

التمرين الأول:

ليكن لدينا:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

١. احسب S_1 و S_2 و S_3 ٢. عبر عن عبارة S_{n+1} بدلالة S_n

٣. أثبت بالتدريج أنه من أجل كل عدد طبيعي

$$S_n = n^2 \text{ غير معدوم } n \text{ فإن}$$

التمرين الثاني:

نعتبر المجموع:

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

١. احسب S_0 و S_1 و S_2 ٢. أثبت بالتدريج أن $S_n = 2^{n+1} - 1$ التمرين الثالث:أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي الموجب تماماً
كان:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

التمرين الرابع:

أثبت بالتدريج صحة الخاصة الآتية:

$$\langle\langle n^3 - 4n + 6 \rangle\rangle \text{ يقبل القسمة على } 3$$

حيث $n \geq 1$ التمرين الخامس:

$$A_n = 3^{2n} + 2^{6n-5}$$

ليكن العدد A_n مضاعف للعدد 11 حيث $n \in N^*$ التمرين السادس:ليكن لدينا $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بالعلاقة التكرارية:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{n u_n}{n+1} + \frac{1}{n+1} ; n \geq 1 \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

١. احسب u_2 ٢. أثبت بالتدريج أن $u_n < 1$ وذلك أيّاً كانت $n \in N^*$ التمرين السابع:ليكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{u_n^2}{3}} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

١. احسب u_1 ٢. أثبت بالتدريج أن لكل n من N

$$0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$$

التمرين الثامن:نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ كما يأتي:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 6} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

١. أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً٢. استنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ مهما يكن $n \in N$ التمرين التاسع:أثبت أنه أيّاً كان $n \geq 1$ فإن:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

التمرين الأول:

ليكن لدينا: $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ ١. احسب S_1 و S_2 و S_3 ٢. عبر عن عبارة S_{n+1} بدلالة S_n ٣. أثبت بالتدريج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$S_n = n^2$$

الحل:

الطلب الأول:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + 3 = 4$$

$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

الطلب الثاني:

$$S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + 2n + 1$$

$$S_{n+1} = S_n + 2n + 1$$

الطلب الثالث:

* لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n) \Leftrightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

* ثبت صحة القضية $E(1)$:

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = 1$$

$$\rightarrow L_1 = L_2$$

القضية $E(1)$ محققة* نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$:

$$E(n): 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \dots (*)$$

* ثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$: أي نبهن أن:

$$S_{n+1} = (n+1)^2$$

$$L_1 = S_{n+1} = S_n + (2n + 1)$$

$$= 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$$

$$(*) = n^2 + 2n + 1$$

$$= (n+1)^2$$

$$= L_2$$

إذاً القضية $E(n+1)$ محققة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

التمرين الثاني:

نعتبر المجموع: $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$ ١. احسب S_0 و S_1 و S_2 ٢. أثبت بالتدريج أن $S_n = 2^{n+1} - 1$

الحل:

الطلب الأول:

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 1 + 2 = 3$$

$$S_2 = 1 + 2 + 4 = 7$$

الطلب الثاني:

* لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n) \Leftrightarrow 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

* ثبت صحة القضية $E(0)$:

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = 1$$

$$\rightarrow L_1 = L_2$$

القضية $E(0)$ محققة* نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$:

$$E(n): 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \dots (*)$$

* ثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$: أي نبهن أن:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

$$L_1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1}$$

$$(*) = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1} - 1$$

$$= 2^{n+2} - 1$$

$$= L_2$$

إذاً القضية $E(n+1)$ محققة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

التمرين الثالث:

أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي الموجب تماماً كان:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

* لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n) \ll \underbrace{1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}}_{L_1} = \underbrace{\frac{1 - r^n}{1 - r}}_{L_2} \gg$$

* ثبت صحة القضية $E(1)$:

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = \frac{1 - r}{1 - r} = 1$$

$$\rightarrow L_1 = L_2$$

القضية $E(1)$ محققة* نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$:

$$E(n): 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r} \dots (*)$$

* ثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$: أي نبرهن أن:

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n = \underbrace{\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}}_{L_2}$$

$$L_1 = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n$$

$$= \frac{1 - r^n}{1 - r} + r^n = \frac{1 - r^n + r^n - rr^n}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = L_2$$

إذا القضية $E(n+1)$ محققة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

التمرين الرابع:

أثبت بالتدريج صحة الخاصة الآتية: $n^3 - 4n + 6 \gg$ يقبل القسمة على 3 حيث $n \geq 1$ * لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n) \ll n^3 - 4n + 6 \gg \text{ يقبل على القسمة } 3$$

* ثبت صحة القضية $E(1)$:

$$E(1): 1^3 - 4(1) + 6 = 3$$

والعدد 3 يقبل القسمة على 3 إذا القضية $E(1)$ محققة* نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$:

$$E(n) \ll n^3 - 4n + 6 \gg \text{ يقبل على القسمة } 3 \text{ أي يوجد}$$

عدد طبيعي K يحقق: $n^3 - 4n + 6 = 3K$ ومنه:

$$n^3 = 3K + 4n - 6 \dots (*)$$

* ثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$: أي نبرهن أن:

$$3 \text{ يقبل القسمة على } (n+1)^3 - 4(n+1) + 6$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 4n - 4 + 6$$

$$= \underbrace{n^3}_{(*)} + 3n^2 - n + 3$$

$$= 3K + 4n - 6 + 3n^2 - n + 3$$

$$= 3K + 3n^2 + 3n - 3$$

$$= 3(k + n^2 + n - 1)$$

إذا القضية $E(n+1)$ محققة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

التمرين الخامس:

ليكن العدد $A_n = 3^{2n} + 2^{6n-5}$ أثبت أن A_n مضاعف للعدد 11 حيث $n \in \mathbb{N}^*$ * لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n) \ll 3^{2n} + 2^{6n-5} \text{ مضاعف لـ } 11 \gg$$

* ثبت صحة القضية $E(1)$:

$$E(1): 3^2 + 2^1 = 11$$

إذا القضية $E(1)$ محققة* نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$:

$$E(n) \ll 3^{2n} + 2^{6n-5} \text{ مضاعف لـ } 11 \gg \text{ أي يوجد عدد}$$

طبيعي K يحقق: $3^{2n} + 2^{6n-5} = 11K$ ومنه:

$$3^{2n} = 11K - 2^{6n-5} \dots (*)$$

* ثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$: أي نبرهن أن:

$$3^{2n+2} + 2^{6n+1} \text{ هو مضاعف للعدد } 11$$

$$\underbrace{3^{2n}}_{(*)} \cdot 3^2 + 2^{6n+1}$$

$$= (11K - 2^{6n-5}) \cdot 9 + 2^{6n+1}$$

$$= 99K - 9 \cdot 2^{6n-5} + 2^{6n+1}$$

$$= 99K - 9 \cdot 2^{6n-5} + 2^6 \cdot 2^{6n-5}$$

$$= 99K + 2^{6n-5}(-9 + 2^6)$$

$$= 99K + 2^{6n-5}(-9 + 64)$$

$$= 99K + 2^{6n-5}(55)$$

$$= 99K + 55 \cdot 2^{6n-5}$$

$$= 11(9K + 5 \cdot 2^{6n-5})$$

إذا القضية $E(n+1)$ محققة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

التمرين السادس:

ليكن لدينا $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بالعلاقة التكرارية:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{n u_n}{n+1} + \frac{1}{n+1} ; n \geq 1 \\ u_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

١. احسب u_2 ٢. أثبت بالتدريج أن $u_n < 1$ وذلك أيما كانت $n \in N^*$

الطلب الأول:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1 \times u_1}{1+1} + \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

الطلب الثاني:

* لتكن القضية $E(n)$

$$E(n) \ll u_n < 1 \gg$$

* ثبت صحة القضية $E(1)$

$$E(1): u_1 < 1 \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

إذا القضية $E(1)$ محققة* نفرض صحة القضية $E(n)$

$$E(n): u_n < 1 \dots (*)$$

* ثبت صحة القضية $E(n+1)$

$$E(n+1): u_{n+1} < 1$$

لدينا من علاقة الفرض (*):

$$u_n < 1$$

نضرب الطرفين بـ $n > 0$

$$n \cdot u_n < n$$

نقسم الطرفين على $n+1 > 0$

$$\frac{n \cdot u_n}{n+1} < \frac{n}{n+1}$$

نضيف إلى الطرفين $\frac{1}{n+1}$

$$\frac{n \cdot u_n}{n+1} + \frac{1}{n+1} < \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1} < \frac{n+1}{n+1}$$

$$u_{n+1} < 1$$

ومنه القضية $E(n+1)$ محققةإذاً مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة أيما كان $n \in N^*$

التمرين السابع:

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{u_n^2}{3}} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

١. احسب u_1 ٢. أثبت بالتدريج أن لكل n من N

$$0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$$

وذلك أيما كانت $n \in N^*$

الطلب الأول:

$$u_1 = \sqrt{2 + \frac{u_0^2}{3}} = \sqrt{2 + \frac{0}{3}} = \sqrt{2}$$

الطلب الثاني:

* لتكن القضية $E(n)$

$$E(n) \ll 0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3} \gg$$

* ثبت صحة القضية $E(1)$

$$E(1): 0 \leq u_1 \leq 2\sqrt{3} \rightarrow 0 \leq \sqrt{2} \leq 2\sqrt{3}$$

إذا القضية $E(1)$ محققة* نفرض صحة القضية $E(n)$

$$E(n): 0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3} \dots (*)$$

* ثبت صحة القضية $E(n+1)$

$$E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 2\sqrt{3}$$

لدينا من علاقة الفرض (*):

$$0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$$

نربع الطرفين

$$0 \leq u_n^2 \leq 12$$

نقسم الطرفين على 3

$$0 \leq \frac{u_n^2}{3} \leq 4$$

نضيف إلى الطرفين 2

$$2 \leq 2 + \frac{u_n^2}{3} \leq 6$$

نجدد الطرفين:

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + \frac{u_n^2}{3}} \leq \sqrt{6}$$

$$\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{6}$$

$$0 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{6} \leq 2\sqrt{3}$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 2\sqrt{3}$$

ومنه القضية $E(n+1)$ محققةإذاً مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة أيما كان $n \in N^*$

التمرين الثامن:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ كما يأتي:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 6} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

١. أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً٢. استنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

الطلب الأول:

$$f(x) = \frac{3x + 2}{2x + 6}$$

$$f'(x) = \frac{3(2x + 6) - 2(3x + 2)}{(2x + 6)^2}$$

$$= \frac{6x + 18 - 6x - 4}{(2x + 6)^2}$$

$$= \frac{14}{(2x + 6)^2} > 0$$

إذا التابع f متزايد تماماً

الطلب الثاني:

* لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

* ثبت صحة القضية $E(0)$:

$$E(1): \frac{1}{2} < u_0 \leq 1 \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \leq 1$$

إذا القضية $E(0)$ محققة* نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$E(n): \frac{1}{2} < u_n \leq 1 \dots (*)$$

* ثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$E(n+1): \frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$$

لدينا من علاقة الفرض (*):

$$\frac{1}{2} < u_n \leq 1$$

بالاستفادة من تزايد f نجد

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < f(u_n) \leq f(1)$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8} \leq 1$$

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$$

ومنه القضية $E(n+1)$ محققةإذاً بما سبق القضية $E(n)$ صحيحة أي كان $n \in \mathbb{N}$

التمرين التاسع:

أثبت أنه أي كان $n \geq 1$ فإن: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ * لتكن القضية $E(n)$:

$$E(n) \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{L_1} \leq \underbrace{2 - \frac{1}{n}}_{L_2}$$

* ثبت صحة القضية $E(1)$:

$$1 \leq 1$$

$$\rightarrow L_1 \leq L_2$$

القضية $E(1)$ محققة* نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$:

$$E(n): \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \dots (*)$$

* ثبت صحة القضية من أجل $E(n+1)$: أي نبرهن أن:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

$$L_1 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

(*)

$$\leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\leq 2 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\leq 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{n+1+1}{(n+1)^2}$$

$$\leq 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{n+2}{(n+1)^2}$$

$$\leq 2 - \frac{1}{n+1} + \frac{-(n+1)^2 + n^2 + 2n}{n(n+1)^2}$$

$$\leq 2 - \frac{1}{n+1} + \frac{-n^2 - 2n - 1 + n^2 + 2n}{n(n+1)^2}$$

$$\leq 2 - \frac{1}{n+1} + \frac{-1}{n(n+1)^2}$$

$$\leq 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

باستخدام أسلوب تكبير الكسور يهمل

إذاً القضية $E(n+1)$ محققة ومنه القضية $E(n)$ صحيحة

بارك الله الخاطئ..

دُمتُم ودُمتنا في توفيقٍ من الله..