2- جد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين d و d'.

التمرين (3)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2,2,4)\,,B(2,0,-2)$:

1- اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.
2- اعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ، ما طبيعة المجموعة S؟

المسألة (1)

$ABCDEFG$ مكعب طول حرفه يساوي 2, نتأمل المعلم المتجانس في المعلم $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD}=2\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$:

1- اكتب معادلة المستوي (GBD).
2- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (EC).
3- جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD).
4- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$$

5- أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC).

المسألة (2)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$$A(1,1,0)\,,B(1,2,1)\,,C(4,0,0)$$

1- أثبت أن النقاط $C\,,B\,,A$ ليست على استقامة واحدة.
2- أثبت ان معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:
$$x+3y-3z-4=0$$
3- ليكن المستويان:

$$P: x+2y-z-4=0$$

$$Q: 2x+3y-2z-5=0$$

أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC).
5- احسب بعد A عن المستقيم d.

المسألة (3)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$$E(1,-1,1)\,,D(0,4,0)\,,C(4,0,0)$$

$$B(1,0,-1), A(2,1,3)$$

1- جد $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CE}\,,\overrightarrow{CD}$.
2- أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.
3- أثبت أن (AB) يعامد للمستوي (CDE).
4- اكتب معادلة المستوي (CDE).
5- احسب بعد B عن المستوي (CDE).
6- اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي (CDE).

المسألة (4)

نتأمل في معلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$.

1- اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط:

$$A\,,C\,,H\,,F\,,D$$

2- اكتب معادلة المستوي (ACH).
3- أثبت أن المستوي P الذي معادلته:

$$P: -2x+2y-2z+1=0$$

يوازي المستوي (ACH).

4- بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن D و I و F على استقامة واحدة.
5- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S.

المسألة (5)

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$$P: 2x-y+2z-2=0$$

$$Q: x+y+z-1=0$$

$$R: x-z-1=0$$

1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعان مشترك Δ, اكتب تمثيله الوسيطي.
2- تحقق أن المستوي يعامد Δ ويمر بالنقطة A.
3- أثبت أن المستويات $P\,,Q\,,R$ تتقاطع بالنقطة I يطلب تعيين احداثياتها.
4- استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

المسألة (6)

$EABCD$ هرم رباعي رأسه E وقاعدته مربع طول ضلعه 3, $[AE]$ عمودي على $(ABCD)$ و $EA=3$.

نختار المعلم المتجانس:

$$\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$$

1- عين إحداثيات $A\,,B\,,C\,,D\,,E$.
2- جد معادلة المستوي (EBC).
3- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).
4- استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC).
5- احسب حجم رباعي الوجوه $AEBC$.

المسألة (7)

مكعب طول حرفه 2, O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$.

نختار معلم متجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$. والمطلوب:

1- جد إحداثيات النقاط A و B و G و H و O.
2- أعط معادلة المستوي (GOB).
3- احسب $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$.
4- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC).
5- أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).
6- جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ).

المسألة (8)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$$A(-1,2,3)\,,B(2,1,1)\,,C(-3,4,-1)\,,D(3,1,1)$$

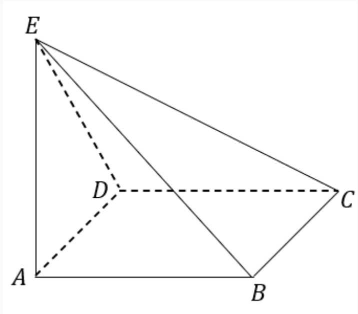
1- جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبين أن المستقيمين (AB) و (AC) متعامدان.
2- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).
3- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC).

4- احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.

5- بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$ أثبت أن المستقيمين (CG) و (AB) متوازيان.

المسألة (9)

$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته مربع, المستقيم $[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$, $AB=4$ و $AE=3$. نتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:



1- جد إحداثيات النقاط الرؤوس.

2- جد إحداثيات النقطة M التي تحقق:

$$4\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CE}$$

3- احسب $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BC}$ واستنتج نوع المثلث EBC ثم احسب مساحته.

4- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC).

5- اكتب معادلة المستوي (EBC) واحسب بعد النقطة A عن المستوي (EBC) ثم استنتج حجم الهرم $AEBC$.

المسألة (VIE 1)

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط:

$D(1,1,1)\,,C(0,0,1)\,,B(0,1,0)\,,A(1,0,0)$

1- جد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC, وأثبت أن (OG) عمودي على المستوي (ABC).

2- جد معادلة المستوي (ABC).

3- نعرف النقاط $A'(2,0,0)\,,B'(0,2,0)\,,C'(0,0,4)$ للمستوي $A'B'C'$. أثبت أن $2x+2y+z-4=0$ معادلة المستوي $(A'B'C')$.

4- أثبت أن Δ الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$ يقبل التمثيل الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=3-t;t\in\mathbb{R} \\ z=-2 \end{cases}$$

5- احسب بعد النقطة $D(1,1,1)$ عن المستقيم Δ.

6- احسب حجم رباعي الوجوه $A'-OB'C'$

7- احسب بعد النقطة O عن المستوي $(A'B'C')$ ثم استنتج مساحة المثلث $A'B'C'$.

المسألة (VIE 2)

لتكن S الكرة التي مركزها $A(1,1,1)$ ونصف قطرها $r=3$ والمستوي:

$$P:x-z=1$$

أثبت أن المستوي P يقطع الكرة S في دائرة C, عين مركزها ونصف قطرها