التمرين الأول:

لإثبات أن المتتالية محدودة:

$$4(3) < n^2 + 2n + 4 < 3(n^2)$$

نقسم على 6:

$$2 < \frac{n^2 + 2n + 4}{6} < \frac{n^2}{2}$$

نقلب:

$$2 > \frac{6}{n^2 + 2n + 6} > \frac{2}{n^2}$$

فالمتتالية محدودة من الأعلى بالعدد 2.

التمرين الثاني:

$$u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2 \;;\; u_0 = -\frac{3}{2}$$

1- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): -2 \leq u_n \leq -1$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$-2 \leq -\frac{3}{2} \leq -1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$E(n): -2 \leq u_n \leq -1 \dots\dots \text{الفرض}$$

نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$:

$$E(n+1): -2 \leq u_{n+1} \leq -1 \dots\dots \text{الطلب}$$

البرهان: نعرف تابعاً f على المجال $[0, +\infty[$ حيث:

$$f(x) = x^2 + 4x + 2$$

التابع اشتقاقي على $[0, +\infty[$:

$$f'(x) = 2x + 4 \geq 0$$

فالتابع متزايد.

نصور أطراف الفرض في التابع:

$$f(-2) \leq f(u_n) \leq f(-1)$$
$$-2 \leq u_{n+1} \leq -1$$

فالقضية صحيحة.

2- ننطلق من طرف لنصل إلى آخر:

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 4u_n + 2 - u_n$$
$$= u_n^2 + 3u_n + 2 = (u_n + 2)(u_n + 1)$$

3- نلاحظ من الطلب السابق أن:

$$u_n \leq -1$$
$$u_n + 1 \leq 0$$

وأيضاً:

$$-2 \leq u_n$$
$$0 \leq u_n + 2$$

وإن:

$$u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)(u_n + 2) < 0$$

فالمتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالرقم -2 فهي متقاربة.

لإيجاد نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$
$$x^2 + 4x + 2 = x$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$(x+2)(x+1) = 0$$

إما:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

أو:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

لأن المتتالية متناقصة سنقبل -2 ونرفض -1:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -2$$

التمرين الثالث:

$$u_n = e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \frac{e}{3!} + \cdots + \frac{e}{n!}$$

1- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$1 \leq 2$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ ...... الفرض}$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$E(n+1): \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n} \text{ ...... الطلب}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نضرب بـ $\frac{1}{n+1}$:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n-1}} < \frac{1}{2^n}$$
$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

فالقضية صحيحة.

2- نجد من الطلب السابق:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نضرب بـ e:

$$\frac{e}{n!} \leq \frac{e}{2^{n-1}}$$

من أجل $n = 1$:

$$\frac{e}{1!} \leq \frac{e}{2^0}$$

من أجل $n = 2$:

$$\frac{e}{2!} \leq \frac{e}{2^1}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

من أجل $n = n$:

$$\frac{e}{n!} \leq \frac{e}{2^{n-1}}$$

نجمع المتراجحات من $n = 1$ إلى $n = n$ فنجد:

$$\frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \cdots + \frac{e}{n!} \leq \frac{e}{2^0} + \frac{e}{2^1} + \cdots + \frac{e}{2^{n-1}}$$

نلاحظ في الجانب اليميني أن يوجد مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول e وعدد الحدود n:

$$\frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \cdots + \frac{e}{n!} \leq e\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \cdots + \frac{e}{n!} \leq 2e\underbrace{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}_{\text{يهمل}} < 2e$$

نضيف e للطرفين:

$$e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \cdots + \frac{e}{n!} < 2e + e$$

$$u_n < 3e$$

فإن $3e$ عنصر راجح على المتتالية.

نشكل الفرق:

$$u_{n+1} = \underbrace{e + \frac{e}{1!} + \frac{e}{2!} + \cdots + \frac{e}{n!}}_{u_n} + \frac{e}{(n+1)!}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{e}{(n+1)!} > 0$$

فالمتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

التمرين الرابع:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \ ; \ u_0 = 4$$

1- f اشتقاقي على $]2, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2}{2x^2} > 0$$

فالتابع متزايد.

نعرف القضية $E(n): 2 \leq u_n$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$2 \leq 4$$

محققة

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$E(n): 2 \leq u_n \ \ldots\ldots \text{الفرض}$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$E(n+1): 2 \leq u_{n+1} \ \ldots\ldots \text{الطلب}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$2 \leq u_n$$

نصور الأطراف في التابع:

$$f(2) \leq f(u_n)$$
$$2 \leq u_{n+1}$$

فالقضية صحيحة وال 2 عنصر قاصر.

2- نعرف القضية $E(n): u_{n+1} \leq u_n$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$u_1 \leq u_0$$
$$\frac{5}{2} \leq 4$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$E(n): u_{n+1} \leq u_n \ \ldots\ldots \text{الفرض}$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$E(n+1): u_{n+2} \leq u_{n+1} \ \ldots\ldots \text{الطلب}$$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$u_{n+1} \leq u_n$$

نصور الأطراف في التابع:

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

فالقضية صحيحة والمتتالية متناقصة.

3- بما انها محدودة من الأدنى ومتناقصة فإنها متقاربة ولإيجاد نهايتها نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$
$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x$$
$$\frac{x^2+4}{2x} = x$$
$$x^2 + 4 = 2x^2$$
$$x^2 = 4$$

مرفوض $x = -2$, مقبول $x = +2$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

التمرين الخامس:

$$u_{n+1} = 3u_n - 4\,;u_0 = 1$$

1- لحساب الحدود:

$$u_1 = 3 - 4 = -1$$
$$u_2 = -3 - 4 = -7$$

نعرف القضية $E(n): u_{n+1} \le u_n$

نثبت صحة $E(0)$:

$$u_1 \le u_0$$
$$-1 \le 1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

الفرض ... ... $E(n): u_{n+1} \le u_n$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

الطلب ... ... $E(n+1): u_{n+2} \le u_{n+1}$

البرهان: لدينا من الفرض:

$$u_{n+1} \le u_n$$

نضرب بـ 3:

$$3u_{n+1} \le 3u_n$$

نطرح 4:

$$3u_{n+1} - 4 \le 3u_n - 4$$
$$u_{n+2} \le u_{n+1}$$

فالقضية صحيحة والمتتالية متناقصة.

2- نشكل المتتالية v_n:

$$v_n = 3u_n - 4 - u_n = 2u_n - 4$$

نشكل v_{n+1}:

$$v_{n+1} = 2u_{n+1} - 4 = 2(3u_n - 4) - 4$$
$$= 6u_n - 12 = 3(2u_n - 4) = 3v_n$$
$$v_{n+1} = 3v_n$$

المتتالية هندسية وأساسها $q = 3$ وحدها الأول $v_0 = 2(1) - 4 = -2$.

3- لكتابة الحد العام:

$$v_n = v_0 . q^n = -2(3)^n$$

ولدينا:

$$v_n = 2u_n - 4$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{v_n + 4}{2} = \frac{-2(3)^n + 4}{2} = 2 - 3^n$$

4- لحساب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2 - 3^{+\infty} = -\infty$$

لأن $3 > 1$, المتتالية متباعدة.

5- لدينا:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

نلاحظ أنها مجموع متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $v_0 = -2$ وعدد الحدود $n + 1$:

$$S_n = -2\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 2} = 2(1 - 3^{n+1})$$
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2(1 - 3^{+\infty}) = 2(-\infty) = -\infty$$

لأن $3 > 1$.

التمرين السادس:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \; ; u_0 = 2$$

1- نرمز للقضية بالرمز $E(n)$:

$$E(n): u_n > u_{n+1} > 1$$

نثبت صحة القضية $E(0)$:

$$u_0 > u_1 > 1$$
$$2 > \frac{3}{2} > 1$$

محققة.

نفرض صحة القضية $E(n)$:

$$E(n): u_n > u_{n+1} > 1$$

نثبت صحة القضية $E(n+1)$:

$$E(n+1): u_{n+1} > u_{n+2} > 1$$

البرهان: نعرف تابع على المجال $]0, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x}$$

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x - 2x + 1}{x} = \frac{1}{x} > 0$$

متزايد.

لدينا من الفرض:

$$u_n > u_{n+1} > 1$$

نصور الأطراف:

$$u_{n+1} > u_{n+2} > 1$$

فالقضية صحيحة، ونجد منها أيضاً $u_n > u_{n+1}$ فالمتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

2- لدينا:

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{u_n} - 1} = \frac{1}{\frac{2u_n - 1 - u_n}{u_n}} = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = 1 = r$$

$$v_0 = \frac{1}{2 - 1} = 1$$

3- نعوض في قانون الحد العام:

$$v_n = v_0 + n.r = 1 + n$$

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1 + v_n}{v_n} = \frac{n+2}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$

4- نشكل الفرق:

$$u_n - 2 = \frac{n+2}{n+1} - 2 = \frac{n + 2 - 2n - 2}{n+1} = \frac{-n}{n+1} < 0$$

$$u_n - 2 < 0$$

$$u_n < 2$$

محدودة من الأدنى بالعدد 2, نعم هي محدودة:

$$1 < u_n < 2$$

5- لإثبات:

$$u_n < v_n$$

$$u_n - v_n < 0$$

$$\frac{n+2}{n+1} - (n+1) < 0$$

$$\frac{n + 2 - (n+1)^2}{n+1} < 0$$

$$\frac{n + 2 - (n^2 + 2n + 1)}{n+1} < 0$$

$$\frac{n + 2 - n^2 - 2n - 1}{n+1} < 0$$

$$\frac{-n^2 - n + 1}{n+1} < 0$$

$$-\frac{(n^2 + n - 1)}{n+1} < 0$$

محققة وبالتالي $u_n < v_n$.