المتابعة المنزلية - التحليل

أولاً : حالات عدم التعيين

السؤال الأول: احسب كل من النهايات الآتية:

$\lim_{x\to0^+} \sin x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$	3	$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2}\right)$	2	$\lim_{x\to0} x\ln^2 x$	1
$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$	6	$\lim_{x\to+\infty} x - x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$	5	$\lim_{x\to0^+} x(\ln x-1)$	4
$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$	9	$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$	8	$\lim_{x\to1}(2-x)^{\frac{1}{x-1}}$	7

السؤال الثاني: احسب كل من النهايات الآتية:

$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$	3	$f(x)=x-\ln x$	2	$f(x)=\frac{\ln x}{x}$	1
$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$	6	$f(x)=\frac{x}{\ln x}$	5	$f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$	4
$f(x)=\frac{x-\ln x}{x}$	9	$f(x)=\frac{1}{x}(\ln x-1)$	8	$f(x)=x(1-\ln x)$	7
$f(x)=\frac{x\ln x}{x-1}$	12	$f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$	11	$f(x)=\frac{x+1}{\ln x}$	10
$f(x)=\frac{\ln(1+\sin x)}{x}, a=0$	15	$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$	14	$f(x)=\ln(2x+1)-\ln(x)$	13
$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	18	$f(x)=\frac{\ln\sqrt{x}}{x}, a=+\infty$	17	$f(x)=\frac{\ln(\sqrt{x}+1)-\ln\sqrt{2}}{x-1}; a=1$	16
$f(x)=\ln(x)-e^x$	21	$f(x)=\frac{2e^x+1}{1+e^x}$	20	$f(x)=e^x-x^2$	19
$f(x)=\frac{e^x-1}{x-1}$	24	$f(x)=(3-x)e^x$	23	$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$	22
$f(x)=2xe^{-x}$	27	$f(x)=\ln(e^x+2)$	26	$f(x)=\frac{e^x-1}{2x}$	25
$f(x)=x-\ln(e^x+1)$, $a=+\infty$	30	$f(x)=e^{2x}-x-2$	29	$f(x)=2x-1+e^{-x}$	28

المتابعة المنزلية - التحليل

ثانياً : المقاربات و الأوضاع النسبية

السؤال الأول: ليكن f التابع المعرف وفق:

$$f(x) = 5 - 2x + \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

عين معادلة المقارب المائل للخط البياني للتابع f وادرس الوضع النسبي لهما.

السؤال الثاني: ليكن التابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = x - 1 + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

استنتج معادلة المقارب المائل للخط البياني C_f ثم ادرس الوضع النسبي على المجال $[0,2\pi]$.

السؤال الثالث: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$$

1- احسب نهاية f عند اطراف مجموعة تعريفه.

2- احسب نهاية التابع $f(x) - \sqrt{2}x$ ثم استنتج معادلة المقارب المائل عند $+\infty$.

3- جد $f'(x)$

4- ليكن $g(x) = \sqrt{2\sin^2 x + \sin x + 1}$ أثبت أن g اشتقاقي على المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$، ثم استنتج مشتق g.

السؤال الرابع: ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x) = ln(e^x + 1) + x$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x)$ و فسر النتيجة هندسياً

2- أثبت أن $d: y = x$ مقارب مائل للخط c_f في جوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط c_f مع d

ثالثاً : الاستمرار و قابلية الاشتقاق و تابع الجزء الصحيح

السؤال الأول:

$f(x) = 2x + E(x) \ : x \in [0,3[$

1- اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$

2- ادرس استمرار f على المجال $[0,3[$

3- ارسم c_f

4- احسب النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}$

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,3]$ وفق: $f(x) = 1 + E(x)$

1- اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$.

2- ارسم C_f.

3- هل التابع مستمر على المجال $[0,3]$؟

السؤال الثالث: ليكن f التابع المعرف على $[0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1 - lnx) & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

1- احسب $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ و ماذا تستنتج؟

2- اكتب معادلة مماس للخط c_f عند الصفر

3- جد قيمة تقريبية للعدد $f(0.2)$

السؤال الرابع: ليكن $f(x) = \frac{x+|x|}{x+2}$

1- ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر

2- اكتب معادلة نصف المماس من اليمين للتابع f

المتابعة المنزلية - التحليل

السؤال الخامس: ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & : x\neq 0\\ 1 & : x=0\end{cases}$$

1- أثبت أن f مستمر عند الصفر

2- احسب $f'(x)$ على R^*

السؤال السادس: ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x)=2^{x^2}$

1- أثبت أن $f(x)=e^{x^2 ln2}$

2- جد $f(1), f'(x)\,, f'(1)$

3- استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^{x^2}-2}{x-1}$

السؤال السابع: ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=\frac{x+2}{|x|+1}$. ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر

رابعاً : التفسير الهندسي للنهايات

السؤال الأول: ليكن f التابع المعرف على $[1,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{3x+2}{x+1}$ و المطلوب:

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسياً

2- جد عدداً حقيقياً A يحقق أن $f(x)\in\,]2.99,3.01[$ عندما $x>A$

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرف على المجال $]3,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ والمطلوب:

1- جد العددين a و b ليكون $f(x)=a+\frac{b}{x-3}$ ثم احسب النهاية عند $x=4$.

2- جد مجالاً I مركزه 4 بحيث $f(x)\in\,]6.9\,,7.1[$ أيا تكن $x\in I$.

السؤال الثالث: ليكن f التابع المعرف وفق :

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+3}$$

1- جد نهاية f عند $+\infty$

2- جد عدداً حقيقياً A يحقق أن $f(x)=\,]0.99,1.01[$ عندما $x>A$

خامساً : المشتقات من مراتب عليا

السؤال الأول: ليكن f التابع المعرف وفق :

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

1- احسب $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$

2- أثبت بالتدريج أنه من أجل $n\geq 1$ يكون $f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

السؤال الثاني: ليكن f التابع المعرف وفق :

$$f(x)=xe^x$$

1- احسب $f'(x), f''(x)$

2- أثبت بالتدريج أنه من أجل $n\geq 1$ يكون $f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$

السؤال الثالث: ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=lnx-sinx$

1- أثبت أن $f'(x)=\frac{1}{x}-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

2- أثبت بالتدريج من أجل $n\geq 1$ صحة القضية $f^{(n)}(x)=\frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{x^n}-\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

المتابعة المنزلية - التحليل

سادساً : المعادلات و المتراجحات

السؤال الأول: حل كل من المعادلات أو المتراجحات الآتية:

1	$-\ln(3x-4)+\ln(x^2-4)=0$	2	$\ln(x^2-4)\le \ln(-3x)$
3	$\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$	4	$-\ln(x+1)+\ln(x-2)=2$
5	$(\ln x)^2-5\ln x=6$	6	$(\ln x)^2-5\ln x+6\le 0$
7	$\begin{cases}(\ln x)(\ln y)=-12\\ \ln(xy)=1\end{cases}$	8	$\begin{cases}x\,.\,y=4\\ \ln^2(x)+\ln^2(y)=\frac{5}{2}\ln^2(2)\end{cases}$

السؤال الثاني: حل كل من المعادلات أو المتراجحات الآتية:

1	$\boldsymbol{e^{x^2-2}\le e^{4-x}}$	2	$\boldsymbol{e^{2x^2-1}\ge 3}$
3	$e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$	4	$e^x+\frac{e}{e^x}=1+e$
5	$e^{2x}-2e^{-x}-3<0$	6	$e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0$
7	$\frac{e^{-x}-1}{e^x-1}=-2$	8	$\frac{2^x}{2^x+1}<\frac{1}{3}$
9	$4^x+2^{x+1}-3\le 0$	10	$2^{x+1}-10\times 2^x+12\ge 0$
11	$3^{x+1}+2\times 3^{-x}\ge 7$	12	$\begin{cases}e^x-\frac{1}{2}e^y=1\\ 2e^x+e^y=4+e\end{cases}$
13	$\begin{cases}3^{x+y}=9\\ 3^x+3^y=4\sqrt{3}\end{cases}$	14	$\begin{cases}e^{4x}e^y=\frac{1}{e^2}\\ xy=-2\end{cases}$
15	$3^x+6\left(\frac{1}{3}\right)^x=-5$		**Keep going.. Tomorrow is the End**

السؤال الثالث: عين حل المعادلة $y'+5y=0$ علماً أن الخط البياني C للحل يمر من النقطة $A(-2,1)$

السؤال الرابع: عين قيمة λ ليكون التابع:

$$f(x)=(x+2)e^{-x}$$

حل للمعادلة التفاضلية :

$$y'+y=\lambda e^{-x}$$

السؤال الخامس: ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln(e^x+e^{-x}-1)$ أثبت أن f هو حل للمعادلة التفاضلية :

$$y+\ln(y')=\ln(e^x-e^{-x})$$

السؤال السادس: أوجد عدد حلول المعادلة:

$$x(2x+1)^2=5$$

السؤال السابع: أثبت أنه أيا كان $x>-1$ كان $\ln(x+1)\le\sqrt{x+1}$.

السؤال الثامن: أثبت أن $e^x>x$ مهما يكن $x\in R$

سابعاً : التكامل و التوابع الأصلية

السؤال الأول: اوجد التابع الأصلي لـ f أو احسب التكامل المحدد في كل مما يأتي:

1	$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x}$	2	$\int_1^4\frac{1}{(2x-1)^2}\,dx$
3	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$	4	$f(x)=\sqrt{x}-\cos(x)$
5	$f(x)=\tan^2x$	6	$\int_1^e\frac{lnx}{x}dx$
7	$\int_2^e\frac{1}{x\ln(x)}dx$	8	$f(x)=\frac{1}{x^2-6x+9}$
9	$f(x)=\frac{x}{x^2+3}$	10	$f(x)=\frac{x^3+2}{x^2-x-2}\ ;\ I=]-1,2[$
11	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\cos(2x)}\,dx$	12	$f(x)=\sin(x)\cos(2x)$
13	$f(x)=\frac{1}{\sin(2x)}$	14	$\int_1^5\lvert 2x-4\rvert\,dx$
15	$I=\int_0^2\min(x,x^2)\,dx$	16	$f(x)=\frac{lnx}{x^2}$

المتابعة المنزلية - التحليل

السؤال الثاني: انطلاقاً من المتراجحة $cosx \leq 1$ و من أجل $x \in [0, b]$ أثبت صحة المتراجحتين :

$$sinb \leq b$$

$$1 - cosb \leq \frac{b^2}{2}$$

السؤال الثالث: أثبت أن التابع $F(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x) = 2(2\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)$ ثم احسب التكامل: $\int_0^\pi f(x)dx$.

السؤال الرابع:

1- جد منشور $\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4$ ثم اكتب $\sin^4 x$ بدلالة النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية

2- احسب $\int_0^\pi \sin^4 x \, dx$

السؤال الخامس: ليكن لدينا المقدارين :

$$I = \int_0^\pi \frac{cosx}{sinx + cosx} dx \quad , \quad J = \int_0^\pi \frac{sinx}{sinx + cosx} dx$$

1- احسب قيمة كلٍ من $I + J, I - J$

2- استنتج قيمة كلٍ من I و J

السؤال السادس: ليكن f التابع المعرف على R وفق : $\boldsymbol{f(x) = sin2x\cos^2 x}$

1- اثبت أن $\mathrm{f(x)} = 2\mathrm{sinx}\cos^3 x$

2- جد التابع الأصلي للتابع f الذي ينعدم عندما $x = \pi$ (تلميح: عندما توجد التابع الأصلي $F(x) + k$ ضع صورة العدد π تساوي الصفر و احسب قيمة k)

السؤال السابع: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ حيث $f(x) = kx(4 - x)$ عيّن قيمة k إذا علمت أن مساحة السطح المحصور بين C_f ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ تساوي $\frac{4}{3}$.

ثامناً : التقابل و التقابل العكسي

السؤال الأول: ليكن التابع f المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$$

1- ادرس تغيرات التابع f.

2- ادرس الوضع النسبي للتابع مع مقاربه.

3- ارسم الخط البياني للتابع f.

4- أثبت أن f تقابل على I.

5- استنتج تقابله العكسي.

السؤال الثاني: ليكن التابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

1- ادرس تغيرات التابع f.

2- ارسم الخط البياني للتابع f.

3- أثبت أن f تقابل على I.

4- استنتج تقابله العكسي.

تاسعاً : تتمات

السؤال الأول: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = 2\sqrt{x + 1} - x$$

بفرض A , B , C ثلاث نقاط من C_f فواصلها على الترتيب هي:

0 و -1 و 3 والمطلوب: أثبت أن المماس للخط C_f في النقطة A يوازي المستقيم (BC)

المتابعة المنزلية - التحليل

مسائل تغيرات

السؤال الأول: **أولاً :** ليكن g التابع المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق $g(x)=x^2+lnx-1$:

1- ادرس تغيرات g و نظم جدولاً با

2- أثبت أن $\alpha=1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

ثانياً : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ بالشكل $f(x)=x+1-\frac{lnx}{x}$:

1- احسب نهايات f عند أطراف المجال و فسر النتيجة هندسياً

2- أثبت أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج جدول تغيرات f

3- عين القيمة الحدية للتابع f و استنتج معادلة المماس الأفقي لـ C

4- أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x+1$ مقارب مائل للخط C ثم ادرس الوضع النسبي

5- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم C

السؤال الثاني:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=e^{-x}\left(1+ln(x)\right)$$

والتابع g المعرف على I وفق:

$$g(x)=\frac{1}{x}-1-ln\,x$$

المطلوب:

1- ادرس تغيرات التابع g ونظم جدولاً بها.

2- بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلاً وحيداً α, ثم تحقق أن $\alpha=1$.

3- جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

4- أثبت أن: $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$

5- مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

6- في معلم متجانس ارسم الخط C_f.

السؤال الثالث:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]-2,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=(x+1)\ln(x+2)$$

وليكن g التابع المعرف على I وفق:

$$g(x)=\frac{x+1}{x+2}+\ln(x+2)$$

1- جد نهاية التابع f عند أطراف المجال I.

2- أثبت أن $f'(x)=g(x)$ واكتب معادلة المماس Δ للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x=-1$.

3- ادرس اطراد التابع $g(x)$ واستنتج اشارته (مستفيداً من نقطة التماس)

4- نظم جدولاً بتغيرات التابع f وارسم خطه البياني ومقاربه الشاقولي.

5- استنتج اطراد المتتالية $u_n=\ln(n+2)^{n+1}$ أيا كان العدد الطبيعي n.

السؤال الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$$

والمطلوب:

1- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي.

2- أثبت ان $f'(x)=\left(1-x^2\right)e^{-x}$

المتابعة المنزلية - التحليل

3- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيم الجدية مبيناً نوعها.

4- ارسم C في معلم متجانس.

5- استنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = (x-1)^2 e^x$$

6- جد مجموعة تعريف التابع:

$$h(x) = \ln(f(x))$$

السؤال الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = e^{-2x} + 2x - 2$$

المطلوب:

1- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x - 2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي للخط C و Δ.

3- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها, ثم بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين في $\mathbb{R}$ أحدهما ينتمي للمجال $[-1, 0]$.

4- ارسم Δ و C, ثم احسب مساحة السطح المحصور بين محور التراتيب و C و Δ والمستقيم $x = 1$.

5- استنتج الخط البياني C' للتابع g المعرف وفق:

$$g : x \mapsto -e^{-2x} + 2x + 2$$

السؤال السادس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 1[$ وفق:

$$f(x) = e^x + \ln(1-x)$$

وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$g(x) = (1-x)e^x - 1$$

المطلوب:

1- ادرس اطراد التابع g واستنتج أن $g(x) \le 0$ مهما تكن $x \in \mathbb{R}$.

2- تحقق أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x-1}$ على المجال $]-\infty, 1[$, ثم ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

3- اكتب معادلة المستقيم المماس T للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

4- في معلم متجانس ارسم المستقيم T, ثم ارسم الخط البياني C للتابع f.

السؤال السابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

1- احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

3- ارسم C.

4- استنتج الخط البياني للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2x}\right)$$

5- استنتج الخط البياني للتابع h المعرف وفق:

$$h(x) = \ln(2) + \ln(x) - \ln(x-1)$$

المتابعة المنزلية - التحليل

السؤال الثامن: ليكن c_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]1,3[$ وفق :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

1- ادرس تغيرات f
2- أثبت أن $I(2,0)$ مركز تناظر
3- ارسم c_f

السؤال التاسع: ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x2^{-x+1}$$

1- عين نهايات التابع f عند أطراف مجموعة التعريف.
2- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
3- ارسم الخط البياني للتابع f.

السؤال العاشر: ليكن التابع g المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق: $g(x) = x - 1 + \ln(x)$

وليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln(x)$.

1- بين $g(1) = 0$ ثم ادرس تغيرات g ونظم جدولاً بها واستنتج إشارة $g(x)$.
2- جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.
3- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ونظم جدول تغيرات f وبين أن $f(x) \geq 0$ أيا كانت $x \in I$.
4- أثبت أن التابع F المعرف على المجال I وفق: $F(x) = xln(x) - x - \frac{1}{2}\ln^2 x$ هو تابع أصلي للتابع f.

5- احسب مساحة السطح المحصور بين C_f ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$.

السؤال الحادي عشر: نعرف تابعاً f على المجال $]-2,+\infty[$ بالشكل $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$

<u>أولاً :</u>

1- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً به و أثبت أنه تقابل ثم أوجد $g(x)$ تقابله العكسي
2- عين إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم $d: y = x$ و c ثم ارسمهما

<u>ثانياً :</u> نتأمل المتتالية $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل دون حسابها

السؤال الثاني عشر:

ليكن التابعان f, g المعرفان على $I =]-1,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad , \quad g(x) = \frac{x}{x+1}$$

1- ادرس اطراد التابع $h(x) = f(x) - g(x)$ على I ثم استنتج إشارة h
2- استنتج الوضع النسبي للخط c_f مع c_g (أي هل c_f فوق c_g أو العكس)
3- أثبت أن c_f و c_g يقبلان مماساً مشتركاً عند النقطة $a = 0$
4- احسب مساحة السطح المحصور بين c_f, c_g و المستقيمان $x = 0$, $x = 1$

السؤال الثالث عشر: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4$$

المتابعة المنزلية - التحليل

1- أثبت أن $\Delta: y = x - 4$ مقارب مائل للخط C_f ثم ادرس الوضع النسبي لهما

2- ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها مبيناً ما للتابع من قيم حدية و ما لخطه البياني من مقاربات توازي المحاور الاحداثية

3- أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلين مختلفين ثم احصر كل منهما بين عددين صحيحين متتاليين

4- ارسم ما وجدته من مقاربات و ارسم C_f

5- احسب مساحة السطح S المحصور بين C_f و Δ و المستقيمين $x = 3 , x = 4$

السؤال الرابع عشر:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n lnx & , \quad x > 0 \\ 0 & . \quad x = 0 \end{cases}$$

1- أثبت أن f_n اشتقاقي عند الصفر ثم احسب f_n'

2- ادرس تغيرات التابع f_n بدلالة n

3- من أجل $n = 1, n = 2$ نحصل على

$$f_1(x) = \begin{cases} xlnx & , \quad x > 0 \\ 0 & . \quad x = 0 \end{cases} \quad , \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2 lnx & , \quad x > 0 \\ 0 & . \quad x = 0 \end{cases}$$

أثبت أن c_1, c_2 الخطان البيانيان للتابعين f_1, f_2 يمران من المبدأ و النقطة $A(1,0)$

4- أثبت أن c_1, c_2 يقبلان مماساً مشتركاً T عند A و اكتب معادلته

5- ارسم T و c_1, c_2

6- احسب مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل و المستقيمان $x = \frac{1}{e}, x = 1$ و المنحني C_{f_2}

السؤال الخامس عشر: ليكن f التابع المعرف على R وفق :

$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x} - 1)$$

1- اثبت أن f زوجي و استنتج الصفة التناظرية

2- أثبت أن $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x} - e^{-x})$ و استنتج معادلة المقارب المائل للخط C_f

3- استنتج أن المستقيم $d': y = -x$ مقارب مائل للخط C_f

4- ارسم d, d' ثم ارسم C_f

5- بفرض g مقصور التابع f على المجال $]0, +\infty[$ أثبت أن g حل للمعادلة التفاضلية:

$$y + \ln(y') = \ln(e^x - e^{-x})$$

6- استنتج الخط البياني للتابع :

$$h(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^{2x} + 1 - e^x}\right)$$

المتتاليات

السؤال الأول: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق :

$$u_0 = 2$$
$$u_{n+1} = 2u_n - 3n + 4$$

و لتكن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية **حسابية** تحقق أن $t_{n+1} = 2t_n - 3n + 4$

1- جد t_n بدلالة n

2- أثبت أن المتتالية $v_n = u_n - t_n$ هندسية ثم اكتب v_n بدلالة n

3- استنتج u_n بدلالة n و أثبت أنها متباعدة

المتابعة المنزلية - التحليل

السؤال الثاني: ليكن التابع f المعرف على المجال $I=[0,1]$ وفق: $f(x)=\frac{7x+2}{x+8}$:

1- ادرس تغيرات f ثم جد $f(I)$

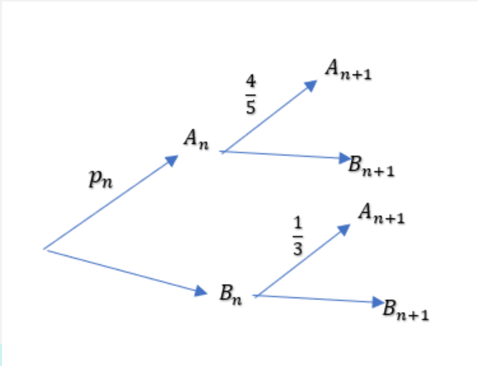
2- نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ وفق $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{7u_n+2}{u_n+8}$

أ- برهن أنّ $0\leq u_n\leq 1$ من أجل $n\geq 0$

ب- احسب u_1,u_2 ثم ادرس اطراد u_n

3- أهي متقاربة ؟ جد نهايتها في حالة الإيجاب

السؤال الثالث : نتأمل الشكل المجاور تمثيلاً



شجرياً لتجربة مكونة من مرحلتين مستقلتين ولنفرض أن $p_{n+1}=P(A_{n+1})$ و المطلوب :

1- جد p_{n+1} بدلالة p_n

2- نضع $v_n=p_n-\frac{5}{8}$. أثبت أن v_n هندسية

السؤال الرابع: بفرض f التابع المعرف على R وفق $f(x)=xe^{-x}$

1- ادرس تغيرات f و نظم جدولاً به

2- نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $u_0=1$ و $u_{n+1}=u_ne^{-u_n}$

أ- أثبت أنه مهما يكن n فإن $0\leq u_n\leq 1$

ب- أثبت أن المتتالية u_n متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة

ت- جد نهاية u_n

السؤال الخامس: ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $u_n=4^n+5$:

1- أثبت بالتدريج u_n مضاعف للعدد 3 مهما يكن $n\geq0$

2- أثبت أن $u_{n+1}-u_n=3\times4^n$ و استنتج جهة اطراد u_n

3- من أجل كل $n\geq0$ نضع $v_n=\frac{1}{u_{n+1}-u_n}$ أثبت أن v_n هندسية و احسب نهايتها

السؤال السادس: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0=1 \ ,u_1=5 \\ u_{n+1}=\frac{5}{2}u_n-u_{n-1}\ ;n\geq1 \end{cases}$$

ولتكن المتتالية v_n المعرفة وفق:

$$v_n=u_{n+1}-2u_n$$

1- أثبت أن المتتالية v_n هندسية واستنتج أن $v_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2- اكتب بدلالة n المجموع $S_n=v_2+v_4+\cdots+v_{2n}$ واستنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq1}$.

3- ادرس اطراد المتتالية $(S_n)_{n\geq1}$ وبين أنها متقاربة.

السؤال السابع: نتأمل المتتالية $u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

المتابعة المنزلية - التحليل

1- بين أنه يوجد عددين a,b يحققان أن

$$u_n = a + b\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

نضع $t_n = 1 + \frac{1}{n}$ أثبت أن $(u_n),(t_n)$ متجاورتان

السؤال الثامن: لتكن الحدود a,b,c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية متزايدة تحقق: $a+b+c=39$ ، $a.b.c=729$ احسب a و b و c.	**السؤال التاسع:** لتكن الحدود a,b,c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية متزايدة تحقق: $a+b+c=15$ ، $a^2+b^2+c^2=107$ احسب a و b و c ثم استنتج u_n بدلالة n إذا علمت أن $a=u_0$.
السؤال عاشر: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها: $u_0=\lambda$ ، $u_1=1+\lambda$ ، $u_2=3+\lambda$ 1- عين قيمة λ. 2- من أجل $\lambda=1$ عين u_n بدلالة n.	درسو دروسووووو......... هانت

السؤال الحادي عشر:

بفرض a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ تحقق أن:

$$a+b+c=9$$

1- احسب b

2- بفرض أساس المتتالية $r>0$, اكتب a و c بدلالة r ثم عين قيمة r إذا علمت أن $a.c=-16$ ثم استنتج a و c.

3- اكتب الحد العام للمتتالية u_n إذا علمت أن $u_n=a$.

4- احسب قيمة المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

5- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}$.

قراءة الخطوط البيانية والجداول

السؤال الأول: نجد جانباً جدول تغيرات التابع f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + + + + +$	0	$- - - - - - - - -$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

والمطلوب:

1- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

2- ما عدد القيم الحدية للتابع f؟

3- اكتب معادلة المماس للتابع عند النقطة التي فاصلتها $a=1$.

السؤال الثاني: نجد فيما يأتي جدول تغيرات

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب:

1- اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو افقي للخط البياني C.

2- هل يوجد مقاربات مائلة للخط C؟

3- هل يوجد مماسات أفقية للخط C؟

4- أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-1,1[$.

السؤال الثالث: نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - - - -$	‖	$+ + 1$	‖	$-2 - - - - - -$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	‖ 0	$\searrow$	-3

المتابعة المنزلية - التحليل

1- اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو افقي للخط البياني C.

2- هل يوجد مقاربات مائلة للخط C؟

3- هل يوجد مماسات أفقية للخط C؟

4- هل f اشتقاقي عند 3؟

5- عين القيم الحدية للتابع f.

السؤال الرابع: ليكن f تابعاً مستمراً على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, خطه البياني C_f. جدول تغيراته الآتي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	3	↘	2	↗	3 ‖ $-\infty$	↗	1

1- جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه ثم استنتج معادلة كل مقارب افقي أو شاقولي لخطه البياني C_f.

2- هل يوجد أي مقاربات مائلة للخط البياني C_f؟ علل إجابتك.

3- أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

4- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

5- ما حلول كل من المتراجحتين الآتيتين:
$f'(x)\geq 0\,,f(x)>2$

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ جدول تغيراته المجاور:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-2	↗	0

1- ما نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه؟

2- ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<0$؟

3- احسب $f(2)$ و $f'(2)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↗	4	↘	2

4- عين $f(]-2,2])$.

السؤال السادس: نتأمل تابعاً f معرفاً على $\mathbb{R}$ وخطه البياني C. جدول تغيراته موضح جانباً:

1- ما مجموعة تعريف f'؟

2- أوجد معادلة كل مقارب افقي للتابع f. وهل يمكن أن يكون للخط البياني أي مقاربات مائلة؟ علل إجابتك.

3- ما عدد حلول المعادلة $f(x)=2$

4- هل يقبل C أي مماسات افقية؟

5- هل f تابع محدود؟

السؤال السابع: ليكن f تابعاً معرفاً واشتقاقياً على المجال $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ خطه البياني C_f. جدول تغيراته هو المجاور:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

1- جد نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- اكتب معادلة كل مقارب افقي أو شاقولي للخط البياني C_f.

3- هل يقبل الخط البياني أي مقاربات مائلة؟

4- عين حلول المتراجحة $f'(x)\leq 0$.

المتابعة المنزلية - التحليل

5- أوجد حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$.

6- عين $\lim_{x\to 0} f\left(f(x)\right)$.

السؤال الثامن: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]-\infty, 3]$ والاشتقاقي على $I\setminus\{2\}$. جدول تغيراته الآتي:

x	$-\infty$		-1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$-3 \| 1$	$+$	
$f(x)$	3	↘	0	↘	-4	↗	0

1- هل $f(-1)$ قيمة حدية محلياً؟

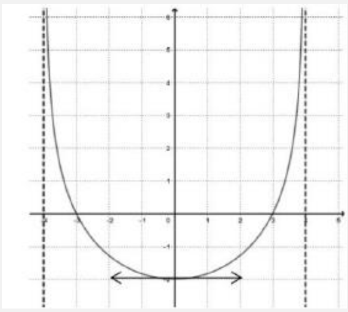
2- دل على القيم الحدية محلياً مبيناً نوعها.

3- اكتب معادلة نصف المماس اليساري في النقطة التي فاصلتها -3.

4- ما حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$.

5- جد $f(]-\infty, 3])$.

السؤال التاسع: في الشكل المجاور c الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-4,4[$:



1- احسب $\lim_{x\to 4} f(x)$ و $\lim_{x\to -4} f(x)$ ثم استنتج معادلة كل مقارب.

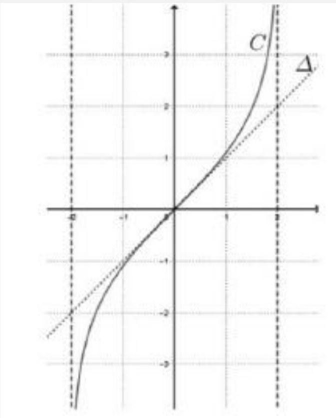
2- احسب $f(0)$ و $f'(0)$.

3- جد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

4- ما حلول المتراجحة $f'(x) < 0$.

السؤال العاشر:

c الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-2,2[$:



1- احسب $\lim_{x\to 2} f(x)$ و $\lim_{x\to -2} f(x)$.

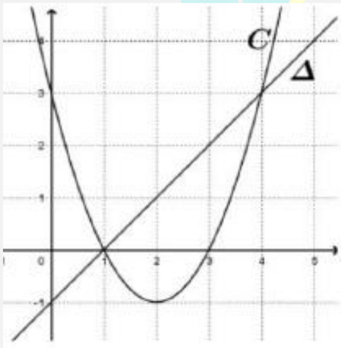
2- أوجد $f(0)$ و $f'(0)$.

3- هل التابع f فردي أم زوجي؟ برر ذلك.

4- اكتب معادلة المماس Δ.

السؤال الحادي عشر:

ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$:



1- دل على القيم الحدية وبين نوعها.

2- جد $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

3- ماهي حلول المعادلة $f(x) = y_{\Delta}$.

4- اكتب معادلة Δ.

5- ناقش حسب قيم m حلول المعادلة $f(x) = m$.

6- ارسم الخط البياني للتابع g المعرف وفق $g(x) = f(x) + 1$.

المتابعة المنزلية - التحليل

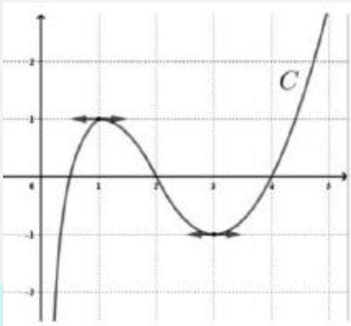
7- ارسم الخط البياني للتابع h المعرف وفق $h(x) = |f(x)|$.

8- ارسم الخط البياني للتابع k المعرف وفق $k(x) = f(x+1)$.

9- ارسم الخط البياني للتابع l المعرف وفق $l(x) = f(x+1) + 1$.

السؤال الثاني عشر:

ليكن c الخط البياني للتابع المعرف على المجال $]0, +\infty[$:



1- احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

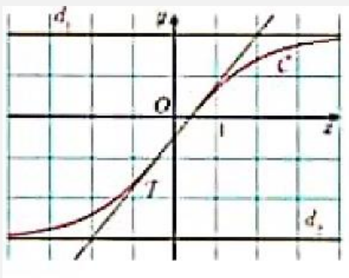
2- دل على القيم الحدية مبيناً نوعها.

3- جد حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$.

4- جد $f([1,3])$.

5- اكتب معادلة كل مماس افقي للتابع.

السؤال الثالث عشر: ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمستقيمين d_1 و d_2 مقاربين للخط c والمستقيم T مماس للخط c:

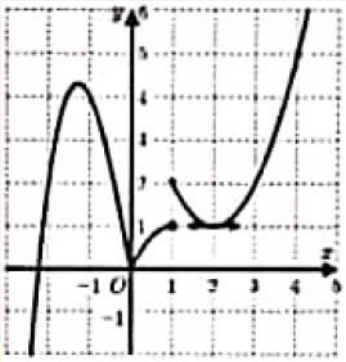


1- احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- اكتب معادلة كلاً من d_1 و d_2.

3- إذا علمت أن المستقيم T يمس المنحني في النقطة $A\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ احسب $f'(0)$ ثم اكتب معادلته.

السؤال الرابع عشر: نجد جانباً الخط البياني c للتابع المعرف على $\mathbb{R}$:



1- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$.

2- ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$.

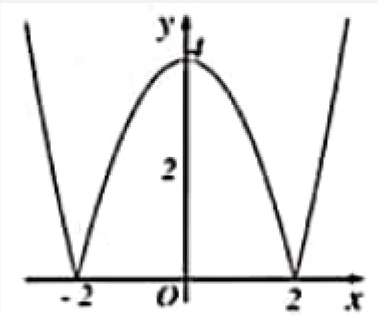
3- هل $f(1)$ قيمة حدية للتابع؟ علل.

4- ما عدد القيم الحدية للتابع f.

5- ما قيمة المشتق عند $x = 2$.

6- أيكون f اشتقاقياً عند الواحد.

السؤال الخامس عشر: ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$:



1- كم حلاً للمعادلة $f(x) = 2$؟

المتابعة المنزلية - التحليل

2- احسب قيمة المشتق عند الصفر واحسب $f(0)$.

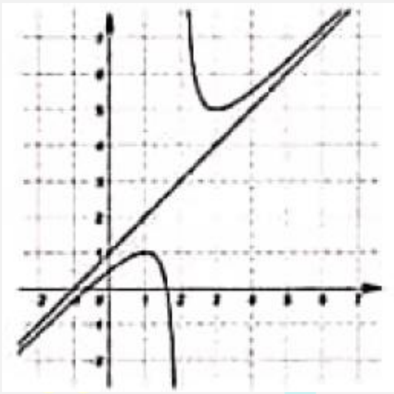
3- عين صورة المجال $[-2,2]$.

4- عين المستقر الفعلي $E_f = f(D_f)$.

5- كم قيمة محلية للتابع؟

6- نظم جدول تغيرات التابع f.

السؤال السادس عشر: ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$:



1- احسب نهايات f عند أطراف مجموعة تعريفه.

2- دل على القيم الحدية مبيناً نوعها.

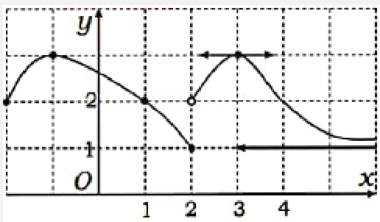
3- ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.

4- احسب نهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

5- اكتب معادلة المقارب المائل للتابع.

6- اكتب احداثيات مركز التناظر للتابع.

السؤال السابع عشر: ليكن c الخط البياني للتابع f:



1- احسب

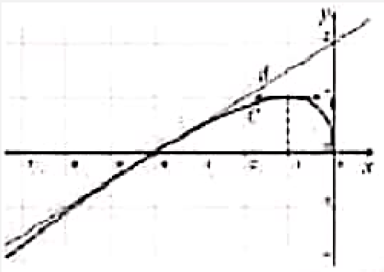
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.

2- هل f اشتقاقي عند 2؟

3- جد $f(3)$ و $f'(3)$ ثم معادلة المماس عند $x = 3$.

4- ما عدد القيم الحدية للتابع f.

السؤال الثامن عشر: ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 0]$:



1- اكتب معادلة المماس d والمماس الأفقي ونصف المماس الشاقولي، وفسر لماذا f غير قابل للاشتقاق عند $x = 0$.

2- نظم جدول تغيرات التابع f.

3- ارسم الخط البياني c' للتابع g المعرف وفق $g(x) = -f(-x)$.